

Научная статья

УДК 531.38, 531.13

doi: 10.17223/19988621/89/8

Принципы реализации сервосвязей в неголономных механических системах

Евгения Арифжановна Микишанина

*Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова,
Чебоксары, Россия, evaeva_84@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается проблема реализации сервосвязей в неголономных механических системах. Отмечаются особенности введения управляющих сил, реализующих заданную сервосвязями программу движения. Построен математический алгоритм управления посредством сервосвязей механической системой, состоящей из колесной платформы (робота) с дифференциальным приводом ведущих колес и прицепа. На колеса системы дополнительно наложены неголономные ограничения. Результаты проиллюстрированы графически.

Ключевые слова: управление, неголономная связь, сервосвязь, уравнения движения, программа движения, колесный робот

Благодарности: Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-10019) и Чувашской Республики, <https://rscf.ru/project/23-21-10019/>

Для цитирования: Микишанина Е.А. Принципы реализации сервосвязей в неголономных механических системах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 103–118. doi: 10.17223/19988621/89/8

Original article

Principles for implementing servo-constraints in nonholonomic mechanical systems

Evgeniya A. Mikishanina

I.N. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation, evaeva_84@mail.ru

Abstract. The problem of implementing servo-constraints in nonholonomic mechanical systems is considered. An attempt is made to outline the theoretical principles for composing equations of motion of nonholonomic mechanical systems with servo-constraints, to set the conditions for implementing servo-constraints, and to indicate the features of the introduction of control forces implementing the motion program from the point of view of their practical realization. In contrast to nonholonomic constraints, the method of implementation is important for servo-constraints. To illustrate the principles outlined in this study, a mathematical algorithm for controlling a wheeled two-link robot (driving trolley and trailer) with a differential drive is constructed using servo-constraints. Nonho-

lonomic constraints are also imposed on the wheels of the system. On the basis of the joint solution of the equations of motion in quasi-velocities and time derivatives of non-holonomic and servo-constraints, the equations of motion of the wheeled robot are obtained. The dynamics of the wheeled robot is studied when a motion program is set that allows pursuing a target. The dynamics of the wheeled robot is studied when a motion program is set that controls the angle of deviation of the trailer from the driving trolley axis. The results are illustrated graphically.

Keywords: control, nonholonomic constraint, servo-constraint, equations of motion, motion program, wheeled robot

Acknowledgments: This study was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-10019) and Chuvash Republic, <https://rscf.ru/en/project/23-21-10019/>

For citation: Mikishanina, E.A. (2024) Principles for implementing servo-constraints in nonholonomic mechanical systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 103–118. doi: 10.17223/19988621/89/8

Введение

К настоящему времени широко исследована динамика разнообразных неголономных систем. Это и модели шара Чаплыгина [1, 2], волчка Чаплыгина [3], сани Чаплыгина [4, 5], и модель Суслова [6] и др. Также в современной научной литературе имеется достаточное количество работ в области управления неголономными системами, в том числе при помощи роторов, гироскопов, за счет смещения центра масс. Укажем лишь некоторые публикации, освещающие данную проблематику: [7–10]. Однако существуют и другие способы управления механическими системами, например с помощью сервосвязей.

Впервые это понятие было введено А. Бегеном в его диссертации [11]. Позже П. Аппель сделал попытку систематизировать некоторые принципы динамики систем с сервосвязями в [12]. Согласно [12], существует категория механизмов, осуществляющих связи другим, отличным от неголономных связей, образом. Неголономные связи реализуются пассивно, вследствие контакта поверхностей, например отсутствие проскальзывания в точке контакта в модели качения твердого тела [2, 13] или отсутствие проскальзывания и верчения в модели резинового качения [13]. Сервосвязи же реализуются активно, за счет использования различного рода управляющих сил или управления инерционными свойствами системы [14, 15].

В современной науке теория механических систем с сервосвязями получила развитие в трудах А.Г. Азизова [16], В.И. Киргетова [17], В.В. Козлова [14, 15, 18], Я.В. Татарина [19] и зарубежных авторов [20, 21]. В работах В.В. Козлова излагаются некоторые принципы динамики систем с сервосвязями на примере систем с одной сервосвязью в смысле Бегена–Аппеля. В работе Я.В. Татарина предлагается альтернативный подход, основанный на неклассическом принуждении. В.И. Киргетов предлагает применять аппарат неголономной механики к задачам с сервосвязями на примере метода прямого наведения (погоны) в динамике полетов. Однако, на наш взгляд, поскольку природа сервосвязей отличается от природы неголономных связей, осуществлять как неголономные связи они не могут. В данной работе рассмотрим наиболее классический вариант – реализацию сервосвязей посредством управляющих сил.

Некоторые исследования в этой области опубликованы нами [22, 23] и носят прикладной характер. В работе [22] анализируется движение сферического робота, стесненное сервосвязью Билимовича. В [23] рассмотрено движение сфероробота с маятниковым приводом за целью методом погони. В отличие от работы В.И. Киргетова, где сервосвязь метода погони реализуется как неголономная, в нашей работе она реализуется за счет введения управляющего крутящего момента, который генерирует маятниковый привод.

Описанные в современной научной литературе принципы работы с механическими системами, стесненными сервосвязями, кажутся не всегда понятными с точки зрения их практического применения. Поэтому в данной работе изложены теоретические аспекты составления уравнений движения неголономных механических систем с сервосвязями в контексте их физической реализации и указаны условия реализуемости сервосвязей.

