

Научная статья

УДК 534.1

doi: 10.17223/19988621/88/10

Нелинейный флаттер переходного процесса наследственно-деформируемых систем при сверхзвуковом режиме полета

Ботир Шукурллаевич Усмонов¹, Исмоил Иброхимович Сафаров²,
Мухсин Худойбердиевич Тешаев³

^{1,2} *Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан*

³ *Бухарское отделение Института математики им. В.И.Романовского
Академии наук Республики Узбекистан, Бухара, Узбекистан*

¹ *busmonov@hotmail.com*

² *safarov54@mail.ru*

³ *muhsin_5@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается задача нелинейного флаттера переходного процесса наследственно-деформируемого крыла летательного аппарата, движущегося со сверхзвуковой скоростью. Нелинейные колебания крыла описываются системой нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, которая решается численно методом, предложенным Ф. Бадаловым. Сравнительно оценены перемещения характерных точек крыла в условиях флаттера. Найден механический эффект существенной зависимости критической скорости флаттера от амплитуды ядра релаксации и коэффициента Пуассона. Определена критическая скорость, с которой начинается быстрый рост прогиба во времени.

Ключевые слова: гибкая пластинка, поршневая теория, флаттер, аэродинамическое воздействие, метод Бубнова–Галеркина, ядро релаксации

Для цитирования: Усмонов Б.Ш., Сафаров И.И., Тешаев М.Х. Нелинейный флаттер переходного процесса наследственно-деформируемых систем при сверхзвуковом режиме полета // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 124–137. doi: 10.17223/19988621/88/10

Original article

Nonlinear flutter of the transient process of hereditarily deformable systems in supersonic flight mode

Botir Sh. Usmonov¹, Ismoil I. Safarov², Muhsin Kh. Teshaeв³

^{1,2} *Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan*

³ *Bukhara Branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences
of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan*

¹ *busmonov@hotmail.com*

² safarov54@mail.ru

³ muhsin_5@mail.ru

Abstract. In this paper, the problem of nonlinear flutter of a transient process of a hereditarily deformable wing of an aircraft moving at supersonic speed is considered. The aim of the work is to study the flutter problem for plate elements of aircraft in a gas flow under loads caused by atmospheric turbulence. Aerodynamic effects are specified according to the linearized piston theory. Nonlinear wing oscillations are described by a system of nonlinear integro-differential equations. They are solved numerically by the method proposed by F. Badalov, which is based on the Bubnov–Galerkin method, finite difference method, and power series. Free vibration is analyzed under conditions of ideal elasticity with account for a hereditarily deformable thin wing. The displacements of characteristic points of the wing under flutter conditions are comparatively assessed. It is established that aerodynamic nonlinearity has little impact on the critical speed, but with an increase in the Mach number, this impact increases. The mechanical effect of a significant dependence of the critical flutter speed on the relaxation kernel amplitude and Poisson's ratio is revealed.

Keywords: flexible plate, piston theory, flutter, aerodynamic impact, Bubnov–Galerkin method, relaxation kernel

For citation: Usmonov, B.Sh., Safarov, I.I., Teshayev, M.Kh. (2024) Nonlinear flutter of the transient process of hereditarily deformable systems in supersonic flight mode. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 124–137. doi: 10.17223/19988621/88/10

Введение

Летательный аппарат (ЛА) при своем полете подвергается различным внешним нагрузкам. Эти нагрузки имеют динамический характер и вызываются многими причинами: случайными воздействиями атмосферной турбулентности; воздействиями воздушных волн, вызванных взрывами; динамическими нагрузками, возникающими при маневрах самолета; влиянием на хвостовое оперение турбулентного следа, образующегося за крыльями, гондолами или другими частями самолета [1–2]. Определение аэродинамических сил, действующих на крыло, приведено в работах [3–4]. Кроме того, на самолет действуют переменные силы при взлете и посадке, при его движении по Земле [3–4]. Под действием переменных нагрузок самолет деформируется и совершает вынужденные колебания в потоке газа под влиянием атмосферной турбулентности [5–6].

Проблема прочности и надежности самолета в целом и отдельных его элементов и проблема усталости материала и отдельных элементов конструкций всегда были важными для конструкторов [7–8]. За последнее время в связи с увеличением веса и размера машин и скорости полета эти проблемы приобрели особое значение. При решении данных проблем особенную роль играет учет влияния колебаний и деформаций самолета, возникающих под действием внешних переменных нагрузок, на прочность машины [9–10]. Если учесть прочность, экономичность и простоту исполнения основных элементов ЛА из композитных материалов [11–12], а также ярко выраженные реологические и наследственно-деформированные свойства при любых температурах этих материалов, то ЛА можно считать не только упругим, но и вязкоупругим телом [13–14].

Как показано в работах [15–17], диссипативные свойства деформируемых элементов существенно влияют на снижение (или управление) колебательных процессов механической системы. Поэтому исследование наследственно-деформируемых свойств элементов ЛА (механических систем) на колебательные процессы и явление флаттера при сверхзвуковом режиме полета является актуальной задачей.

Данная работа посвящена изучению панельного флаттера с учетом наследственно-деформируемых свойств материала крыла в потоке газа под действием нагрузок, вызываемых атмосферной турбулентностью.

Постановка задачи и основные соотношения

Задачи нелинейного флаттера наследственно-деформируемого крыла самолета переходного процесса в спокойной атмосфере при сверхзвуковом режиме полета решаются совместным рассмотрением уравнений теории вязко-упругости и аэрогидромеханики

$$LW + mW_{tt} + q_A = q(x, y, t), \quad (1)$$

где LW – оператор в частных производных, m – погонная масса крыла, $q(x, y, t)$ – поперечные нагрузки, $W_{tt} = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$.

