

Научная статья

УДК 514.764.2

doi: 10.17223/19988621/89/2

MSC: 53B05

Псевдориманова метрика на многообразии приложенных ковекторов

Михаил Степанович Бухтяк

Томский государственный университет, Томск, Россия, bukhtyak@mail.ru

Аннотация. На основе трехмерного аффинного пространства A_3 строится шестимерное точечно-векторное пространство E_6 , точка которого – упорядоченная пара точки из A_3 и ковектора, а вектор – упорядоченная пара из вектора и ковектора. В E_6 имеется псевдоевклидова метрика сигнатуры $(3,3)$. Решается задача об отыскании всех аффинно-полуинвариантных псевдоримановых метрик в касательном расслоении данного пространства. Показано, что отыскание полуинвариантных метрик приводит к нахождению инвариантных метрик, и таких метрик имеется однопараметрическое семейство, включающее как тривиальный случай и псевдоевклидову метрику. Для указанного семейства метрик построена связность Леви-Чивита и дано описание геодезических линий этой связности в общем случае.

Ключевые слова: аффинное пространство, точечно-векторное пространство, ковектор, псевдоевклидова метрика, псевдориманова метрика, связность Леви-Чивита, геодезические линии

Для цитирования: Бухтяк М.С. Псевдориманова метрика на многообразии приложенных ковекторов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 17–31. doi: 10.17223/19988621/89/2

Original article

Pseudo-Riemannian metrics on a variety of applied covectors

Mikhail S. Bukhtyak

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, bukhtyak@mail.ru

Abstract. Based on the three-dimensional affine space A_3 , a six-dimensional point-vector space E_6 is constructed, where its point is an ordered pair consisting of a point from A_3 and a covector, and its vector is an ordered pair consisting of a vector and a covector. There is a pseudo-Euclidean metrics of signature in E_6 $(3,3)$. The problem of finding all affine semi-invariant pseudo-Riemannian metrics in the tangent fibration of a given space is solved. It is shown that finding semi-invariant metrics leads to finding invariant metrics, and there is a one-parameter family of such metrics (including the pseudo-Euclidean metrics as the trivial case). For the given family of metrics, the Levi-Civita connection is constructed, and a description of geodesic lines of this connection in the general case is given.

Keywords: affine space, point-vector space, covector, pseudo-Euclidean metrics, pseudo-Riemannian metrics, Levi-Civita connection, geodesic lines

For citation: Bukhtyak, M.S. (2024) Pseudo-Riemannian metrics on a variety of applied covectors. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 17–31. doi: 10.17223/19988621/89/2

Вступительные замечания

Понятие инварианта – одно из центральных в различных разделах математики и физики. Отметим, что в разных контекстах проявляются смысловые отличия. Так, в [1] по существу определена геометрия как теория инвариантов некоторой группы преобразований пространства. В [2] помещено исследование (и обзор) инвариантов групп, приводящих к геометриям в смысле Клейна. Обзорное изложение классической (на 1960-е гг.) теории инвариантов – в [3]. Инвариантность как групповая симметрия существенно используется в [4].

Пусть в некотором пространстве задана геометрия некоторой группы Γ , то есть система S объектов и отношений, инвариантных относительно этой группы. Если задать некий геометрический образ, допускающий описание в рамках системы S , то его Γ -инвариантность не нуждается в отдельном подтверждении. Так, отношение P между фигурами точечно-векторного пространства, описываемое в терминах коллинеарности и простого отношения коллинеарной тройки точек, заведомо инвариантно относительно полной аффинной группы. Имея это в виду, говорят, что отношение P «имеет геометрический смысл». Пример построения геометрической теории на этой основе можно видеть в [5].

Тензорное исчисление располагает удобным аппаратом для построения инвариантов (относительно допустимых замен координат), например полная свертка.

Исчисление внешних дифференциальных форм (метод внешних форм Картана) [6] есть в значительной своей части теория совместности систем пфаффовых уравнений. В соединении с методом подвижного репера оно позволяет строить (как правило) канонический репер геометрического образа, а элементы такого репера выражаются через инварианты данного образа. Неканонизированный (не прошедший специализацию до конца) репер зависит от параметров, задающих исследуемый образ (т.е. главных параметров), и от тех, которые управляют смещением репера при фиксированных главных параметрах (так называемые вторичные параметры). Метод Картана позволяет оценить влияние вторичных параметров, что способствует отысканию инвариантных либо относительно инвариантных величин. Примеры имеются, например, в [6–8].

В данной работе строится точечно-векторное пространство [9] приложенных ковекторов. Это пространство естественным образом наделяется структурой дифференцируемого многообразия. Решается вопрос о нетривиальной псевдоевклидовой метрике. Строится связность Леви-Чивита и интегрируются уравнения геодезических. Указанное пространство построено подобно другим пространствам, рассмотренным автором [10–12].

Существенную роль в конструкциях данной статьи играют метод подвижного репера и метод внешних форм Картана. Все функции предполагаются достаточно гладкими.

1. Определение пространства E_6

Рассмотрим трехмерное аффинное пространство A_3 , U – его точечное множество, V – пространство векторов в A_3 с базисом $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и V^* – сопряженное ему пространство ковекторов с базисом $e^* = (\underline{e}^1, \underline{e}^2, \underline{e}^3)$, дуальным для базиса e . Пусть R – репер в A_3 :

$$R = (\bar{M}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3).$$

$GA(3)$ – полная аффинная группа, действующая в пространстве A_3 . Если $g \in GA(3)$, то

$$g(\bar{M}) = \bar{M} + a^i \bar{e}_i, \quad g(\bar{e}_i) = \bar{e}_i = A_i^j \bar{e}_j, \quad g(\underline{e}^i) = \underline{e}^i = A_i^j \underline{e}^j.$$

Кроме того, рассмотрим следующие объекты:

$$U_6 = U \times V^*$$

(элементами множества U_6 являются, таким образом, упорядоченные пары вида (M, \underline{v}) , где $M \in U$, $\underline{v} \in V^*$) и $V \oplus V^*$.

Рассмотрим далее отображение $\Psi: U_6 \times U_6 \rightarrow V \oplus V^*$, заданное следующим правилом: если $x = (A, \underline{v}) \in U_6$ и $y = (B, \underline{u}) \in U_6$, то

$$\Psi(x, y) = (\overline{AB}, \underline{u} - \underline{v}).$$

Примем для $\Psi(x, y)$ обозначение \overline{xy} . Без труда проверяется, что тройка $(U_6, V \oplus V^*, \Psi)$ удовлетворяет следующим двум аксиомам:

1. Для каждого элемента $x \in U_6$ и каждого вектора $\bar{\alpha} \in V \oplus V^*$ найдется единственный элемент $y \in U_6$ такой, что $\overline{xy} = \bar{\alpha}$.

2. Если x, y, z принадлежат U_6 , то $\overline{xy} + \overline{yz} = \overline{xz}$.

Следовательно, построенная нами структура $(U_6, V \oplus V^*, \Psi)$ является 6-мерным точно-векторным пространством [9].

Определим действие группы $GA(3)$ на U_6 и на $V \oplus V^*$ следующими правилами. Если $(A, \underline{v}) \in U_6$, $(\bar{a}, \underline{b}) \in (V \oplus V^*)$, то

$$g(A, \underline{v}) = (gA, g\underline{v}), \quad g(\bar{a}, \underline{b}) = (g\bar{a}, g\underline{b}). \quad (1)$$

Заметим, что действие g на U есть параллельный перенос, а действие g на $(V \oplus V^*)$ – невырожденное линейное преобразование. Это верно и для действия g на \underline{v} .

Обозначим π_i ($i=1, 2$) проекцию множества U_6 на его i -ю компоненту. Соответственно, π_i^* – проекция прямой суммы $V \oplus V^*$ на i -ю компоненту. Из (1) вытекает коммутативность следующих диаграмм:

$$\begin{array}{ccccc} U_6 & \xrightarrow{\pi_1} & U & & U_6 & \xrightarrow{\pi_2} & V^* & & V \oplus V^* & \xrightarrow{\pi_1^*} & V \\ g \downarrow & & \downarrow g, & & g \downarrow & & \downarrow g, & & g \downarrow & & \downarrow g, \\ U_6 & \xrightarrow{\pi_1} & U & & U_6 & \xrightarrow{\pi_2} & V^* & & V \oplus V^* & \xrightarrow{\pi_1^*} & V \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V \oplus V^* & \xrightarrow{\pi_2} & V^* \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ V \oplus V^* & \xrightarrow{\pi_2} & V^* \end{array}$$

Репер в этом пространстве зададим объектом

$$R = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^3), \quad (2)$$

где

$$\mathbf{x} = (\bar{M}, \underline{e}^3), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i = (\bar{e}_i, \bar{0}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}^i = (\bar{0}, \underline{e}^i). \quad (3)$$

Определение. Построенное нами выше шестимерное точечно-векторное пространство, на котором определено действие группы G преобразований пространства A_3 (формулами (1)), называется пространством E_6 .

Заметим, что действие группы $GA(3)$ не порождает в пространстве E_6 действие подгруппы полной аффинной группы шестимерного точечно-векторного пространства, поскольку действие группы $GA(3)$ на начало репера не есть параллельный перенос. Это объясняет, почему E_6 названо точечно-векторным пространством (а не аффинным).

Запишем формулы преобразования репера.

$$\mathbf{x}' = (\bar{M}, \underline{e}^3)' = (\bar{M} + a^i \bar{e}_i, A_1^3 \underline{e}^1 + A_2^3 \underline{e}^2 + A_3^3 \underline{e}^3), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{i'} = A_i^j \boldsymbol{\varepsilon}_j, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{i'} = A_j^i \boldsymbol{\varepsilon}^j.$$

Матрица преобразования базиса имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1^{1'} & A_2^{1'} & A_3^{1'} \\ 0 & 0 & 0 & A_1^{2'} & A_2^{2'} & A_3^{2'} \\ 0 & 0 & 0 & A_1^{3'} & A_2^{3'} & A_3^{3'} \end{pmatrix}$$

Для вектора $\boldsymbol{\alpha} = (\bar{a}, \underline{b}) \in (V \oplus V^*)$ определяем скалярный квадрат правилом

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = \langle \bar{a}, \underline{b} \rangle = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3. \quad (4)$$

Ясно, что тем самым мы фиксируем в E_6 псевдоевклидову метрику сигнатуры (3,3).