На примере колесного робота с прицепом показана реализация программы движения, заданной конечными и дифференциальными сервосвязями. В основе математической модели колесного робота с прицепом лежит модель роллеррейсера – системы, являющейся связкой двух колесных платформ [24]. На ведущих колесах робота установлены электродвигатели с дифференциальным приводом. Для реализации сервосвязей привод генерирует управляющие крутящие моменты на колесах. В работе построены уравнения движения, найдены управления, реализующие программу движения, для иллюстрации полученных результатов построены графики искомых механических параметров и траектории движения.

1. Уравнения движения неголономных систем с сервосвязями

Рассмотрим некоторую механическую систему. Пусть на систему наложены неголономные ограничения (связи), линейные по скоростям:

$$f^s = \sum_{i=1}^n b_i^s(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i + b_0^s(\mathbf{q}, t) = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ – обобщенные координаты на конфигурационном пространстве размерности n .

Общая форма уравнений движения, как известно, представлена системой дифференциальных уравнений с неопределенными множителями

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F} + \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial f^k}{\partial \dot{\mathbf{q}}},$$

где T – кинетическая энергия, $\mathbf{F}$ – обобщенные силы, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right)^T$,

$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q_n} \right)^T$, λ_s – неопределенные множители, характеризующие силы реакции связей, которые единственным образом восстанавливаются из совместного решения уравнений движения и производных по времени от уравнений (1).

Пусть помимо неголономных связей (1) движение системы управляемо сервосвязями, и пусть они также линейны по скоростям:

$$\Phi^r = \sum_{i=1}^n \sigma_i^r(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i + \sigma_0^r(\mathbf{q}, t) = 0.$$

Запишем в матричном виде систему неголономных связей и систему сервосвязей

$$\mathbf{f} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_0 = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\Phi = \Sigma\dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0 = \mathbf{0}, \quad (3)$$

где $\mathbf{B} = \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial \dot{q}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^s}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial f^s}{\partial \dot{q}_n} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} b_0^1(\mathbf{q}, t) \\ \vdots \\ b_0^s(\mathbf{q}, t) \end{pmatrix}$, $\Sigma = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial \dot{q}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi^r}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial \Phi^r}{\partial \dot{q}_n} \end{pmatrix}$,

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0^1(\mathbf{q}, t) \\ \vdots \\ \sigma_0^r(\mathbf{q}, t) \end{pmatrix}.$$

Считаем, что уравнения (2), (3) независимы. Тогда, по всей видимости, существует вектор управлений (моментов) $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)^T$ такой, что по крайней мере p из компонент Q_i , $1 \leq p \leq n$, не равны тождественно нулю, и с их учетом уравнения движения примут вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q}, \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)^T$ – вектор неопределенных множителей. Неравные тождественно нулю управляющие силы будем называть активными и обозначим их $\tilde{Q}_i$.

Продифференцируем систему неголономных связей и сервосвязей по времени:

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{0}, \quad (5)$$

$$\Sigma\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\Sigma}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\Sigma}_0 = \mathbf{0}, \quad (6)$$

где

$$\dot{\mathbf{B}} = \left\| \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial t} \right\|, \quad \dot{\mathbf{B}}_0 = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_0^1(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial b_0^1(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_0^s(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial b_0^s(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \end{pmatrix},$$

$$\dot{\Sigma} = \left\| \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial t} \right\|, \quad \dot{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_0^1(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \sigma_0^1(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_0^r(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \sigma_0^r(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \end{pmatrix}$$

есть матрицы, состоящие из полных по времени производных элементов матриц $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{\Sigma}_0$ соответственно.

Предложение 1. Динамика механической системы с наложенными на нее неголономными ограничениями (2), управляемой сервосвязями (3), задается системой $n + s + r$ дифференциальных уравнений (4)–(6). Уравнения (3) задают программу движения механической системы.

Сначала имеет смысл совместно решить уравнения движения (4) с производными по времени от неголономных ограничений (5). Для этого распишем систему (4) более подробно:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = F_i + \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial f^k}{\partial \dot{q}_i} + Q_i, i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Введем обозначения: $\mathbf{A} = \left\| \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\|$ – положительно определенная матрица коэффициентов, задающая евклидову метрику на пространстве ускорений $(\ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}})$; $\mathbf{T}' = \left\| \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\|$ – вектор-столбец такой, что для уравнений Лагранжа вектор $\ddot{\mathbf{q}}_f = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{T}')$ задает освобожденное от всех связей движение, т.е. движение только под действием приложенных сил.

Из системы уравнений (7) выразим вектор ускорений

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{T}' + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q}). \quad (8)$$

Подставляя его в (5), получим

$$\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{F} - \mathbf{T}') - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{Q} - \mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{B}}_0, \quad (9)$$

где $\mathbf{C} = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T$, $\mathbf{D} = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}$.

Подставляя выражения (8) с учетом (9) в (6), получим линейную относительно управляющих сил систему

$$\begin{aligned} & \mathbf{\Sigma} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}) \mathbf{Q} = \\ & + - \mathbf{\Sigma} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}) (\mathbf{F} - \mathbf{T}') + \mathbf{\Sigma} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} (\dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{B}}_0) - \dot{\mathbf{\Sigma}} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{\Sigma}}_0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица n -го порядка.

Система (10) в общем случае является системой r уравнений, линейных относительно Q_i , среди которых p не равны тождественно нулю.

