

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2024

№ 91

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36
Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>
Контактный тел./факс: (3822) 529-740
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Брыдин Л.С. Разработка и верификация метода коллокации и наименьших квадратов с полиномами седьмой степени для решения бигармонического уравнения	5
Егоров А.А. Виртуальные косы и кластерные алгебры	18
Елфимова А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М.В. Нильпотентные, ниль-хорошие и ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов.....	31
Кайгородов Е.В., Крылов П.А. Кольца инцидентности и их автоморфизмы	41

МЕХАНИКА

Богданова С.Б., Гладков С.О. О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета. Часть II	51
Бошенятов Б.В., Глазунов А.А., Ищенко А.Н., Карнет Ю.Н. Аналитические модели теплопроводности в двухфазных дисперсных средах. 2. Сравнение теории с экспериментами	61
Груздев А.С., Крайнов А.Ю., Фарапонов В.В. Экспериментальное исследование изменения давления и температуры при сверхзвуковом течении воздушного потока в канале плоской формы	75
Лихачев А.В., Табанохова М.В. Новый метод поиска прямолинейного участка на экспериментальной диаграмме напряжение–деформация	85
Норкин М.В. Образование каверны с неподвижными точками отрыва при вертикальном разгоне плавающего кругового цилиндра	99
Соколова М.Ю., Маркин А.А. Влияние начальных напряжений на распространение звуковых волн в гипотупругих анизотропных материалах	113
Фёдоров К.М., Шевелёв А.П., Гильманов А.Я., Изотов А.А., Кобяшев А.В. Новый подход к моделированию развития трещин автоГРП	125
Форенталь Г.А., Сапожников С.Б., Игнатова А.В., Буслаева О.С., Херувимов А.В. Деформирование и разрушение слоистого тканевого стеклопластика при изгибе на кольцевой опоре: влияние трехмерного армирования и скорости нагружения	141
Ширяева М.А., Субботин С.В. О влиянии неосесимметричных инерционных волн на осредненную циркуляцию жидкости во вращающемся цилиндре	153

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

Панков В.Н., Путятин Е.Н., Старченко А.В. Сергей Васильевич Панько. К 80-летию со дня рождения	168
---	-----

CONTENTS

MATHEMATICS

Bryndin L.S. Development and verification of the least-squares collocation method with seventh degree polynomials for the biharmonic equation	5
Egorov A.A. Virtual braids and cluster algebras	18
Elfimova A.M., Norbosambuev T.D., Podkorytov M.V. Nilpotent, nil-good, and nil-clean formal matrices over residue class rings	31
Kaigorodov E.V., Krylov P.A. Incidence rings and their automorphisms	41

MECHANICS

Bogdanova S.B., Gladkov S.O. On the trajectories of bodies in non-inertial reference frames. Part II	51
Boshenyatov B.V., Glazunov A.A., Ishchenko A.N., Karnet Yu.N. Analytical models of thermal conductivity in two-phase dispersion media. 2. Comparison of theoretical and experimental data	61
Gruzdev A.S., Krainov A.Yu., Faraponov V.V. Experimental study of pressure and temperature variations in a supersonic air flow through a flat channel	75
Likhachev A.V., Tabanyukhova M.V. A new method for searching rectilinear section in an experimental stress–strain diagram	85
Norkin M.V. Cavity formation with fixed separation points during vertical acceleration of a floating circular cylinder	99
Sokolova M.Yu., Markin A.A. The effect of initial stresses on sound wave propagation in hypoelastic anisotropic materials	113
Fyodorov K.M., Shevelyov A.P., Gil'manov A.Ya., Izotov A.A., Kobayashv A.V. A new approach for modeling the development of injection-induced hydraulic fractures	125
Forental' G.A., Sapozhnikov S.B., Ignatova A.V., Buslaeva O.S., Kheruvimov A.V. Deformation and failure of laminated fabric fiber-glass reinforced plastic during bending on an annular support: effect of 3D reinforcement and loading rate	141
Shiryaeva M.A., Subbotin S.V. Effect of non-axisymmetric inertial waves on the steady fluid circulation in a rotating cylinder	153

MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

Pankov V.N., Putyatina E.N., Starchenko A.V. Sergey Vasilyevich Panko. On the 80th anniversary of his birth	168
--	-----

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 519.635.1

MSC: 65N35, 65N50

doi: 10.17223/19988621/91/1

**Разработка и верификация метода коллокации
и наименьших квадратов с полиномами седьмой степени
для решения бигармонического уравнения**

Лука Сергеевич Брындин

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия, bryndin-1996@mail.ru*

Аннотация. Предложен и реализован новый сеточный вариант метода коллокации и наименьших квадратов с полиномами седьмой степени (C^3 -МКНК₇), обладающий непрерывностью вплоть до третьих производных кусочно-полиномиального решения в смысле наименьших квадратов. C^3 -МКНК₇ принципиально отличается от предыдущих версий МКНК отсутствием условий согласования, в которых в явном виде в нескольких точках на границах между соседними ячейками требовалась непрерывность решения и его производных. Приведены значения точности и порядка сходимости C^3 -МКНК₇ при численном решении двумерных краевых задач для бигармонического уравнения в квадратной области и области с криволинейной границей. Показаны преимущества C^3 -МКНК₇ над предыдущими вариантами МКНК.

Ключевые слова: метод коллокации и наименьших квадратов, кусочно-полиномиальный базис, автоматическая склейка решения, бигармоническое уравнение, изгиб пластины

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания ИТПМ СО РАН.

Для цитирования: Брындин Л.С. Разработка и верификация метода коллокации и наименьших квадратов с полиномами седьмой степени для решения бигармонического уравнения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 5–17. doi: 10.17223/19988621/91/1

Development and verification of the least-squares collocation method with seventh degree polynomials for the biharmonic equation

Luka S. Bryndin

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation, bryndin-1996@mail.ru

Abstract. A new version of the least-squares collocation method (C^3 -LSCM₇) with seventh degree polynomials is proposed and implemented. The method has continuity up to the third derivatives of the piecewise polynomial solution in the sense of least squares. This is achieved by using the values of the solution and its derivatives at the vertices of the grid cells as unknown terms. The C^3 -LSCM₇ is fundamentally different from previous versions of the LSCM in the absence of matching conditions. They explicitly require continuity of the solution and its derivatives at several points on the boundaries between neighboring cells. To solve the problem in a domain with a curved boundary a grid is constructed with rectangular cells. The solution of small irregular cells is continued from neighboring independent ones. Verification of the C^3 -LSCM₇ is carried out by solving two-dimensional boundary value problems for a biharmonic equation in a square and in domain with the curvilinear boundary. The condition numbers of a global matrix and transition matrices from values at nodes to coefficients of polynomial expansion are studied. The advantages of the C^3 -LSCM₇ over previous versions of the LSCM are shown.

Keywords: least-squares collocation method, piecewise polynomials, automatic solution continuity, biharmonic equation, plate bending

Acknowledgments: The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation: Bryndin, L.S. (2024) Development and verification of the least-squares collocation method with seventh degree polynomials for the biharmonic equation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 5–17. doi: 10.17223/19988621/91/1

Введение

Краевые задачи для бигармонического уравнения четвертого порядка встречаются в различных разделах механики сплошных сред, например в теории Кирхгофа–Лява изгиба пластин [1] и гидродинамике при малых числах Рейнольдса [2]. Главной особенностью и одновременно сложностью решения таких задач является наличие высоких производных, входящих как в само уравнение (четвертый порядок), так и в граничные условия (вплоть до третьего порядка) [1], что приводит к плохой обусловленности [2–4].

Известно несколько основных способов численного решения бигармонического уравнения. Первый из них связан с непосредственной дискретизацией исходной задачи в сильной постановке. Так поступают, например, в коллокационных (псевдо) спектральных методах (КМ) [3–5] и методах конечной разности (МКР) [6].

Другой подход основан на сведении бигармонического уравнения к системе, состоящей из двух уравнений с частными производными (УЧП), в которых порядок старших производных равняется двум [1, 2, 7]. Однако в этой ситуации может возникнуть дополнительная работа с краевыми условиями [2]. Наконец, в методе конечных элементов (МКЭ) ставится слабая постановка задачи, что приводит к понижению порядка старшей производной исходного решения в обновленном УЧП с возможностью использовать элементы второго или даже первого порядка [8].

Отметим, что, несмотря на хорошо проработанную технику решения линейных УЧП четвертого порядка МКР [2, 6] и МКЭ [8] существует не так много опубликованных результатов интегрирования бигармонического уравнения в нерегулярных областях и со сложными граничными условиями с помощью этих методов [3]. Кроме того, в КМ по сравнению с МКЭ уменьшаются временные затраты на формирование системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) за счет отсутствия процедуры интегрирования, а также в некоторых случаях количество ненулевых элементов матрицы СЛАУ у КМ меньше [9]. Таким образом, КМ обладают своими достоинствами, выраженными прежде всего простотой применения и вычислительными аспектами. Однако решение УЧП высокого порядка в сильной постановке с помощью КМ может привести к матрице СЛАУ с достаточно большим числом обусловленности [3, 4], особенно в случае использования полиномов высоких степеней. Поэтому в таких ситуациях целесообразно использовать и исследовать влияние различных предобусловливателей [10], а также решать СЛАУ численными методами линейной алгебры, которые не ухудшают число обусловленности исходной матрицы, например ортогональными.

Метод коллокации и наименьших квадратов (МКНК) [4, 5, 11, 12] является одним из представителей КМ. Его принципиальное отличие от многих других заключается в необходимости решения переопределенных СЛАУ, состоящих из уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий. При ее решении большую роль играют значения весовых множителей, на которые домножаются уравнения приближенной задачи. Они влияют на точность решения, скорость сходимости метода итераций по подобластям решения глобальной СЛАУ и ее обусловленность [11, 12]. В настоящий момент в МКНК поиск оптимальных значений весовых коэффициентов проводится экспериментальным путем. Для каждой задачи и вида используемых полиномиальных пространств это своя отдельная и непростая история. Про подобные проблемы выбора весовых множителей также указано и в других работах, например в [13, 14].

Для решения бигармонического уравнения сеточным КМ требуется склеивать производные приближенного решения вплоть до третьего порядка на границах между соседними ячейками [4, 15]. При этом в МКНК возникает четыре весовых множителя [4], а в сумме с весовыми коэффициентами уравнений коллокации и краевых их количество равняется семи. В работе [11] показана сильная чувствительность числа итераций сходимости решения глобальной СЛАУ в зависимости от значений весовых множителей условий согласования в случае, когда в МКНК применялись полиномы четвертой степени для аппроксимации бигармонического уравнения. Очевидно, что построение варианта МКНК без условий согласования заметно снизит зависимость численного решения от значений весовых множителей, которых станет еще и меньше.

Цель данной работы – построение МКНК с автоматической склейкой решения и его производных вплоть до третьего порядка, который позволит решить двумерное бигармоническое уравнение в сильной постановке. На сегодняшний день в ряде случаев уже разработаны различные варианты КМ, основанные на сплайн-аппроксимации, для УЧП, содержащих старшие производные второго порядка. Так, в работе [16] построен КМ с использованием полиномов второй степени для решения уравнений Пуассона и Гельмгольца. В [7] КМ с полиномами второй степени применялся для решения бигармонического уравнения, которое было сведено к системе, состоящей из двух УЧП второго порядка. В настоящей статье разработан новый вариант МКНК решения краевых задач для бигармонического уравнения без перехода к системе, принципиально отличающийся от предыдущих (см.: [4, 5, 11] и цитируемые там работы):

- отсутствием условий согласования;
- наличием в качестве неизвестных (степеней свободы) решения и его производных в вершинах прямоугольных ячеек, связанных прямоугольной матрицей перехода к коэффициентам полиномиального разложения.

Отметим, что в предыдущих работах по применению МКНК для решения бигармонического уравнения (см.: [4, 5, 11] и цитируемые там работы) неизвестными при решении глобальной переопределенной СЛАУ выступали как раз коэффициенты полинома, а в данной работе – отмеченные выше значения решения и его производных в вершинах ячеек сетки. Численно установлено: чтобы получить прямоугольную матрицу глобальной СЛАУ и прямоугольную матрицу перехода с конечным числом обусловленности и склейкой решения вплоть до третьих производных на сетке с прямоугольными ячейками, необходимо использовать пространства полиномов седьмой степени. Поэтому такой вариант МКНК назовем C^3 -МКНК₇. Для решения задачи в области с криволинейной границей здесь применялся сеткопостроитель из статьи [5].

Постановка задачи и описание численного метода

Рассмотрим бигармоническое уравнение на примере его приложения к теории Кирхгова–Лява изгиба пластин [1] в двумерной области Ω , имеющее следующий вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

где $w(x, y)$ – прогиб изотропной пластины при изгибе поперечной нагрузкой $q(x, y)$, $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ – жесткость пластины при изгибе, $t = \text{const}$ – толщина,

$E = \text{const}$ и $\nu = \text{const}$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала соответственно.

Дополним (1) краевыми условиями защемления [1]

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (2)$$

или шарнирного закрепления

$$w = 0, \quad M_n = M_x n_1^2 + M_y n_2^2 + 2M_{xy} n_1 n_2 = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (3)$$

где $\mathbf{n}=(n_1, n_2)$ – внешняя единичная нормаль к границе области $\partial\Omega$,

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_{xy} = -D(1 + \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Задача данного исследования заключается в разработке нового сеточного варианта МКНК без условий согласования, позволяющего численно решить краевые задачи (2) и (3) для (1) в квадратной области и области с криволинейной границей областей.

Для построения расчетной сетки в случае областей с криволинейной границей используется подход из [5]. Кратко приведем основные его моменты. Поместим область Ω в прямоугольник и покроем его сеткой, состоящей из $N \times N$ прямоугольных ячеек. Граничными нерегулярными ячейками будем называть ячейки, имеющие непустое пересечение с $\partial\Omega$ и не совпадающие с исходными материнскими прямоугольными ячейками, которые содержат их внутри себя. Если центр материнской ячейки находится внутри Ω , то такие ячейки считаются самостоятельными, иначе – несамостоятельными (см. ячейки с номерами 1–5 на рис. 1). В качестве решения в каждой фиксированной точке несамостоятельных ячеек принимается решение, продолженное из самостоятельной ячейки, центр которой находится ближе всего к рассматриваемой точке. Так, например, на рис. 1 решение из ячейки с номером 6 продолжается в светло-серую область несамостоятельной ячейки 4, из ячейки номер 7 – в темно-серую ее область.

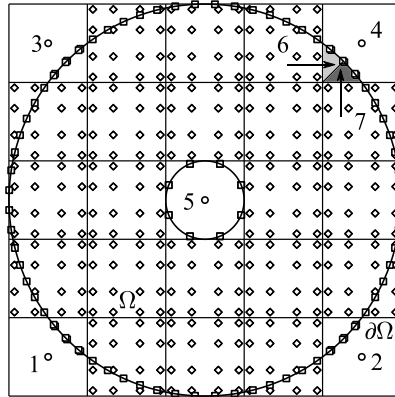


Рис. 1. Пример расчетной сетки в кольце в МКНК при $N \times N = 4 \times 4$, где символ « $\diamond$ » означает точки коллокации, « $\square$ » – точки записи краевых условий, « $\circ$ » – центры материнских ячеек, включающих нерегулярные несамостоятельные ячейки

Fig. 1. Example of a calculation grid in a ring in the LSCM at $N \times N = 4 \times 4$ where the symbol $\square$ means collocation points, $\square$ are points of boundary condition records, and $\circ$ are centers of mother cells including irregular nonautonomous cells

В каждой j -й самостоятельной ячейке, $j=1, \dots, N_{\text{cells}}$, где N_{cells} – их количество, введем локальную систему координат

$$\xi_1 = \frac{x - x_c}{h_1}, \quad \xi_2 = \frac{y - y_c}{h_2}, \quad (4)$$

где (x_c, y_c) – центр j -й прямоугольной ячейки, $2h_1, 2h_2$ – ее размеры.

В каждой j -й ячейке приближенное решение представляется в виде:

$$w^h(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i_1=0}^7 \sum_{i_2=0}^{7-i_1} c_{i_1 i_2, j} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} = (\mathbf{c}_j, \mathbf{v}_j(\xi_1, \xi_2)), \quad (5)$$

где $c_{i_1 i_2, j}$ – 36 неизвестных коэффициентов, $\mathbf{c}_j = (c_{00, j}, c_{01, j}, \dots, c_{i_1 i_2, j}, \dots, c_{70, j})^T$, $\mathbf{v}_j(\xi_1, \xi_2) = (1, \xi_2, \dots, \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2}, \dots, \xi_1^7)^T$.

Будем искать приближенное решение в виде совокупности его значений и значений всех его производных вплоть до третьего порядка в каждом узле (вершине) самостоятельных прямоугольных ячеек. Прямоугольная матрица перехода $\mathbf{A}_t$ размера 40×36 позволяет перейти от коэффициентов разложения $c_{i_1 i_2, j}$ в (5) к необходимым значениям в узлах посредством решения следующей переопределенной СЛАУ:

$$\mathbf{A}_t \mathbf{c}_j = \mathbf{w}_j = (w_j^{h,1}, w_{x,j}^{h,1}, w_{y,j}^{h,1}, \dots, w_{yyy,j}^{h,1}, w_j^{h,2}, \dots, w_{yyy,j}^{h,2}, \dots, w_j^{h,4}, \dots, w_{yyy,j}^{h,4})^T, \quad (6)$$

где цифра в верхнем индексе после h обозначает значение в одном из четырех узлов, буквенный нижний индекс – частную производную, например

$$w_{xy,j}^{h,1} = \frac{\partial^3 w^h}{\partial x^2 \partial y}(\xi_1^1, \xi_2^1), \quad (\xi_1^1, \xi_2^1) \text{ – локальные координаты первого из четырех узлов}$$

ячейки. Вектор $\mathbf{c}_j$ из (6) определяется в смысле наименьших квадратов и равен $\mathbf{c}_j = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{w}_j$, где $\mathbf{QR}$ – QR-разложение матрицы $\mathbf{A}_t$: $\mathbf{A}_t = \mathbf{QR}$, $\mathbf{Q}$ – матрица с ортогональными столбцами размера 40×36 , $\mathbf{R}$ – верхнетреугольная матрица размера 36×36 .

Отметим, что наличие локальной системы координат (4) влечет за собой одинаковые координаты узлов каждой ячейки и одинаковый вид матриц перехода $\mathbf{A}_t$. При попытке использовать для аппроксимации (5) полиномы более низкой степени оказывается, что итоговая СЛАУ имеет неполный ранг, а в случае применения полиномов более высокой степени матрица $\mathbf{A}_t$ становится недоопределенной. В обоих этих вариантах решение адекватно не удавалось найти.

Для определения $\mathbf{w}_j$ в узлах сетки в каждой ячейке выписываются уравнения коллокации и краевые условия, если ячейка является граничной. Пусть точка коллокации в j -й самостоятельной ячейке имеет координаты (ξ_{1c}, ξ_{2c}) . Тогда подстановка приближенного решения (5) в уравнение (1), умноженное на весовой множитель p_c , в этой точке дает следующее выражение:

$$p_c \left(\frac{1}{h_1^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4} + 2 \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} + \frac{1}{h_2^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4} \right) \sum_{i_1=0}^7 \sum_{i_2=0}^{7-i_1} c_{i_1 i_2, j} \xi_{1c}^{i_1} \xi_{2c}^{i_2} = p_c \frac{q}{D}. \quad (7)$$

Обозначим вектор размера 36, элементами которого являются $\xi_{1c}^{i_1} \xi_{2c}^{i_2}$, через $\mathbf{v}$, а векторы, составленные из четвертых производных $\xi_{1c}^{i_1} \xi_{2c}^{i_2}$ в точке (ξ_{1c}, ξ_{2c}) по ξ_1 четырежды, по ξ_1 и по ξ_2 дважды, по ξ_2 четырежды, через $\frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4} \mathbf{v}$, $\frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} \mathbf{v}$ и $\frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4} \mathbf{v}$ соответственно. Тогда уравнение (7) с учетом $\mathbf{c}_j = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{w}_j$ можно переписать в виде:

$$p_c \left(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{w}_j, \frac{1}{h_1^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4} \mathbf{v} + 2 \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} \mathbf{v} + \frac{1}{h_2^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4} \mathbf{v} \right) = p_c \frac{q}{D}. \quad (8)$$

Преобразуем левую часть уравнения (8), перенося операцию умножения на матрицу $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T$ во второй аргумент скалярного произведения, в результате чего получим следующее уравнение на неизвестные значения решения и его производных в узлах j -й ячейки:

$$p_c \left(\mathbf{w}_j, \mathbf{Q}(\mathbf{R}^{-1})^T \left(\frac{1}{h_1^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4} \mathbf{v} + 2 \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} \mathbf{v} + \frac{1}{h_2^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4} \mathbf{v} \right) \right) = p_c \frac{q}{D}. \quad (9)$$

В каждой самостоятельной ячейке выписываются уравнения коллокации (9) в точках, которые являются прямым произведением множеств, состоящих из корней полиномов Лежандра четвертой степени (см. рис. 1).

Аналогичным образом выписываются уравнения в граничных ячейках. Так, например, если точка границы области $\partial\Omega$ имеет локальные координаты (ξ_{1b}, ξ_{2b}) , вектор $\mathbf{v}$ состоит из элементов $\xi_{1b}^i \xi_{2b}^i$, то краевое условие для первого уравнения (2) будет иметь вид:

$$p_{b_0} (\mathbf{w}_j, \mathbf{Q}(\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{v}) = 0, \quad (10)$$

где p_{b_0} – весовой множитель первого уравнения (2) или (3).

Для записи краевых условий в граничной ячейке по алгоритму из [5] выбирается часть границы области, на которой в зависимости от количества соседних самостоятельных ячеек N_{neigh} равномерно расставляется $4(4 - N_{neigh})$ точек.

Объединяя уравнения коллокации и краевые условия в каждой ячейке, получим глобальную переопределенную СЛАУ, для решения которой используется диагональный предобусловливатель [10] и прямой ортогональный метод, реализованный в библиотеке SuiteSparse [17] с возможностью распараллеливания на графических процессорах с помощью технологии CUDA.

Результаты численных экспериментов

В представленных ниже результатах численных экспериментов погрешность вычислялась по следующим формулам:

$$\|E_r^w\|_\infty = \frac{\max_{j=1, \dots, N^2} \max_{i=1, \dots, 100} |w^h(x_i, y_i) - w^{ex}(x_i, y_i)|}{\max_{j=1, \dots, N^2} \max_{i=1, \dots, 100} |w^{ex}(x_i, y_i)|}, \quad (11)$$

где w^h, w^{ex} – приближенное и точное решение задачи соответственно, (x_i, y_i) – равномерно распределенные в j -й ячейке точки. В точках, не принадлежащих области Ω , погрешность не вычислялась.

Порядок сходимости определялся по формуле

$$R = \frac{\log_2 \frac{\|E_2\|_\infty}{\|E_1\|_\infty}}{\log_2 \sqrt{\frac{N_1}{N_2}}}, \quad (12)$$

где $\|E_1\|_\infty, \|E_2\|_\infty$ – погрешности (11) на сетках с общим количеством неизвестных N_1 и N_2 соответственно.

Пример 1

Рассмотрим квадратную шарнирно закрепленную (3) пластину $\Omega = (0,1)^2$, на которую действует нагрузка $q(x, y) = 0.1 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. В таком случае прогиб пластины определяется следующим выражением [1]:

$$w(x, y) = \frac{q(x, y)}{4\pi^4 D}. \quad (13)$$

На рис. 2 приведены результаты сходимости C^3 -МКНК₇ и hp -варианта (hp -МКНК) из работы [5], в котором также использовались полиномы седьмой степени (5) для аппроксимации бигармонического уравнения (1), где $n = \sqrt{DOF}$, DOF – общее количество степеней свободы, т.е. неизвестных, используемых в вариантах МКНК для определения решения, $C_1, C_2 = const$. В работе [4] были продемонстрированы достоинства h -, p - и hp -МКНК по сравнению с МКР [2], МКЭ [8] и спектральными методами [3, 15, 19] на примерах решения различных краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях. Параметры C^3 -МКНК₇ были взяты следующими: $p_c = h_1^2 h_2^2$, весовые множители перед первым и вторым уравнениями (3) равнялись $p_{b_0} = 1, p_{b_2} = \frac{h_1 h_2}{D}$. В hp -МКНК [5]

$p_c = h_1^2 h_2^2, p_{b_0} = 1, p_{b_2} = \frac{h_1 h_2}{D}$, весовые коэффициенты условий согласования перед решением, первой, второй и третьей производными по нормали между соседними ячейками полагались равными $p_{m_0} = 1, p_{m_1} = 0.12, p_{m_2} = h_1 h_2, p_{m_3} = 0.125 h_1 h_2$ соответственно. Глобальная СЛАН в hp -МКНК решалась с помощью метода итераций по подобластям [11].

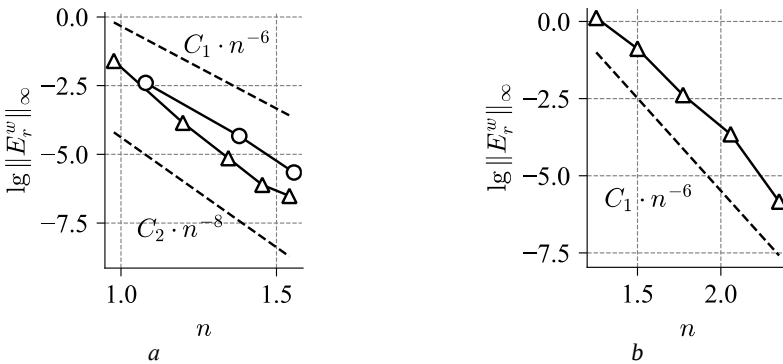


Рис. 2. Сходимость C^3 -МКНК₇ (Δ) и hp -МКНК [5] ($\circ$) в примере 1 (a) и C^3 -МКНК₇ (Δ) в примере 2 (b)
Fig. 2. Convergence of the (a) C^3 -LSCM₇ (Δ) and hp -LSCM [5] ($\circ$) in example 1 and (b) C^3 -LSCM₇ (Δ) in example 2

Из рисунка видно, что в C^3 -МКНК₇ достигаются лучшие значения погрешности $\|E_r\|_\infty$ по сравнению с hp -МКНК, а также порядок сходимости C^3 -МКНК₇ здесь выше и равен приблизительно 8. Отношения количества уравнений к количеству неизвестных в СЛАУ в двух методах отличаются совсем немного: степень перепределения СЛАУ в C^3 -МКНК₇ равнялась приблизительно 1.6, а в hp -МКНК – 1.8.

Исследуем число обусловленности матриц $\mathbf{A}$ глобальных СЛАУ в C^3 -МКНК₇ и влияние диагонального предобусловливателя [10]. В этом примере на сетке 10×10 ($DOF = 1\,210$) число обусловленности в спектральной норме $cond_2(\mathbf{A}) = 9.97e+8$, а с применением предобусловливания $cond_2(\mathbf{A}) = 9.54e+8$. Аналогичная картина с точки зрения отсутствия разницы между значениями $cond_2(\mathbf{A})$ также наблюдалась в примере 2. Числа обусловленности матриц перехода $cond_2(\mathbf{A}_i)$ варьировали от 10^4 до 10^6 .

Для оценки погрешности склейки проведены расчеты значений приближенного решения и его частных производных вплоть до третьего порядка во всех узлах области. В каждом узле указанные значения рассчитывались во всех ячейках, содержащих рассматриваемый узел, и находилась максимальная относительная разница между ними. Установлено, что все отклонения находятся на уровне погрешности приближенного решения. Например, на сетке размера 10×10 погрешность $\|E_r^w\|_\infty = 3.07e-7$, а отклонения рассматриваемых величин находятся в пределах от $1.42e-10$ до $6.97e-7$.

Пример 2

Рассмотрим круглую защемленную по краям пластину с центральным отверстием $\Omega = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 5^2\}$, на которую действует постоянная нагрузка q . В этом случае решение задачи имеет вид [18]:

$$w(x, y) = \frac{qr^4}{64D} + C_3 r^2 (\log_2 r - 1) + \frac{C_4 r^2}{4} + C_5 \log r + C_6, \quad (14)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Константы C_3 – C_6 определяются из решения СЛАУ размера 4×4 , которая получается подстановкой (14) в краевые условия на внешнем и внутреннем контурах пластины. В силу громоздкости выражения для них здесь не приводятся.

В таблице и на рис. 2, b приведены результаты сходимости C^3 -МКНК₇. В таблице число N_{ind} означает количество самостоятельных ячеек. В данном случае порядок сходимости метода колебался от 4 до 7.

Результаты сходимости C^3 -МКНК₇ в примере 2

$N \times N$	N_{ind}	DOF	$\ E_r^w\ _\infty$	R
5×5	20	320	1.30e+0	–
10×10	76	1 000	1.30e–1	4.04
20×20	304	3 520	4.11e–3	5.49
40×40	1 212	13 080	2.21e–4	4.45
80×80	4 816	50 080	1.46e–6	7.48

Несмотря на то, что второй пример может быть решен в одномерной постановке, здесь было важно, во-первых, показать возможность удобного применения сеткопостроителя [5] для областей с криволинейной границей при использовании прямоугольных ячеек в C^3 -МКНК₇, а во-вторых, провести верификацию метода на задаче с известным точным решением. Более того, такую задачу не удастся решить p -вариантом различных КМ [3, 4, 19], в которых используются глобальные аппроксимации во всем прямоугольнике, включающем исходную область, без перехода, например, в полярную систему координат, поскольку решение (14) содержит слагаемые $\log r$, для которых $(0, 0)$ является точкой ветвления, где решения обращаются в бесконечность. Отметим также, что в более сложных областях перейти в какую-то специальную удобную систему координат далеко не всегда возможно. Таким образом, это подчеркивает актуальность развития сеточных численных методов.

Заключение

Впервые разработан и исследован вариант МКНК без условий согласования, позволяющий решать краевые задачи для бигармонического уравнения в сильной постановке. Его верификация проведена на решении задач изгиба пластин в рамках теории Кирхгофа–Лява. Сравнение реализованного здесь C^3 -МКНК₇ с hp -МКНК из работы [5] при одинаковых степенях полиномов и DOF показало преимущества нового варианта. На тестовом бесконечно гладком решении в квадратной области показан высокий порядок сходимости, в среднем равный восьми. Продемонстрирована возможность применения C^3 -МКНК₇ для решения бигармонического уравнения в области с криволинейной границей. Однако вопрос уменьшения числа обусловленности $\text{cond}_2(\mathbf{A})$ в МКНК с применением полиномов высоких степеней остается важным и открытым.

Список источников

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М. : Физматгиз, 1996. 625 с.
2. Chen G., Li Z., Lin P. A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow // *Advances in Computational Mathematics*. 2007. V. 29, № 2. P. 113–133. doi: 10.1007/s10444-007-9043-6.
3. Shao W., Wu X., Chen S. Chebyshev tau meshless method based on the integration-differentiation for biharmonic-type equations on irregular domain // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2012. V. 36, № 12. P. 1787–1798. doi: 10.1016/j.enganabound.2012.06.005
4. Беляев В.А., Брындин Л.С., Голушко С.К., Семисалов Б.В., Шанеев В.П. h -, p - и hp -варианты метода коллокации и наименьших квадратов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях и их приложения // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2022. Т. 62, № 4. С. 531–552. doi: 10.31857/S0044466922040020
5. Брындин Л.С., Беляев В.А., Шанеев В.П. Разработка и верификация упрощенного hp -варианта метода коллокации и наименьших квадратов для нерегулярных областей // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование*. 2023. Т. 16, № 3. С. 35–50. doi: 10.14529/mmp230303
6. Ben-Artzi M., Croisille J.P., Fishelov D. An Embedded Compact Scheme for Biharmonic Problems in Irregular Domains // *Advanced Computing in Industrial Mathematics: 11th Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM*. Cham : Springer, 2018. V. 728. P. 11–23. doi: 10.1007/978-3-319-65530-7_2

7. Bialecki B., Fairweather G., Karageorghis A., Maack J. A quadratic spline collocation method for the Dirichlet biharmonic problem // Numerical Algorithms. 2019. V. 83. P. 165–199. doi: 10.1007/s11075-019-00676-z
8. Guo H., Zhang Z., Zou Q. A C^0 Linear Finite Element Method for Biharmonic Problems // Journal of Scientific Computing. 2018. V. 74, № 3. P. 1397–1422. doi: 10.1007/s10915-017-0501-0
9. Schillinger D., Evans J.A., Reali A., Scott M.A., Hughes T.J.R. Isogeometric collocation: Cost comparison with Galerkin methods and extension to adaptive hierarchical NURBS discretizations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2013. V. 267. P. 170–232. doi: 10.1016/j.cma.2013.07.017
10. Ramsak M., Skerget L. A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function-vorticity formulation // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2004. V. 46, № 8. P. 815–847. doi: 10.1002/fld.776
11. Голушко С.К., Идимешев С.В., Шапеев В.П. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 6. С. 31–43.
12. Исаев В.И., Шапеев В.П., Еремин С.А. Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье-Стокса // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, № 3. С. 53–70.
13. Ильин В.П., Кныш Д.В. Параллельные методы декомпозиции в пространствах следов // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12, № 1. С. 110–119.
14. Алексидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М. : Наука, 1978. 352 с.
15. Shao W., Wu X. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration–differentiation for solving fourth order equations // Applied Mathematical Modelling. 2015. V. 39, № 9. P. 2554–2569. doi: 10.1016/j.apm.2014.10.048
16. Fairweather G., Karageorghis A., Maack J. Compact optimal quadratic spline collocation methods for Poisson and Helmholtz problems: formulation and numerical verification // Journal of Computational Physics. 2010. V. 230, № 8. P. 2880–2895. doi: 10.1016/j.jcp.2010.12.041
17. Davis T.A. Algorithm 915, SuiteSparseQR: Multifrontal multithreaded rank-revealing sparse QR factorization // ACM Transactions on Mathematical Software. 2011. V. 38, № 1. P. 8:1–8:22. doi: 10.1145/2049662.2049670
18. Ike C.C. Mathematical solutions for the flexural analysis of Mindlin's first order shear deformable circular plate // Mathematical Models in Engineering. 2018. V. 4, № 2. P. 50–72. doi: 10.21595/mme.2018.19825
19. Mai-Duy N., See H., Tran-Cong T. A spectral collocation technique based on integrated Chebyshev polynomials for biharmonic problems in irregular domains // Applied Mathematical Modelling. 2009. V. 33, № 1. P. 284–299. doi: 10.1016/j.apm.2007.11.002

References

1. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. (1959) *Theory of Plates and Shells*. New York, St. Louis: McGraw-Hill Book Comp.
2. Chen G., Li Z., Lin P. (2007) A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow. *Advances in Computational Mathematics*. 29(2). pp. 113–133. DOI: 10.1007/s10444-007-9043-6.
3. Shao W., Wu X., Chen S. (2012) Chebyshev tau meshless method based on the integration–differentiation for biharmonic-type equations on irregular domain. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 36(12). pp. 1787–1798. DOI: 10.1016/j.enganabound.2012.06.005.
4. Belyaev V.A., Bryndin L.S., Golushko S.K., Semisalov B.V., Shapeev V.P. (2022) H-, p-, and hp-versions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 62(4). pp. 517–537. DOI: 10.1134/S0965542522040029.

5. Bryndin L.S., Belyaev V.A., Shapeev V.P. (2023) Razrabotka i verifikatsiya uproschennogo hp-varianta metoda kollokatsii i naimen'shikh kvadratov dlya neregulyarnykh oblastey [Development and verification of a simplified hp-version of the least-squares collocation method for irregular domains]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye – Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 16(3). pp. 35–50. DOI: 10.14529/mmp230303.
6. Ben-Artzi M., Croisille J.P., Fishelov D. (2018) An Embedded Compact Scheme for Biharmonic Problems in Irregular Domains. *Advanced Computing in Industrial Mathematics: 11th Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM*. Cham: Springer. 728. pp. 11–23. DOI: 10.1007/978-3-319-65530-7_2.
7. Bialecki B., Fairweather G., Karageorghis A., Maack J. (2019) A quadratic spline collocation method for the Dirichlet biharmonic problem. *Numerical Algorithms*. 83. pp. 165–199. DOI: 10.1007/s11075-019-00676-z.
8. Guo H., Zhang Z., Zou Q. (2018) A C^0 Linear Finite Element Method for Biharmonic Problems. *Journal of Scientific Computing*. 74(3). pp. 1397–1422. DOI: 10.1007/s10915-017-0501-0.
9. Schillinger D., Evans J.A., Reali A., Scott M.A., Hughes T.J.R. (2013) Isogeometric collocation: Cost comparison with Galerkin methods and extension to adaptive hierarchical NURBS discretizations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 267. pp. 170–232. DOI: 10.1016/j.cma.2013.07.017.
10. Ramsak M., Skerget L. (2004) A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function-vorticity formulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 46(8). pp. 815–847. DOI: 10.1002/flid.776.
11. Golushko S.K., Idimeshev S.V., Shapeev V.P. (2013) Metod kollokatsiy i naimen'shikh nevyazok v prilozhenii k zadacham mekhaniki izotropnykh plastin [Application of collocations and least residuals method to problems of the isotropic plates theory]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 18(6). pp. 31–43.
12. Isaev V.I., Shapeev V.P., Eremin S.A. (2007) Issledovaniye svoystv metoda kollokatsii i naimen'shikh kvadratov resheniya krayevykh zadach dlya uravneniya Puassona i uravneniy Nav'ye-Stoksa [An investigation of properties of the least squares collocation method for solution of boundary value problems for the Navier–Stokes and Poisson equations]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 12(3). pp. 53–70.
13. Il'in V. P., Knysh D. V. (2011) Parallel'nyye metody dekompozitsii v prostranstvakh sledov [Parallel decomposition methods in the trace spaces]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye – Numerical Methods and Programming*. 12(1). pp. 110–119.
14. Aleksidze M. A. (1978) *Resheniye granichnykh zadach metodom razlozheniya po neortogonal'nym funktsiyam* [Solution of boundary value problems by the method of decomposition by non-orthogonal functions]. Moscow: Nauka.
15. Shao W., Wu X. (2015) An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration–differentiation for solving fourth order equations. *Applied Mathematical Modelling*. 39(9). pp. 2554–2569. DOI: 10.1016/j.apm.2014.10.048.
16. Fairweather G., Karageorghis A., Maack J. (2010) Compact optimal quadratic spline collocation methods for Poisson and Helmholtz problems: formulation and numerical verification. *Journal of Computational Physics*. 230(8). pp. 2880–2895. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.12.041.
17. Davis T.A. (2011) Algorithm 915, SuiteSparseQR: Multifrontal multithreaded rank-revealing sparse QR factorization. *ACM Transactions on Mathematical Software*. 38(1). pp. 8:1–8:22. DOI: 10.1145/2049662.2049670.
18. Ike C.C. (2018) Mathematical solutions for the flexural analysis of Mindlin's first order shear deformable circular plate. *Mathematical Models in Engineering*. 4(2). pp. 50–72. DOI: 10.21595/mme.2018.19825.
19. Mai-Duy N., See H., Tran-Cong T. (2009) A spectral collocation technique based on integrated Chebyshev polynomials for biharmonic problems in irregular domains. *Applied Mathematical Modelling*. 33(1). pp. 284–299. DOI: 10.1016/j.apm.2007.11.002.

Сведения об авторе:

Брындин Лука Сергеевич – младший научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения РАН (Новосибирск, Россия). E-mail: bryndin-1996@mail.ru

Information about the author:

Bryndin Luka S. (Junior Researcher, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: bryndin-1996@mail.ru

The article was submitted 29.02.2024; accepted for publication 03.10.2024

Статья поступила в редакцию 29.02.2024; принята к публикации 03.10.2024

Original article

UDC 515.162

doi: 10.17223/19988621/91/2

MSC: 57K12

Virtual braids and cluster algebras

Andrey A. Egorov

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation;

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation;

*Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, Russian Federation, a.egorov2@g.nsu.ru*

Abstract. In 2015, Hikami and Inoue constructed a representation of the braid group B_n in terms of cluster algebra associated with the decomposition of the complement of the corresponding knot into ideal hyperbolic tetrahedra. This representation leads to the calculation of the hyperbolic volume of the complement of the knot that is the closure of the corresponding braid. In this paper, based on the Hikami–Inoue representation discussed above, we construct a representation for the virtual braid group VB_n . We show that the so-called “forbidden relations” do not hold in the image of the resulting representation. In addition, based on the developed method, we construct representations for the flat braid group FB_n and the flat virtual braid group FVB_n .

Keywords: braid group, virtual braid group, cluster algebra

Acknowledgments: The author was supported by the Tomsk State University Development Program (Priority-2030) and the article was prepared within the framework of the project “Mirror Laboratories” HSE University, RF.

For citation: Egorov, A.A. (2024) Virtual braids and cluster algebras. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 18–30. doi: 10.17223/19988621/91/2

Научная статья

Виртуальные косы и кластерные алгебры

Андрей Александрович Егоров

Томский государственный университет, Томск, Россия;

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;

*Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН,
Новосибирск, Россия, a.egorov2@g.nsu.ru*

Аннотация. В 2015 г. Хиками и Иноуэ построили представление группы кос B_n в терминах кластерной алгебры, связанной с разбиением дополнения соответствующего узла на идеальные гиперболические тетраэдры. Это представление приво-

дит к вычислению гиперболического объема дополнения к узлу, являющемуся замыканием соответствующей косы. В данной работе, основываясь на обсуждаемом выше представлении Хиками–Иноуэ, мы строим представление для группы виртуальных кос VB_n . Мы показываем, что в образе полученного представления не будут выполняться так называемые «запрещенные соотношения», которые, как известно, в группе VB_n не выполняются. Кроме того, на основе разработанного метода мы строим представления для группы плоских кос FB_n и группы плоских виртуальных кос FVB_n .

Ключевые слова: группа кос, группа виртуальных кос, кластерные алгебры

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (проект НУ 2.0.1.23 ОНТ Приоритет-2030).

Для цитирования: Егоров А.А. Виртуальные косы и кластерные алгебры // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 18–30. doi: 10.17223/19988621/91/2

1. Introduction

Let us start with recalling braid groups and related groups. For $n \geq 2$, the braid group B_n is defined as a group with generators $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ and the following defining relations [1]:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \quad (1)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2. \quad (2)$$

A geometric interpretation of B_n is well known, it is isomorphic to a group of geometric braids on n strings, and a mapping class group of an n -punctured disc [2]. By adding the relations

$$\sigma_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3)$$

we get the flat braid group FB_n on n strings.

The virtual braid group VB_n on n strings is the group with two families of generators, classical and virtual, denoted by $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ and $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$, with the following defining relations: (1) and (2) for classical generators; (4), (5) and (6) for virtual generators,

$$\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \quad (4)$$

$$\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i, \quad |i - j| \geq 2, \quad (5)$$

$$\rho_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (6)$$

and mixed relations (7) and (8) for classical and virtual generators both.

$$\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2, \quad (7)$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (8)$$

It was observed in [3] that relations (9) и (10)

$$\rho_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1}, \quad (9)$$

$$\rho_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \rho_i \quad (10)$$

do not hold in VB_n , so these relations are called forbidden relations. By adding relation (3) to VB_n , we obtain the flat virtual braid group FVB_n on n strings.

The relation described above between braid groups and virtual braid groups admits to construct representations of VB_n by extending known representations of B_n by corresponding to ρ_i suitable involutions. In particular, Bardakov, Vesnin, and Wiest [4] constructed a representation of VB_n by extending Dynnikov representation [5], and demonstrated that the representation from [4] is faithful for $n = 2$ and distinguish virtual braids on three strings good enough. Gotin [6] constructed a representation of VB_n by extending a representation of B_n through rook algebras given by Bigelow, Ramos, and Yi [7].

In the present note we construct a representation of VB_n by extending a representation of B_n given by Hikami and Inoue in [8] in terms of a cluster algebra (Theorem 3.1.). It was demonstrated in [9] that the representation from [8] allows to compute the volume of a hyperbolic knot which is the closer of a braid. Further, we also construct representations for a flat braid group and virtual flat braid groups (Theorems 5.1. and 6.1.).

2. Cluster mutations

Let V be a complex vector space. An automorphism R of the tensor product $V \otimes V$ is said to be an R -operator if it satisfies the following Yang–Baxter equation

$$(R \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes R)(R \otimes \text{Id}) = (\text{Id} \otimes R)(R \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes R),$$

where Id is the identity operator $\text{Id}: V \rightarrow V$.

Let us recall the construction of the R -operator from [8]. Denote by $\mathbb{F}_N$ the field of rational functions over $\mathbb{C}$ of N algebraically independent variables $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$.

A cluster seed is a pair $(\mathbf{x}, \mathbf{B})$, where

- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ is an ordered set of N algebraically independent variables,
- $\mathbf{B} = (b_{ij})$ is an antisymmetric $N \times N$ -matrix of integers.

For any $k = 1, \dots, N$ define a mutation μ_k of a seed $(\mathbf{x}, \mathbf{B})$ in direction k as follows

$$\mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{B}) = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{B}})$$

where $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$ is defined by the rule

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i, & \text{if } i \neq k, \\ \frac{1}{x_k} \left(\prod_{j: b_{jk} > 0} x_j^{b_{jk}} + \prod_{j: b_{jk} < 0} x_j^{-b_{jk}} \right), & \text{if } i = k, \end{cases} \quad (11)$$

and matrix $\tilde{\mathbf{B}} = (\tilde{b}_{ij})$ is calculated by the formula

$$\tilde{b}_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{if } i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + \frac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (12)$$

A pair $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{B}})$ is a cluster seed again.

Using cluster variables $\mathbf{x}$ we define cluster variables $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ by setting

$$y_j = \prod_{k=1}^N x_k^{b_{kj}}. \quad (13)$$

Mutation μ_k induces a mutation of a pair $(\mathbf{y}, \mathbf{B})$, $\mu_k(\mathbf{y}, \mathbf{B}) = (\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{B}})$, where $\tilde{\mathbf{B}}$ is given by formula (12) and $\tilde{\mathbf{y}} = (y_1, \dots, y_N)$ is given by the following formulas:

$$\tilde{y}_i = \begin{cases} y_k^{-1}, & \text{if } i = k, \\ y_i (1 + y_k^{-1})^{-b_{ki}}, & \text{if } i \neq k \text{ and } b_{ki} \geq 0, \\ y_i (1 + y_k)^{-b_{ki}}, & \text{if } i \neq k \text{ and } b_{ki} \leq 0. \end{cases} \quad (14)$$

In [8], a matrix $\mathbf{B}$ was taken equal to the adjacency matrix of a quiver (oriented graph) Γ presented in figure 1. Graph Γ has $N = 3n + 1$ vertices. Namely $\mathbf{B}$ is $(3n+1) \times (3n+1)$ -matrix with entries determined by the quiver Γ :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if there is an edge going from vertex } i \text{ to vertex } j, \\ -1, & \text{if there is an edge from vertex } j \text{ to vertex } i, \\ 0, & \text{if vertices } i \text{ and } j \text{ are not adjacent.} \end{cases}$$

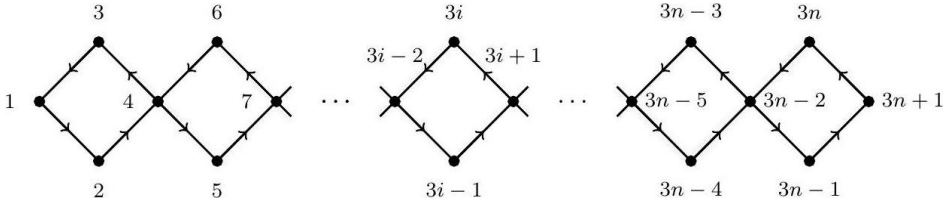


Fig. 1. Quiver Γ with $3n + 1$ vertices

In particular, if $n = 2$, then matrix $\mathbf{B}$ is of the form

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Let us denote by $\Phi: \mathbb{F}_{3n+1} \rightarrow \mathbb{F}_{3n+1}$, $n \geq 2$, the operator defined in [8, Formula 2-13] as a composition of mutations. If $n = 2$ then we get $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ and Φ is of the form

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}) \\ \Phi_2(\mathbf{x}) \\ \Phi_3(\mathbf{x}) \\ \Phi_4(\mathbf{x}) \\ \Phi_5(\mathbf{x}) \\ \Phi_6(\mathbf{x}) \\ \Phi_7(\mathbf{x}) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ \frac{x_1 x_3 x_5 + x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_6}{x_2 x_4} \\ \frac{x_1 x_3 x_4 x_5 + x_3 x_4^2 x_5 + x_1 x_3 x_5 x_7 + x_3 x_4 x_5 x_7 + x_1 x_2 x_6 x_7}{x_2 x_4 x_6} \\ \frac{x_1 x_3 x_5 + x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_6}{x_4 x_6} \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix}^T.$$

We denote by $\Psi: \mathbb{F}_{3n+1} \rightarrow \mathbb{F}_{3n+1}, n \geq 2$, the operator inverse to Φ . If $n = 2$ then

$$\Psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\mathbf{x}) \\ \Psi_2(\mathbf{x}) \\ \Psi_3(\mathbf{x}) \\ \Psi_4(\mathbf{x}) \\ \Psi_5(\mathbf{x}) \\ \Psi_6(\mathbf{x}) \\ \Psi_7(\mathbf{x}) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_1 x_3 x_5 + x_1 x_2 x_6 + x_2 x_4 x_6}{x_3 x_4} \\ x_6 \\ \frac{x_1 x_2 x_4 x_6 + x_2 x_4^2 x_6 + x_1 x_3 x_5 x_7 + x_1 x_2 x_6 x_7 + x_2 x_4 x_6 x_7}{x_3 x_4 x_5} \\ x_2 \\ \frac{x_2 x_4 x_6 + x_3 x_5 x_7 + x_2 x_6 x_7}{x_4 x_5} \\ x_7 \end{pmatrix}^T.$$

Following [8, Formula 2-13] we go from $\mathbf{x}$ -variables to $\mathbf{y}$ -variables. If $n = 2$, then $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$ and R -operator Φ will take a form φ , where

$$\varphi(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{y}) \\ \varphi_2(\mathbf{y}) \\ \varphi_3(\mathbf{y}) \\ \varphi_4(\mathbf{y}) \\ \varphi_5(\mathbf{y}) \\ \varphi_6(\mathbf{y}) \\ \varphi_7(\mathbf{y}) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} y_1(1 + y_2 + y_2 y_4) \\ \frac{y_2 y_4 y_5 y_6}{1 + y_2 + y_6 + y_2 y_6 + y_2 y_4 y_6} \\ \frac{1 + y_2 + y_4 + y_2 y_6 + y_2 y_4 y_6}{y_2 y_4} \\ y_4 \\ \frac{(1 + y_2 + y_2 y_4)(1 + y_6 + y_4 y_6)}{1 + y_2 + y_6 + y_2 y_6 + y_2 y_4 y_6} \\ y_4 y_6 \\ \frac{y_2 y_3 y_4 y_6}{1 + y_2 + y_6 + y_2 y_6 + y_2 y_4 y_6} \\ (1 + y_6 + y_4 y_6) y_7 \end{pmatrix}^T, \quad (16)$$

as well as Ψ will takes a form ψ , where

$$\psi(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{y}) \\ \psi_2(\mathbf{y}) \\ \psi_3(\mathbf{y}) \\ \psi_4(\mathbf{y}) \\ \psi_5(\mathbf{y}) \\ \psi_6(\mathbf{y}) \\ \psi_7(\mathbf{y}) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{y_1 y_3 y_4}{1 + y_4 + y_3 y_4} \\ \frac{y_5}{1 + y_4 + y_3 y_4 + y_4 y_5 + y_3 y_4 y_5} \\ (1 + y_4 + y_3 y_4 + y_4 y_5 + y_3 y_4 y_5) y_6 \\ \frac{(1 + y_4 + y_3 y_4)(1 + y_4 + y_4 y_5)}{y_3 y_4 y_5} \\ y_2 (1 + y_4 + y_3 y_4 + y_4 y_5 + y_3 y_4 y_5) \\ \frac{y_3}{1 + y_4 + y_3 y_4 + y_4 y_5 + y_3 y_4 y_5} \\ \frac{y_4 y_5 y_7}{1 + y_4 + y_4 y_5} \end{pmatrix}^T. \quad (17)$$

The following property easily follows from the above formulae.

Lemma 2.1. By setting $y_1 = y_4 = y_7 = -1$ in formulae (16) and (17), we get

$$\varphi_1 = \varphi_4 = \varphi_7 = -1 \quad \text{and} \quad \psi_1 = \psi_4 = \psi_7 = -1$$

3. Virtual braid groups

For a vector $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4) = (y_2, y_3, y_5, y_6)$ of length four, we define two operators

$$S \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{z_1 z_3 z_4}{1 + z_1 + z_4} \\ -\frac{1 + z_1 + z_4}{z_1} \\ -\frac{1 + z_1 + z_4}{z_4} \\ -\frac{z_1 z_2 z_4}{1 + z_1 + z_4} \end{pmatrix}^T, \quad S^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{z_3}{z_2 + z_3 + z_2 z_3} \\ -(z_2 + z_3 + z_2 z_3) z_4 \\ -z_1 (z_2 + z_3 + z_2 z_3) \\ -\frac{z_2}{z_2 + z_3 + z_2 z_3} \end{pmatrix}^T \quad (18)$$

and an involution

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_3, z_4, z_1, z_2). \quad (19)$$

Now for $n \geq 2$ we define operators $S_i^{\pm 1}$ and $T_i, i = 1, \dots, n-1$, which act on vector $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{2n})$ of length $2n$ by the following rule. Operators $S_i^{\pm 1}$ and T_i act on 4-tuple $(z_{2i-1}, z_{2i}, z_{2i+1}, z_{2i+2})$ in the same way as operators $S^{\pm 1}$ and T act on 4-tuple (z_1, z_2, z_3, z_4) , and do not change other components of $\mathbf{z}$:

$$S_i^{\pm 1} = I^{2i-2} \otimes S^{\pm 1} \otimes I^{2n-2i-2}, \quad T_i = I^{2i-2} \otimes T \otimes I^{2n-2i-2}.$$

For $n \geq 2$, we denote by Θ_n the group generated by $S_i, T_i, i = 1, \dots, n-1$, with composition as a group operation. Define a map $F: VB_n \rightarrow \Theta_n$ by setting

$$F(\sigma_i) = S_i, \quad F(\rho_i) = T_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (20)$$

Lemma 3.1. Let w be a word in VB_n . Then for a vector of algebraically independent variables $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{2n})$ in the image of $F(w)(\mathbf{z})$ no coordinate turns into zero or infinity.

Proof. Consider $2n$ -tuple $\mathbf{z}' = (-1, -1, \dots, -1)$. It is easy to see from (18) and (19) that $S_i^{\pm 1}(\mathbf{z}') = \mathbf{z}'$ and $T_i(\mathbf{z}') = \mathbf{z}'$ for each i . Hence $F(w)(\mathbf{z}') = \mathbf{z}' = (-1, -1, \dots, -1)$. Therefore, in the image of $F(w)(\mathbf{z})$ no coordinate can turn into zero or infinity because for $z_i = -1, i = 1, \dots, 2n$, all coordinates of the image will be equal to -1 .

Theorem 3.1. Map $F : VB_n \rightarrow \Theta_n, n \geq 2$, defined by (20) is a homomorphism.

Proof. Let us check that the operators S_i and $T_i, i = 1, \dots, n-1$, act on $\mathbf{z}$ in such a way that the following identities hold:

- (1) $S_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1}$, where $i = 1, 2, \dots, n-2$.
- (2) $S_i S_j = S_j S_i$, where $|i - j| \geq 2$.
- (3) $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$, where $i = 1, 2, \dots, n-2$.
- (4) $T_i T_j = T_j T_i$, where $|i - j| \geq 2$.
- (5) $T_i^2 = 1$, where $i = 1, 2, \dots, n-1$.
- (6) $T_i T_{i+1} S_i = S_{i+1} T_i T_{i+1}$, where $i = 1, 2, \dots, n-2$.

Obviously, it is enough to consider the case $i = 1$. Identities (1) and (2) are particular cases of [8, Theorem 2.3]. Nevertheless, we present a straightforward proof of (1) for the reader's convenience. Let $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$. Consider the left-side part of (1)

$$S_1 S_2 S_1(\mathbf{z}) = S_1 S_2 S_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \\ = \left(\frac{z_1 z_3 z_5 z_6}{1 - z_1 z_3 + z_6}, \frac{1 - z_1 z_3 + z_6}{z_1 z_3}, \frac{z_4(1 - z_1 z_3 + z_6)}{1 + z_1 - z_4 z_6}, \frac{z_3(1 + z_1 - z_4 z_6)}{1 - z_1 z_3 + z_6}, \frac{1 + z_1 - z_4 z_6}{z_4 z_6}, \frac{z_1 z_2 z_4 z_6}{1 + z_1 - z_4 z_6} \right).$$

The right-side part of (1) is equal

$$S_2 S_1 S_2(\mathbf{z}) = S_2 S_1 S_2(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \\ = \left(\frac{z_1 z_3 z_5 z_6}{1 - z_1 z_3 + z_6}, \frac{1 - z_1 z_3 + z_6}{z_1 z_3}, \frac{z_4(1 - z_1 z_3 + z_6)}{1 + z_1 - z_4 z_6}, \frac{z_3(1 + z_1 - z_4 z_6)}{1 - z_1 z_3 + z_6}, \frac{1 + z_1 - z_4 z_6}{z_4 z_6}, \frac{z_1 z_2 z_4 z_6}{1 + z_1 - z_4 z_6} \right).$$

Thus, the identity (1) holds.

Let us demonstrate that identity (6) holds. Indeed, on the one hand,

$$T_1 T_2 S_1(\mathbf{z}) = T_1 T_2 S_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = T_1 T_2(S(z_1), S(z_2), S(z_3), S(z_4), z_5, z_6) = \\ = T_1(S(z_1), S(z_2), z_5, z_7, S(z_3), S(z_4)) = (z_5, z_6, S(z_1), S(z_2), S(z_3), S(z_4)).$$

and, on the other hand,

$$S_2 T_1 T_2(\mathbf{z}) = S_2 T_1 T_2(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = S_2 T_1(z_1, z_2, z_5, z_6, z_3, z_4) = \\ = S_2(z_5, z_6, z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_5, z_6, S(z_1), S(z_2), S(z_3), S(z_4)).$$

Remaining identities (2), (3), (4), and (5) hold obviously.

Theorem 3.1. allows to distinguish elements of the virtual braid group VB_n by computing their images which are vectors of lengths $2n$.

Example 3.1. It is known [10] that a generalized Burau representation does not distinguish a braid $w_2 = (\sigma_1^2 \rho_1 \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1} \rho_1)^2 \in VB_2$ from a trivial braid. By acting $F(w_2)$ on the vector $(1, 2, 2, 1)$ we get

$$F(w_2)(1, 2, 2, 1) = \left(-\frac{44}{19}, -\frac{19}{22}, -\frac{19}{22}, -\frac{44}{19} \right) \neq (1, 2, 2, 1).$$

Therefore, the homomorphism F distinguishes w_2 from a trivial braid.

Example 3.2. Consider

$$w_3 = \sigma_1 \rho_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_2 \rho_1 \sigma_1 \rho_2 \sigma_1^{-1} \rho_2 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \rho_2 \sigma_1^{-1} \in VB_3.$$

It is known that a representation from [4] does not distinguish w_3 from a trivial braid.

By acting $F(w_3)$ on $(1, 2, 2, 1, 1, 2)$ we get

$$\begin{aligned} F(w_3)(1, 2, 2, 1, 1, 2) = & \left(\frac{2488285076682521504}{1290542656863845663}, \frac{1290542656863845663}{1244142538341260752}, \right. \\ & \frac{1290542656863845663}{563568067426145589}, \frac{1127136134852291178}{1290542656863845663}, \frac{574648281}{1268603408}, \left. \frac{2537206816}{574648281} \right) \neq \\ & (1, 2, 2, 1, 1, 2). \end{aligned}$$

Therefore, the homomorphism F distinguishes w_3 from a trivial braid.

4. Forbidden relations

In this section we demonstrate that the forbidden relations do not hold in the group Θ_n .

Lemma 4.1. Let $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}, z_{2n})$ and $S_i, S_{i+1}, T_i, T_{i+1} \in \Theta_n$.

(1) The forbidden relation

$$T_i S_{i+1} S_i(\mathbf{z}) = S_{i+1} S_i T_{i+1}(\mathbf{z}) \quad (21)$$

does not hold if and only if the vector $\mathbf{z}$ is such that $z_j \neq -1$ for $j = 2i-1, 2i+2, 2i+4$.

(2) The forbidden relation

$$T_{i+1} S_i S_{i+1}(\mathbf{z}) = S_i S_{i+1} T_{i+1}(\mathbf{z}) \quad (22)$$

does not hold if and only if the vector $\mathbf{z}$ is such that $z_j \neq -1$ for $j = 2i-1, 2i+1, 2i+4$.

Proof. (a) Without loss of generality, we can assume $i = 1$. The left-hand side of (21) is

$$\begin{aligned} T_1 S_2 S_1(\mathbf{z}) &= T_1 S_2 S_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \\ &= \left(-\frac{(1+z_1+z_4)z_5 z_6}{1+z_1-z_4 z_6}, -\frac{1+z_1-z_4 z_6}{1+z_1+z_4}, -\frac{z_1 z_3 z_4}{1+z_1+z_4}, -\frac{1+z_1+z_4}{z_1}, \frac{1+z_1-z_4 z_6}{z_4 z_6}, \frac{z_1 z_2 z_4 z_6}{1+z_1-z_4 z_6} \right) \end{aligned}$$

and the right-hand side is equal

$$\begin{aligned} S_2 S_1 T_2(\mathbf{z}) &= S_2 S_1 T_2(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \\ &= \left(-\frac{z_1 z_5 z_6}{1+z_1+z_6}, -\frac{1+z_1+z_6}{z_1}, -\frac{(1+z_1+z_6)z_3 z_4}{1+z_1-z_4 z_6}, -\frac{1+z_1-z_6 z_4}{1+z_1+z_6}, \frac{1+z_1-z_6 z_4}{z_6 z_4}, \frac{z_1 z_2 z_6 z_4}{1+z_1-z_6 z_4} \right). \end{aligned}$$

Here we used formulae for $S_2 S_1(\mathbf{z})$ from Theorem 3.1. The fifth and sixth coordinates are equal. Comparison of the third and fourth coordinates leads to the equation

$$z_1(1+z_1-z_4z_6) = (1+z_1+z_4)(1+z_1+z_6), \quad (23)$$

which is equivalent to

$$(z_1+1)(z_4+1)(z_6+1) = 0. \quad (24)$$

Therefore, to obtain the relation (a), the necessary condition is that at least one of numbers z_1, z_4 , or z_6 is equal to -1 . But if at least one of the numbers z_1, z_4 , or z_6 is equal to -1 , then the left- and right-hand sides of (a) coincide. Indeed, if $z_1 = -1$, then

$$T_1S_2S_1(-1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = S_2S_1T_2(-1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = (z_5, z_6, z_3, z_4, -1, z_2).$$

Similarly, if $z_4 = -1$, then

$$\begin{aligned} T_1S_2S_1(z_1, z_2, z_3, -1, z_5, z_6) &= S_2S_1T_2(z_1, z_2, z_3, -1, z_5, z_6) = \\ &= \left(-\frac{z_1z_5z_6}{1+z_1+z_6}, -\frac{1+z_1+z_6}{z_1}, z_3, -1, -\frac{1+z_2+z_6}{z_6}, -\frac{z_1z_2z_6}{1+z_1+z_6} \right), \end{aligned}$$

and if $z_6 = -1$, then

$$\begin{aligned} T_1S_2S_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, -1) &= S_2S_1T_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, -1) = \\ &= \left(z_5, -1, -\frac{z_1z_3z_4}{1+z_1+z_4}, -\frac{1+z_2+z_4}{z_1}, -\frac{1+z_1+z_4}{z_4}, -\frac{z_1z_2z_4}{1+z_1+z_4} \right). \end{aligned}$$

Therefore, the above necessary condition is also sufficient.

(b) The left-hand side of relation (22) is equal to

$$\begin{aligned} T_2S_1S_2(\mathbf{z}) &= T_2S_1S_2(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \\ &= \left(\frac{z_1z_3z_5z_6}{1-z_1z_3+z_6}, \frac{1-z_1z_3+z_6}{z_1z_3}, -\frac{1+z_3+z_6}{z_6}, -\frac{z_3z_4z_6}{1+z_3+z_6}, -\frac{1-z_1z_3+z_6}{1+z_3+z_6}, -\frac{z_1z_2(1+z_3+z_6)}{1-z_1z_3+z_6} \right) \end{aligned}$$

and the right-hand side is equal to

$$\begin{aligned} S_1S_2T_1(\mathbf{z}) &= S_1S_2T_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \\ &= \left(\frac{z_3z_1z_5z_6}{1-z_3z_1+z_6}, \frac{1-z_3z_1+z_6}{z_3z_1}, -\frac{1-z_1z_3+z_6}{1+z_1+z_6}, -\frac{z_3z_4(1+z_1+z_6)}{1-z_3z_1+z_6}, -\frac{1+z_1+z_6}{z_6}, -\frac{z_1z_2z_6}{1+z_1+z_6} \right). \end{aligned}$$

Here we used formulae for $S_1S_2(\mathbf{z})$ from Theorem 3.1. By comparing the third and fourth coordinates, we get the equation

$$(1+z_3+z_6)(1+z_1+z_6) = z_6(1-z_1z_3+z_6), \quad (25)$$

which is equivalent to

$$(z_1+1)(z_3+1)(z_6+1) = 0. \quad (26)$$

Therefore, to obtain (b), the necessary condition is that at least one of z_1, z_3 , or z_6 is equal to -1 . But if at least one of these numbers is equal to -1 , then left- and right-hand sides of (22) coincide. Indeed, if $z_1 = -1$, then

$$\begin{aligned} T_2S_1S_2(-1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) &= S_2S_1T_2(-1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \\ &= \left(-\frac{z_3z_5z_6}{1+z_3+z_6}, -\frac{1+z_3+z_6}{z_3}, -\frac{1+z_3+z_6}{z_6}, -\frac{z_3z_4z_6}{1+z_3+z_6}, -1, z_2 \right). \end{aligned}$$

Similarly, if $z_3 = -1$, then

$$T_2 S_1 S_2(z_1, z_2, -1, z_4, z_5, z_6) = S_2 S_1 T_2(z_1, z_2, -1, z_4, z_5, z_6) =$$

$$= \left(-\frac{z_1 z_5 z_6}{1 + z_3 + z_6}, -\frac{1 + z_1 + z_6}{z_1}, -1, z_4, -\frac{1 + z_1 + z_6}{z_6}, -\frac{z_1 z_2 z_6}{1 + z_1 + z_6} \right)$$

and if $z_6 = -1$, then

$$T_2 S_1 S_2(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, -1) = S_2 S_1 T_2(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, -1) = (z_5, -1, z_3, z_4, z_1, z_2).$$

Therefore, the above necessary condition is also sufficient.

The obvious consequence of this lemma is the following theorem, which concludes the section.

Theorem 4.1. Let $S_i, S_{i+1}, T_i, T_{i+1} \in \Theta_n$.

(a) Operators $T_i S_{i+1} S_i$ and $S_{i+1} S_i T_{i+1}$ are different.

(b) Operators $T_{i+1} S_i S_{i+1}$ and $S_i S_{i+1} T_{i+1}$ are different.

So, the forbidden relations do not hold in Θ_n .

5. Flat braid groups

Let us consider vector $\mathbf{z}$ of the form $\left(z_1, \frac{1}{z_1}, z_3, \frac{1}{z_3} \right)$. Notice that

$$S(\mathbf{z}) = \left(\zeta_1, \frac{1}{\zeta_1}, \zeta_3, \frac{1}{\zeta_3} \right),$$

where

$$\zeta_1 = -\frac{z_1 z_3}{1 + z_3 + z_1 z_3}, \quad \zeta_3 = -(1 + z_3 + z_1 z_3).$$

Also notice that $S^2(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$. These observations inspire to obtain the representation for flat braids.

Consider a vector of algebraically independent variables $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Let us define the operators $R_i, i = 1, \dots, n-1$, according to the rule

$$R_i : \begin{cases} t_i \rightarrow -\frac{t_i t_{i+1}}{1 + t_{i+1} + t_i t_{i+1}}, \\ t_{i+1} \rightarrow -(1 + t_{i+1} + t_i t_{i+1}). \end{cases}$$

Let F_{FB} be a map that match operators R_i with generators $\sigma_i, i = 1, \dots, n-1$, of the flat braid group T_n :

$$F_{FB}(\sigma_i) = R_i.$$

For $n \geq 2$, denote by Ω_n the group generated by operators $R_i, i = 1, \dots, n-1$, with composition as a group operation.

Lemma 5.1. Let w be a word in FB_n . Then for a vector of algebraically independent variables $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ in the image of $F_{FB}(w)(\mathbf{t})$ no coordinate turns into zero or infinity.

Proof. Consider n -tuple $\mathbf{t}' = (-1, -1, \dots, -1)$. It is easy to see that $R_i^{\pm 1}(\mathbf{t}') = \mathbf{t}'$ for each i . Hence $F_{FB}(w)(\mathbf{t}') = \mathbf{t}'$. Hence, in the image of $F_{FB}(w)(\mathbf{t})$ no coordinate can turn into zero or infinity because for $t_i = -1, i = 1, \dots, n$, all coordinates of the image will be equal to -1 .

Theorem 5.1. Correspondence $F_{FB} : FB_n \rightarrow \Omega_n$ is a homomorphism for any $n \geq 2$.

Proof. Let us check that for the operators $R_i, i = 1, \dots, n-1$, act on $\mathbf{t}$ in such a way that the following identities hold.

- (1) $R_i^2 = 1$, where $i = 1, 2, \dots, n-2$.
- (2) $R_i R_{i+1} R_i = R_{i+1} R_i R_{i+1}$, where $i = 1, 2, \dots, n-2$.
- (3) $R_i R_j = R_j R_i$, where $|i - j| \geq 2$.

We present a proof for the case of $i = 1$, which also works for an arbitrary $i = 1, \dots, n-1$. Consider $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$. Relation (1) is easily verified. Indeed,

$$R_1^2(\mathbf{t}) = R_1^2(t_1, t_2, t_3) = R_1\left(-\frac{t_1 t_2}{1 + t_1 + t_1 t_2}, -(1 + t_2 + t_1 t_2), t_3\right) = ((t_1, t_2, t_3)).$$

Let us now prove identity (2). Its left-hand side is

$$R_1 R_2 R_1(\mathbf{t}) = R_1 R_2 R_1(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{t_1 t_2 t_3}{1 + t_3 - t_1 t_2 t_3}, \frac{1 + t_3 - t_1 t_2 t_3}{-1 + t_2 t_3 + t_1 t_2 t_3}, -1 + t_2 t_3 + t_1 t_2 t_3\right).$$

The right-hand side is

$$R_2 R_1 R_2(\mathbf{t}) = R_2 R_1 R_2(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{t_1 t_2 t_3}{1 + t_3 - t_1 t_2 t_3}, \frac{1 + t_3 - t_1 t_2 t_3}{-1 + t_2 t_3 + t_1 t_2 t_3}, -1 + t_2 t_3 + t_1 t_2 t_3\right).$$

Thus, identity (2) holds. The fulfillment of identity (3) is obvious.

6. Flat virtual braid groups

Consider a vector of algebraically independent variables $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. In addition to the operators $R_i, i = 1, \dots, n-1$ introduced in the previous section, we define the operators $V_i, i = 1, \dots, n-1$, according to the rule:

$$V_i : \begin{cases} t_i \rightarrow t_{i+1}, \\ t_{i+1} \rightarrow t_i. \end{cases}$$

Let F_{FVB} be a map that match operators R_i and V_i with generators σ_i and $\rho_i, i = 1, \dots, n-1$, of the virtual flat braid group T_n :

$$F_{FVB}(\sigma_i) = R_i, F_{FVB}(\rho_i) = V_i.$$

For $n \geq 2$, denote by Δ_n the group generated by operators $R_i, V_i, i = 1, \dots, n-1$, with composition as a group operation.

Lemma 6.1. Let w be a word in FVB_n . Then for a vector of algebraically independent variables $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ in the image of $F_{FVB}(w)(\mathbf{t})$ no coordinate turns into zero or infinity.

Proof. Consider n -tuple $\mathbf{t}' = (-1, -1, \dots, -1)$. It is easy to see that $R_i^{\pm 1}(\mathbf{t}') = \mathbf{t}'$ and $V_i^{\pm 1}(\mathbf{t}') = \mathbf{t}'$ for each i . Hence $F_{FVB}(w)(\mathbf{t}') = \mathbf{t}'$. Hence, in the image of $F_{FVB}(w)(\mathbf{t})$ no coordinate can turn into zero or infinity, because for $t_i = -1, i = 1, \dots, n$, all coordinates of the image will be equal to -1 .

Theorem 6.1. Correspondence $F_{FVB} : FVB_n \rightarrow \Delta_n$ is a homomorphism for any $n \geq 2$.

Proof. Let us check that the operators R_i and $V_i, i = 1, \dots, n-1$, act on $\mathbf{t}$ in such a way that the following identities hold.

- (1) $R_i^2 = 1$, where $i = 1, 2, \dots, n-2$;
- (2) $R_i R_{i+1} R_i = R_{i+1} R_i R_{i+1}$, where $i = 1, 2, \dots, n-2$;
- (3) $R_i R_j = R_j R_i$, where $|i - j| \geq 2$;
- (4) $V_i V_{i+1} V_i = V_{i+1} V_i V_{i+1}$, where $i = 1, 2, \dots, n-2$;
- (5) $V_i V_j = V_j V_i$, where $|i - j| \geq 2$;
- (6) $V_i^2 = 1$, where $i = 1, 2, \dots, n-1$;
- (7) $V_i V_{i+1} R_i = R_{i+1} V_i V_{i+1}$, where $i = 1, 2, \dots, n-2$.

Identities (1), (2), and (3) are proved in Theorem 5.1. The fulfillment of identities (5) and (6) is obvious. It remains to prove the relations (4) and (7). We present a proof for the case of $i = 1$, which also works for an arbitrary $i = 1, \dots, n-1$. Consider $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$. Let us now prove the identity (4). Its left-hand side is

$$V_1 V_2 V_1(\mathbf{t}) = V_1 V_2 V_1(t_1, t_2, t_3) = V_1 V_2(t_2, t_1, t_3) = V_1(t_2, t_3, t_1) = (t_3, t_2, t_1).$$

The right-hand side is

$$V_2 V_1 V_2(\mathbf{t}) = V_2 V_1 V_2(t_1, t_2, t_3) = V_2 V_1(t_1, t_3, t_2) = V_2(t_3, t_1, t_2) = (t_3, t_2, t_1).$$

So, identity (4) holds. Let us now prove identity (7). Its left-hand side is

$$V_1 V_2 R_1(\mathbf{t}) = V_1 V_2 R_1(t_1, t_2, t_3) = \left(t_3, -\frac{t_1 t_2}{1 + t_1 + t_1 t_2}, -(1 + t_2 + t_1 t_2) \right).$$

The right-hand side is

$$R_2 V_1 V_2(\mathbf{t}) = R_2 V_1 V_2(t_1, t_2, t_3) = \left(t_3, -\frac{t_1 t_2}{1 + t_1 + t_1 t_2}, -(1 + t_2 + t_1 t_2) \right).$$

So, identity (7) holds.

References

1. Artin E. (1947) Theory of braids. *Annals of Mathematics*. 48(2). pp. 101–126.
2. Kassel C., Turaev V. (2008) *Braid Groups*. *Texts in Mathematics*. Berlin–Heidelberg: Springer.
3. Goussarov M., Polyak M., Viro O. (2000) Finite-type invariants of classical and virtual knots. *Topology*. 39(5). pp. 1045–1068.
4. Bardakov V., Vesnin A., Wiest B. (2012) Dynnikov coordinates on virtual braid groups. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. 21(5). 1250052.
5. Dynnikov I.A. (2002) On a Yang–Baxter mapping and the Dehornoy ordering, *Russian Mathematical Surveys*. 57(3). pp. 592–594.

6. Gotin K. (2017) Representation of virtual braid groups to rook algebra and virtual link invariants. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. 26(6). 1742002.
7. Bigelow S., Ramos E., Yi R. (2012) The Alexander and Jones polynomials through representation of rook algebra. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. 21(12).
8. Hikami K., Inoue R. (2015) Braids, complex volume and cluster algebra. *Algebraic and Geometric Topology*. 15(4). 2175–2194.
9. Cho J., Yoon S., Zickert C.K. (2020) On the Hikami–Inoue conjecture. 20. 279–301.
10. Manturov V. (2005) Recognition of virtual braids. *Journal of Mathematical Sciences*. 131(1). 267–286.

Information about the author:

Egorov Andrey A. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation; Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation; Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: a.egorov2@g.nsu.ru

Сведения об авторе:

Егоров Андрей Александрович – младший научный сотрудник Томского государственного университета (Томск, Россия); ассистент Новосибирского государственного университета (Новосибирск, Россия); аспирант Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН (Новосибирск, Россия). E-mail: a.egorov2@g.nsu.ru

The article was submitted 17.07.2024; accepted for publication 03.10.2024

Статья поступила в редакцию 17.07.2024; принята к публикации 03.10.2024

Научная статья

УДК 512.552

MSC: 08A35, 15B99, 16S50

doi: 10.17223/19988621/91/3

Нильпотентные, ниль-хорошие и ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов

Анастасия Максимовна Елфимова¹,
Цырендоржи Дашацыренович Норбосамбуев²,
Максим Вадимович Подкорытов³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ elfimova.nastya@bk.ru

² nstsddts@yandex.ru

³ maximthegreate@yandex.ru

Аннотация. Продолжена работа над аддитивными задачами в кольцах формальных матриц над кольцами вычетов. Найдены необходимые и достаточные условия нильпотентности формальной матрицы над кольцами вычетов, показано, что кольцо таких матриц будет $(p - 1)$ -ниль-чистым и ниль-хорошим чистым. Также, отвечая на вопрос, поставленный в статье второго соавтора, мы доказали, что кольцо формальных матриц над кольцами вычетов никогда не ниль-хорошее, а следовательно, и не изящное.

Ключевые слова: кольцо формальных матриц, нильпотентная формальная матрица, ниль-хорошее кольцо, изящное кольцо, ниль-чистое кольцо, ниль-хорошее чистое кольцо, кольцо контекста Мориты

Благодарности: Работа выполнена в рамках проекта «Кольца, близкие к хорошим» во время Большой математической мастерской в Томском государственном университете при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2024-1437).

Для цитирования: Елфимова А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М.В. Нильпотентные, ниль-хорошие и ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 31–40. doi: 10.17223/19988621/91/3

Original article

Nilpotent, nil-good, and nil-clean formal matrices over residue class rings

Anastasia M. Elfimova¹, Tsyrendorzhi D. Norbosambuev²,
Maxim V. Podkorytov³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ elfimova.nastya@bk.ru

Abstract. Let us recall some classes of rings. A ring R is said to be k -nil-clean if each element can be written as a sum of a nilpotent and k idempotents. A ring R is said to be fine if each non-zero element can be written as a sum of a unit and a nilpotent. A ring R is called nil-good if every element is a nilpotent or a sum of a nilpotent and a unit. And, finally, ring R is called nil-good clean if every element is a sum of a nilpotent, an idempotent, and a unit.

In this paper, we continue our work on additive problems in formal matrix rings over residue class rings. We have found necessary and sufficient conditions for the nilpotency of a formal matrix over residue class rings. After that we have shown that a ring of such matrices is $(p-1)$ -nil-clean and nil-good clean. Also, answering the question posed in the previous article of the second co-author, we prove that a ring of formal matrices over residue rings is never nil-good, and, therefore, not fine.

Let p be a prime, m and n be natural numbers, $m > n > 0$. Consider the ring of formal matrices

over residue class rings $K = \left(\begin{array}{cc} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \end{array} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} a + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & d + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$

where for all $A, A' \in K$

$$\begin{aligned} A \cdot A' &= \begin{pmatrix} a + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & d + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbb{Z} & b' + p^n\mathbb{Z} \\ c' + p^n\mathbb{Z} & d' + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbb{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbb{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbb{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

One can see that the ring K is isomorphic to the endomorphism ring of the abelian group $((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}), +)$.

Theorem 2.1. Let $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & d + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in K$. Matrix A is nilpotent if and only if a

and d are multiples of p .

Corollary 2.3. Ring K is not nil-good.

Corollary 2.4. Ring K is not fine.

Theorem 3.5. Ring K is $(p-1)$ -nil-clean.

Corollary 3.6. $\left(\begin{array}{cc} \mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} \end{array} \right)$ is a nil-clean ring.

Question 3.7. Will K be nil-clean for $p > 2$?

Problem 3.8. Find necessary and sufficient conditions for the idempotency of a matrix from K .

Proposition 3.9. Ring K is nil-good clean.

Keywords: formal matrix ring, nilpotent formal matrix, nil-good ring, fine ring, nil-clean ring, nil-good clean ring, Morita context ring

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2024-1437).

For citation: Elfimova, A.M., Norbosambuev, T.D., Podkorytov, M.V. (2024) Nilpotent, nil-good, and nil-clean formal matrices over residue class rings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 31–40. doi: 10.17223/19988621/91/3

Введение

Все рассматриваемые кольца – ассоциативные с единицей, $E(G)$ – кольцо эндоморфизмов абелевой группы G , $U(R)$ – группа обратимых элементов кольца R , $M(n, R)$ – кольцо всех матриц порядка n над кольцом R , $\mathbf{Z}$ – кольцо (и группа) целых чисел, $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ – кольцо (и группа) вычетов по модулю p^n , ■ – конец доказательства или его отсутствие.

1. Формальные матрицы над кольцами вычетов

Пусть R и S – кольца, ${}_R M_S$ и ${}_S N_R$ – бимодули. Напомним, что *кольцом формальных матриц* (второго порядка) мы называем множество

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \middle| r \in R, m \in {}_R M_S, n \in {}_S N_R, s \in S \right\}$$

с операциями поэлементного сложения и умножения вида:

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r' & m' \\ n' & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' + \varphi(m \otimes n') & rm' + ms' \\ nr' + sn' & \psi(n \otimes m') + ss' \end{pmatrix},$$

задаваемого с помощью бимодульных гомоморфизмов $\varphi: M \otimes_S N \rightarrow R$ и $\psi: N \otimes_R M \rightarrow S$.

Также здесь нужно потребовать выполнения равенств $\varphi(m \otimes n) \cdot m' = m \cdot \psi(n \otimes m')$ и $\psi(n \otimes m) \cdot n' = n \cdot \varphi(m \otimes n')$, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, для ассоциативности умножения.

Часто такое кольцо обозначают $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$. Кольца формальных матриц,

также называемые *кольцами контекста Мориты*, впервые появляются в работе японского математика Киити Мориты [1]. Для более подробного ознакомления с историей изучения контекста Мориты рекомендуем обзорную статью [2].

Пусть p – простое число, m и n – натуральные, $m \geq n > 0$. Рассмотрим кольцо формальных матриц, в котором $R = \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$, $S = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, $M = \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$, $N = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, $\varphi((b + p^n\mathbf{Z}) \otimes (c' + p^n\mathbf{Z})) = p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z}$ и $\psi((c + p^n\mathbf{Z}) \otimes (b' + p^n\mathbf{Z})) = p^{m-n}cb' + p^n\mathbf{Z}$ для любых $b, c, b', c' \in \mathbf{Z}$. Тогда получаем кольцо

$$K = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\},$$

где для любых $A, A' \in K$

$$\begin{aligned} A \cdot A' &= \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbf{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При $m = n$, конечно, $K = M(2, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Этот случай нам не так интересен. Далее считаем, что $m > n$, если не отмечено иное.

Рассмотрим группу $((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}), +)$. В работе [3] было показано, что кольцо эндоморфизмов группы $((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}), +)$ изоморфно кольцу формальных мат-

риц $K = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$. А именно, эндоморфизму θ группы $(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$

соответствует единственная матрица $\begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in K$ такая, что для любых

$z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$ имеет место равенство $\theta \begin{pmatrix} z_1 + p^m\mathbf{Z} \\ z_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + p^{m-n}bz_2 + p^m\mathbf{Z} \\ cz_1 + dz_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$. Здесь эле-

менты группы $(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ для наглядности записаны в столбец. Ясно также,

что тождественному эндоморфизму соответствует матрица $E = \begin{pmatrix} 1 + p^m\mathbf{Z} & 0 + p^n\mathbf{Z} \\ 0 + p^n\mathbf{Z} & 1 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$.

Вместе с тем всякая конечная p -группа ранга 2 изоморфна группе вида $(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$, где $m \geq n > 0$. Таким образом, кольца формальных матриц K второго порядка суть в точности кольца эндоморфизмов конечных p -групп второго ранга. