

Научная статья

УДК 517.927.4

MSC: 65Q10, 76M20, 41A50

doi: 10.17223/19988621/88/2

Об интегральном подходе при использовании метода коллокации

Оксана Владимировна Гермидер¹, Василий Николаевич Попов²

^{1,2} Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,
Архангельск, Россия

¹ o.germider@narfu.ru

² v.popov@narfu.ru

Аннотация. Предложен матричный вариант реализации метода коллокации с использованием интегрального подхода для построения решения неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка. Метод основан на полиномиальной аппроксимации Чебышева производной четвертого порядка искомой функции. В качестве базисных функций использованы многочлены Чебышева первого рода. Проведен анализ сходимости решений, полученных методом коллокации с применением интегрального подхода с использованием в качестве узлов точек экстремумов и нулей многочленов Чебышева первого рода. Представлены результаты сравнения с аналогичными результатами, представленными в открытой печати.

Ключевые слова: метод коллокации, многочлены Чебышева первого рода, неоднородные дифференциальные уравнения

Благодарности: Исследование поддержано грантом РНФ № 24-21-00381 «Развитие методов полиномиальной аппроксимации Чебышева для решения нелинейных задач математической физики».

Для цитирования: Гермидер О.В., Попов В.Н. Об интегральном подходе при использовании метода коллокации // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 14–25. doi: 10.17223/19988621/88/2

Original article

About the integral approach using the collocation method

Oksana V. Germider¹, Vasilii N. Popov²

^{1,2} Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,
Arkhangelsk, Russian Federation

¹ o.germider@narfu.ru

² v.popov@narfu.ru

Abstract. The article describes a matrix method of polynomial Chebyshev approximation using an integral approach to construct a solution to a nonhomogeneous fourth-order differential equation

with mixed boundary conditions of the first kind. The proposed method is based on the expansion of the fourth-order derivative of the desired function into a series in terms of Chebyshev polynomials of the first kind and the representation of the partial sum of this series as a product of matrices whose elements are, respectively, the Chebyshev polynomials and the coefficients in this expansion. In this paper, using analytical formulas for calculating integrals of Chebyshev polynomials, we obtain a representation of the desired function in terms of the product of the matrices defined above. The use of points of extrema and zeros of Chebyshev polynomials of the first kind as nodes, as well as the properties of the sums of products of Chebyshev polynomials at these points, made it possible to reduce the boundary value problem by the collocation method to a system of inhomogeneous linear algebraic equations with a sparse matrix of this system. It is shown that the solution constructed in this way satisfies the differential equation at all nodes, including the boundary ones, in contrast to the approximate solution obtained by approximating the exact solution in the form of a finite sum of the Chebyshev series. The effectiveness of the proposed method is demonstrated by considering a boundary value problem with a known analytical solution. The convergence analysis of the constructed solution is carried out.

Keywords: collocation method, Chebyshev polynomials of the first kind, inhomogeneous differential equations

Acknowledgments: The research was supported by the Russian Academy of Sciences grant No. 24-21-00381 “Development of Chebyshev polynomial approximation methods for solving nonlinear problems of mathematical physics”.

For citation: Germider, O.V., Popov, V.N. (2024) About the integral approach using the collocation method. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 14–25. doi: 10.17223/19988621/88/2

Введение

Хорошо известно, что численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого и более высокого порядка, встречающихся в различных разделах гидродинамики, в области биотехнологий, геологии, конструирования авиационно-космической техники и т.д. [1–5], вызывает ряд трудностей. Это связано с наличием в уравнениях производных высокого порядка, оказывающих существенное влияние на обусловленность исходной краевой задачи. В связи с этим значительное внимание уделяется разработке высокоточных численных методов.