Необходимое условие реализуемости сервосвязей (3). Если сервосвязи (3) реализуемы, то

$$\mathbf{\Sigma} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}) \mathbf{Q} \neq \mathbf{0}.$$

Возможны следующие случаи:

1) если $p = r$, то система (10) определена, тогда компоненты векторов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{Q}$ восстанавливаются однозначно из уравнений (9), (10);

2) если $p > r$, то система (10) не определена и свободные переменные необходимо выбирать из числа $\tilde{Q}_i$. Тогда s функций λ_k и r функций $\tilde{Q}_i$ будут выражаться через оставшиеся $(p - r)$ функций $\tilde{Q}_i$. Другими словами, программа движения

механической системы не определена. Поэтому для ее доопределения необходимо задать свободные $\tilde{Q}_i$, исходя из возможности их физической реализации.

3) если $p < r$, то управление задано с избытком. Вообще говоря, решение задачи будет невозможно.

В случае механической системы только с одной сервосвязью

$$\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (11)$$

система (10) будет состоять из одного уравнения

$$\Sigma \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} = -\Sigma \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{T}') - \dot{\Sigma} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\Sigma}_0. \quad (12)$$

Необходимое условие реализуемости сервосвязи (11). Если сервосвязь (11) реализуема, то выполняется условие

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \right) \neq 0,$$

причем если вектор $\mathbf{Q}$ содержит одну активную компоненту, то она восстанавливается однозначно из (12), иначе программа движения не задана.

Замечание 1. Была рассмотрена неголономная система с кинематическими (дифференциальными) сервосвязями (3). Хотя по аналогии с голономными и неголономными связями сервосвязи могут быть заданы не только в кинематическом, но и в геометрическом (конечном по Аппелю) виде:

$$\Psi(q_1, \dots, q_n, t) = 0, \quad (13)$$

и любую геометрическую связь можно представить в дифференциальной форме, взяв полную производную по времени от уравнения (13). Согласно теории Бегена–Аппеля, независимо от типа сервосвязей механизм определения управляющих сил остается одинаковым, причем сами сервосвязи принимаются во внимание лишь после того, как вычислены выражения $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \mathbf{F}$.

Рассмотрим далее динамику механической системы, стесненной сервосвязями, на примере движения двухзвенного колесного робота с дифференциальным приводом.

2. Уравнения движения двухзвенного колесного робота

Механическая система состоит из двух колесных платформ (робота и прицепа), движущихся по плоскости. Запишем допущения, касающиеся конструктивных особенностей (рис. 1):

1. На роботе жестко закреплены два активных колеса с независимыми двигателями и роульное колесо, которое крутится во все стороны и не влияет на динамику системы. Оси вращения активных колес совпадают. Обозначим точкой O_1 центр оси, соединяющей колеса. Центр масс робота C может быть смещен вдоль его главной оси, перпендикулярной оси колес, от точки O_1 на расстояние d_1 .

2. На прицепе жестко закреплена одна отбалансированная колесная пара с пассивными колесами так, что центр масс прицепа совпадает с геометрическим центром O_2 колесной пары.

3. Прицеп жестко сцеплен с жесткой рамой, которая, в свою очередь, крепится шарниром в точке O_1 к роботу. Рама может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O_1 .

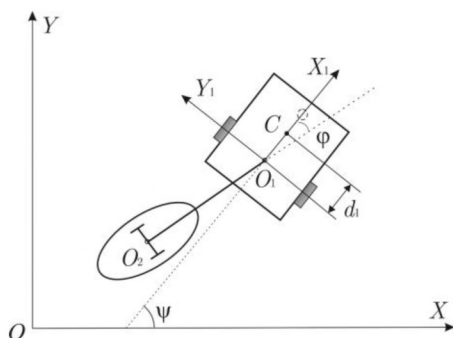


Рис. 1. Схематический дизайн колесного робота
Fig. 1. Schematic diagram of a wheeled robot

Введем две системы координат в пространстве: неподвижную $OXYZ$ и подвижную $O_1X_1Y_1Z_1$, связанную с геометрическим центром оси, соединяющей активные колеса, и осями O_1X_1 , совпадающей с главной осью платформы, и O_1Y_1 , проходящей через центры активных колес. Считаем, что $d_1 \geq 0$.

Введем обозначения в подвижной системе координат: r – радиус колеса робота, b – длина жесткой рамы, соединяющей прицеп с роботом; $2l$ – расстояние между геометрическими центрами колес робота; $C(d_1, 0)$ – координаты центра масс робота; m_1 – масса платформы робота; m_k – масса активного колеса; m_2 – общая масса прицепа с колесной парой; I_1 – момент инерции горизонтальной платформы (без колес) робота относительно вертикальной оси O_1Z_1 ; I_{kz} – момент инерции ведущих колес относительно вертикальной оси O_1Z_1 ; I_{ky} – «приведенный» момент инерции колеса с учетом момента инерции ротора электродвигателя относительно оси O_1Y_1 ; I_2 – центральный тензор инерции прицепа относительно вертикальной оси, проходящей через геометрический центр второй колесной пары O_2 ; $\mathbf{V} = (V_1, V_2, 0)$ – вектор скорости центра O_1 колесной оси робота; $\mathbf{V}_{p_1}, \mathbf{V}_{p_2}$ – векторы скоростей геометрических центров колес; $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ – вектор угловой скорости робота; $\mathbf{\omega}_1 = (0, \omega_1, \Omega)$, $\mathbf{\omega}_2 = (0, \omega_2, \Omega)$ – векторы угловых скоростей активных колес; ϕ_1, ϕ_2 – углы поворота колес относительно горизонтальной оси O_1Y_1 ; ψ – угол поворота подвижной системы координат относительно неподвижной, $\dot{\psi} = \Omega$; ϕ – угол поворота оси прицепа относительно оси робота, причем при повороте оси прицепа против часовой стрелки угол принимает положительные значения, иначе – отрицательные.

