

Научная статья

УДК 515.12

MSC: 54B15, 54B30, 54B35, 54C05, 54C15, 54C60, 54O30

doi: 10.17223/19988621/89/3

Размерностные свойства подпространств, являющихся граничными множествами пространства вероятностных мер, определенных в бесконечном компакте X

Турсунбай Файзиевич Жураев¹, Камариддин Ризокулович Жувонов²

¹ *Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан, tursunzhuraev@mail.ru*

² *Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства», Ташкент, Узбекистан, qamariddin.j@mail.ru*

Аннотация. Рассматриваются размерностные свойства подпространств пространства $P(X)$ вероятностных мер, для которых определены трансфинитные размерностные функции ind , Ind и $\dim$. Показано, что счетномерность компакта X эквивалентна существованию размерностей $indP_\omega(X)$, $IndP_\omega(X)$, $\dim P_\omega(X)$, $indP_f(X)$, $IndP_f(X)$ и $\dim P_f(X)$ для подпространств $P_\omega(X)$, $P_f(X)$, $P_n(X)$ соответственно. Также замечено, что для любого компактного C -пространства подпространств $P_n(X)$, $P_\omega(X)$, $P_f(X)$ пространства $P(X)$ являются компактными C -пространствами. Если для бесконечного компакта X подпространство $P_\omega(X)$ содержит гильбертов куб Q , то существует число $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, такое что $X^n \times \sigma^{n-1}$ содержит гильбертов куб Q . Далее для бесконечного компакта X выделен ряд подпространств Y компакта $P(X)$, которые являются Q -, ℓ_2 -, ℓ_2^f - и Σ -многообразиями. В частности, для собственного замкнутого подмножества $A \subset X$ подпространства $S_p(A)$ есть ℓ_2 -многообразия для любого $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$), $P(X) \setminus P_n(X)$ есть Q -многообразия, для любого собственного всюду плотного счетного подпространства $A \subset X$ подпространство $P_\omega(A)$ является граничным множеством компакта $P(X)$. Если $P_\omega(X)$ содержит гильбертов куб Q , то подпространство $P_\omega(X)$ гомеоморфно пространству Σ .

Показано, в каких случаях всюду плотные подмножества A пространств $P(X)$, определенных в бесконечном компакте X , являются его граничным множеством, а также выделено, какие всюду плотные подмножества $A \subset P(X)$ и $B \subset P(Y)$ для бесконечных компактов X и Y соответственно пространств $P(X)$ и $P(Y)$ являются одновременно взаимно гомеоморфными.

Ключевые слова: вероятностные меры, размерности ind , Ind , $\dim$, граничные множества

Для цитирования: Жураев Т.Ф., Жуванов К.Р. Размерностные свойства подпространств, являющихся граничными множествами пространства вероятностных мер, определенных в бесконечном компакте X // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 32–50. doi: 10.17223/19988621/89/3

Original article

Subspaces dimensional properties that are boundary sets of the probability measures space, defined in an infinite compactum X

Tursunbay F. Zhuraev¹, Qamariddin R. Zhuvonov²

¹ Tashkent State Pedagogical University named in Nizami,
Tashkent, Uzbekistan, tursunzhuraev@mail.ru

² National Research University "Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers", Tashkent, Uzbekistan, qamariddin.j@mail.ru

Abstract. In this note, we consider dimensional properties of the subspace of probability measure spaces $P(X)$ for which transfinite dimensional functions ind , Ind and dim are defined. It is shown that countability of a compact set X is equivalent to the existence of dimensions $indP_\omega(x)$, $IndP_\omega(x)$, $dimP_\omega(x)$, $indP_f(x)$, $IndP_f(x)$ and $dimP_f(x)$ for the subspaces $P_\omega(x)$, $P_f(x)$, $P_n(x)$ respectively. It is also noted that for any compact C -space of the subspaces $P_n(x)$, $P_\omega(x)$, $P_f(x)$ the space $P(x)$ are compact C -spaces. If for an infinite compact set X the subspace $P_\omega(x)$ contains the Hilbert cube Q , then there exists a number $n \in N$, $n > 1$, such that $X^n \sigma^{n-1}$ contains the Hilbert cube Q . Further, for an infinite compact set X , a number of subspaces Y of the compact set $P(x)$ which are Q -, ℓ_2 -, ℓ_2^f - and Σ -manifolds are identified. In particular, for a proper closed subset $A \subset X$, the subspaces $S_P(A)$ are ℓ_2 -manifolds; for any $n \in N$, $n > 1$, $P(x) \setminus P_n(x)$ are Q -manifolds; for any proper everywhere dense countable subspace $A \subset X$, the subspace $P_\omega(A)$ is the boundary set of the compact set $P(x)$. If $P_\omega(x)$ contains the Hilbert cube Q , then the subspace $P_\omega(x)$ is homeomorphic to the space Σ .

It is considered in which cases everywhere dense subsets A of the spaces $P(X)$ defined in an infinite compactum X are its boundary set. It is also shown which everywhere dense subsets $A \subset P(X)$ and $B \subset P(Y)$ for infinite compact sets X and Y of the spaces $P(X)$ and $P(Y)$, respectively, are at the same time mutually homeomorphic.

Keywords: probability measures, dimensions ind , Ind , dim , boundary sets

For citation: Zhuraev, T.F., Zhuvonov, Q.R. (2024) Subspaces dimensional properties that are boundary sets of the probability measures space, defined in an infinite compactum X . *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 32–50. doi: 10.17223/19988621/89/3

Введение

Пространством $P(X)$ всех вероятностных мер компакта X называется множество всех регулярных борелевских вероятностных мер на X , снабженных слабойшей из топологий, для которых непрерывен каждый функционал $f_u : C(X) \rightarrow R$, переводящий меру μ в $\mu(U)$ (U – открытое в X множество). Известно, что пространство $P(X)$ вероятностных мер любого бесконечного метрического компакта X гомеоморфно гильбертовому кубу $Q = I^{\aleph_0}$. Известно также, что для любой $\aleph_1$ – степени неодноточечного компакта K , пространство вероятностных мер $P(K^{\aleph_1})$ гомеоморфно тихоновскому кубу $I^{\aleph_1}$, $P(K^{\aleph_1}) \cong I^{\aleph_1}$, I – отрезок $[0, 1]$. Отметим, в частности, что все эти пространства являются топологически однородными. А для пространств $P(K^{\aleph_1})$ при $\tau > \aleph_1$ ситуация иная [1–4].

Для произвольного компакта X и меры $\mu \in P(X)$ определен ее носитель $\text{supp}(\mu)$ – наименьшее из замкнутых множеств $F \subset X$, для которых $\mu(F) = \mu(X)$, т.е. $\text{supp}(\mu) = \bigcap \{A : A \subset X, A = \bar{A}, \mu \in P(A)\}$.

$$P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\text{supp} \mu| \leq n\},$$

$P_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(X)$ – множество всех вероятностных мер с конечными носителями.

Напомним, что пространство $P_f(X) \subset P(X)$ состоит из всех вероятностных мер

$$\mu = m_1 \delta(x_1) + m_2 \delta(x_2) + \dots + m_n \delta(x_n)$$

с конечными носителями, для каждой из которых $m_i \geq \frac{n}{n+1}$ при некотором i .

$$P_{f,n}(X) = \{\mu \in P_f(X) : |\text{supp} \mu| \leq n\}.$$

Очевидно, что для метрического компакта X и любого $n \in N$ множества $P_n(X)$ замкнуты в $P(X)$, $P_f(X)$ и $P_{f,n}(X)$ замкнуты в $P(X)$ [5–6].

Тогда подпространство $P_\omega(X) \subset P(X)$, и $P_\omega(X)$ всюду плотно в $P(X)$. Следовательно, компакт $P_f(X)$ есть объединение компактов $P_{f,n}(X)$ и $P_f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X)$.

Очевидно, что $P_{f,n}(X) \subseteq P_n(X)$ и $P_f(X) \subseteq P_\omega(X)$ [7–9].

1. Значение трансфинитных размерностных функций ind , Ind и $\dim$ в подпространстве вида $P_n(X)$, $P_f(X)$ и $P_\omega(X)$ пространства вероятностных мер $P(X)$, определенных в бесконечном компакте X

С недостающими геометрическими и топологическими понятиями и общепринятыми обозначениями, относящимися к функтору $P : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ вероятностных мер его подфункторов, можно ознакомиться в работах [1, 3–9], с общими свойствами действующего в категории Comp – в [2], с размерностными свойствами топологических пространств и обозначениями – в работах [2, 3, 10–14].

Понятия и факты, относящихся к размерностным функциям ind , Ind и dim , можно найти в [15].

Пусть N – множество натуральных чисел. Через $FinN$ обозначим множество всех непустых конечных подмножеств N , снабженных следующим линейным порядком Брауэра–Клини $\prec$: $\sigma \prec \tau$, это означает существование такого $n \in \sigma \setminus \tau$, что

$$\sigma \cap \{1, 2, \dots, n-1\} = \tau \cap \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Пусть L – произвольное множество, и пусть $M \subset FinM$. Для $\sigma \in \{\emptyset\} \cup FinL$ положим

$$M^\sigma = \{\tau \in FinL : \sigma \cup \tau \in M, \sigma \cap \tau = \emptyset\}.$$

Для $\alpha \in L$ множество $M^{\{\alpha\}}$ будем обозначать M^α .

Если $\sigma, \tau \in FinL$ и $\sigma \cap \tau = \emptyset$, то

$$(M^\sigma)^\tau = M^{\sigma \cup \tau},$$

$$\sigma \in M^\tau \Leftrightarrow \tau \in M^\sigma.$$

Предковое число $Ord M$ определяют по индукции:

1. $Ord M = 0 \Leftrightarrow M = \emptyset$
 2. $Ord M \leq \alpha \Leftrightarrow Ord M^\alpha < \alpha$ для любого $\alpha \in L$.
 3. $Ord M = \alpha \Leftrightarrow Ord M^\alpha \leq \alpha$ и $Ord M < \alpha$ – не выполняется
 4. $Ord M = \infty$ (не существует) $\Leftrightarrow Ord M > \alpha$ для всякого порядкового числа α .
- Очевидно, что $N \subset M \Rightarrow Ord N \leq Ord M$.

Множество $M \subset FinL$ называется выключающим, если для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in FinL$ из $\sigma_1 \in M$ и $\sigma_2 \subset \sigma_1$ вытекает $\sigma_2 \in M$.

Последовательность k_i , $i \in \omega$, натуральных чисел ≥ 2 будем называть m -последовательностью, если все $k_i = m$ при конечном m .

Семейство открытых (замкнутых) подмножеств пространства X , состоящих не более чем из k элементов, будем называть открытым (замкнутым) k -семейством пространства X . Открытые k -семейства, являющиеся покрытиями, будем называть k -покрытиями пространства X и обозначать $cov_k X$.

Пусть $\Phi = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ – k -система пространства X (в записи k -семейства мы предполагаем, что оно состоит ровно из k множеств, некоторые из которых могут быть пустыми). Всякое дизъюнктное семейство $O\Phi = \{OF_1, OF_2, \dots, OF_k\}$ окрестностей элементов Φ называется окрестностью системы Φ . m -последовательность (k_i) всякой последовательности (Φ_i) k_i -систем пространства X называется несущественной, если существуют такие окрестности $O\Phi_i$, что семейство $\bigcup \{O\Phi_i : i \in \omega\}$ является покрытием пространства X .

Последовательность $R = \{U_i : i \in N\}$ попарно различных m -покрытий компакта X называется m -выписываемой, если для любого существенного покрытия $U \in cov_m(X)$ бесконечно множество

$$\{i \in N : U_i \succ \omega\},$$

где отношение $v \succ \omega$ означает, что m -покрытие v комбинаторно вписано в m -покрытые ω . Для произвольной m -выписываемой последовательности R компакта X положим

$M_R(X) = \{\sigma \in \text{Fin}N : \text{семейство } \{U_i : i \in \sigma, U_i \in R\} - \text{существенно}\}$

$M_m(X) = \{\sigma \in \text{Fin cov}_m(X) : \sigma - \text{существенно}\}$

Теорема 1.1 [3]. Для нормального пространства X имеем

$$\dim X \leq n \Leftrightarrow \text{Ord}M_m(X) \leq n.$$

Определение 1.2 [3]. Для нормального пространства X полагаем

$$\dim_m X = \text{Ord}M_m(X).$$

В случае $\dim_m X = \infty$ будем говорить, что размерность $\dim_m X$ не определена. Согласно теореме 1.1 инвариант $\dim_m X$ является трансфинитным продолжением лебеговой размерности $\dim$ на бесконечномерном пространстве [3].

Определение 1.3 [10]. Пусть A, B – замкнутые дизъюнктные подмножества пространства X . Подмножество E пространства X называется разгородкой между множествами A и B , если $X \setminus E = U \cup V$, где U и V – открытые дизъюнктные подмножества в X такие, что $A \subset U, B \subset V$.

Определение 1.4 [10]. Говорят, что на пространстве X определена малая индуктивная размерность ind , если выполнены следующие условия:

i) $\text{ind}X = -1$, если $X = \emptyset$;

ii) $\text{ind}X \leq \alpha$, если для каждого $x \in X$ и каждого замкнутого подмножества $F \subset X$, $x \notin F$, существует разгородка A между $\{x\}$ и F , что $\text{ind}A \leq \beta$ для $\beta < \alpha$.

Скажем, что $\text{ind}X = \alpha$, если $\text{ind}X \leq \alpha$, но $\text{ind}X \leq \beta$, для $\beta < \alpha$ не выполняется

Определение 1.5 [10]. Говорят, что на пространстве X определена большая индуктивная размерность $\text{Ind}X$, если верны следующие условия:

i) $\text{Ind}X = -1$, если $X = \emptyset$;

ii) $\text{Ind}X \leq \alpha$, если для каждой пары A, B дизъюнктных замкнутых подмножеств пространства X существует такая разгородка E между A и B , что $\text{Ind}E \leq \beta$ для $\beta < \alpha$.

A (конечная) последовательность $\{(A_i, B_i) : i = 1, \dots, m, \infty\}$ пар замкнутых дизъюнктных подпространств пространства X называется несущественной, если для каждого $n \in N$ (соответственно, $n \leq m$) существует разгородка E_i между A_i и B_i

такая, что $\bigcap_{n=1}^{\infty(m)} E_i = \emptyset$. В ином случае она называется существенной.

Определение 1.6 [3]. Пространство X называется счетной размерности, если X представляется как счетное объединение подпространств конечной размерности.

Предложение 1.7 [10]. Пространство X счетной размерности, если оно представимо счетным объединением своих подпространств размерности ноль.

Определение 1.8 [10]. Пространство X называется сильно счетной размерности, если X представляется счетной суммой замкнутых подпространств конечной размерности.

Определение 1.9 [15]. Пространство X называется A -(S)-слабой бесконечной размерности, если каждая последовательность замкнутых пар дизъюнктных подпространств несущественна (для каждой последовательности $\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^{\infty}$ дизъюнктных замкнутых пар пространства X существует $n \in N$ такое, что семейство

$\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^n$ несущественно). Если пространство не является A -(S)-слабой бесконечной размерности, оно называется сильной бесконечной размерности.

В классе метрических компактов определения A -слабой бесконечной размерности и S -слабой бесконечной размерности совпадают [10].

Нормальное пространство X называется бесконечномерным, если для любой последовательности $(F_1^i, F_2^i), i \in \omega$ дизъюнктивных пар замкнутых в X множеств существуют перегородки P_i между F_1^i и F_2^i с пустым пересечением.

Пространство, не являющееся слабо бесконечномерным, называется сильно бесконечномерным. Формальное определение счетномерного, т.е. пространства, являющегося суммой счетного числа конечномерных, а значит, нульмерных (в классе сепарабельных метрических пространств) множеств, было дано В. Гуревичем [13], который доказал несчетномерность гильбертова куба Q .

В работе [12] В. Гуревичем и Г. Волмэном показано, что сепарабельное полное метрическое пространство счетномерно тогда и только тогда, когда для него определена малая трансфинитная размерность. Формальное определение малой трансфинитной размерности ind было определено в [13] Гуревичем, а большая трансфинитная размерность Ind была определена В. Смирновым [14].

Скажем, что пространство σ конечномерно, если оно является объединением счетного числа своих замкнутых конечномерных подпространств (в русской литературе такие пространства называются слабо счетномерными, в западной – сильно счетномерными).

Определение [3]. Пусть d – размерностный инвариант ($F = ind, Ind, dim$), принимающий конечные или трансфинитные значения. Для пространства X полагаем

$$d - sc(X) = \{\alpha : \exists \text{ замкнутое } F \subset X \text{ размерности } d(F) = \alpha\}.$$

Множество $d - sc(X)$ называется d -шкалой пространства X .

Если

$$d - sc(X) = \{\alpha : \alpha \leq d(X)\},$$

то d -шкала $d - sc(X)$ называется элементарной. d -шкала $d - sc(X)$ называется сложной, если она не элементарна и $1 \in d - sc(F)$ для всякого замкнутого множества $F \subset X$ размерности $d(F) \geq 1$. Условившись, что $\dim X = \omega_0$, если $\dim X = \infty$, отнесем к числу функций d лебеговой размерности. Шкалой пространства X называется его $\dim$ -шкала $\dim - sc(X) \equiv sc(X)$.

Назовем нормальное пространство нуль-счетномерным, если его можно представить в виде объединения счетного числа нульмерных подпространств. Известно, что всякое счетномерное метризуемое пространство нуль-счетномерно.

Гильбертов кирпич не является счетномерным [13].

T_1 -пространство X называется счетнонормальным пространством, если для любой конечной или счетной системы замкнутых множеств F_i , имеющих пустое

пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$, найдется система открытых множеств $O_i \supseteq F_i$, также

имеющих пустое пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i = \emptyset$. Очевидно, всякое счетнонормальное

пространство нормально и любой паракомпакт счетнонормален. Следовательно, класс счетнонормальных пространств совпадает с классом нормальных счетно-паракомпактных пространств

Теорема 1. Пусть X – слабосчетномерное компактное пространство. Тогда для любого локально выпуклого нормального подфунктора F функтора P_n , в частности функтора P_n , пространство $F(X)$ слабосчетномерно.

Доказательство. Пусть X – слабосчетномерный компакт, т.е. X есть счетное объединение своих замкнутых подмножеств X_i конечной размерности $\dim X_i < \infty$ для каждого $i \in N$.

Значит, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, X – компакт, X_i – замкнут, и $\dim X_i < \infty$. В данном случае $F(X)$ компактно, так как $F : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ – нормальный подфунктор функтора P_n . В силу работы [11] пространство $F(X_i)$ конечномерно, если X конечномерно, т.е. $\dim F(X) < \infty$, если $\dim X_i < \infty$. Тогда $F(X) = F(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F(X_i)$. Для каждого $i \in N$ подпространство $F(X_i)$ конечномерно, так как X_i конечномерно. Значит, компакт $F(X)$ есть счетное объединение конечномерных пространств, т.е. $F(X)$ слабосчетномерно. Если же $F = P_n$, то $P_n(X) = P_n(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_n(X_i)$. В этом случае для каждого $n \in N$ для подпространства $P_n(X_i)$ имеет место $\dim P_n(X_i) \leq n \dim X_i + n - 1$. Теорема 1 доказана.

Известно, что, как мы отметили, для бесконечного компакта X пространство $P(X) = Q$, т.е. компакт $P(X)$ несчетномерен. Если X – конечный компакт, то $\dim P(X) = |X| - 1$, т.е. $P(X)$ конечномерен.

Для любого компакта X подпространство $P_{\omega}(X)$ есть счетное объединение $P_n(X)$. В данном случае в силу теоремы 1 имеет место следующее

Следствие 2. Если X – слабосчетномерный σ -компакт, то $F(X)$ – тоже слабосчетномерный σ -компакт, где F локально выпуклый подфунктор функтора P_n .

Следствие 3. Для любого слабосчетномерного компакта X пространство $P_{\omega}(X)$ слабосчетномерно.

Известно, что для компакта X пространство $P_f(X)$ является счетным объединением подпространств $P_{f,n}(X)$, т.е. $P_f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X)$ [9], где $P_{n,f}$ есть подфунктор функтора P_n . В этом случае в силу теоремы 1 имеем

Следствие 4. Для любого слабосчетномерного компакта X пространство $P_f(X)$ есть слабосчетномерный компакт.

В работе [10] имеется следующее

Предложение 2.2.31 [10]. Если X представляется как счетное объединение своих нульмерных ($0 - \dim$) подпространств, то X счетномерно.

Теорема 2.2.34 [10]. Если пространство X S -слабо бесконечномерно, то в X размерность $\dim X$ определена.

Также в работе [10] имеется следующее

Следствие 2.2.33 [10]. Для компакта X следующие условия эквивалентны:

- а) X счетномерно;
- б) существует $indX$;
- с) существует $IndX$.

Суммируя теорему 1, следствия 1–4 и приведенные результаты можем утверждать

Теорема 2. Для компакта X следующие условия эквивалентны:

- а) X счетномерно;
- б) $indX$ существует;
- в) $IndX$ существует;
- г) $indP_\omega(X)$ существует;
- д) $IndP_\omega(X)$ существует;
- е) $\dim P_\omega(X)$ существует.

Следствие 5. Для компакта X следующие условия эквивалентны:

- а) X счетномерно;
- б) $indX$ существует;
- в) $IndX$ существует;
- г) $indP_f(X)$ существует;
- д) $IndP_f(X)$ существует;
- е) $\dim P_f(X)$ существует.

Определение [3]. Нормальное пространство X называется C -пространством ($X \in C$), если для любой последовательности (U_i) , $i \in \omega$, его открытых покрытий существует последовательность (V_i) дизъюнктивных открытых семейств пространства X , C -вписанная в последовательность (U_i) . Последнее означает, что каждое семейство V_i вписано в покрытие U_i , а совокупность семейств V_i является покрытием пространства X , т.е.

$$X = \bigcup \{ \bigcup V_i : i \in \omega \} \quad (1)$$

В этом случае говорят также, что последовательность (U_i) (бесконечная или конечная) несущественна.

1. Всякое C -пространство (счетное пространство) слабо счетномерно [3].

2. Если наследственно коллективно нормальное пространство X может быть представлено в виде объединения счетного числа подпространств $C_i \in C_i$, то $X \in C$ [3].

3. Любое наследственно паракомпактное конечномерное пространство является C -пространством [3].

4. Любое метрическое пространство, представимое в виде объединения счетного числа компактов со свойством C , является C -пространством [3].

Из определения C -пространств, приведенных фактов из работы [3], следствий 1–5, и теорем 1, 2 вытекает

Следствие 6. Для любого компактного C -пространства X имеет место:

- а) пространство $P_\omega(X)$ есть C -пространство;

- б) пространство $P_f(X)$ есть C -пространство;
 в) пространство $P_{f,n}(X)$ есть C -пространство.

2. Размерности граничных множеств пространства $P(X)$ вероятностных мер, определенных в бесконечном компакте X

Пусть X – произвольный компакт. Для функтора P_n пространство $P_n(X)$ состоит из всех мер вида: $m_1\delta_{x_1} + \dots + m_n\delta_{x_n}$, т.е.

$$P_n(X) = \{\mu = m_1\delta_{x_1} + \dots + m_n\delta_{x_n} : m_i \geq 0, m_i \leq 1, \sum_{i=1}^n m_i = 1\},$$

δ_{x_i} – мера Дирака в точке $x_i \in X$.

С другой стороны, компакт $P_n(X)$ является непрерывным образом компакта $X^n \times \sigma^{n-1}$ при отображении

$$\pi_{P_n(X),n}((x_1, \dots, x_n), (m_1, \dots, m_n)) : X^n \times \sigma^{n-1} \rightarrow P_n(X),$$

где σ^{n-1} – симплекс размерности $n-1$.

Покажем, что для любого $n \in N$ компакт X^n вложен в компакт $P_n(X)$. При $n=1$ компакт $P_1(X) = \delta(X)$ – пространство мер Дирака.

Фиксируем $\mu_0 = m_1^0 + m_2^0 + \dots + m_n^0$, где $m_i > 0$, $m_i < 1$, $m_1 < m_2 < \dots < m_n$. Каждой точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ компакта X^n ставим в соответствие точку $\mu_0(x)$ компакта $P_n(X)$, определенную следующим образом:

$$\mu_0(x) = m_1^0\delta_{x_1} + m_2^0\delta_{x_2} + \dots + m_n^0\delta_{x_n}.$$

Очевидно, что $\mu_0(x) \in P_n(X)$, т.е. определено отображение $\mu_0(x) : X^n \rightarrow P_n(X)$.

Заметим, если $x \neq y$, то $\mu_0(x) \neq \mu_0(y)$. Это означает, что отображение $\mu_0(x)$ взаимно однозначно. По точечной непрерывности отображения $\mu_0(x) : X^n \rightarrow P_n(X)$ легко установить, что это отображение $\mu_0(x)$ есть вложение. Значит, имеет место следующая

Теорема 3. Для любого компакта X и для любого $n \in N$ пространство X^n вложено в $P_n(X)$.

В данном случае в силу определения пространства $P_n(X)$, непрерывности отображений $\pi_{P_n(X),n}$ и $\mu_0(x)$.

Таким же образом можно доказать

Теорема 4. Для любого компакта X и для любого $n \in N$ компактное пространство $X^n \times \sigma^{n-1}$ вложено в $P_n(X)$.

Следствие 7. Пусть X – компакт, и $n \in N$. Если X содержит множество $A \subset X$, то $P(X)$ содержит множество $P(A)$. В частности A вложено в $P(X)$.

Это тоже следует из определения пространства $P_n(X)$ и отображений $\pi_{P_n(X),n}$ и $\mu_0(x)$.

Имеет место следующая

Теорема 5. Для компакта X , если пространство $P_n(X)$ содержит множество $A \subseteq X$, то $X^n \times \sigma^{n-1}$ содержит множество A' , гомеоморфное множеству A .

Теорема 6. Если для бесконечного компакта X пространство $P_\omega(X)$ содержит гильбертов куб Q , то существует число $n \in N$ такое, что $P_n(X)$ содержит гильбертов куб Q .

Доказательство. Пусть X – такой бесконечный компакт, что пространство $P_\omega(X)$ содержит гильбертов куб Q . Из результатов работ [4, 10] вытекает, что

- 1) $P_\omega(X)$ является граничным подмножеством для пространства $P(X) \simeq Q$;
- 2) $P_\omega(X)$ обладает сильным компактным Z -свойством, т.е. любое компактное подмножество пространства $P_\omega(X)$ является сильным Z -множеством;
- 3) $P_\omega(X) \in AR$ и $P_\omega(X)$ есть всюду плотное подмножество в $P(X)$;
- 4) $P_\omega(X)$ является σ - Z -множеством, т.е. $P_\omega(X)$ является счетным объединением Z -множеств;
- 5) $P_\omega(X)$ гомеоморфно пространству Σ ;
- 6) $P_\omega(X)$ является скелетоидом для произвольных компактов [4].

Итак, по определению скелетоидов для произвольных компактов имеется такое отображение $f: A \rightarrow P_\omega(X)$, что $f|_B: B \rightarrow P_m(X)$ – вложение, где B замкнуто в A , A – произвольный компакт. В силу произвольности компакта A в определении скелетоида для произвольных компактов, можно считать, что A гомеоморфно Q . В этом случае множество B вложено в A и B замкнуто в A .

В силу того что $P_\omega(X)$ является скелетоидом для произвольных компактов, для $\varepsilon > 0$ существует вложение $h: A \rightarrow P_n(X)$ для некоторого $m \leq n$ такое, что $h|_B = f|_B$ и $d(f(a), h(a)) < \varepsilon$. Значит, подпространство $P_m(X)$ содержит гильбертов куб Q , так как множество A содержало подмножество? гомеоморфное Q , или A было бы гомеоморфным Q . Что и требовалось доказать.

Теорема 7. Для любого бесконечного компакта X и любого его всюду плотного счетного подмножества Φ подпространства $P(A)$ и $P_\omega(A)$ пространства $P(X)$ слабо счетномерны.

Доказательство. Пусть X – бесконечный компакт, и $A \subset X$, $A \neq X$, $|A| = \omega$, $\bar{A} = X$. Тогда $P(X) \simeq Q$, $P(A) \subset P(X)$ и $P(A)$ всюду плотно в $P(X)$. Пусть $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Для натурального числа $k \geq 2$ положим $A_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

Очевидно, что $A_k \subset X$, $A_k \subset A_{k+1}$ и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. В этом случае

$$P_\omega(A) = P_\omega\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_\omega(A_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(A_k).$$

В силу результата работы [7] для каждого $n \in N$ и $k \in N$ подпространство $P_n(A_k)$ конечномерно, т.е. $\dim P_n(A_k) < \infty$. Значит, $P_\omega(A)$ является счетным объединением конечномерных подпространств т.е. $P_\omega(A)$ слабо счетномерно.

С другой стороны, для A имеем $P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} P(A_k)$. Для каждого $k \in N$ пространство $P(A_k)$ гомеоморфно симплексу σ^{n-1} размерности $n-1$, т.е.

$\dim P(A_k) = \sigma^{n-1}$. Значит, пространство $P(A)$ является счетным объединением своих конечномерных подпространств, т.е. $P(A)$ также слабосчетномерно. Можно заметить, что в данном случае, для множества A пространства $P_\omega(A)$ и $P(A)$ гомеоморфны. Теорема 7 доказана.

В силу теоремы 7 и результата работы [10] имеют место следующие

Теорема 8. Для любого бесконечного компакта X и любого его собственного счетного всюду плотного подмножества U имеет место

$$(P(X), P(U)) \simeq (Q, B(Q)),$$

$$(P(X), P_\omega(U)) \simeq (Q, B(Q)).$$

Теорема 9. Пусть X – бесконечный компакт, $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ – замкнутые подмножества компакта X такие, что $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ всюду плотно в X и $X \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Тогда:

а) $P_\omega(A)$ слабосчетномерно, если A слабосчетномерно;

б) $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ сильно бесконечномерно, если существует такое $i \in N$, что A_i

бесконечно.

Теорема 10. Пусть X – бесконечный компакт, A – его непустое замкнутое подмножество такое, что $X \setminus A$ всюду плотно в X . Тогда:

а) $P(X \setminus A)$ сильно счетномерно, если $X \setminus A$ содержит бесконечное компактное подмножество;

б) $P(X \setminus A)$ слабосчетномерно, если $X \setminus A$ есть счетное множество;

в) $P_\omega(X \setminus A)$ слабосчетномерно, если $X \setminus A$ слабосчетномерно;

г) $P_\omega(X \setminus A)$ сильно счетномерно, если $X \setminus A$ содержит гильбертов куб Q .

Доказательство. Пусть X – бесконечный компакт, тогда $P(X)$ гомеоморфно Q . В работах [4, 7] показано, что во всех таких случаях эти подпространства являются граничными множествами, т.е. имеет место

$$(P(X), P(X \setminus A)) \simeq (Q, B(Q))$$

$$(P(X), P_\omega(X \setminus A)) \simeq (Q, B(Q)).$$

Следовательно, $P(X) \setminus P(X \setminus A) \simeq \ell_2$ и $P(X) \setminus P_\omega(X \setminus A) \simeq \ell_2$.

В случае а) если $X \setminus A$ содержит компактное бесконечное подмножество, то пространство вероятностных мер этого подмножества гомеоморфно Q , т.е. $P(X \setminus A)$ содержит гильбертов куб. Следовательно, $P(X \setminus A) \simeq \sum$. Это означает, что $P(X \setminus A)$ сильно счетномерно.

Случай б) вытекает из теоремы 7.

в) в теореме 2 пространство $P_\omega(X)$ слабосчетномерно для слабосчетномерного пространства X ;

г) выпуклое множество $P_\omega(X \setminus A)$ содержит гильбертов куб Q , тогда $P_\omega(X \setminus A)$ гомеоморфно $\sum$, т.е. $P_\omega(X \setminus A)$ сильно счетномерно. Теорема 10 доказана.

О гомеоморфности подпространств $A \subset P(X)$ и $B \subset P(Y)$ соответственно пространств $P(X)$ и $P(Y)$

Напомним, что топологическое пространство X называется многообразием, моделированным на пространстве Y , или Y -многообразием [10], если всякая точка пространства X имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y .

$Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]_i$ – гильбертов куб, $W_i^{\pm} = \{(g_j) \in Q : g_i = \pm 1\}$ – i -я грань куба Q , $BdQ = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i^{\pm}$ – псевдограница куба Q , а $S = Q \setminus BdQ$ – псевдовнутренность куба Q .

Известно, что $S = \prod_{i=1}^{\infty} (-1, 1)_i$ и $S \simeq R^{\aleph_0}$ [10]. Следовательно, l_2 -гильбертово пространство гомеоморфно S и $R^{\aleph_0}$, Σ – линейная оболочка стандартного кирпича $Q' = \prod_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{2^n}]$ в гильбертовом пространстве l_2 ; через l_2^f или σ обозначается линейное подпространство пространства l_2 , состоящее из всех точек, лишь конечное число координат которых отлично от нуля, а Q^f – подпространство гильбертова куба Q , состоящее из всех точек, лишь конечное число координат которых отлично от нуля. Через $rintQ$ обозначается радиальная внутренность гильбертова куба Q , состоящая из точек $\{x = (x_n) \in Q; |x_n| < t < 1, \text{ для всех } n \in N\}$.

Известно, что $\sigma \simeq l_2^f \simeq Q^f$, а Σ гомеоморфно $rintQ$. Очевидно, что $rintQ \simeq BdQ$ и $BdQ \simeq \Sigma$. Известно, что пространства Q , Σ и l_2 сильно бесконечномерны, а пространства l_2^f , σ и Q^f слабо бесконечномерны, и все эти пространства однородны.

Следуя по [10], σ - Z -множество в гильбертова куба Q называют граничным множеством в Q (обозначается через $B(Q)$), если $Q \setminus B = l_2$.

Более общим образом граничным множеством в Q -многообразии называют σ - Z -множество, дополнение до которого является l_2 -многообразием.

Из вышеприведенного следует, что псевдограница BdQ гильбертова куба Q является его граничным множеством.

Пусть X – бесконечный компакт, и $A_i \subset X$ – такие замкнутые подмножества компакта X , что $X \setminus A_i$ всюду плотно в X и отлично от X для каждого $i \in N$.

В силу компактности X и замкнутости множества A_i для каждого $i \in N$ имеет место $A_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k^i$, где $G_{k+1}^i \subseteq G_k^i$ и G_k^i открыто для каждого $k \in N$.

Тогда $X \setminus G_k^i \subseteq X \setminus G_{k+1}^i$ для каждого $k \in N$ и $P(X \setminus G_k^i) \subset P(X \setminus G_{k+1}^i)$. Из всюду плотности множества $X \setminus A_i$ в X вытекает, что $P(X \setminus X_i)$ всюду плотны в $P(X)$.

Рассмотрим объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus A_i)$. Для него имеем

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus X_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k^i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(\bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus G_k^i))$$

Обозначим $X \setminus G_k^i = B_k^i$, т.е. $P(X \setminus G_k^i) = P(B_k^i)$

Известно, что $P(B_k^i) \subset P(B_{k+1}^i)$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(B_k^i)$ выпукло, всюду плотно, σ -компактно и $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(B_k^i) \in AR$. Было показано, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(B_k^i)$ является граничным множеством в $P(X)$ для каждого $i \in N$ (Теорема 3).

Значит, имеет место следующая

Теорема 11. Пусть X – бесконечный компакт, и $A_i \subset X$ – его такие замкнутые подмножества, что $X \setminus A_i$ всюду плотны и отличны от X для каждого $i \in N$. Тогда пространство $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus A_i)$ является граничным множеством в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus A_i)$ гомеоморфно ℓ_2 .

Следствие 8. Пусть X – бесконечный компакт, и $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ – последовательность точек компакта X такое, что множество $\{x_i : i \in N\}$ счетно и $X \setminus \{x_i\}$ всюду плотно в X для каждого $i \in N$. Тогда пространство $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus x_i)$ является граничным множеством в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus x_i)$ гомеоморфно ℓ_2 .

В случае когда X – бесконечный компакт, пространство $P_{\omega}(X \setminus A_i)$ является граничным множеством для любого замкнутого подмножества A_i такого, что $X \setminus A_i$ всюду плотно и отлично от X для каждого $i \in N$.

Поэтому имеет место следующая

Теорема 12. Пусть X – бесконечный компакт, и $A_i \subset X$ – его такие замкнутые подмножества, что $X \setminus A_i$ всюду плотны и отличны от X для каждого $i \in N$. Тогда пространство $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_{\omega}(X \setminus A_i)$ является граничным множеством в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P_{\omega}(X \setminus A_i)$ гомеоморфно ℓ_2 .

Следствие 9. Пусть X – бесконечный компакт, и $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ – последовательность различных точек компакта X такая, что $X \setminus \{x_i\}$ всюду плотно в X для каждого $i \in N$. Тогда пространство $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_{\omega}(X \setminus x_i)$ есть граничное множество в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P_{\omega}(X \setminus x_i)$ гомеоморфно ℓ_2 .

Теорема 13. Пусть X – бесконечный компакт, $A_1, A_2, \dots, A_n$ – такие замкнутые подмножества компакта X , что $X \setminus A_i$ всюду плотны и отличны от X для каждого

$i = \overline{1, n}$. Тогда $\bigcap_{i=1}^n P(X \setminus A_i)$ есть граничное множество в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcap_{i=1}^n P(X \setminus A_i)$ гомеоморфно ℓ_2 .

Доказательство. Пусть X – бесконечный компакт, и эту теорему докажем для $n = 2$. A_1 и A_2 – такие замкнутые подмножества компакта X , что $X \setminus A_1$ и $X \setminus A_2$ всюду плотны в X и отличны от X . Тогда каждое $P(X \setminus A_i)$ всюду плотно в $P(X)$ и отличны от $P(X)$. В этом случае, по теореме 8, эти подпространства $P(X \setminus A_1)$ и $P(X \setminus A_2)$ являются граничными множествами в $P(X)$. Пересечение $P(X \setminus A_1) \cap P(X \setminus A_2)$ выпукло и всюду плотно в $P(X)$. Следовательно, $P(X \setminus A) \cap P(X \setminus A_2)$ является AR -пространством.

В силу замкнутости множеств A_1 и A_2 в компакте X имеем

$$P(X \setminus A_1) = P(X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus U_i)) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus U_i),$$

$$P(X \setminus A_2) = P(X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus V_i)) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus V_i).$$

Заметим, что $P(X \setminus U_i) \subset P(X \setminus U_{i+1})$ и $P(X \setminus V_i) \subset P(X \setminus V_{i+1})$, и $P(X \setminus U_i)$ и $P(X \setminus V_i)$ – выпуклые компакты. Значит, $P(X \setminus A_1)$ и $P(X \setminus A_2)$ σ -компактны.

Теперь

$$P(X \setminus A_1) \cap P(X \setminus A_2) = (P(X \setminus U_1) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus V_i))) \cup,$$

$$(P(X \setminus U_2) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus V_i))) \cap \dots \cap (P(X \setminus U_n) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus V_i))) \dots =$$

$$= (P(X \setminus U_1) \cap P(X \setminus V_1)) \cup (P(X \setminus U_2) \cap P(X \setminus V_2)) \cup \dots$$

$$\dots \cup (P(X \setminus U_n) \cap P(X \setminus V_n)) \cup \dots = \bigcap_{i=1}^{\infty} (P(X \setminus U_i) \cap P(X \setminus V_i)).$$

Очевидно, что пространство $P(X \setminus A_1) \cap P(X \setminus A_2)$ – растущая последовательность компактных выпуклых подмножеств компакта $P(X)$, так как

$$P(X \setminus U_1) \subset P(X \setminus U_2) \subset \dots,$$

$$P(X \setminus V_1) \subset P(X \setminus V_2) \subset \dots$$

есть растущие последовательности компактных выпуклых подмножеств в $P(X)$.

Обозначим $C_i = P(X \setminus U_i) \cap P(X \setminus V_i)$. Получим, что $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in AR$. Для каждого $i \in N$ показывается, C_i есть Z -множество в C . Следовательно, C есть σ - Z -множество и C есть граничное множество в $P(X)$ [8, 9], т.е. $P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \simeq \ell_2$.

Теорема 13 доказана.

Для функтора P_{ω} , переводящего компакты в σ -компактные пространства, доказывается следующая

Теорема 14. Пусть X – бесконечный компакт, $A_1, A_2, \dots, A_n$ – такие замкнутые подмножества компакта X , что $X \setminus A_i$ всюду плотны в X и отличны от X для каждого $i \in \overline{1, n}$.

Тогда $\bigcap_{i=1}^n P_\omega(X \setminus A_i)$ есть граничное множество в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcap_{i=1}^n P_\omega(X \setminus A_i) = \ell_2$.

Следствие 10. Пусть X – бесконечный компакт, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – различные точки компакта X такие, что $X \setminus \{x_i\}$ всюду плотны в X для каждого $i \in \overline{1, n}$. Тогда пространство $\bigcap_{i=1}^n P(X \setminus x_i)$ есть граничное множество в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcap_{i=1}^n P_\omega(X \setminus x_i) = \ell_2$.

Следствие 11. Пусть X – бесконечный компакт, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – различные точки этого компакта X такие, что $X \setminus \{x_i\}$ всюду плотно в X для каждого $i \in \overline{1, n}$. Тогда $\bigcap_{i=1}^n P_\omega(X \setminus x_i)$ есть граничное множество в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcap_{i=1}^n P_\omega(X \setminus x_i) = \ell_2$.

Теорема 15. Для любого бесконечного компакта X пространство $P_\omega(X) \setminus P_f(X)$ является граничным множеством компакта $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus (P_\omega(X) \setminus P_f(X)) = \ell_2$.

Доказательство. Пусть X – бесконечный компакт, тогда $P(X)$ гомеоморфно гильбертовому кубу Q . В работах [5, 6] было показано, что $P_\omega(X)$ образует граничное множество компакта $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus P_\omega(X) = \ell_2$. Было показано, что $P_\omega(X)$ обладает компактным Z -свойством, т.е. каждое компактное подмножество пространства $P_\omega(X)$ есть Z -множество. Значит, компакт $P_f(X)$ является Z -множеством в $P_\omega(X)$.

а) Теперь покажем, что подпространство $P_\omega(X) \setminus P_f(X)$ гомотопически плотно в $P_\omega(X)$. Фиксируем точку $\mu_0 \in P_\omega(X) \setminus P_f(X)$. Положим $\mu_0 = \frac{1}{2}\delta_{x_1} + \frac{1}{2}\delta_{x_2}$, где δ_{x_1} и δ_{x_2} – произвольные точки компакта $\delta(X) \subset P_\omega(X)$. Искомую гомотопию $h(\mu, t) : P_\omega(X) \times [0, 1] \rightarrow P_\omega(X)$ построим, полагая $h(\mu, t) = t\mu_0 + (1-t)\mu$.

При $t = 0$ гомотопия $h(\mu, 0) = 0 \cdot \mu_0 + (1-0)\mu = \mu$, т.е. $h(\mu, 0) = id_{P_\omega(X)}$.

При $t > 0$ $h(\mu, t) = t\mu_0 + (1-t)\mu$. Легко проверить, что для любого $\mu \in P_\omega(X)$ и $t \in (0, 1]$ мера $h(\mu, t) \notin P_f(X)$, так как $\mu_0 \notin P_f(X)$ и при любом значении μ мера $h(\mu, t) \notin P_f(X)$.

Значит, пространство $P_\omega(X) \setminus P_f(X)$ гомотопически плотно в $P_\omega(X)$.

б) Известно, что для любого компакта X компакт $P_f(X)$ является счетным объединением компактов $P_{f,n}(X)$, где $P_{f,n}(X)$ есть подмножество компакта $P_n(X)$.

Значит, $P_f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X)$ здесь $P_f(X)$ принимает вид:

$$P_{f,1}(X) = \delta(X) \subseteq P_{f,2}(X) \subseteq \dots \subseteq P_{f,n}(X) \subseteq \dots$$

В этом случае имеем

$$P_{\omega}(X) \setminus P_f(X) = P_{\omega}(X) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (P_{\omega}(X) \setminus P_{f,n}(X)).$$

Для каждого $n \in N$ подпространство $P_{\omega}(X) \setminus P_{f,n}(X)$ выпукло и локально выпукло. Тогда пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} (P_{\omega}(X) \setminus P_{f,n}(X))$ выпукло. Следовательно, пространство $P_{\omega}(X) \setminus P_f(X)$ выпукло, и $P_{\omega}(X) \setminus P_f(X)$ есть AR -пространство. С другой стороны, подпространство $P_{\omega}(X) \setminus P_f(X)$ всюду плотно в $P(X)$ и $P_{\omega}(X) \setminus P_f(X)$ является Z_{σ} -множеством. В этом случае из результата 1.5.4 [10] подпространство $P_{\omega}(X) \setminus P_f(X)$ сильно C -универсально, где C – класс метрических компактов. В данном случае из результата вытекает, что пара $(P(X), P_{\omega}(X) \setminus P_f(X))$ гомеоморфна паре $(Q, B(Q))$. Значит, имеем $P(X) \setminus (P_{\omega}(X) \setminus P_f(X)) \simeq \ell_2$. Теорема 15 доказана.

В условиях теорем 9–15, следствий 9–10 и в силу равенства

$$P(X \setminus A) = P(X) \setminus S_p(A)$$

получаем:

$$\text{а) } P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus A_i) = P(X) \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} (P(X) \setminus S_p(A_i))) = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_p(A_i) \simeq \ell_2; \text{ так, } S_p(A)$$

гомеоморфно гильбертовому пространству ℓ_2 для любого замкнутого подмножества A компакта X [6, 7];

$$\text{б) } P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus x_i) = P(X) \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} (P(X) \setminus S_p(x_i))) = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_p(x_i) \simeq \ell_2;$$

$$\text{в) } P(X) \setminus \bigcap_{i=1}^n P(X \setminus A_i) = P(X) \setminus \bigcap_{i=1}^n (P(X) \setminus S_p(A_i)) = \bigcup_{i=1}^n S_p(A_i) \simeq \ell_2.$$

Известно, что для любых бесконечных компактов X и Y пространства $P(X)$ и $P(Y)$ гомеоморфны Q , т.е. $P(X) \simeq P(Y) \simeq Q$.

Вопрос. Для таких компактов X и Y пространства $P_{\omega}(X)$ и $P_{\omega}(Y)$ гомеоморфны?

Из результатов работ [1–8] и теорем 2–15 следует:

а) для конечномерных компактов X и Y пространства $P_{\omega}(X)$ и $P_{\omega}(Y)$ гомеоморфны;

б) для счетных компактов X и Y пространства $P_{\omega}(X)$ и $P_{\omega}(Y)$ гомеоморфны;

в) для компактов X и Y , содержащих Q , пространства $P_{\omega}(X)$ и $P_{\omega}(Y)$ гомеоморфны;

г) для компактов X и Y таких, что $X^n \times \sigma^n$ и $Y^n \times \sigma^n$ содержат Q , пространства $P_{\omega}(X)$ и $P_{\omega}(Y)$ гомеоморфны.

Пусть X и Y – бесконечные метрические компакты. Тогда имеют место следующие равенства:

$$1. P(X) \simeq P(Y) \text{ и } P(X) \setminus P_{\omega}(X) \simeq P(Y) \setminus P(Y).$$

2. $P(X) \setminus P(X \setminus A) = S_p(A)$, где $A \neq X$, и $P(Y) \setminus P(X \setminus B) = S_p(B)$, где $B \neq Y$.
3. $U(X)$ и $U(Y)$ открыты и всюду плотны соответственно в X и Y , тогда $P(X) \setminus P(U(X)) \simeq P(Y) \setminus P(U(Y))$ и $P(X) \setminus P_\omega(U(X)) \simeq P(Y) \setminus P_\omega(U(Y))$, где $U(X) \neq X$ и $U(Y) \neq Y$.
4. $P(X) \setminus P(X \setminus x_0) = P(Y) \setminus P(Y \setminus y_0)$, где $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$.
5. $P(X) \setminus P(A) = P(Y) \setminus P(B)$, где $A \subset X, A \neq X, \bar{A} = X, \bar{A} \neq A$ и $B \subset Y, B \neq Y, \bar{B} = Y$.
6. $P(X) \setminus P(A) = P(Y) \setminus P(B)$ тогда и только тогда, когда $S_p(X \setminus A) \simeq S_p(Y \setminus B)$, где $A \neq X, B \neq Y$.
7. а. $P(X \setminus A) \simeq P(Y \setminus B)$ тогда и только тогда, когда $S_p(A) \simeq S_p(B)$, где A замкнуто в X и $A \neq X, B$ замкнуто в Y и $B \neq Y$.
7. б. $S_p(X \setminus A) \simeq S_p(Y \setminus B)$ тогда и только тогда, когда $P(X) \setminus P(A) \simeq P(X) \setminus P(B)$, $S_p(A) \simeq S_p(B)$, где A замкнуто в X и $A \neq X, B$ замкнуто в Y и $B \neq Y$.
8. Для любых σ -компактных всюду плотных подмножеств A и B соответственно X и Y , отличных от X и Y , верно
$$P(X) \setminus P(A) \simeq P(Y) \setminus P(B)$$
9. Если $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ плотно в X , и $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ плотно в Y , $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, A_i замкнуто в X , $A \neq X$, $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$, B_i замкнуто в Y , $B \neq Y$, тогда
$$P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i) \simeq P(Y) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P(B_i).$$
10. Для любых счетных всюду плотных собственных подпространств $A \subset X$ и $B \subset Y$ компактов X и Y имеют место $P(X) \setminus P(A) \simeq P(Y) \setminus P(B)$ и $P(X) \setminus P_\omega(A) \simeq P(Y) \setminus P_\omega(B)$.

Список источников

1. Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии // Успехи математических наук. 1991. Т. 46, вып. 1 (277). С. 41–80.
2. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи математических наук. 1981. Т. 36, № 3. С. 3–62.
3. Федорчук В.В. Слабо бесконечномерные пространства // Успехи математических наук. 2007. Т. 62, вып. 2 (374). С. 109–164.
4. Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1989. 90 с.
5. Жураев Т.Ф. Некоторые основные свойства функтора P_f // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 6. С. 29–33.
6. Жураев Т.Ф. Пространство всех вероятностных мер с конечными носителями гомеоморфно бесконечномерному линейному пространству // Общая топология. Пространства и отображения. М. : Из-во Моск. ун-та, 1989. С. 66–70.
7. Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства подфункторов функтора P вероятностных мер. М. : МГУ, 1989. 60 с. Деп. в ВИНТИ АН СССР 05.07.1989. № 4471-B89.
8. Жураев Т.Ф. О функторе P вероятностных мер // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика, механика. 1990. № 1. С. 26–30.

9. Жураев Т.Ф., Турсунова З.О. Некоторые геометрические и топологические свойства пространства вероятностных мер, определенные в бесконечном компакте // *Узбекский математический журнал*. 2016. № 1. С. 39–48.
10. Banach T., Radul T., Zarichnyi M. Absorbing Sets in Infinite-dimensional Manifolds. VNTL Publishers, 1996. (Math Studies Monogh; Ser. V.1).
11. Басманов В.Н. Ковариантные функторы, ретракты и размерность // Доклады АН СССР. 1983. Т. 271, № 5. С. 1033–1036.
12. Гуревич В., Волман Г. Теория размерности / под ред. и с предисл. П.С. Александрова. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 232 с.
13. Hurewicz W. Über unendlich-dimensionale punktmengen // *Proc.Akad. Amsterdam*. 1928. V. 31. P. 916–922.
14. Смирнов Ю.М. Об универсальных пространствах для некоторых классов бесконечномерных пространств // *Известия АН СССР. Сер. математическая*. 1959. Т. 23. С. 185–196.
15. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973. 575 с.

References

1. Fedorchuk V.V. (1991) Probability measures in topology. *Russian Mathematical Surveys*. 46(1). pp. 45–93.
2. Shchepin E.V. (1981) Functors and uncountable powers of compacta. *Russian Mathematical Surveys*. 36(3). pp. 1–71.
3. Fedorchuk V.V. (2007) Weakly infinite-dimensional spaces. *Russian Mathematical Surveys*. 62(2). pp. 323–374.
4. Zhuraev T.F. (1989) *Nekotoryye geometricheskiye svoystva funkтора veroyatnostnykh mer i ego podfunkторов* [Some geometric properties of the functor of probability measures and its subfunctors]. Dissertation. Moscow State University.
5. Zhuraev T.F. (1988) Nekotoryye osnovnyye svoystva funkтора P_f [Some fundamental properties of the functor P_f]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya I. Matematika. Mekhanika*. 6. pp. 29–33.
6. Zhuraev T.F. (1989) Prostranstvo vseh veroyatnostnykh mer s konechnymi nositeliymi go-meomorfno beskonечnomernomu lineynomu prostranstvu [The space of all probability measures with finite supports is homeomorphic to an infinite-dimensional linear space], in *Obshchaya topologiya. Prostranstva i otobrazheniya* [General topology. Space and maps]. Moscow: Moscow State University. pp. 66–70.
7. Zhuraev T.F. (1989) Nekotoryye geometricheskiye svoystva podfunkторов funkтора P veroyatnostnykh mer. [Some geometric properties of subfunctors of functor P of probability measures]. Deposited in VINITI AN USSR July 5, 1989. No. 4471-B89.
8. Zhuraev T.F. (1990) O funkторе P veroyatnostnykh mer [On the functor P of probability measures]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya I. Matematika. Mekhanika*. 9. pp. 26–30.
9. Jurayev T.F., Tursunova Z.O. (2016) Nekotoryye geometricheskiye i topologicheskkiye svoystva prostranstva veroyatnostnykh mer, opredelennyye v beskonечnom kompakte [Some geometric and topological properties of the space of probability measures defined in an infinite compact]. *Uzbek Mathematical Journal*. 1. pp. 39–48.
10. Banach T., Radul T., Zarichnyi M. (1996) *Absorbing Sets in Infinite-dimensional Manifolds*. VNTL Publishers.
11. Basmanov V.N. (1983) Covariant functors, retracts, and dimension. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 271(5). pp. 1033–1036.
12. Hurewicz W., Wallman H. (1941) *Dimension Theory*. Princeton: Princeton University Press.
13. Hurewicz W. (1928) Über unendlich-dimensionale Punktmengen. *Proceedings of the Section of Science, Koninklijke (Nederlandse) Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*. 31. pp. 916–922.

14. Smirnov Yu.M. (1959) Ob universal'nykh prostranstvakh dlya nekotorykh klassov beskonechnomernykh prostranstv [On universal spaces for certain classes of infinite-dimensional spaces]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*. 23. pp. 185–196.
15. Aleksandrov P.S., Pasyukov B.A. (1973) *Vvedeniye v teoriyu razmernosti* [Introduction to dimension theory]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторах:

Жураев Турсунбай Файзиевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики Ташкентского государственного педагогического университета им. Низами (Ташкент, Узбекистан). E-mail: tursunzhuraev@mail.ru

Жувонов Камариддин Ризокулович – преподаватель кафедры высшей математики Национального исследовательского университета «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства» (Ташкент, Узбекистан). E-mail: qamariddin.j@mail.ru

Information about the authors:

Zhuraev Tursunbay F. (Tashkent State Pedagogical University named in Nizami, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: tursunzhuraev@mail.ru

Zhuvonov Qamariddin R. (National Research University “Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers”). E-mail: qamariddin.j@mail.ru

Статья поступила в редакцию 01.07.2020; принята к публикации 03.06.2024

The article was submitted 01.07.2020; accepted for publication 03.06.2024