Для анизотропных материалов определяющие уравнения имеют вид [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= E_{ijkl} \varphi[\varepsilon_{kl}] - \int_0^t R_{ijkl}(t - \tau) \varphi[\varepsilon_{kl}] d\tau = E_{ijkl}^* \cdot \varphi[\varepsilon_{kl}], \\ \varphi[\varepsilon_{kl}] &= \varepsilon_{kl} - \varphi \varepsilon_{kl}^3, \quad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) + \varphi[U_{k,i}], \end{aligned} \quad (2)$$

где ε_{kl} – компоненты тензора деформации, σ_{ij} – компоненты тензора напряжения, E_{ijkl} – мгновенные модули упругости, R_{ijkl} – ядро релаксации, $U_{k,i}$ – компоненты перемещений.

Если учесть условия симметрии, то для компонентов тензора упругости можно записать

$$E_{ijkl}^* = E_{jikl}^* = E_{ijlk}^* = E_{lkij}^* \quad \text{и} \quad v_{ij} = \text{const},$$

и для диссипативно-неоднородного материала соотношения (2) записываются как

$$\sigma = \{C^*\} \varepsilon \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} C^* &= \begin{bmatrix} E_{1111}^* & E_{1122}^* & E_{2111}^* \\ E_{1122}^* & E_{2222}^* & E_{1222}^* \\ E_{2111}^* & E_{1222}^* & E_{1212}^* \end{bmatrix}, \\ E_{1111}^* &= E_{1111} (1 - R_1^*), \quad E_{2222}^* = E_{2222} (1 - R_2^*), \quad E_{1122}^* = E_{1122} (1 - R_3^*), \\ E_{2111}^* &= E_{2111} (1 - R_4^*), \quad E_{1222}^* = E_{1222} (1 - R_5^*), \quad E_{1212}^* = E_{1212} (1 - R_6^*), \end{aligned}$$

$$C^* = \begin{bmatrix} E_{1111}^* & E_{1122}^* & 0 \\ E_{1122}^* & E_{2222}^* & 0 \\ 0 & 0 & E_{1212}^* \end{bmatrix},$$

$$E_{1111}^* = E_{1111}(1-R_1^*), \quad E_{1122}^* = E_{1122}(1-R_1^*), \quad E_{2211}^* = E_{2121}(1-R_2^*),$$

$$E_{2222}^* = E_{2222}(1-R_1^*), \quad E_{1212}^* = E_{1212}(1-R_3^*), \quad \sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T,$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}\}^T,$$

здесь $R_i^* (i = \overline{1,6})$ – оператор Вольтерры:

$$R_i^* f(t) = \int_0^t R_i(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad R_i(t-\tau) = \varepsilon e^{-\beta_i(t-\tau)} (t-\tau)^{\alpha_i}, \quad 0 < \alpha_i < 1. \quad (4)$$

В случае ортотропного материала

$$E_{1111} = \frac{E_{11}}{1-\nu_{11}\nu_{22}}, \quad E_{2222} = \frac{E_{22}}{1-\nu_{11}\nu_{22}}, \quad E_{1122} = \frac{E_{11}\nu_{22}}{1-\nu_{11}\nu_{22}},$$

$$E_{2211} = \frac{E_{22}\nu_{11}}{1-\nu_{11}\nu_{22}}, \quad E_{1212} = G_{12}, \quad B_{1122} = B_{2211}.$$

С учетом соотношений (3)–(4) для крутящего момента M_{xy} и изгибающих моментов M_x, M_y получим выражения

$$M_x = M_x^{(\ell)} + M_x^{(H)}, \quad M_y = M_y^{(\ell)} + M_y^{(H)}, \quad M_{xy} = M_{xy}^{(\ell)} + M_{xy}^{(H)},$$

где

$$M_x^{(\ell)} = -[D_{11}(1-R_1^*)W_{xx} + D_{12}(1-R_3^*)W_{yy} + 2D_{16}(1-R_4^*)W_{xy}],$$

$$M_y^{(\ell)} = -[D_{22}(1-R_2^*)W_{yy} + D_{21}(1-R_3^*)W_{xx} + 2D_{26}(1-R_5^*)W_{xy}],$$

$$M_{xy}^{(\ell)} = -[2D_{66}(1-R_6^*)W_{xy} + D_{16}(1-R_4^*)W_{xx} + D_{26}(1-R_5^*)W_{yy}],$$

$$M_x^{(H)} = \bar{M}_x^{(H)}(W_{xx}, W_{yy}, W_{xy}), \quad M_y^{(H)} = \bar{M}_y^{(H)}(W_{xx}, W_{yy}, W_{xy}), \quad M_{xy}^{(H)} = \bar{M}_{xy}^{(H)}(W_{xx}, W_{yy}, W_{xy}),$$

$$D_{11} = \frac{E_{1111}h^3(x,y)}{12}, \quad D_{12} = \frac{E_{1122}h^3(x,y)}{12}, \quad D_{16} = \frac{E_{2111}h^3(x,y)}{12},$$

$$D_{22} = \frac{E_{2222}h^3(x,y)}{12}, \quad D_{21} = D_{12}, \quad D_{26} = \frac{E_{1222}h^3(x,y)}{12}, \quad D_{66} = \frac{E_{1212}h^3(x,y)}{12},$$

а в случае ортотропного материала $D_{16} = D_{26} = 0$,

$$M_x^{(\ell)} = -[D_{11}(1-R_1^*)W_{xx} + D_{12}(1-R_1^*)W_{yy}],$$

$$M_y^{(\ell)} = -[D_{22}(1-R_2^*)W_{yy} + D_{21}(1-R_2^*)W_{xx}],$$

$$M_{xy}^{(\ell)} = -[2D_{66}(1-R_3^*)W_{xy}],$$

$$D_{11} = \frac{E_{11}h^3(x,y)}{12(1-\nu_{11}\nu_{22})}, \quad D_{22} = \frac{E_{22}h^3(x,y)}{12(1-\nu_{11}\nu_{22})}, \quad D_{66} = \frac{G_{12}h^3(x,y)}{12},$$

$$D_{12} = \nu_{12} D_{11}, \quad D_{21} = \nu_{11} D_{22},$$

$h(x, y)$ – толщина, $D_{ij}(x, y)$ – жесткость анизотропной пластинки.

Воспользуемся уравнением движения пластинки

$$L[W] + q(x, y, t) = m(x, y)W_{tt}, \quad (5)$$

где:

$$L[W] = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}, \quad q(x, y, t) = q_n(x, y, t) - q_A(x, y, t),$$

$$m(x, y) = \rho h(x, y),$$

ρ – плотность, $q_n(x, y, t)$ – поперечная нагрузка, $q_A(x, y, t)$ – аэродинамическая нагрузка.

Ставится задача определения решения уравнений (5), удовлетворяющих следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \ell_i[W] &= 0 \quad \text{при } x = 0, x = a, \\ \ell_j[W] &= 0 \quad \text{при } y = 0, y = b; \quad (i, j = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (6)$$

и начальным условиям:

$$W|_{t=0} = a(x, y), \quad W_t|_{t=0} = \beta(x, y). \quad (7)$$

Решение задачи (5)–(7) из-за физической и геометрической нелинейности сложно. При этом основные разрешающие уравнения задачи становятся нелинейными с неразделяющимися переменными. Разложим аэродинамическую силу в ряд:

$$q_A = x P_\infty \bar{M} W_x + x \frac{x+1}{4} P_\infty \bar{M}^2 W_x^2 + x \frac{x+1}{12} P_\infty \bar{M}^3 W_x^3 + \dots \quad (8)$$

и ограничимся линейными, квадратичными или кубическими членами. В разложении (8) демпфирующее слагаемое аэродинамической силы не учтено, так как влияние его в большинстве случаев невелико.

Для решения задачи (5)–(7) используя метод Бубнова–Галеркина. Дискретизируем по пространственным переменным [4], и решение уравнения (5) будем искать в виде:

$$W(x, y, t) = \sum_{k,i=1}^n U_{ki}(t) \phi_{ik}(x, y), \quad (9)$$

где $\phi_{ik}(x, y)$ – функции, удовлетворяющие граничным условиям (6), а $U_{ki}(t)$ удовлетворяют следующим интегро-дифференциальным уравнениям:

$$M \ddot{U}(t) + \sum_{m=1}^p A^{(m)} (1 - R_m^*) U(t) = q(t, U, \bar{M}). \quad (10)$$

Интегро-дифференциальные уравнения (10) удовлетворяют начальным условиям

$$U(0) = \alpha_0, \quad \dot{U}(0) = \alpha_1. \quad (11)$$

Здесь

$$U = [U_{11}, \dots, U_{1N}, \dots, U_{N1}, \dots, U_{NN}]^T, \quad q = [q_{11}, \dots, q_{1N}, \dots, q_{N1}, \dots, q_{NN}]^T,$$

$$\begin{aligned}
 M &= \{M_{kinj}\}, \quad A^{(m)} = \{a_{kinj}^{(m)}\}, \quad P = 6, m = \overline{1, p}, \quad k, i, n, j = \overline{1, N}, \\
 M_{kinj} &= \int_0^a \int_0^b m(x, y) \varphi_{ki}(x, y) \varphi_{nj}(x, y) dx dy, \quad a_{kinj}^{(1)} = \int_0^a \int_0^b (D_{11} \varphi_{kixx})_{xx} \varphi_{nj} dx dy, \\
 a_{kinj}^{(2)} &= \int_0^a \int_0^b (D_{22} \varphi_{kiyy})_{yy} \varphi_{nj} dx dy, \quad a_{kinj}^{(3)} = \int_0^a \int_0^b [(D_{12} \varphi_{kiyy})_{xx} + (D_{21} \varphi_{kixx})_{yy}] \varphi_{nj} dx dy, \\
 a_{kinj}^{(4)} &= \int_0^a \int_0^b [2(D_{16} \varphi_{kixy})_{xx} + (D_{16} \varphi_{kixx})_{xy}] \varphi_{nj} dx dy, \\
 a_{kinj}^{(5)} &= \int_0^a \int_0^b [2(D_{26} \varphi_{kiyy})_{yy} + (D_{26} \varphi_{kiyy})_{xx}] \varphi_{nj} dx dy, \\
 a_{nj}^{(t)} &= \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) \varphi_{nj} dx dy, \quad a_{kinj}^{(6)} = \int_0^a \int_0^b [2D_{66} \varphi_{kixy}]_{xy} dx dy.
 \end{aligned}$$

В случае ортотропной пластинки $a_{kinj}^{(1)}, a_{kinj}^{(2)}, a_{kinj}^{(3)}$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 a_{kinj}^{(1)} &= \int_0^a \int_0^b (D_{11} \phi_{kixx} + D_{12} \phi_{kiyy})_{xx} \phi_{nj} dx dy, \\
 a_{kinj}^{(2)} &= \int_0^a \int_0^b (D_{22} \phi_{kiyy} + D_{21} \phi_{kixx})_{yy} \phi_{nj} dx dy, \\
 a_{kinj}^{(3)} &= 4 \int_0^a \int_0^b (D_{66} \phi_{kixy})_{xy} \phi_{nj} dx dy.
 \end{aligned}$$

Здесь $q(t, U, \bar{M})$ – нелинейные вектор-функции, зависящие от обобщенных координат и числа Маха.

Исключаем слабо сингулярные особенности интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [4] и будем иметь следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 MU_m &= \alpha_0 + \alpha_1 t_m + \\
 + \sum_{s=0}^{m-1} B_s (t_m - t_s) &\left\{ q(t_s, U_s, \bar{M}) - \sum_j A_j \left[U_s - \frac{\varepsilon_j}{\alpha_j} \sum_n P_n^{(j)} e^{-\beta_j t_n} U_{s-n} \right] \right\}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (12)
 \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned}
 U(t_m) &= U_m; \quad t_m = m \Delta t; \quad B_0 = \frac{\Delta t}{2}, \quad B_s = \Delta t; \quad S = \overline{1, m-1}; \\
 P_0^{(j)} &= \frac{\Delta t^{\alpha_j}}{2}; \quad P_n^{(j)} = \frac{\Delta t^{\alpha_j}}{2} [(n+1)^{\alpha_j} - (n-1)^{\alpha_j}]; \quad P_S^{(j)} = [S^{\alpha_j} - (S-1)^{\alpha_j}] \frac{\Delta t^{\alpha_j}}{2}.
 \end{aligned}$$

Уравнения (12) позволяют исследовать колебания (флаттер) элементов ЛА. При использовании линейной наследственной теории эта зависимость записывается в виде [10]:

$$N = EF \left[N_0 + \frac{1}{2a} (1 - R^*) \int_0^a W_x^2 dx \right], \quad \sigma = E(1 - R^*) \varepsilon, \quad (13)$$

где:

$$R^* f(t) = \int_0^t R(t-\tau) f(\psi) d\tau, \quad \varepsilon = u_x + \frac{1}{2} u_x^2, \quad u = -z W_x,$$

$R(t)$ – ядро наследственности, E – модуль упругости, a – длина крыла, $F(x)$ – площадь поперечного сечения.

Если аэродинамическая нагрузка принята в виде [12]:

$$q_A = KVW_x,$$

то она называется линейной аэродинамической. Если будут учитываться квадратичные члены W_x и V , то q_A называется нелинейной аэродинамической нагрузкой. Следует учитывать также аэродинамическую нелинейность при больших числах Маха. С этой целью после разложения уравнения (13) по формуле бинома во втором приближении получим

$$q_A = \frac{xP_\infty}{C_\infty} [VW_x + x_1 V^2 W_x^2 + W_t]. \quad (14)$$

Вместо выражения (14) можно использовать выражение

$$q_A = K [VW_x + x_1 V^2 W_x^2 + W_t], \quad (15)$$

где для квазиустановившегося течения

$$z = (M^2 - 2) / (M^2 - 1) \rightarrow 1,$$

для квазистатического случая $z = 0$, в линейном приближении $x_1 = 0$.

Рассмотрим задачу флаттера наследственно-деформируемого крыла ЛА, учитывая геометрическую и аэродинамическую нелинейности. Крыло будем трактовать как консольный стержень, корневая часть которого жестко закреплена в фюзеляже (рис. 1). Такая одномерная стержневая модель с учетом переменности ширины $b(x)$ и толщины $h(x)$ позволяет точнее учесть реальные формы крыла самолета, чем двумерная модель. Более того, такая модель позволяет использовать известные по размаху численные значения изгибной жесткости и массы, найденные экспериментально в аэродинамических трубах.

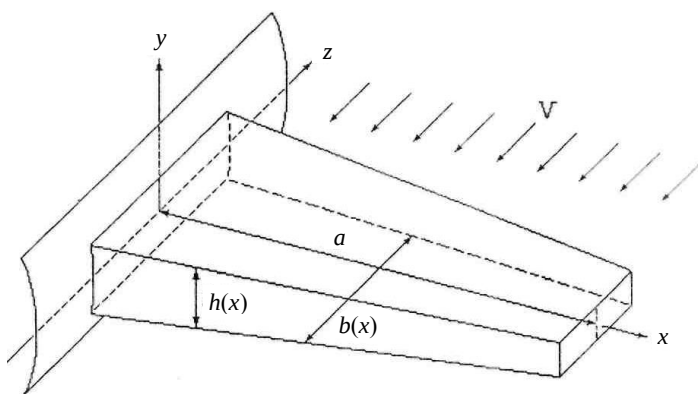


Рис. 1. Расчетная схема
Fig. 1. Computational scheme

Построим математическую модель колебаний (и флаттера) крыла с учетом отмеченных выше нелинейностей. Если использовать соотношения (13), изгибающий момент вычисляется следующим образом:

$$M_x = \int_{-\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} b(x) \sigma z dz = -J(x)(1-R^*)W_{xx}, \quad J(x) = \frac{b(x)h^3(x)E}{12}. \quad (16)$$

Подставляя (13), (15) и (16) в уравнение равновесия, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EJ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial W}{\partial x} \right) - m(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q_A(x, t),$$

где W – изгиб крыла. Теперь переходим к безразмерным координатам:

$$x = a\bar{x}, \quad b(x) = b_0 \bar{b}(x), \quad h(x) = h_0 \bar{h}(x), \quad t = t_1 \bar{t},$$

$$J(x) = J_0 \bar{b}(x) \bar{h}^3(x) = J_0 \bar{d}(x), \quad F(x) = F_0 \bar{b}(x) \bar{h}(x),$$

$$m(x) = m_0 \bar{b}(x) \bar{h}(x) = m_0 \bar{F}(x), \quad \sigma_1 = \frac{12N_0 a^2}{h_0^2}, \quad \theta_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_1},$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{m_0}{J_0}} a^2, \quad W = h_0 \bar{W}, \quad P = \frac{Va^3 \bar{K}}{J_0 E}, \quad \theta_2 = \frac{Eb_0(ae+1)}{48K} \left(\frac{h_0}{a} \right)^4,$$

$$K = aeP_\infty, \quad \gamma = \frac{Kza^4}{EJ_0 t_1}, \quad \bar{K} = \frac{K}{C_\infty}.$$

Масштаб времени $T_0 = L_0 \sqrt{m_0 / B^0}$, $L_0 = a$ – длина, B^0 – характерная жесткость на растяжение. Опуская штрихи над переменными, получим

$$(1-R^*)LM - \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[F(x)W_x \left(1 - \theta_1 (1-R^*) \int_0^1 W_x^2 dx \right) \right] + \\ + PW_x + \theta_2 P^2 W_x^2 + \gamma W_t + F(x)W_{tt} = 0, \quad (17)$$

где:

$$LW = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(d(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \quad d(x) = b(x)h^3(x), \quad F(x) = b(x)h(x).$$

Граничные условия для решения ИДУ можно записать в виде:

$$W_{xx} = 0, \quad W_{xxx} = 0 \quad \text{при } x=1. \quad (18)$$

Для корректной математической постановки задачи вместе с граничными условиями (18) необходимы и начальные условия, т.е.

$$W|_{t=0} = d_x(x), \quad W_t|_{t=0} = d_1(x). \quad (19)$$

Таким образом, уравнения (17), удовлетворяющие граничным (18) и начальным условиями (19), в совокупности составляют математическую модель задачи нелинейного флаттера крыла ЛА.

Решение поставленных задач в континуальной постановке представляет определенные трудности, поэтому построим дискретную модель. Для этого перейдем к системам с конечным числом степеней свободы, дискретизируя по пространственным переменным.

Решение уравнения (17) будем искать в виде:

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \phi_k(x, y) \quad (20)$$

где $\phi_k(x, y)$ – функции, удовлетворяющие граничным условиям, $u_k(t)$ – некоторые функции от времени, которые следует определить. Тогда, подставляя (20) в (17), имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{K=1}^N \left\{ a_{Ki} \ddot{u}(t) + \gamma b_{Ki} \dot{u}_K(t) + \omega_{Ki} (1 - R^*) u_K(t) + (Pd_{Ki} - \sigma a_{Ki}) u_K(t) + \right. \\ & \left. + \theta_2 P^2 \sum_{j=1}^N m_{Kji} u_K(t) u_j(t) - \sigma \theta_1 \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^N n_{Kjq} u_K(t) (1 - R^*) u_j(t) u_q(t) \right\} = 0, \quad (21) \\ & i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Интегрирование системы (21) с ядром Ржаницына–Колтунова

$$R(t) = \varepsilon \exp(-\beta t) t^{\alpha-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

осуществлено численным методом, разработанным выше. Численные значения искомых функций $u_K(t_i) = u_{K,i}$ получены из решения следующей рекуррентной системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{K=1}^N \left[a_{Ki} + \gamma \frac{\Delta t}{2} B_{Ki} \right] u_{Ki} = \sum_{K=1}^N \left[(a_{Ki} + \gamma t_i b_{Ki}) u_K + a_{Ki} t_i \dot{u}_K \right] - \\ & - \sum_{i_1}^{i-1} \left\{ \sum_{K=1}^N \left[\gamma A_{i_1} b_{Ki} u_{K,i_1} + A_{i_1} (t_i - t_{i_1}) (\omega_{K,i} (u_{K,i_1} - \frac{\varepsilon}{a} \sum_{i_2}^{i_1} B_{i_2} e^{-\beta t} u_{K,i_1-i_2+1}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + A_{i_1} (t_i - t_{i_1}) \left[\sum \sum \left(\theta_2 P^2 u_{K,i_1} u_{j,i_1} - \sigma \theta_1 \sum (u_{K,i_1} u_{j,i_1} u_{q,i_1} - \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{\varepsilon}{2} \sum B_{i_2} e^{-\beta t_{i_2}} u_{K,i_1} u_{j,i_1-i_2+1} u_{q,i_1-i_2+1} \right) \right] \right] \right\}, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (22)$$

где:

$$t_i = i \Delta t, \quad B_1 = \Delta t^\alpha / 2, \quad B_{i_2} = \Delta t^\alpha \left[(i_2 + 1)^\alpha - (i_2 - 1)^\alpha \right] / 2,$$

$$B_{i_1} = \Delta t^\alpha \left[i_1^\alpha - (i_1 - 1)^\alpha \right] / 2, \quad A_1 = \Delta t / 2, \quad A_i = \Delta t, \quad i = \overline{2, i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Методика проведения вычислительного эксперимента с помощью алгоритма (22), ее валидность приведены в работе [8], т.е. определение критической скорости флаттера в случае нелинейной постановки ничем не отличается от методики, применяемой в случае линейной постановки задачи.

В качестве примера рассмотрим задачу флаттера наследственно-деформируемого консольного крыла переменного поперечного сечения.

Граничные условия записываются в виде:

$$W = W'_x = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad M = M' = 0 \quad \text{при } x = 1.$$

В качестве базисных функций принимаются балочные функции

$$\phi_K(x) = (sh \lambda_K + \sin \lambda_K) (ch \lambda_K x - \cos \lambda_K x) - (ch \lambda_K + \cos \lambda_K) \times (sh \lambda_K x - \sin \lambda_K x);$$

$$\lambda_1 = 1.875, \quad \lambda_2 = 4.694, \quad \lambda_3 = 7.855, \quad \lambda_4 = 10.996, \dots, \quad \lambda_K = \frac{\pi}{2} (2K - 1).$$

Интегрирование системы ИДУ (21) осуществляется вышеизложенным методом при начальных условиях

$$u_K(0) = \left[\int_0^1 \alpha_0(x) \varphi_K(x) dx \right] / (\varphi_K, \varphi_K), \quad \dot{u}_K(0) = 0, \quad (23)$$

$$\alpha_0(x) = \left\{ [x(1-x)]^4 + \varphi_1(x) \right\} / 10.$$

Результаты и анализ

Рассматривается консольный стержень переменной ширины и толщины (см. рис. 1), учитывая геометрическую и аэродинамическую нелинейности при следующих исходных данных:

$$d(x) = b(x)h^3(x), \quad b(x) = d - \alpha_1 x, \quad h(x) = 1 - \alpha_2 x,$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad \chi_1 = 1.4, \quad K = \chi_1 P_\infty, \quad P_\infty = 1.014 \text{ кг/см}^2.$$

Численные результаты при $x = a$ были получены с учетом и без учета аэродинамической нелинейности: $h/a \neq 0$ и $h/a = 0$, с учётом аэродинамического демпфирования, а также вязких свойств крыла на основе критерия, приведенного в [12]. Результаты перемещений стержня переменной толщины и ширины (см. рис. 1) с учетом и без учета аэродинамической нелинейности отличаются до 10%.

Численные результаты приведены на рис. 2, 3. Кривые, характеризующие переходный процесс для функции прогиба во времени в точке $x = 0.5$ при $a = 0.1$, $a = 0.2$, соответствующей геометрически нелинейной, линейной аэродинамической и нелинейной аэродинамической модели идеально-упругого крыла, приведены на рис. 2. Аналогичные результаты для вязкоупругого крыла приведены на рис. 3.

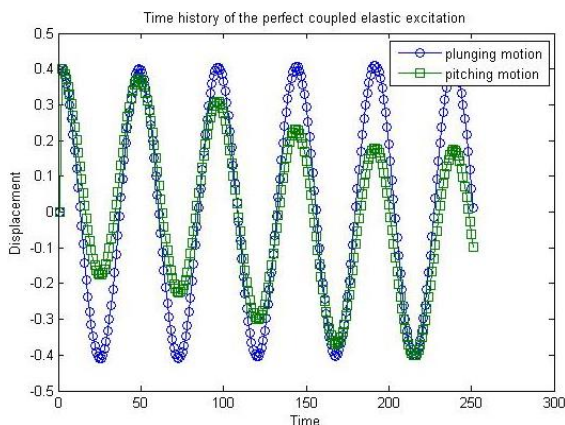


Рис. 2. Временная шкала идеальной модели упругого крыла

$$\chi = 0.9, \left(\frac{r}{b}\right)^2 = 0.44, \varepsilon = 0.0, \alpha = 0.0, \beta = 0.0, \Delta t = 0.1$$

Fig. 2. Time scale for an ideal elastic wing model at

$$\chi = 0.9, \left(\frac{r}{b}\right)^2 = 0.44, \varepsilon = 0.0, \alpha = 0.0, \beta = 0.0, \Delta t = 0.1$$

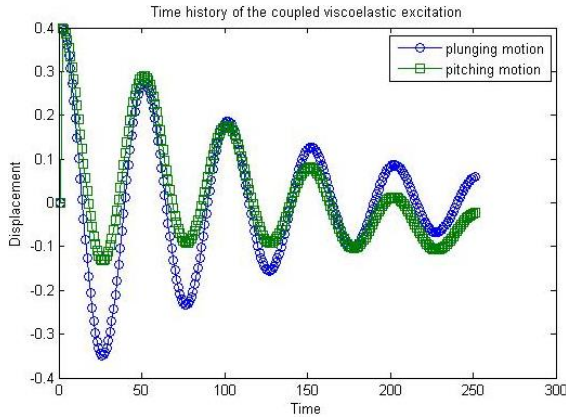


Рис. 3. Временная шкала идеальной модели вязкоупругого крыла

$$\chi = 0.9, \left(\frac{r}{b}\right)^2 = 0.44, \varepsilon = 0.2, \alpha = 0.25, \beta = 0.05, \Delta t = 0.1$$

Fig. 3. Time scale for an ideal viscoelastic wing model at

$$\chi = 0.9, \left(\frac{r}{b}\right)^2 = 0.44, \varepsilon = 0.2, \alpha = 0.25, \beta = 0.05, \Delta t = 0.1$$

На рис. 2, 3 показана свободная вибрация в условиях идеальной упругости без каких-либо эффектов структурных условий. Эти графики демонстрируют идеальные изгибные и крутильные смещения для

$$\chi = 0.9, \left(\frac{r}{b}\right)^2 = 0.44, \varepsilon = 0.0, \alpha = 0.0, \beta = 0.0, \Delta t = 0.1.$$

Критическая скорость $P_{кр}$, с которой начинается быстрый рост прогиба во времени, в упругом случае равна $P_{кр} = 5.06$ (в случае линейной постановки $P_{кр}^{(\lambda)} = 6.48$), а в вязкоупругом случае (см. рис. 2, 3) $P_{кр} = 3.2$ ($P_{кр}^{(\lambda)} = 6.48$).

Результаты критической скорости, полученные с учетом наследственно-деформируемых свойств материала крыла по предлагаемому методу, отличаются от результатов, полученных в работе [17] без учета наследственно-деформируемых свойств материала крыла (когда $R(t) = 0$), до 8%.

Заключение

Таким образом, на основе разработанной методики и алгоритма [8] решены задачи переходного процесса нелинейного флаттера наследственно-деформируемых систем при сверхзвуковом режиме полета. Установлено, что при учете наследственно-деформируемых свойств материала колебания крыла в зависимости от времени умеренно затухают до некоторого предельного значения. Выявлено, что при наступлении флаттера (когда достигается критическая скорость флаттера) амплитуда перемещений достигает своего максимального значения с некоторым опозданием для наследственно-деформируемых механических систем.

Установлено, что аэродинамическая нелинейность оказывает незначительное влияние на критическую скорость (до 5–6%).

Список источников

1. Романовский Ю.М., Стрелков С.П. О воздействии атмосферной турбулентности на самолет с упругими крыльями при различных скоростях полета // Известия АН СССР. ОТН Механика и машиностроение. 1959. № 4. С. 3–10.
2. Григолюк Э.И., Лампер Р.Е., Шандаров Л.Г. Флаттер панелей и оболочек // Итоги науки. Механика. М. : ВИНТИ, 1965. С. 34–90.
3. Гарифуллин М.Ф. Динамика и аэроупругость тонкостенных конструкций. Казань : Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2003.
4. Бадалов Ф.Б. Ганиханов Ш.Ф. Вибрации наследственно-деформируемых элементов конструкции летательных аппаратов. Ташкент : ТГАИ, 2002.
5. Безуевский А.В. Анализ характеристик аэроупругости беспилотного летательного аппарата с крылом большого удлинения // МСНТ : материалы XXXIII Всерос. конф. Миасс, 2013. Т. 2. С. 12–14.
6. Безуевский А.В. Влияние больших деформаций конструкции крыла на его модальные характеристики // Труды 55-й науч. конф. МФТИ. 2012. С. 51–53.
7. Бадалов Ф.Б., Усмонов Б.Ш. Новые нелинейные постановки задачи изгибно-элеронного флаттера крыла самолета // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2004. № 6. С. 30–33.
8. Бадалов Ф.Б., Усмонов Б.Ш. Прямая и вариационная постановка и методика решения задачи о вибрации наследственно-деформируемого крыла с элероном // Проблемы механики. 2004. № 1. С. 21–26.
9. Бадалов Ф.Б., Усмонов Б.Ш. Вибрация нелинейно наследственно-деформируемого крыла с элероном в воздушном потоке // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2004. № 1. С. 53–57.
10. Belubekyan M.V., Grishko A.M. The problem of flutter of a non-symmetric non-homogeneous over thickness rectangular plate. Shell Structures: Theory and Applications // Proceedings of the 10th SSTA Conference, Gdansk, Poland, 2013, 16–18 October 2013. P. 281–284.
11. Азарков А.В., Безуевский А.В., Григорьев А.В., Ишмурастов Ф.З., Малютин В.А. Расчетно-экспериментальные исследования характеристик жесткости консолей крыла полной аэродинамической модели самолета // Годовой отчет ФГУП «ЦАГИ» за 2015 год. М., 2016. С. 528–630.
12. Азаров Ю.А., Зиченков М.Ч., Парышев С.Э., Стрелков К.С. Развитие технологии моделирования явлений динамической аэроупругости в аэродинамических трубах. М. : Физматлит, 2018. 217 с.
13. Амирьянц Г.А., Буньков В.Г., Мамедов О.С., Парышев С.Э. Исследование характеристик статической и динамической аэроупругости моделей крыла компании BOEING // Современные научные проблемы и технологии в гражданской авиации. М. : Наука, 2013.
14. Usmonov B. Numerical Solution of Hereditary Equations with a Weakly Singular Kernel for Vibration Analysis of Viscoelastic Systems // Proceedings of the Latvian Academy of Sciences, Section B: Natural, Exact, and Applied Sciences. 2015. V. 69 (6). P. 326–330. doi: 10.1515/prolas-2015-0048
15. Баранов Н.И., Нуштаев П.Д., Нуштаев Ю.П. Флаттер органов управления самолетов и ракет. М. : Русавиа, 2003.
16. Mirzaev I., Turdiev M. Vibrations of buildings with a sliding foundation having lateral yielding contact under real seismic impacts // AIP Conference Proceedings. 2022. V. 2432. Art. 030050. doi: 10.1063/5.0089584
17. Durdiev D.Q., Totieva Z.D. Inverse problem for a second-order hyperbolic integro-differential equation with variable coefficients for lower derivatives // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. V. 17. P. 1106–1127.

References

1. Romanovskiy Yu.M., Strelkov S.P. (1959) O vozdeystvii atmosfery na samolyot s uprugimi kryl'yami pri razlichnykh skorostyakh polyota [On the effect of atmospheric turbulence on an aircraft with elastic wings at various flight speeds]. *Izvestiya AN SSSR, OTN, Mekhanika i mashinostroyeniye – Izvestiya USSR Academy of Sciences, OTN Mechanics and Engineering*. 4. pp. 3–10.
2. Grigolyuk E.I., Lamper R.E., Shandarov L.G. (1963) Flatter paneley i obolochek [Flutter of panels and shells]. *Itogi Nauki. Mekhanika*. Moscow: VINITI. pp. 34–90.
3. Garifullin M.F. (2003) *Dinamika i aerouprugost' tonkostennykh konstruksiy* [Dynamics and aeroelasticity of thin-walled structures]. Kazan: Kazan State Technical University Press.
4. Badalov F.B., Ganikhanov Sh.F. (2002) *Vibratsiya nasledstvenno-deformiruemyykh elementov konstruksiy letatel'nykh apparatov* [Vibrations of hereditarily deformable structural elements of aircraft]. Tashkent: Tashkent State Aviation Institute Press.
5. Bezuevskiy A.V. (2013) Analiz kharakteristik aerouprugosti bespilotnogo letatel'nogo apparata s krylom bol'shogo udlineniya [Analysis of the aeroelasticity characteristics of an unmanned aerial vehicle with a large elongation wing]. *MSNT materialy XXXIII Vserossiyskoy konferentsii, Miass*. 2. pp. 12–14.
6. Bezuevskiy A.V. (2012) Vliyaniye bol'shikh deformatsiy konstruksii kryla na ego modal'nye kharakteristiki [The influence of large deformations of the wing structure on its modal characteristics]. *Proceedings of the 55th Scientific Conference of the Moscow Institute of Physics and Technology*. pp. 51–53.
7. Mirzaev I., Khojmetov G., Yuvmitov A., Mirzaxmedov M. (2022) On influence of linear and nonlinear models of foundation-base interaction on vibrations of multi-storey buildings at seismic impacts. *AIP Conference Proceedings*. 2432. Article 030071. doi: 10.1063/5.0089506
8. Badalov F.B., Usmonov B.Sh. (2004) Pryamaya i variatsionnaya postanovka i metodika resheniya zadachi o vibratsii nasledstvenno-deformiruemogo kryla s eleronom [Direct and variational formulation and method for solving the problem of vibration of a hereditarily deformable wing with an aileron]. *Problemy mekhaniki – Problems of Mechanics*. 1. pp. 24–28.
9. Badalov F.B., Usmonov B.Sh. (2004) Vibratsiya nelineynoy nasledstvenno-deformiruemogo kryla s eleronom v vozdushnom potoke [Vibration of a non-linear hereditarily deformable wing with an aileron in the air flow]. *Doklady Akademii nauk Uzbekistana – Reports of Uzbekistan Academy of Sciences*. 1. pp. 53–57.
10. Belubekyan M.V., Grishko A.M. (2013) The problem of flutter of a non-symmetric non-homogeneous over thickness rectangular plate. *Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 10th SSTA Conference, Gdansk, Poland*. pp. 281–284.
11. Agarkov A.V., Bezuevskiy A.V., Grigor'ev A.V., Ishmuratov F.Z., Malyutin V.A. (2016) Raschetno-eksperimental'nye issledovaniya kharakteristik zhestkostey konsoli kryla polnoy aerodinamicheskoy modeli samoleta [Calculation and experimental studies of the stiffness characteristics of the wing panels of a complete aerodynamic model of an aircraft]. *Godovoy otchet FGUP "TSAGI" za 2015 god*. pp. 628–630.
12. Azarov Yu.A., Zichenkov M.Ch., Paryshev S.E., Strelkov K.S. (2018) *Razvitie tekhnologii modelirovaniya yavleniy dinamicheskoy aerouprugosti v aerodinamicheskikh trubakh* [Development of technology for modeling the phenomena of dynamic aeroelasticity in wind tunnels]. Moscow: Fizmatlit.
13. Amir'yants G.A., Bun'kov V.G., Mamedov O.S., Paryshev S.E. (2013) Issledovanie kharakteristik staticheskoy i dinamicheskoy aerouprugosti modeley kryla kompanii BOEING [Study of characteristics of static and dynamic aeroelasticity of BOEING wing models]. *Sovremennyye nauchnyye problemy i tekhnologii v grazhdanskoj aviatsii*. Moscow: Nauka.
14. Usmonov B. (2015) Numerical solution of hereditary equations with a weakly singular kernel for vibration analysis of viscoelastic systems. *Proceedings of the Latvian Academy of Sciences*,

Section B: Natural, Exact, and Applied Sciences. 69(6). pp. 326–330. doi: 10.1515/prolas-2015-0048

15. Baranov N.I., Nushtaev P.D., Nushtaev Yu.P. (2003) *Flutter organov upravleniya samolyotov i raket* [Flutter controls in aircraft and missiles]. Moscow: Rusavia.
16. Mirzaev I., Turdiev M. (2022) Vibrations of buildings with a sliding foundation having lateral yielding contact under real seismic impacts. *AIP Conference Proceedings*. 2432. Article 030050. doi: [10.1063/5.0089584](https://doi.org/10.1063/5.0089584)
17. Durdiev D.Q., Totieva Z.D. (2020) Inverse problem for a second-order hyperbolic integro-differential equation with variable coefficients for lower derivatives. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 17. pp. 1106–1127. doi: 10.33048/semi.2020.17.084

Сведения об авторах:

Усмонов Ботир Шукруллаевич – доктор технических наук, профессор, ректор Ташкентского химико-технологического института, Ташкент, Узбекистан. E-mail: busmonov@hotmail.com

Сафаров Исмоил Иброхимович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика» Ташкентского химико-технологического института, Ташкент, Узбекистан. E-mail: safarov54@mail.ru

Тешаев Мухсин Худойбердиевич – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник Бухарского отделения Института математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Бухара, Узбекистан. E-mail: muhsin_5@mail.ru

Information about the authors:

Usmonov Botir Sh. (Doctor of Technical Sciences, Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: busmonov@hotmail.com

Safarov Ismoil I. (Doctor of Physics and Mathematics, Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: safarov54@mail.ru

Teshaev Muhsin Kh. (Doctor of Physics and Mathematics, Bukhara Branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan). E-mail: muhsin_5@mail.ru

Статья поступила в редакцию 03.04.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 03.04.2023; accepted for publication 10.04.2024