Рассматриваемая система является неголономной: на колеса каждого из звеньев накладываются неголономные ограничения, которые делают невозможным любое движение данного тела в направлении, перпендикулярном его главной оси:

$$f_1 = V_2 = 0, \quad f_2 = V_1 \sin \phi - V_2 \cos \phi + b(\Omega + \dot{\phi}) = 0 \quad (14)$$

а также условия отсутствия проскальзывания в точках контакта с плоскостью качения активных колес

$$f_3 = V_1 - r\omega_1 - l\Omega = 0, \quad f_4 = V_1 - r\omega_2 + l\Omega = 0. \quad (15)$$

Также для выполнения некоторой заданной программы движения электродвигатели на колесах будут генерировать управляющие крутящие моменты U_1, U_2 .

Кинетическая энергия механической системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \tilde{I}_1 \Omega^2 + \frac{1}{2} \tilde{I}_2 (\Omega + \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} I_{ky} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} M (V_1^2 + V_2^2) + d_1 m_1 v_2 \Omega + m_2 b (\Omega + \dot{\phi}) (V_1 \sin \phi - V_2 \cos \phi),$$

где $\tilde{I}_1 = I_1 + 2m_k l^2 + 2I_{kz}$, $\tilde{I}_2 = I_2 + m_2 b^2$, $M = m_1 + m_2 + 2m_k$.

Записывая уравнения движения в квазискоростях с неопределенными множителями, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial V_1} \right) - \Omega \frac{\partial T}{\partial V_2} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial V_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial V_1} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial V_1} + \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial V_1}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial V_2} \right) + \Omega \frac{\partial T}{\partial V_1} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial V_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial V_2} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial V_2} + \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial V_2}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \Omega} \right) + V_1 \frac{\partial T}{\partial V_2} - v_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \Omega} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \Omega} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \Omega} + \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial \Omega}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_i} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \omega_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \omega_i} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \omega_i} + \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial \omega_i} + U_i, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (16)$$

Решая систему (16) совместно с производными по времени от связей (14), (15), получим уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{-J_2 \sin \phi \cos \phi \dot{\phi} V_1 + d_1 m_1 b^2 \Omega^2 + \frac{b^2}{r} (U_1 + U_2)}{J_2 \sin^2 \phi + M_0 b^2}, \\ \dot{\Omega} &= -\frac{d_1 m_1 V_1 \Omega + \frac{l}{r} (U_1 - U_2)}{J_1}, \quad \dot{\psi} = \Omega, \\ \dot{\phi} &= -\frac{V_1 \sin \phi}{b} - \Omega, \quad \omega_1 = \frac{V_1 - l \Omega}{r}, \quad \omega_2 = \frac{V_1 + l \Omega}{r}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $J_1 = \tilde{I}_1 + \frac{2l^2 I_{ky}}{r^2}$, $M_0 = M + \frac{2I_{ky}}{r^2}$, $J_2 = \tilde{I}_2 - 2m_2 b^2$.

Для определения местоположения колесного экипажа в неподвижной системе координат необходимо к системе (17) добавить уравнения, определяющие координаты (X, Y) точки O_1 :

$$\dot{X} = V_1 \cos \psi, \quad \dot{Y} = V_1 \sin \psi, \quad (18)$$

Таким образом, уравнения (17), (18) составляют полную систему уравнений движения.

3. Программа преследования подвижного объекта

Зададим программу движения, позволяющую роботу преследовать некоторый подвижный объект P , с заданной на плоскости OXY траекторией $P(x, y)$ или заданным вектором скорости $(\dot{x}, \dot{y})$ по методу прямой погони. В частном случае эта задача сводится к задаче движения по заданной траектории [23].

Замечание 2. Метод прямой погони относится к методам наведения и применяется, как правило, в баллистике [25], однако он применим, как показано в этой работе, и для управления наземными системами.

Согласно этому методу, вектор скорости $(\dot{X}, \dot{Y})$ точки O_1 должен быть всегда направлен на цель:

$$\frac{\dot{X}}{x - X} = \frac{\dot{Y}}{y - Y},$$

откуда следует

$$\psi = \text{ATAN2}(\dot{Y}, \dot{X}) = \text{ATAN2}(y - Y, x - X), \quad (19)$$

$$V_1 = f(t) \cdot \rho, \quad \rho = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2}, \quad (20)$$

где управляющая функция $f(t)$ является коэффициентом «расстояние–скорость», вид которого зависит от особенностей моделируемого сценария. Траектория точки O_1 будет находиться из уравнений

$$X = x - \rho \cos \psi, \quad Y = y - \rho \sin \psi.$$

Из условия (19) получим первую сервосвязь

$$\Omega = \frac{\dot{y} \cos \psi - \dot{x} \sin \psi}{\rho}. \quad (21)$$

Для доопределения второй сервосвязи (20) необходимо задать управляющую функцию $f(t)$ так, чтобы движение отвечало следующим условиям: робот находится от подвижного объекта на некотором расстоянии; при достижении критического расстояния ρ_0 изменяет направление скорости на противоположное во избежание столкновения; выходит на сервосвязь из состояния покоя. Этим условиям удовлетворяет

$$f(t) = \alpha \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right), \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad \rho_0 = \rho(0). \quad (22)$$

В [23] было найдено условие для коэффициента α в управляющей функции (22) при качении сферического робота с маятниковым приводом, при котором робот никогда не столкнется с преследуемым объектом. Аналогичное условие для колесной платформы примет вид:

$$\alpha > v_{\max} (\rho_0 - h)^{-1},$$

где $v_{\max}$ – максимальная величина абсолютного значения скорости преследуемого объекта, h – расстояние от геометрического центра оси активных колес до переднего края робота. Тогда $\rho > h \quad \forall t \in [0, +\infty)$.

Таким образом, имеем две сервосвязи и два управляющих крутящих момента U_1, U_2 . Управление задано однозначно. Подставим уравнения (17) в производные по времени от (20), (21) и получим выражения для управляющих крутящих моментов

$$U_{1,2} = r \left[\frac{\alpha l \Delta \rho \pm 2 J_1 b^2 \Omega}{2 l b^2 \rho} (\dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi - V_1) \mp \frac{J_1}{2 l \rho} (\ddot{y} \cos \psi - \ddot{x} \sin \psi - V_1 \Omega) + \right. \\ \left. + \frac{J_2}{4 b^2} \sin 2\varphi V_1 \dot{\varphi} - \frac{d_1 m_1 \Omega}{2 l} (\Omega l \pm V_1) \right],$$

где $\Delta = J_2 \sin^2 \varphi + M_0 b^2$. Имеем своего рода систему с обратной связью. Тогда динамика системы будет описываться уравнениями движения

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \alpha (\dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi - V_1), \\ \dot{\psi} &= \frac{\alpha (\dot{y} \cos \psi - \dot{x} \sin \psi)}{V_1 + \alpha \rho_0}, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{V_1 \sin \varphi}{b} - \frac{\alpha (\dot{y} \cos \psi - \dot{x} \sin \psi)}{V_1 + \alpha \rho_0} \end{aligned} \quad (23)$$

с начальными условиями $V_1(0) = 0$, $\psi(0) = \text{ATAN2}(y(0) - Y(0), x(0) - X(0))$, $\varphi(0) = 0$.

Численный эксперимент. Преследуемый объект движется по закону

$$x = 6 \sin 0.05t - \sin 0.3t + 2, \quad y = 5 + \cos 0.3t - 6 \cos 0.05t.$$

Параметры математической модели представлены в таблице.

Параметры математической модели

$I_1, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0.7	$m_1, \text{кг}$	4	$b, \text{м}$	1
$I_2, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0.3	$m_2, \text{кг}$	2	$d_1, \text{м}$	0.3
$I_{ky}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0.00028	$m_k, \text{кг}$	1	$l, \text{м}$	0.2
$I_{kz}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0.00014	$\alpha, \text{с}^{-1}$	1	$r, \text{м}$	0.075

На рис. 2 представлены траектории преследуемого объекта (точечная) и робота (сплошная), на рис. 3 показаны изменения скорости $V_1(t)$, угла $\varphi(t)$ и угловых скоростей колес $\omega_1(t)$ (точечная), $\omega_2(t)$ (сплошная).

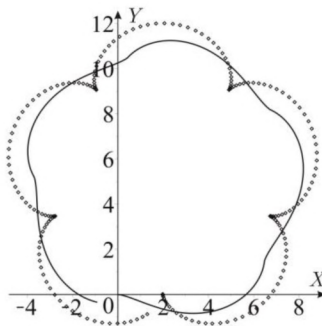


Рис. 2. Траектория движения робота (сплошная линия) за преследуемым объектом (точечная линия)

Fig. 2. Trajectory of the robot (solid line) pursuing a moving object (dotted line)

Если $\dot{x}, \dot{y}$ являются T -периодическими функциями времени, то динамика системы приобретает периодический характер, что легко подтверждается построением фазовых портретов и отображений за период.

Интересно влияние на систему параметра α , который отвечает за динамичность: чем выше его значение, тем быстрее система реагирует на изменение расстояния до преследуемого объекта. В [23] было показано, что функция расстояния при управлении (22) является ограниченной, если скорость преследуемого объект ограничена, причем при $\alpha \rightarrow \infty$ расстояние $\rho \rightarrow \rho_0$.

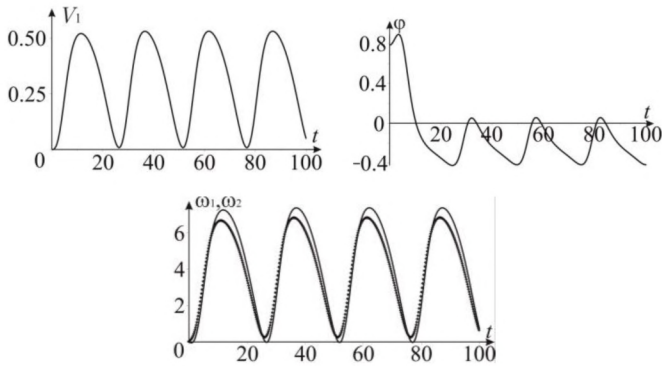


Рис. 3. Графики скорости $V_1(t)$, угла $\varphi(t)$ и угловых скоростей колес $\omega_1(t)$ (точечная линия), $\omega_2(t)$ (сплошная линия)

Fig. 3. Time dependences of the velocity $V_1(t)$, angle $\varphi(t)$, and angular velocities $\omega_1(t)$ (dotted line), $\omega_2(t)$ (solid line)

Следовательно, из системы (23) очевидно, что скорости $V_1(t)$, $\Omega(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ будут ограничены. При возрастании параметра α амплитуда периодических колебаний функций $V_1(t)$, $\Omega(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ возрастает до некоторого предельного значения.

4. Движение, управляемое конечной сервосвязью $\varphi = g(t)$

В предыдущем пункте сервосвязи, задающие программу движения, имели дифференциальный вид. В качестве примера рассмотрим алгоритм задания программы движения для механической системы, стесненной конечной (геометрической) сервосвязью

$$\varphi = g(t). \quad (24)$$

Иными словами, требуется так реализовать движение системы с помощью задания управления на колеса, чтобы выполнялось условие (24).

Используя уравнения движения (17), необходимо получить соотношения для управляющих крутящих моментов на активных колесах. Так как одной связи (24) недостаточно, чтобы однозначно задать U_1 , U_2 , то доопределим их, исходя из возможности физической реализации. Например, такую связь можно осуществить, если $U_1 = -U_2$. Тогда управляющие моменты находятся однозначно:

$$U_1 = -U_2 = \frac{r(J_1 \ddot{g} - d_1 m_1 V_1 \Omega)}{2l} + \frac{J_1 r b (d_1 m_1 \Omega^2 \sin g + M_0 V_1 \dot{g} \cos g)}{2l \Delta},$$

где $\Delta = J_2 \sin^2 g + M_0 b^2$, $\Omega = -\frac{V_1 \sin g}{b} - \dot{g}$. Система (17) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{-J_2 \dot{g} V_1 \sin g \cos g + d_1 m_1 (V_1 \sin g + b \dot{g})^2}{\Delta}, \\ \dot{\psi} &= -\frac{V_1 \sin g}{b} - \dot{g}, \quad \omega_1 = \frac{V_1 - l \Omega}{r}, \quad \omega_2 = \frac{V_1 + l \Omega}{r}. \end{aligned} \quad (25)$$

Исследуем динамику системы (25). Сделав замену $Q = V_1 \sqrt{\Delta}$, преобразуем первое уравнение системы к виду:

$$\dot{Q} = \frac{d_1 m_1 (Q \sin g + b \dot{g} \sqrt{\Delta})^2}{\Delta \sqrt{\Delta}}.$$

Функция Q является постоянной в следующих случаях:

- $d_1 = 0$;
- $\varphi = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $Q(0) = 0$, $\varphi = \text{const}$.

В остальных случаях она монотонно возрастает, так как $d_1 \geq 0$. Скорость $V_1(t)$ также будет неограниченно возрастать, и движение на сервосвязи начиная с некоторого момента времени станет невозможным.

При $d_1 = 0$ скорости находятся следующим образом:

$$V_1(t) = V_1(0) \sqrt{\frac{J_2 \sin^2 \varphi_0 + M_0 b^2}{J_2 \sin^2 g + M_0 b^2}}, \quad \Omega(t) = -\frac{V_1(0) \sin g}{b} \sqrt{\frac{J_2 \sin^2 \varphi_0 + M_0 b^2}{J_2 \sin^2 g + M_0 b^2}} - \dot{g}.$$

Численные эксперименты. Параметры модели заданы в таблице, за исключением местоположения центра масс первого звена. Примем $d_1 = 0$.

1. Случай постоянного местоположения прицепа относительно робота

$$g(t) = g_0 = \text{const}.$$

Очевидно, что движение будет происходить равномерно по окружности с линейной и угловой скоростями

$$V_1(t) = V_1(0) \text{ и } \Omega(t) = -\frac{V_1(0) \sin g_0}{b} \quad (g_0 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}, V_1(0) \neq 0)$$

или по прямой с линейной скоростью

$$V_1(t) = V_1(0) \quad (g_0 = \pi k, k \in \mathbb{Z}, V_1(0) \neq 0).$$

2. Случай равномерного вращения прицепа вокруг точки крепления к роботу

$$g(t) = 0.1 \cdot t. \quad (26)$$

На рис. 4 представлены траектория движения робота (точки O_1) и графики угловых скоростей колес при начальном условии $V_1(0) = 0.4$ м/с.

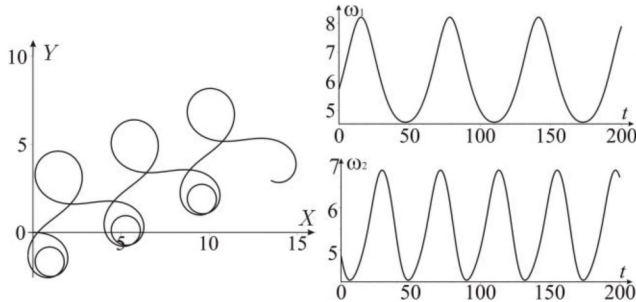


Рис. 4. Траектория движения и графики угловых скоростей колес при управлении сервосвязью (26)

Fig. 4. The trajectory of motion and graphs of angular velocities of the wheels under servo-constraint (26)

3. Случай периодически меняющегося угла

$$g(t) = \frac{\pi}{4} \cdot \sin 0.15t. \quad (27)$$

На рис. 5 представлены траектория движения робота (точки O_1) и графики угловых скоростей колес при начальном условии $V_1(0) = 0.4$ м/с.

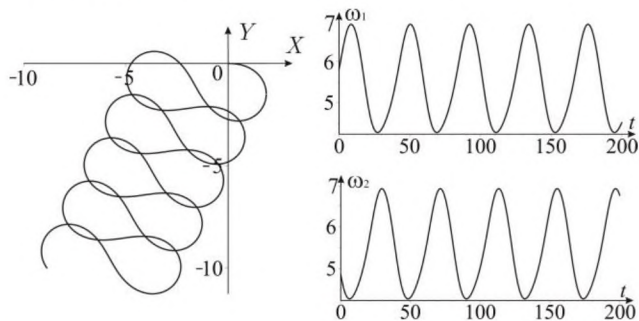


Рис. 5. Траектория движения и графики угловых скоростей колес при управлении сервосвязью (27)

Fig. 5. The trajectory of motion and graphs of angular velocities of the wheels under servo-constraint (27)

Заключение

Актуальность подобного рода исследований продиктована развитием мобильной робототехники, электроники, теории управления. Сервосвязи рассматриваются как способ управления механическими системами. Класс задач динамики механических систем с сервосвязями гораздо шире класса неголономных задач. Возможность выбора управляющих сил позволяет получить системы с разнообразной динамикой. В работе был построен алгоритм реализации сервосвязей на примере неголономной системы с качением. Методы реализации сервосвязей существенным образом отличаются от методов реализации голономных и неголономных связей. В случае с сервосвязями необходимо учитывать способ их осуществления, в то время как голономные и неголономные связи осуществляются вследствие простого контакта.

Список источников

1. Чаплыгин С.А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Математический сборник. 1903. Т. 24. С. 139–168. (Chaplygin S.A. On a Ball's Rolling on a Horizontal Plane // Regular and Chaotic Dynamics. 2002. V. 7 (2). P. 131–148. doi: 10.1070/RD2002v007n02ABEH000200).
2. Kilin A.A. The dynamics of Chaplygin ball: the qualitative and computer analysis // Regular and Chaotic Dynamics. 2001. V. 6 (3). P. 291–306. doi: 10.1070/RD2001v006n03ABEH000178
3. Borisov A.V., Kazakov A.O., Sataev I.R. The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin top // Regular and Chaotic Dynamics. 2014. V. 19 (6). P. 718–733. doi: 10.1134/S1560354714060094
4. Борисов А.В., Мамаев И.С. Неоднородные сани Чаплыгина // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 4. С. 625–639. doi: 10.20537/nd1704014

5. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика саней Чаплыгина // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 2. С. 219–225.
6. Микишанина Е.А. Исследование влияния случайных возмущений на динамику системы в задаче Сулова // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 3. С. 17–29. doi: 10.17223/19988621/73/2
7. Borisov A.V., Mikishanina E.A. Dynamics of the Chaplygin Ball with Variable Parameters // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2020. V. 16 (3). P. 453–462. doi: 10.20537/nd200304
8. Marigo A., Bicchi A. Rolling bodies with regular surface: Controllability theory and applications // IEEE Trans. On Automatic Control. 2000. V. 45 (9). P. 1586–1599. doi: 10.1109/9.880610
9. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regular and Chaotic Dynamics. 2012. V. 17 (3-4). P. 258–272. doi: 10.1134/S1560354712030045
10. Болотин С.В. Задача оптимального управления качением шара с роторами // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 4. С. 837–852.
11. Беген А. Теория гироскопических компасов Аншютца и Сперри и общая теория систем с сервосвязями / пер. с фр. Я.Н. Ройтенберга. М. : Наука, 1967. 171 с.
12. Анпель П. Теоретическая механика. М. : Физматлит, 1960. Т. 2: Динамика системы. Аналитическая механика. 487 с.
13. Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А., Бизяев И.А. Избранные задачи неголономной механики. М.–Ижевск : Ин-т компьютерных исслед., 2016. 883 с.
14. Kozlov V.V. The Dynamics of systems with servoconstraints. I // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. V. 20 (3). P. 205–224. doi: 10.1134/S1560354715030016
15. Kozlov V.V. The Dynamics of systems with servoconstraints. II // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. V. 20 (4). P. 401–427. doi: 10.1134/S1560354715040012
16. Азизов А.Г. К динамике систем, стесненных сервосвязями // Научные труды Ташкентского государственного университета им. В.И. Ленина. 1971. № 397. С. 3–9.
17. Курбетов В.И. О движении управляемых механических систем с условными связями (сервосвязями) // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31 (3). С. 433–446.
18. Козлов В.В. Принципы динамики и сервосвязи // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. № 5. С. 59–66.
19. Татарinov Я.В. Уравнения классической механики в лаконичных формах. М. : Изд-во Центра прикладных исслед. при мех.-мат. фак-те МГУ, 2005. 86 с.
20. Chen Y.H. Mechanical systems under servo-constraints: the Lagrange's approach // Mechatronics. 2005. V. 15 (3). P. 317–337.
21. Yang Y., Betsch P., Altmann R. A numerical method for the servo constraint problem of under-actuated mechanical systems // Pamm. 2015. V. 15 (1). P. 79–80. doi: 10.1002/pamm.201510030
22. Микишанина Е.А. Динамика качения сферического робота с маятниковым приводом, управляемого сервосвязью Билимовича // Теоретическая и математическая физика. 2022. Т. 211 (2). P. 281–294. doi: 10.4213/tmfl0227
23. Mikishanina E.A. Motion Control of a spherical robot with a pendulum actuator for pursuing a target // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2022. V. 18 (5). P. 899–913. doi: 10.20537/nd221223
24. Bizyaev I.A. The Inertial motion of a Roller Racer // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. V. 22 (3). P. 239–247. doi: 10.1134/S1560354717030042
25. Королев С.А., Липанов А.М., Русяк И.Г., Тененев В.А. Разработка подходов к решению обратной задачи внешней баллистики в различных условиях применения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 76–83. doi: 10.17223/19988621/57/6

References

1. Chaplygin S.A. (2002) On a Ball's Rolling on a Horizontal Plane. *Regular and Chaotic Dynamics*. 7(2). pp. 131–148. doi: 10.1070/RD2002v007n02ABEH000200

2. Kilin A.A. (2001) The dynamics of Chaplygin ball: the qualitative and computer analysis. *Regular and Chaotic Dynamics*. 6(3). pp. 291–306. doi: 10.1070/RD2001v006n03ABEH000178
3. Borisov A.V., Kazakov A.O., Sataev I.R. (2014) The reversal and chaotic attractor in the non-holonomic model of Chaplygin top. *Regular and Chaotic Dynamics*. 19(6). pp. 718–733. doi: 10.1134/S1560354714060094
4. Borisov A.V., Mamaev I.S. (2017) An inhomogeneous Chaplygin sleigh. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 13(4). pp. 625–639. doi: 10.20537/nd1704014
5. Borisov A.V., Mamaev I.S. (2009) The dynamics of a Chaplygin sleigh. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 73(2). pp. 156–161.
6. Mikishanina E.A. (2021) Issledovanie vliyaniya sluchaynykh vozmushcheniy na dinamiku sistemy v zadache Suslova [Investigation of the influence of random perturbations on the dynamics of the system in the Suslov problem]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 73. pp. 17–29. doi: 10.17223/19988621/73/2
7. Borisov A.V., Mikishanina E.A. (2020) Dynamics of the Chaplygin ball with variable parameters. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 16(3). pp. 453–462. doi: 10.20537/nd200304
8. Marigo A., Bicchi A. (2000) Rolling bodies with regular surface: Controllability theory and applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 45(9). pp. 1586–1599. doi: 10.1109/9.880610
9. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. (2012) How to control Chaplygin's sphere using rotors. *Regular and Chaotic Dynamics*. 17(3–4). pp. 258–272. doi: 10.1134/S1560354712030045
10. Bolotin S.V. (2012) Zadacha optimal'nogo upravleniya kacheniem shara s rotorami [The problem of optimal control of the rolling ball with rotors]. *Nelineynaya Dinamika – Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 8(4). pp. 837–852.
11. Beghin M.H. (1931) *Étude théorique des compas gyrostatiques Anschütz et Sperry*. Paris: Impr. Nationale.
12. Appel P. (1953) *Traité de Mécanique rationnelle: V.2. Dynamique des systèmes. Mécanique analytique*. Paris: Gauthier-Villars.
13. Borisov A.V., Mamaev I.S., Kilin A.A., Bizyaev I.A. (2016) *Izbrannye zadachi negolonnoy mekhaniki* [Selected problems of nonholonomic mechanics]. Moscow–Izhevsk.
14. Kozlov V.V. (2015) The dynamics of systems with servoconstraints. I. *Regular and Chaotic Dynamics*. 20(3). pp. 205–224. doi: 10.1134/S1560354715030016
15. Kozlov V.V. (2015) The dynamics of systems with servoconstraints. II. *Regular and Chaotic Dynamics*. 20(4). pp. 401–427. doi: 10.1134/S1560354715040012
16. Azizov A.G. (1971) K dinamike sistem, stesnyonnykh servosvyaziyami [To the dynamics of systems constrained by servo-constraints]. *Nauchnye trudy TashGU*. 397. pp. 3–9.
17. Kirgetov V.I. (1967) O dvizhenii upravlyaemykh mekhanicheskikh sistem s uslovnymi svyaziyami (servosvyaziyami) [On the motion of controlled mechanical systems with conditional constraints (servo-constraints)]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 31(3). pp. 433–446.
18. Kozlov V.V. (1989) Printsipy dinamiki i servosvyazi [Principles of dynamics and servoconstraints]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika – Moscow University Mathematics Bulletin, Moscow University Mechanics Bulletin*. 5. pp. 59–66.
19. Tatarinov Ya.V. (2005) *Uravneniya klassicheskoy mekhaniki v lakonichnykh formakh* [Equations of classical mechanics in concise forms]. Moscow: Izdatel'stvo tsentra prikladnykh issledovaniy pri mekhaniko-matematicheskoy fakul'tete MGU.
20. Chen Y.H. (2005) Mechanical systems under servo constraints: the Lagrange's approach. *Mechatronics*. 15(3). pp. 317–337.
21. Yang Y., Betsch P., Altmann R. (2015) A numerical method for the servo constraint problem of underactuated mechanical systems. *Pamm*. 15(1). pp. 79–80. doi: 10.1002/pamm.201510030

22. Mikishanina E.A. (2022) Rolling motion dynamics of a spherical robot with a pendulum actuator controlled by the Bilimovich servo-constraint. *Theoretical and Mathematical Physics*. 211(2). pp. 679–691. doi: 10.1134/S0040577922050087
23. Mikishanina E.A. (2022) Motion control of a spherical robot with a pendulum actuator for pursuing a target. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 18(5). pp. 899–913. doi: 10.20537/nd221223
24. Bizyaev I.A. (2017) The inertial motion of a roller racer. *Regular and Chaotic Dynamics*. 22(3). pp. 239–247. doi: 10.1134/S1560354717030042
25. Korolev S.A., Lipanov A.M., Rusyak I.G., Tenenev V.A. (2019) Razrabotka podkhodov k resheniyu obratnoy zadachi vneshney ballistiki v razlichnykh usloviyakh primeneniya [Development of the approaches for solving an inverse problem of external ballistics in various application conditions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 77–84. doi: 10.17223/19988621/57/6

Сведения об авторе:

Микишанина Евгения Арифжановна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры актуарной и финансовой математики, научный сотрудник университетско-академической лаборатории «Искусственный интеллект и робототехника» Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова (Чебоксары, Россия). E-mail: evaeva_84@mail.ru

Information about the author:

Mikishanina Evgeniya A. (Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, I.N. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation). E-mail: evaeva_84@mail.ru

Статья поступила в редакцию 25.04.2023; принята к публикации 03.06.2024

The article was submitted 25.04.2023; accepted for publication 03.06.2024