В представленной работе предлагается реализация метода полиномиальной аппроксимации Чебышева в матричной форме с применением интегрального подхода для решения неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка со смешанными граничными условиями. Производная четвертого порядка искомой функции записывается в виде усеченного ряда по многочленам Чебышева первого рода в матричной нотации. Для восстановления самой функции используются точные формулы для вычисления интегралов от многочленов Чебышева. Далее для нахождения коэффициентов полученного разложения производной поставленная задача сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений. В данной работе происходит развитие спектрального метода коллокации, описанного в [6, 7]. В отличие от этих публикаций производная третьего и более низкого порядка искомой функции, как и сама функция, записывается с использованием произведения матриц, введенного для представления производной четвертого порядка в виде усеченного ряда по многочленам Чебышева

первого рода; проводится анализ сходимости полученных решений при использовании как точек экстремумов, так и нулей многочленов Чебышева при выборе их в качестве узлов интерполирования. Здесь необходимо заметить, что скорость сходимости спектральных методов ограничена только регулярностью интерполируемой функции в отличие от методов конечных разностей и конечных элементов [8], а в случае использования полиномов Чебышева в качестве базисных функций и выбора точек коллокации в нулях или точках экстремумов этих полиномов наблюдается устойчивость к ошибкам округления [9].

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$u_x^{(4)} + f_1(x, u, u_x^{(1)}, u_x^{(2)}, u_x^{(3)}) = f_2(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u((-1)^i) = g_{i1}, \quad u^{(i)}((-1)^i) = g_{i2}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Предполагаем, что функция f_1 имеет в области определения непрерывные ограниченные частные производные по переменным x , u , $u_x^{(1)}$, $u_x^{(2)}$ и $u_x^{(3)}$, функция f_2 тождественно не равна нулю и имеет непрерывную ограниченную производную по x , а сама краевая задача (1), (2) имеет на отрезке $[-1; 1]$ единственное решение.

Метод решения краевой задачи

Представляем функцию $u_x^{(4)}$ в виде частичной суммы ряда полиномов Чебышева первого рода $\{T_j(x) = \cos(j \arccos x), (j = \overline{0, n})\}$ [10]:

$$u_x^{(4)}(x) = \sum_{j=0}^n a_j T_j(x) = \mathbf{T}(x) \circ \mathbf{I}_s \mathbf{A}, \quad (3)$$

где $\mathbf{T}(x)$ – матрица-строка размером $1 \times n'$ ($n' = n + 5$):

$$\mathbf{T}(x) = (T_0(x), T_1(x), \dots, T_{n+3}(x), T_{n+4}(x)),$$

знаком $\circ$ обозначено произведение Адамара двух матриц [11], $\mathbf{I}_s$ – матрица-строка размером $1 \times n'$ с ненулевыми элементами $I_{s,0,i} = 1$ ($i = \overline{0, n}$). Здесь и ниже нумерация строк и столбцов начинается с нуля. Матрица-столбец $\mathbf{A}$ имеет размер $n' \times 1$, ее элементами являются коэффициенты a_j ($j = \overline{0, n}$) в разложении (3) и c_0, c_1, c_2, c_3 :

$$\mathbf{A} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, c_0, c_1, c_2, c_3)^T.$$

Выберем в качестве узлов интерполяции в (1) точки экстремума многочлена $T_n(x)$ [10]:

$$x_k = \cos \frac{\pi(n-k)}{n}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (4)$$

При таком выборе узлов интерполяции происходит медленный рост константы Лебега Λ_n на отрезке $[-1; 1]$, и при фиксированном числе узлов она стремится к своему минимальному значению, уменьшая погрешность алгебраического ин-

терполирования и обеспечивая меньшую чувствительность решения по отношению к ошибкам округления [12]. В случае, когда n – нечетное число, точное значение Λ_n можно определить по формуле [13]

$$\Lambda_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{(2k-1)\pi}{4n}. \quad (5)$$

Вблизи границ области $x_0 = -1$ и $x_n = 1$ происходит сгущение узловых точек (4), расположение которых симметрично относительно нуля. Узлы x_0 и x_n принимают значения -1 и 1 соответственно, что хорошо согласуется с постановкой краевой задачи (1) и (2). И последнее, при увеличении числа интерполяционных узлов (4) в два раза полученные значения функций в точках экстремума до удвоения сохраняются.