2. Подвижной репер в пространстве E_6

В пространстве A_3 подвижной репер $\{M, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ имеет деривационные формулы

$$d\bar{M} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_j^i \bar{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (5)$$

где ω_j^i – формы Пфаффа [6], подчиненные уравнениям структуры

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_k^i, \quad d\omega_j^i = \omega_k^j \wedge \omega_k^i \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (6)$$

в пространстве E_6 рассматриваем репер (2),

$$R = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^3), \quad (7)$$

элементы которого определены в (3).

Поскольку для векторов пространства E_6 операции определены покомпонентно, то деривационные формулы подвижного репера (7) имеют (в силу (5)) вид:

$$\begin{aligned} dx &= \omega^i \mathbf{e}_i - \omega_i^3 \mathbf{e}^i, \\ d\mathbf{e}_i &= \omega_i^j \mathbf{e}_j, \quad d\mathbf{e}^i = -\omega_i^j \mathbf{e}^j. \end{aligned}$$

Базовая форма пространства E_6 , рассматриваемого как дифференцируемое многообразие, есть матричнозначная форма

$$\mathfrak{g} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3, -\omega_1^3, -\omega_2^3, -\omega_3^3) \equiv (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6). \quad (8)$$

Слоевая форма имеет вид:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^1 & -\omega_2^1 & -\omega_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & -\omega_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & -\omega_3^3 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Поскольку пространство E_6 точно-векторное, то базовая форма \mathfrak{g} и слевая форма Θ определяют на нашем пространстве локально плоскую аффинную связность [17], что, впрочем, подтверждается и непосредственным вычислением с использованием (6)–(9):

$$d\mathfrak{g} - \mathfrak{g} \wedge \Theta = 0, \quad d\Theta - \Theta \wedge \Theta = 0.$$

Псевдоевклидова метрика (4) индуцирует инфинитезимальную метрику

$$ds^2 \equiv \langle d\bar{M}, d\bar{e}^3 \rangle = -(\omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3 + \omega^3 \omega_3^3). \quad (10)$$

Матрица соответствующей квадратичной дифференциальной формы имеет вид:

$$g = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Метрика (10) – псевдоевклидова метрика кокасательного пространства, ее сигнатура (3,3). Без труда проверяется, что обнаруженная нами связность ∇ пространства E_6 является связностью Леви-Чивита для инфинитезимальной метрики (10). В самом деле, из (9) и (11) видно, что

$$\nabla g = dg - \theta g - (\theta g)^T = 0.$$

Пространство E_6 со связностью ∇ есть плоское пространство [14]. Ниже мы построим на E_6 1-семейство инфинитезимальных метрик псевдориманова типа (c – параметр семейства), для которых связность Леви-Чивита при $c \neq 0$ уже не плоская, а при $c = 0$ получаем метрику (10).

3. Нетривиальная псевдориманова метрика на E_6

Построенная выше инфинитезимальная квадратичная метрика является в очевидном смысле тривиальной, поскольку истолковывается как стандартная псевдоевклидова метрика (4), перенесенная в кокасательное пространство. В этой связи естественным выглядит вопрос о том, какие вообще квадратичные формы от базовых пфаффовых форм (8) инвариантны для группы, действующей в пространстве E_6 . Это задача аналогична задаче, поставленной и решенной в [15]. В указанной статье речь шла о полуинвариантных однородных полиномах второго порядка от базовых форм. Здесь мы ставим ту же самую задачу. Неожиданно окажется, что найденное семейство решений не исчерпывается (10), а несколько шире.

Вторичные формы [6] для подвижного репера определяются в нашем случае формулами

$$\pi_i^j = \omega_i^j \Big|_{\omega^i = 0, \omega_j^3 = 0} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Таким образом, смещением репера при фиксированном элементе управляют формы

$$P = (\pi_1^1, \pi_2^1, \pi_3^1, \pi_1^2, \pi_2^2, \pi_3^2) \equiv (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5, \lambda^6). \quad (12)$$

Матрица вторичных форм

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_1^1 & \pi_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_2^1 & \pi_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_3^1 & \pi_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi_1^1 & -\pi_2^1 & -\pi_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi_1^2 & -\pi_2^2 & -\pi_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Пространство E_6 допускает однопараметрическое семейство $GA(3)$ – полуинвариантных невырожденных квадратичных дифференциальных форм с постоянными коэффициентами.

Доказательство. Среди квадратичных форм

$$\Psi = a_{ij} \varphi^i \varphi^j, \quad (i, j = 1, \dots, 6) \quad (13)$$

с постоянными коэффициентами найдем те, которые полуинвариантны для группы преобразований, определяемой формами (12) и имеют максимальный ранг. Используя матрицу коэффициентов

$$L = (a_{ij}), \quad (14)$$

запишем условие относительной инвариантности искомого полинома в виде:

$$\Psi_\delta(L) \equiv \delta L - \Pi L - (\Pi L)^T = \Xi L. \quad (15)$$

Множитель при L есть линейная комбинация вторичных форм:

$$\Xi = x_i \lambda^i, \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (16)$$

С учетом постоянства коэффициентов запишем условие (15)

$$\Pi L + (\Pi L)^T + \Xi L = 0. \quad (17)$$

Матричное уравнение (17), записанное покомпонентно, дает систему уравнений

$$\begin{aligned}
 & 2\pi_1^1 a_{11} + 2\pi_1^2 a_{12} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{11} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{12} + \pi_1^2 a_{22} + \pi_2^1 a_{11} + \pi_2^2 a_{12} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{12} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{13} + \pi_1^2 a_{23} + \pi_3^1 a_{11} + \pi_3^2 a_{12} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{13} = 0, \\
 & \pi_1^2 a_{24} - \pi_2^1 a_{15} - \pi_3^1 a_{16} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{14} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{15} + \pi_1^2 a_{25} - \pi_2^1 a_{14} - \pi_2^2 a_{15} - \pi_3^1 a_{16} + \\
 & + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{15} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{16} + \pi_1^2 a_{26} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{16} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{12} + \pi_1^2 a_{22} + \pi_2^1 a_{11} + \pi_2^2 a_{12} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{12} = 0, \\
 & 2\pi_2^1 a_{12} + 2\pi_2^2 a_{22} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{22} = 0, \\
 & \pi_2^1 a_{13} + \pi_2^2 a_{23} + \pi_3^1 a_{12} + \pi_3^2 a_{22} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{23} = 0, \\
 & \pi_2^1 a_{14} + \pi_2^2 a_{24} - \pi_1^1 a_{24} - \pi_2^1 a_{25} - \pi_3^1 a_{26} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{24} = 0, \\
 & \pi_2^1 a_{15} - \pi_2^2 a_{24} - \pi_3^1 a_{26} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{25} = 0, \\
 & \pi_2^1 a_{16} + \pi_2^2 a_{26} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{26} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{13} + \pi_1^2 a_{23} + \pi_3^1 a_{11} + \pi_3^2 a_{12} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{13} = 0, \\
 & \pi_2^1 a_{13} + \pi_2^2 a_{23} + \pi_3^1 a_{12} + \pi_3^2 a_{22} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{23} = 0, \\
 & 2\pi_3^1 a_{13} + 2\pi_3^2 a_{23} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{33} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{14} + \pi_2^1 a_{24} - \pi_1^1 a_{34} - \pi_2^1 a_{35} - \pi_3^1 a_{36} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{34} = 0, \\
 & \pi_3^1 a_{15} + \pi_3^2 a_{25} - \pi_1^1 a_{34} - \pi_2^1 a_{35} - \pi_3^1 a_{36} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{35} = 0, \\
 & \pi_3^1 a_{16} + \pi_3^2 a_{26} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{36} = 0, \\
 & \pi_1^2 a_{24} - \pi_2^1 a_{15} - \pi_3^1 a_{16} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{14} = 0, \\
 & \pi_2^1 a_{14} + \pi_2^2 a_{24} - \pi_1^1 a_{24} - \pi_2^1 a_{25} - \pi_3^1 a_{26} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{24} = 0, \\
 & \pi_3^1 a_{14} + \pi_3^2 a_{24} - \pi_1^1 a_{34} - \pi_2^1 a_{35} - \pi_3^1 a_{36} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{34} = 0, \\
 & -2\pi_1^1 a_{44} - 2\pi_2^1 a_{45} - 2\pi_3^1 a_{46} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{44} = 0, \\
 & -\pi_1^1 a_{45} - \pi_2^1 a_{55} - \pi_3^1 a_{56} - \pi_1^2 a_{44} - \pi_2^2 a_{45} - \pi_3^2 a_{46} + \\
 & + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{45} = 0, \\
 & -\pi_1^1 a_{46} - \pi_2^1 a_{56} - \pi_3^1 a_{66} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{46} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{15} + \pi_1^2 a_{25} - \pi_1^1 a_{14} - \pi_2^1 a_{15} - \pi_3^1 a_{16} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{15} = 0, \\
 & \pi_2^1 a_{15} - \pi_1^1 a_{24} - \pi_3^1 a_{26} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_4^1 + x_5 \pi_5^1 + x_6 \pi_6^1) a_{25} = 0,
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 &\pi_{3,1}a_{1,5} + \pi_3^2a_{25} - \pi_1^2a_{34} - \pi_2^2a_{35} - \pi_3^2a_{36} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{35} = 0, \\
 &\quad -\pi_1^1a_{45} - \pi_2^1a_{55} - \pi_3^1a_{56} - \pi_1^2a_{44} - \pi_2^2a_{45} - \pi_3^2a_{46} + \\
 &\quad + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{45} = 0, \\
 &-2\pi_1^2a_{45} - 2\pi_2^2a_{55} - 2\pi_3^2a_{56} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{55} = 0, \\
 &\quad -\pi_1^2a_{46} - \pi_2^2a_{56} - \pi_3^2a_{66} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{56} = 0, \\
 &\quad \pi_1^1a_{16} + \pi_2^1a_{26} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{16} = 0, \\
 &\quad \pi_2^1a_{16} + \pi_2^2a_{26} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{26} = 0, \\
 &\quad \pi_3^1a_{16} + \pi_3^2a_{26} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{36} = 0, \\
 &\quad -\pi_1^1a_{46} - \pi_2^1a_{56} - \pi_3^1a_{66} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{46} = 0, \\
 &\quad -\pi_1^2a_{46} - \pi_2^2a_{56} - \pi_3^2a_{66} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{56} = 0, \\
 &\quad (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{66} = 0.
 \end{aligned}$$

Уравнения (18) не должны налагать ограничений на вторичные формы π_i^j . Следовательно, все (приведенные) коэффициенты при этих формах должны быть нулями. Это приводит к 216 уравнениям на x_i и a_{ij} . Выписывать их нет необходимости. Заметим, что допущение $x_i \neq 0$ имеет следствием

$$a_{14} = a_{22} = a_{23} = a_{25} = a_{26} = a_{33} = a_{35} = a_{36} = a_{55} = a_{56} = a_{66} = 0,$$

что противоречит невырожденности матрицы (14). Таким образом, $x_i = 0$. Подставив в (18), заключаем, что

$$a_{12} = a_{13} = a_{15} = a_{16} = a_{24} = a_{34} = a_{45} = a_{46} = 0.$$

Продолжая этот анализ (для существенно упрощившейся системы (18)) мы приходим к результату

$$x_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

и матрица искомого полинома (определенного с точностью до постоянного коэффициента) имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где c – произвольная вещественная константа. ■

Сигнатура квадратичной формы (13) при любом c равна (3,3). Геометрический смысл (19) таков: если $\mathbf{x} = (\bar{M}, \underline{e}^3)$, то для инфинитезимальной метрики, заданной тензором (19), имеем

$$d\mathbf{x}^2 = -2\omega^i \omega_j^3 + (\omega^3)^2 = 2 \langle d\bar{M}, d\underline{e}^3 \rangle + \langle d\bar{M}, \underline{e}^3 \rangle^2. \quad (20)$$

Отметим и никак не очевидный факт, что в разложении (16) все коэффициенты x_i оказались (с необходимостью) нулями. Это означает, что полученное 1-семейство квадратичных форм не только полуинвариантно, но инвариантно. Полученный результат сильнее, нежели анонсированный в формулировке теоремы.

4. Связность Леви-Чивита в пространстве E_6

Действуя обычным путем [7, 16], для метрики (20) находим матрицу связности Леви-Чивита

$$\bar{\Theta} = \begin{pmatrix} \omega_1^1 + \frac{c}{2}\omega^3 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & 0 & 0 & \frac{c}{2}\omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 + \frac{c}{2}\omega^3 & \omega_2^3 & 0 & 0 & \frac{c}{2}\omega_2^3 \\ \omega_3^1 + \frac{c}{2}\omega^1 & \omega_3^2 + \frac{c}{2}\omega^2 & \omega_3^3 + c\omega^3 & \frac{c}{2}\omega_1^3 & \frac{c}{2}\omega_2^3 & c^2\omega^3 + c\omega_3^3 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^1 - \frac{c}{2}\omega^3 & -\omega_2^1 & -\omega_3^1 - \frac{c}{2}\omega^1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 & -\omega_2^2 - \frac{c}{2}\omega^3 & -\omega_3^2 - \frac{c}{2}\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & -c\omega^3 - \omega_3^3 \end{pmatrix}.$$

Разность матриц $\bar{\Theta} - \Theta$ есть матрица, отвечающая тензору аффинной деформации [17]:

$$\bar{\Theta} - \Theta = \begin{pmatrix} \frac{c}{2}\omega^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{2}\omega_1^3 \\ 0 & \frac{c}{2}\omega^3 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{2}\omega_2^3 \\ \frac{c}{2}\omega^1 & \frac{c}{2}\omega^2 & c\omega^3 & \frac{c}{2}\omega_1^3 & \frac{c}{2}\omega_2^3 & c^2\omega^3 + c\omega_3^3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c}{2}\omega^3 & 0 & -\frac{c}{2}\omega^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{c}{2}\omega^3 & -\frac{c}{2}\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c\omega^3 \end{pmatrix}.$$

Тензор аффинной деформации нулевой при $c = 0$, что вполне ожидаемо. Отметим, что связность Леви-Чивита при $c \neq 0$ имеет ненулевую кривизну.

5. Геодезические линии связности Леви-Чивита

Теорема 2. Геодезическая линия связности Леви-Чивита в общем случае есть 1-семейство вида (\bar{M}, \underline{v}) , где траектория точки \bar{M} есть (локально) прямая, а 1-семейство ковекторов параллельно двумерному линейному подпространству в V^* .

Доказательство. Поскольку на дифференцируемом многообразии E_6 базовая форма ϑ и слоевая форма $\bar{\Theta}$ определяют аффинную связность, то уравнения геодезических имеют [7] вид:

$$d\varphi^I + \varphi^J \bar{\Theta}_J^I - \lambda \varphi^I = 0, \quad (I, J = \overline{1, 6}). \quad (21)$$

где λ – некоторая форма Пфаффа. Образующий элемент нашего многообразия – упорядоченная пара (вершина репера в A_3 и ковектор \underline{e}^3). Свернем (21) с базисом (2) и запишем эти уравнения для каждой из двух компонент пары в отдельности. Получаем систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} d^2 \bar{M} + c \langle d\bar{M}, \underline{e}^3 \rangle d\bar{M} &= \lambda d\bar{M}, \\ d^2 \underline{e}^3 - c \langle d\bar{M}, \underline{e}^3 \rangle d\underline{e}^3 - c \langle d\bar{M}, d\underline{e}^3 \rangle \underline{e}^3 + c^2 \langle d\bar{M}, \underline{e}^3 \rangle^2 \underline{e}^3 &= \lambda d\underline{e}^3. \end{aligned}$$

Пусть t – параметр геодезической линии

$$\bar{M} = \bar{r}(t), \quad \underline{e}^3 = \underline{v}(t).$$

Тогда, следуя [7] и полагая $\lambda = d \ln u(t)$, запишем уравнения, выполняющиеся вдоль геодезической, в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} + c \left\langle \frac{d\bar{r}}{dt}, \underline{v} \right\rangle \frac{d\underline{v}}{dt} &= \frac{d \ln u(t)}{dt} \frac{d\bar{r}}{dt}, \\ \frac{d^2 \underline{v}}{dt^2} - c \left\langle \frac{d\bar{r}}{dt}, \underline{v} \right\rangle \frac{d\underline{v}}{dt} - c \left\langle \frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d\underline{v}}{dt} \right\rangle \underline{v} + c^2 \left\langle \frac{d\bar{r}}{dt}, \underline{v} \right\rangle^2 \underline{v} &= \frac{d \ln u(t)}{dt} \frac{d\bar{r}}{dt}. \end{aligned} \quad (22)$$

Действуя, как обычно (например, [7]), переходим к параметру

$$s(t) = C_1 + C_2 \int_{t_0}^t u(t) dt,$$

и уравнения (22) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} + c \left\langle \frac{d\bar{r}}{ds}, \underline{v} \right\rangle \frac{d\bar{r}}{ds} &= \bar{0}, \\ \frac{d^2 \underline{v}}{ds^2} - c \left\langle \frac{d\bar{r}}{ds}, \underline{v} \right\rangle \frac{d\underline{v}}{ds} - c \left\langle \frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d\underline{v}}{ds} \right\rangle \underline{v} + c^2 \left\langle \frac{d\bar{r}}{ds}, \underline{v} \right\rangle^2 \underline{v} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Введем в рассмотрение (достаточно гладкую) функцию

$$f(s) = \left\langle \frac{d\bar{r}}{ds}, \underline{v} \right\rangle. \quad (24)$$

Система (23) переписется в виде:

$$\frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} + cf(s) \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{0}, \quad (25)$$

$$\frac{d^2 \underline{v}}{ds^2} - cf(s) \frac{d\underline{v}}{ds} - c \left\langle \frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d\underline{v}}{ds} \right\rangle \underline{v} + c^2 (f(s))^2 \underline{v} = 0. \quad (26)$$

Ясно, что линия $L: \bar{R} = \bar{r}(s)$ – прямая (локально). Из (26) видно, что

$$\underline{v} \wedge \frac{d\underline{v}}{ds} \wedge \frac{d^2 \underline{v}}{ds^2} = 0.$$

Следовательно, 1-семейство ковекторов параллельно двумерному линейному подпространству в V^* . ■

Уравнения (23) интегрируются в элементарных функциях. Именно, зададим в A_3 неподвижный репер $(O, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$ так, что $\bar{E}_3 \parallel L$. Относительно нашего репера (и взаимного репера $(O, \bar{E}^1, \bar{E}^2, \bar{E}^3)$) имеем

$$\bar{r} = (0, 0, x_3(s))^T, \quad \underline{v} = (y_1(s), y_2(s), y_3(s)).$$

Уравнение (25) принимает вид:

$$\frac{d^2}{ds^2} x_3(s) + cf(s) \frac{d}{ds} x_3(s) = 0,$$

и его решение

$$x_3(s) = C_1 + C_2 \int e^{\int -cf(s) ds} ds.$$

Из (24) определяем, что

$$y_3(s) = \frac{f(s)}{C_2 e^{\int -cf(s) ds}}. \quad (27)$$

Уравнение (26), записанное для трех его компонент, приводит к трем скалярным уравнениям, и в третьей компоненте имеем уравнение

$$\frac{d^2}{ds^2} f(s) + cf(s) \frac{d}{ds} f(s) = 0,$$

семейство решений которого состоит из двух множеств: первое – $f(s) \equiv const$ (мы исключаем его из рассмотрения), второе же содержит функции вида:

$$f(s) = \frac{2 \tanh(a_1(s + a_2)) a_1}{c}. \quad (28)$$

С учетом (27) находим, что

$$y_3(s) = \frac{-2 \tanh(a_1(s + a_2)) a_1}{c \left(1 - (\tanh(a_1(s + a_2)))^2\right) C_2}.$$

Для первых двух компонент уравнения (26) с учетом (28) получаем уравнения

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{d^2}{ds^2} y_1(s) \right) (\cosh(a_1(s + a_2)))^2 + \\ & + 2 \sinh(a_1(s + a_2)) a_1 \left(\frac{d}{ds} y_1(s) \right) \cosh(a_1(s + a_2)) + 2a_1^2 y_1(s) = 0, \\ & \left(\frac{d^2}{ds^2} y_2(s) \right) (\cosh(a_1(s + a_2)))^2 - \\ & - 2 \sinh(a_1(s + a_2)) a_1 \left(\frac{d}{ds} y_2(s) \right) \cosh(a_1(s + a_2)) - 2a_1^2 y_2(s) = 0. \end{aligned}$$

Их общие решения

$$\begin{aligned} y_1(s) &= a_3 \sqrt{\cosh(2a_1(s + a_2)) + 1} \sinh(a_1 s) + a_4 \sqrt{\cosh(2a_1(s + a_2)) + 1} \cosh(a_1 s), \\ y_2(s) &= a_5 \sqrt{\cosh(2a_1(s + a_2)) + 1} \sinh(a_1 s) + a_6 \sqrt{\cosh(2a_1(s + a_2)) + 1} \cosh(a_1 s). \end{aligned}$$

Для первой компоненты имеем

$$\bar{r} = \left(0, 0, C_1 - \frac{\tanh(a_1(s+a_2))C_2}{a_1} \right).$$

Для второй компоненты

$$\underline{v} = \left(y_1(s), y_2(s), \frac{-2 \tanh(a_1(s+a_2))a_1}{c(1 - (\tanh(a_1(s+a_2)))^2)} C_2 \right).$$

Надлежащим выбором констант, переходом к новой переменной и переобозначениями приводим последние формулы к виду:

$$\bar{R} = [0, 0, \tanh(S) p_5],$$

$$\underline{V} = \left(y_1(S), y_1(S), 2 \frac{2 \tanh(S)}{(1 - (\tanh(S))^2)} p_5 \right),$$

$$y_1(S) = p_1 \sqrt{\cosh(2S) + 1} \sinh(S) + p_2 \sqrt{\cosh(2S) + 1} \cosh(S),$$

$$y_2(S) = p_3 \sqrt{\cosh(2S) + 1} \sinh(S) + p_4 \sqrt{\cosh(2S) + 1} \cosh(S).$$

6. Векторная интерпретация геодезических линий связности Леви-Чивита

Геометрическим образом, сопоставляемым приложенному ковектору, принято, согласно [13], полагать упорядоченную пару гиперплоскостей аффинного пространства (в нашем случае – просто плоскостей), что неудобно для изображения на рисунках. Для преодоления затруднения мы будем ковектору $\underline{V}(S)$ сопоставлять вектор \bar{V} с теми же компонентами¹.

Заметим, что определитель, составленный из $\underline{V}, \frac{d\underline{V}}{dS}, \frac{d^2\underline{V}}{dS^2}$, тождественно равен нулю. Это означает, что в рамках приведенного выше сопоставления все векторы \bar{V} полученного 1-семейства окажутся компланарными, и прямые – носители этих векторов – образуют цилиндроид. Если векторы \bar{V} откладывать из соответствующих точек отрезка, пробегаемого точкой $R(S)$, то получится картина, представление о которой дает рис. 1 (он составлен для $[p_1, p_2, p_3, p_4, p_5] = [1, 2, -3, 4, 6]$ и $c = 1$).

Направляющей плоскостью цилиндриоида служит плоскость

$$p_4 \sqrt{2} x_1 - p_2 \sqrt{2} x_2 + (p_2 p_3 - p_1 p_4) c p_5 x_3 = 0.$$

При условии

$$p_1 p_4 - p_2 p_3 = 0$$

цилиндроид вырождается в плоское семейство лучей, пересекающих прямую AB .

¹ Заметим, что построения этого раздела совершаются в некотором неподвижном репере. Следовательно, вопрос об инвариантности соответствия «ковектор–вектор» не возникает.

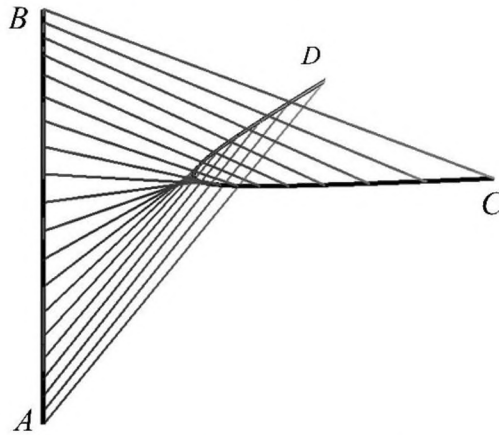


Рис. 1. AB – траектория точки R ; CD – линия концевых точек векторов, отложенных из текущей точки R

Fig. 1. AB is the trajectory of the point R ; CD is the line between the endpoints of the vectors, drawn from the current point R

Исключенный из рассмотрения случай $f(s) \equiv const$ приводит к тривиальным решениям системы (23).

Заключение

Точно-векторное пространство E_6 рассматривалось как пространство представления полной аффинной группы трехмерного пространства $GA(3)$. Структура, индуцированная данной группой, не совпадает со структурой шестимерного аффинного пространства. Пространство E_6 естественным образом наделено скалярным квадратом псевдоевклидова типа. В касательном пространстве имеется 1-семейство псевдоримановых метрик (параметр – c), для которого псевдоевклидова метрика является вырожденным элементом семейства. Геодезические линии заданы дифференциальными уравнениями, содержащими этот параметр, эти уравнения проинтегрированы. Отметим, что замечен интерес к цилиндридам со стороны специалистов, работающих в машиностроении, архитектуре и строительстве [18].

Список источников

1. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа») // Об основаниях геометрии : сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей : к столетию со дня смерти Лобачевского / ред. и вступ. ст. А.П. Нордена. М. : Гостехиздат, 1956. С. 399–434.
2. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. М. : ГИТТЛ, 1947. 404 с.
3. Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов. М. : Мир, 1974. 280 с.
4. Михайличенко Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии // Доклады РАН. 1996. Т. 348, № 1. С. 22–24.
5. Щербаков Р.Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск : Изд-во ТГУ, 1960.

6. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.–Л. : ГИТТЛ, 1948. 432 с.
7. Акивис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин : Калинин. гос. ун-т, 1977. 83 с.
8. Фиников С.П. Теория конгруэнций. М. : ГИТТЛ, 1950. 528 с.
9. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М. : Наука, 1968. 912 с.
10. Бухтыак М.С. Естественная связность на гиперповерхности пространства B_6 // Геометрический сборник. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1990. Вып. 31. С. 51–57.
11. Бухтыак М.С. Интерпретация нуль-пар трехмерного центроаффинного пространства // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск : Том. гос. ун-т, 2001. Вып. 3. С. 39–45.
12. Бухтыак М.С. Замечательные связности на четырехпараметрическом векторном поле // Геометрический сборник. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1988. Вып. 29. С. 84–90.
13. Схоутен И.А. Стройк Д.Джс. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М.–Л. : ГОНТИ, 1939. Т. 1. 181 с.
14. Вольф Джс. Пространства постоянной кривизны. М. : Наука, 1982. 480 с.
15. Бадяева З.П., Бухтыак М.С. Полуинвариантные полиномы второго порядка на многообразии лучей пространства A^3 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 1 (21). С. 5–12.
16. Кобаяси Ш, Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М. : Наука, 1981. Т. 1. 344 с.
17. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М. : Наука, 1976. 432 с.
18. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности: материалы по геометрии 500 поверхностей и информация к расчету на прочность тонких оболочек. М. : Наука, 2006. 544 с.

References

1. Klein F. A comparative review of recent researches in geometry (The Erlangen program) // *Foundations of geometry: classical works on Lobachevsky's geometry and the development of its ideas: on the centenary of Lobachevsky's death* / ed. and introduction by A.P. Norden. Moscow: Gostekhizdat, 1956. pp. 399–434.
2. Weil H. (1939) *The Classical Groups: Their Invariants and Representations*. Princeton: Princeton University Press.
3. Dieudonné J., Carrell J., Mumford D. (1974) *Geometricheskaya teoriya invariantov* [Geometrical theory of invariants]. Moscow: Mir.
4. Mikhailichenko G.G. (1996) Prosteychkiye polimetricheskiye geometrii [The simplest poly-metric geometries]. *Doklady Akademii Nauk*. 348(1). pp. 22–24.
5. Shcherbakov R.N. (1960) *Kurs affinnoy i proyektivnoy differentsial'noy geometrii* [A course of affine and projective differential geometry]. Tomsk: Tomsk State University.
6. Finikov S.P. (1948) *Metod vneshnikh form Kartana* [Cartan's method of exterior forms]. Moscow: GITTL.
7. Akivis M.A. (1977) *Mnogomernaya differentsial'naya geometriya* [Multidimensional differential geometry]. Kalinin: Kalinin State University.
8. Finikov S.P. (1950) *Teoriya kongruentsiy* [Theory of congruences]. Moscow: GITTL.
9. Aleksandrov P.S. (1968) *Lektsii po analiticheskoy geometrii* [Lectures on analytical geometry]. Moscow: Nauka.
10. Bukhtyak M.S (1990) Estestvennaya svyaznost' na giperpoverkhnosti prostranstva B_6 [A natural connection on a hypersurface of the space B_6 . *Geometricheskii Sbornik*. 31. pp. 51–57.
11. Bukhtyak M.S. (2001) Interpretatsiya nul'-par trekhmernogo tsentroaffinnogo prostranstva [Interpretation of null pairs of the three-dimensional centro-affine space]. *Issledovaniya po matematicheskomu analizu i algebre*. 3. pp. 39–45.
12. Bukhtyak M.S. (1988) Zamechatel'nyye svyaznosti na chetyrekhparametricheskom vektornom pole [Remarkable connections on a four-parameter vector field]. *Geometricheskii Sbornik*. 29. pp. 84–90.

13. Schouten J.A. and Struik D.J. (1935) *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*. Bd. 1. Groningen – Batavia: Nordhoff.
14. Wolf J.A. (1972) *Spaces of Constant Curvature*. Berkeley, CA: University of California Press.
15. Badyaeva Z. P., Bukhtyak M. S. (2013) Poluinvariantnyye polinomy vtorogo poryadka na mnogoobrazii luchey prostranstva A^3 [Semi-invariant second-order polynomials on the manifold of rays of the A^3 space]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 21(1). pp. 5–12.
16. Kobayashi S, Nomizu K. (1963) *Foundations of Differential Geometry*. V. 1. New York: Interscience Publishers.
17. Norden A.P. (1976) *Prostranstva affinnoy svyaznosti* [Affine connection spaces]. Moscow: Nauka.
18. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N., Khalabi S.M. (2006) *Analiticheskiye poverkhnosti: materialy po geometrii 500 poverkhnostey i informatsiya k raschetu na prochnost' tonkikh obolochek* [Analytical surfaces: materials on geometry of 500 surfaces and information on thin shell strength calculation]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторе:

Бухтяк Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bukhtyakm@mail.ru

Information about the author:

Bukhtyak Mikhail S. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, associate professor in the Department of Geometry, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University Tomsk, Russia). E-mail: bukhtyakm@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24.10.2023; принята к публикации 03.06.2024

The article was submitted 24.10.2023; accepted for publication 03.06.2024