Из равенства $T_j(x) = \cos(j \arccos x)$ при подстановке в него узлов (4) получаем

$$T_j(x_k) = \cos \frac{\pi j(n-k)}{n}, \quad j, k = \overline{0, n}. \quad (6)$$

Интегрируя (3) по переменной x , получаем

$$u_x^{(3)}(x) = \sum_{j=0}^n a_j \int T_j(x) dx + c_0. \quad (7)$$

Для нахождения интегралов от многочленов Чебышева первого рода в (7) учитывая, что $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = x$ [10], имеем с точностью до константы

$$\int T_0(x) dx = x, \quad \int T_1(x) dx = \frac{x^2}{2}, \quad (8)$$

для четных $j \geq 2$ согласно [10] получаем

$$2 \int T_j(x) dx = \frac{T_{j+1}(x)}{j+1} - \frac{T_{j-1}(x)}{j-1}, \quad (9)$$

для нечетных $j \geq 3$

$$2 \int T_j(x) dx = \frac{T_{j+1}(x)}{j+1} - \frac{T_{j-1}(x)}{j-1} - \frac{2j(-1)^{(j+1)/2}}{j^2 - 1}. \quad (10)$$

Постоянная в (10) получена с использованием представления [12]:

$$T_j(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \varsigma_k x^{j-2k}, \quad \varsigma_k = \frac{(-1)^k 2^{j-2k-1} j(j-k-1)!}{(j-2k)! k!}, \quad (11)$$

где $\lfloor j/2 \rfloor$ – целая часть числа $j/2$.

В случае нечетных $j \geq 3$ из (11) находим эту постоянную:

$$\frac{\varsigma_{(j+1)/2}}{j+1} - \frac{\varsigma_{(j-1)/2}}{j-1} = \frac{2j(-1)^{(j+1)/2}}{j^2 - 1}. \quad (12)$$

Далее, пользуясь (8)–(10), запишем (7) в виде:

$$u_x^{(3)}(x) = (\mathbf{T}(x)(\mathbf{G} \circ \mathbf{I}) + \mathbf{P}_1(x))\mathbf{A}, \quad (13)$$

где $\mathbf{G}$ – квадратная матрица размером $n' \times n'$, в которой последний столбец нулевой, ненулевые элементы первой строки

$$G_{0,1} = \frac{1}{4}, \quad G_{0,2j+1} = (-1)^j \frac{2j+1}{(2j+1)^2 - 1}, \quad j = \overline{1, [(n'-1)/2] - 1}, \quad (14)$$

ненулевые элементы второй строки $G_{1,0} = 1$, $G_{1,2} = -1/2$, одиночные ненулевые элементы предпоследней и последней строк $G_{n'-2, n'-3} = 1/(2n'-4)$, $G_{n'-1, n'-2} = 1/(2n'-2)$, парные ненулевые элементы остальных строк

$$G_{j, j+(-1)^i} = \frac{(-1)^{i+1}}{2j}, \quad j = 2, n'-3, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

где $\mathbf{I}$ – квадратная матрица размером $n' \times n'$ со сроками $\mathbf{I}_s$, $\mathbf{P}_1(x)$ – матрица-строка размером $1 \times n'$, в которой один ненулевой элемент $P_{1,0,n+1} = 1$.

Например, при $n = 5$ квадратная матрица $\mathbf{G}$ имеет вид:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{24} & 0 & -\frac{7}{48} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{14} & 0 & -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & 0 \end{pmatrix}.$$

Последовательно интегрируя (13) по переменной x , получаем $u_x^{(2)}$, $u_x^{(1)}$ и u :

$$u_x^{(2)}(x) = \sum_{j=0}^n a_j \iint T_j(x) d^2 x + c_0 x + c_1 = (\mathbf{T}(x)(\mathbf{G}^2 \circ \mathbf{I}) + \mathbf{P}_2(x))\mathbf{A}, \quad (16)$$

$$u_x^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^n a_j \iiint T_j(x) d^3 x + c_0 \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 = (\mathbf{T}(x)(\mathbf{G}^3 \circ \mathbf{I}) + \mathbf{P}_3(x))\mathbf{A}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{j=0}^n a_j \iiint T_j(x) d^4 x + c_0 \frac{x^3}{6} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 = \\ &= (\mathbf{T}(x)(\mathbf{G}^4 \circ \mathbf{I}) + \mathbf{P}_4(x))\mathbf{A}, \end{aligned} \quad (18)$$

$P_i(x)$ – матрица-строка размером $1 \times n'$, в которой ненулевые элементы

$$P_{i,0,n+i} = 1, \quad P_{i,0,n+j} = \frac{x^{i-j}}{(i-j)!}, \quad j = \overline{1, i-1}, \quad i = \overline{2, 4}.$$

Подставляя (3), (4), (6), (13), (16)–(18) в (1) и используя (2), приходим к системе линейных n' -уравнений в матричной форме:

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i, \quad (19)$$

где $\mathbf{B}_i$ ($i = \overline{1, 3}$) – квадратные матрицы размером $n' \times n'$, первые две из них получены из уравнения (1) в узлах (4), последние четыре строки $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ нулевые, k -я ненулевая строка матрицы $\mathbf{B}_1$ определяется с использованием (3): $u_x^{(4)}(x_k) = (\mathbf{B}_1)_k \mathbf{A}$, т.е. $(\mathbf{B}_1)_k = \mathbf{T}(x_k) \circ \mathbf{I}_s$ ($k = \overline{0, n}$), строка $\mathbf{B}_2$ с таким же индексом восстанавливается на основе (16)–(18): $f_1(x_k, u(x_k), u_x^{(1)}(x_k), u_x^{(2)}(x_k), u_x^{(3)}(x_k)) = (\mathbf{B}_2)_k \mathbf{A}$; матрица $\mathbf{B}_3$ строится из граничных условий (4), ее ненулевые строки – последние четыре:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_3)_{n+l} &= \mathbf{T}((-1)^l) (\mathbf{G}^4 \circ \mathbf{I}) + \mathbf{P}_4((-1)^l), \\ (\mathbf{B}_3)_{n+2+l} &= \mathbf{T}((-1)^l) (\mathbf{G}^3 \circ \mathbf{I}) + \mathbf{P}_3((-1)^l), \quad l = 1, 2. \\ \mathbf{F}_{n' \times 1} &= (f_2(x_0), f_2(x_1), \dots, f_2(x_n), g_{11}, g_{21}, g_{12}, g_{22})^T. \end{aligned}$$

Для приведения матрицы $\mathbf{B}$ в (19) к разреженной матрице можно воспользоваться свойствами конечных сумм многочленов Чебышева в выбранных узлах интерполяции (4). Левые и правые части уравнения (19) умножаем на матрицу $\mathbf{S}$ размером $n' \times n'$, в которой $S_{kk} = 2n^{-1} (\mathbf{B}_1^T)_{kk}'$ ($k = \overline{0, n}$), $S_{n+j, n+j} = 1$ ($j = \overline{1, 4}$). Здесь верхний индекс T у $\mathbf{B}_1$ обозначает операцию транспонирования, а штрихом обозначено деление строк и столбцов с индексами 0 и n на 2. В частности, в результате умножения имеем $\mathbf{V}_1 = \mathbf{S}\mathbf{B}_1$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{S}\mathbf{J}$, где $\mathbf{J}$ и $\mathbf{V}_i$ ($i = 1, 2$) – квадратные матрицы размером $n' \times n'$, для $\mathbf{J}$ k -й ненулевой строкой является $\mathbf{T}(x_k)$ ($k = \overline{0, n}$). У матрицы $\mathbf{V}_1$ на главной диагонали $n+1$ элемент равен 1: $V_{1,k,k} = 1$ ($k = \overline{0, n}$), а остальные равны нулю, что следует из свойств конечных сумм полиномов Чебышева, вычисленных в точках экстремума $T_n(x)$ [10, 14]. У матрицы $\mathbf{V}_2$ те же элементы равны 1 и дополнительно к ним элементы $V_{2,n-i, n+i} = 1$ ($i = \overline{1, 4}$). Обозначая через $\mathbf{Q}$ матрицу размером $n' \times n'$, в которой первые k строк равны соответственно $\mathbf{P}_4(x_k)$ ($k = \overline{0, n}$), а остальные четыре строки нулевые, в результате умножения $\mathbf{S}\mathbf{Q}$ имеем матрицу $\mathbf{V}_3$, в которой отличны от нуля шесть элементов: $V_{3,2, n+1} = 1/24$, $V_{3,1, n+1} = 1/8$, $V_{3,0, n+2} = V_{3,2, n+2} = 1/4$, $V_{3,0, n+4} = V_{3,1, n+3} = 1$. Матрица $\mathbf{B}_3$, построенная из граничных условий (2), при умножении на $\mathbf{S}$ слева сохраняет свой вид: $\mathbf{S}\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_3$. Таким образом, уравнение (19) приводим к виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\mathbf{A} &= \mathbf{S}\mathbf{F}, \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{Q}\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение уравнения (20) находим LU -методом в системе компьютерной алгебры Maple [15] с числом значащих цифр 22. Число обусловленности матрицы $\mathbf{V}$ системы (20) определяем согласно [16, 17]:

$$\kappa(\mathbf{V}) = \|\mathbf{V}\| \cdot \|\mathbf{V}^{-1}\|,$$

где норму матрицы $\mathbf{V}$ находим как $\|\mathbf{V}\| = \max_{0 \leq i \leq n+4} \sum_{j=0}^{n+4} |V_{ij}|$ [16].

Функцию $u(x)$ получаем, используя (18) и найденные значения элементов матрицы $\mathbf{A}$.

Аналогично коэффициенты в (18) могут быть найдены, если в качестве узлов в уравнении (1) для переменной x выбрать нули многочлена $T_{n+1}(x)$ [10]:

$$x_k^* = \cos \frac{\pi(2n-2k+1)}{2(n+1)}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (21)$$

Результаты вычислений и их анализ

Рассмотрим уравнение [7]

$$u_y^{(4)} + u_y^{(2)} = \pi^4 \sin(\pi y) - \pi^2 \sin(\pi y), \quad -\frac{2}{3} \leq y \leq \frac{2}{3}, \quad (22)$$

с граничными условиями

$$u\left((-1)^i \frac{2}{3}\right) = (-1)^i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad u_y^{(i)}\left((-1)^i \frac{2}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

Аналитическое решение задачи (22) и (23) имеет вид: $u_e(y) = \sin(\pi y)$ [7].

Произведем замену переменных в уравнении (22) и граничных условиях (23):

$$y = \frac{2x}{3}, \quad x \in [-1; 1]. \quad (24)$$

В результате приходим к уравнению

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 u_x^{(4)} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 u_x^{(2)} = \pi^4 \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) - \pi^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (25)$$

с граничными условиями

$$u\left((-1)^i\right) = (-1)^i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad u_x^{(i)}\left((-1)^i\right) = -\frac{\pi}{3}, \quad i = 1, 2. \quad (26)$$

Явный вид приближенного аналитического решения, полученного методом коллокации с использованием интегрального подхода, для задачи (22), (23) при $n = 5$ в случае узловых точек (4) записывается следующим образом:

$$u(y) = 0.06826y^9 - 0.5892y^7 + 2.548y^5 - 5.168y^3 + 3.142y,$$

а в случае узловых точек (21):

$$u(y) = 0.07013y^9 - 0.5922y^7 + 2.549y^5 - 5.168y^3 + 3.142y.$$

В таблице представлены результаты вычислений с использованием интегрального подхода (IA) на основе (3), (7)–(18) для случая узловых точек, которые являются точками экстремума многочлена Чебышева степени n (4) и нулями $T_{n+1}(x)$ (21), где для расчета среднеквадратичного отклонения полученных значе-

ний в контрольных точках построенного решения от соответствующих значений точного u_e , вычисленных в этих же точках, как и в [18, 19], применено 100 равномерно распределенных контрольных точек на $(-2/3; 2/3)$ ($i = \overline{1; 100}$). В этом случае во внутренних точках отрезка $y_i \in [-2/3; 2/3]$ отклонение определяем согласно [6]:

$$N_{e,n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_e} (u_e(y_i) - u(y_i))^2}{\sum_{i=1}^{n_e} u_e^2(y_i)}},$$

где n_e – число внутренних точек отрезка $[-2/3; 2/3]$. Число обусловленности матрицы системы (20) при $n = 5$ составляет 46.0 для узловых точек (4) и (21), при $n = 11$ равно 50.8, при $n = 15$ равно 52.9.

Порядок сходимости находим, как и работах [18–20]:

$$r_{e,n} = \frac{N_{e,n}}{N_{e,2n+1}}.$$

Значения отклонения $N_{e,n}$ и порядка сходимости $r_{e,n}$

n	$N_{e,n}$				
	IA, (4)	ChP, (4)	IA, (21)	ChP, (21)	[7]
4	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$	$7.3 \cdot 10^{-4}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-1}$
5	$3.4 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	–
6	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-6}$	$7.6 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$
7	$3.0 \cdot 10^{-7}$	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-8}$	$5.7 \cdot 10^{-4}$	–
8	$8.4 \cdot 10^{-8}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-8}$	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$
9	$6.7 \cdot 10^{-10}$	$3.7 \cdot 10^{-6}$	$2.0 \cdot 10^{-10}$	$1.0 \cdot 10^{-5}$	–
10	$2.6 \cdot 10^{-10}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$7.8 \cdot 10^{-11}$	$4.8 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$
11	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$3.2 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	–
12	$7.8 \cdot 10^{-13}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$	$2.7 \cdot 10^{-13}$	$5.3 \cdot 10^{-8}$	$4.9 \cdot 10^{-10}$
13	$2.7 \cdot 10^{-15}$	$2.0 \cdot 10^{-10}$	$9.3 \cdot 10^{-16}$	$8.8 \cdot 10^{-10}$	–
n	$r_{e,n}$				
4	$3.0 \cdot 10^5$	$2.0 \cdot 10^4$	$3.7 \cdot 10^6$	$7.3 \cdot 10^3$	–
5	$2.6 \cdot 10^7$	$4.4 \cdot 10^5$	$4.1 \cdot 10^7$	$1.3 \cdot 10^5$	–
6	$8.5 \cdot 10^9$	$2.0 \cdot 10^7$	$4.9 \cdot 10^9$	$8.6 \cdot 10^6$	–

В таблице приведены значения $N_{e,n}$ для численного решения краевой задачи (25) и (26), представленного в виде усеченного ряда по многочленам Чебышева первого рода. Результаты, полученные в этом случае без использования интегрального подхода, в таблице имеют аббревиатуру ChP. Здесь приходим к системе $n+1$ линейных уравнений, полученных при использовании точек экстремума многочлена Чебышева степени n (4) и нулей $T_{n+1}(x)$ (21) в методе коллокации для (25), и осуществляем замену уравнений согласно граничным условиям (26) в точках, для которых $x = x_0$ и $x = x_n$, соответственно на уравнения

$$u((-1)^i) = (-1)^i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (27)$$

а в точках $x = x_1$ и $x = x_{n-1}$ – на уравнения

$$u_x^{(1)}((-1)^i) = -\frac{\pi}{3}, \quad i = 1, 2. \quad (28)$$

Из таблицы видно, что высокая точность полученного решения на основе интегрального подхода (IA) достигается при сравнительно малых значениях n как при использовании точек экстремумов многочленов Чебышева в качестве узлов интерполирования, так и нулей этих полиномов; наблюдается быстрая сходимость. Используя (5), получаем, что для всех значений n , указанных в таблице, отношение $\Lambda_n / \Lambda_{2n+1}$ не превышает 2 для узлов (4). В частности, при $n = 5$ значение константы Лебега составляет $\Lambda_5 = 1.98854$, а при $n = 11$ оно равно $\Lambda_{11} = 2.900825$. Учитывая, что для нечетного n имеет место равенство $\Lambda_n = \Lambda_{n-1}^*$ [12], где Λ_{n-1}^* – значение константы Лебега для узлов (21), получаем, что $\Lambda_4^* = 1.988854$ и $\Lambda_{10}^* = 2.900825$. Таким образом, медленный рост константы Лебега уменьшает погрешность алгебраического интерполирования.

Заключение

В работе предложен матричный метод полиномиальной аппроксимации Чебышева с использованием интегрального подхода построения решения неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка со смешанными граничными условиями. Построена матрица, позволяющая получить значения интегралов от полиномов Чебышева при умножении на нее слева матрицы, составленной из этих полиномов. Краевая задача при использовании точек экстремумов и нулей многочленов Чебышева сведена к системе неоднородных линейных уравнений с разреженной матрицей этой системы. Показано, что полученное таким образом решение при интегральном подходе сходится с повышенным порядком при использовании как точек экстремумов, так и нулей многочленов Чебышева в качестве точек коллокации.

Список источников

1. Tac V., Rausch M.K., Costabal F.S., Tepole A.B. Data-driven anisotropic finite viscoelasticity using neural ordinary differential equations // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2023. V. 411. Art. 116046. doi: 10.1016/j.cma.2023.116046
2. Nanshan M., Zhang N., Xun X., Cao J. Dynamical modeling for non-Gaussian data with high-dimensional sparse ordinary differential equations // *Computational Statistics & Data Analysis*. 2022. V. 173. Art. 107483. doi: 10.1016/j.csda.2022.107483
3. Khader M.M., Mahdy A.M.S., Shehata M.M. An Integral Collocation Approach Based on Legendre Polynomials for Solving Riccati, Logistic and Delay Differential Equations // *Applied Mathematics*. 2014. V. 5. P. 2360–2369. doi: 10.4236/am.2014.515228
4. Gimeno J., Jorba A., Jorba-Cusco M., Miguel N., Zou M. Numerical integration of high-order variational equations of ODEs // *Applied Mathematics and Computation*. 2023. V. 442. Art. 127743. doi: j.amc.2022.127743
5. Лун-Фу А.В., Бубенчиков М.А., Жамбаа С., Цыдыпов С.Г. Определение частот поперечных колебаний переходников и тупиковых ответвлений газопроводов // *Вестник Томского*

- государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 95–105. doi: 10.17223/19988621/68/9
6. Mai-Duy N., Tanner R.I. A spectral collocation method based on integrated Chebyshev polynomials for two-dimensional biharmonic boundary-value problems // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2007. V. 201. P. 30–47. doi: 10.1016/j.cam.2006.01.030
 7. Mai-Duy N., See H., Tran-Cong T. A spectral collocation technique based on integrated Chebyshev polynomials for biharmonic problems in irregular domains // *Appl. Math. Model.* 2009. V. 33 (1). P. 284–299. doi: 10.1016/j.apm.2007.11.002
 8. Shao W., Wu X. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations // *Appl. Math. Model.* 2015. V. 39 (9). P. 2554–2569. doi: 10.1016/j.apm.2014.10.048
 9. Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E. A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions // *Applied Mathematics and Computation*. 2018. V. 322. P. 55–65. doi: 10.1016/j.amc.2017.11.048
 10. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. Florida : CRC Press, 2003.
 11. Liu S., Trenkler G. Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products // *International Journal of Information and Systems Sciences*. 2008. V. 4 (1). P. 160–177. Corpus ID: 36767622
 12. Ibrahimoglu B.A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation // *Journal of Inequalities and Applications*. 2016. V. 93. P. 1–15. doi: 10.1186/s13660-016-1030-3
 13. McCabe J.H., Phillips G.M. On a certain class of Lebesgue constants // *BIT*. 1973. Vol. 13. P. 434–442. doi: 10.1007/BF01933407
 14. Гермидер О.В., Попов В.Н. О решении модельного кинетического уравнения ES // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, № 3. С. 37–49. doi: 10.22405/2226-8383-2022-23-3-37-49
 15. Corless R.M., Jeffrey D.J. The Turing factorization of a rectangular matrix // *ACM SIGSAM Bulletin*. 1997. V. 31 (3). P. 20–30. doi: 10.1145/271130.271135
 16. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М. : Наука, 1987. 598 с.
 17. Антюфеев В.С. Вероятностная оценка числа обусловленности матрицы // *Сибирский журнал чистой и прикладной математики*. 2018. Т. 18, № 1. С. 28–34. doi: 10.17377/РАМ.2018.18.3
 18. Голушко С.К., Идимешев С.В., Шанеев В.П. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // *Вычислительные технологии*. 2013. Т. 18, № 6. С. 31–43.
 19. Шанеев В.П., Брындин Л.С., Беляев В.А. hp-Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения бигармонического уравнения // *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки*. 2022. Т. 26, № 3. С. 556–572. doi: 10.14498/vsgtu1936
 20. Chen G., Li Zh., Lin P. A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow // *Adv. Comput. Math*. 2008. V. 29. P. 113–133. doi: 10.1007/s10444-007-9043-6

References

1. Tac V., Rausch M.K., Costabal F.S., Tepole A.B. (2023) Data-driven anisotropic finite viscoelasticity using neural ordinary differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 411(116046). DOI: 10.1016/j.cma.2023.116046.
2. Nanshan M., Zhang N., Xun X., Cao J. (2022) Dynamical modeling for non-Gaussian data with high-dimensional sparse ordinary differential equations. *Computational Statistics & Data Analysis*. 173(107483). DOI: 10.1016/j.csda.2022.107483.

3. Khader M.M., Mahdy A.M.S., Shehata M.M. (2014) An integral collocation approach based on Legendre polynomials for solving Riccati, logistic and delay differential equations. *Applied Mathematics*. 5. pp. 2360–2369. DOI: 10.4236/am.2014.515228.
4. Gimeno J., Jorba A., Jorba-Cusco M., Miguel N., Zou M. (2023) Numerical integration of high-order variational equations of ODEs. *Applied Mathematics and Computation*. 442 (127743). DOI: j.amc.2022.127743.
5. Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A., Zhambaa S., Tsydypov S.G. (2020) Opredeleniye chastot poperechnykh kolebaniy perekhodnikov i tupikovykh otvetvleniy gazoprovodov [Determining of transverse vibration frequencies for crossovers and dead ends of gas pipelines]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 95–105. DOI: 10.17223/19988621/68/9.
6. Mai-Duy N., Tanner R.I. (2007) A spectral collocation method based on integrated Chebyshev polynomials for two-dimensional biharmonic boundary-value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 201. pp. 30–47. DOI: 10.1016/j.cam.2006.01.030.
7. Mai-Duy N., See H., Tran-Cong T. (2009) A spectral collocation technique based on integrated Chebyshev polynomials for biharmonic problems in irregular domains. *Applied Mathematical Modelling*. 33(1). pp. 284–299. DOI: 10.1016/j.apm.2007.11.002.
8. Shao W., Wu X. (2015) An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations. *Applied Mathematical Modelling*. 39(9). pp. 2554–2569. DOI: 10.1016/j.apm.2014.10.048.
9. Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E. (2018) A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions. *Applied Mathematics and Computation*. 322. pp. 55–65. DOI: 10.1016/j.amc.2017.11.048.
10. Mason J., Handscomb D. (2003) *Chebyshev Polynomials*. Boca Raton: CRC Press. 2003.
11. Liu S., Trenkler G. (2008) Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products. *International Journal of Information and Systems Sciences*. 4(1). pp. 160–177.
12. Ibrahimoglu B.A. (2016) Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation. *Journal of Inequalities and Applications*. 93. pp. 1–15. DOI: 10.1186/s13660-016-1030-3.
13. McCabe J.H., Phillips G.M. (1973) On a certain class of Lebesgue constants *BIT Numerical Mathematics*. 13. pp. 434–442. DOI: 10.1007/BF01933407.
14. Germider O.V., Popov V.N. (2022) O reshenii model'nogo kineticheskogo uravneniya ES [On the solution of the model kinetic equation ES]. *Chebyshevskii Sbornik*. 23(3). pp. 37–49. DOI: 10.22405/2226-8383-2022-23-3-37-49.
15. Corless R.M., Jeffrey D.J. (1997) The Turing factorization of a rectangular matrix. *ACM SIGSAM Bulletin*. 31(3). pp. 20–30. DOI:10.1145/271130.271135.
16. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. (1987) *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Nauka.
17. Antyufeyev V. S. (2018) Probabilistic estimation of matrix condition number. *Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 18(1). pp. 28–34. DOI:10.17377/PAM.2018.18.3.
18. Golushko S.K., Idimeshev S.V., Shapeev V.P. (2013) Metod kollokatsiy i naimen'shikh nevyazok v prilozhenii k zadacham mekhaniki izotropnykh plastin [Application of collocations and least residuals method to problems of the isotropic plates theory] *Vychislitel'nyye Tekhnologii. – Computational Technologies*. 18(6). pp. 31–43.
19. Shapeyev V.P., Bryndin L.S., Belyayev V.A. (2022) hp-variant metoda kollokatsii i naimen'shikh kvadratov s integral'nymi kollokatsiyami resheniya bigarmonicheskogo uravneniya [The hp-version of the least-squares collocation method with integral collocation for solving a biharmonic equation]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskiye nauki — Journal of Samara State Technical University, Seriya Physical and Mathematical Sciences*. 26(3). pp. 556–572. DOI: 10.14498/vsgtu1936.

20. Chen G., Li Zh., Lin P. (2008) A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow. *Advances in Computational Mathematics*. 29. pp. 113–133. DOI: 10.1007/s10444-007-9043-6.

Сведения об авторах:

Гермидер Оксана Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия. E-mail: o.germider@narfu.ru

Попов Василий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей и прикладной математики Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия. E-mail: v.popov@narfu.ru

Information about the authors:

Germider Oksana V. (Candidate of Physics and Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russian Federation). E-mail: o.germider@narfu.ru

Popov Vasilii N. (Doctor of Physics and Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russian Federation). E-mail: v.popov@narfu.ru

Статья поступила в редакцию 26.04.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 26.04.2023; accepted for publication 10.04.2024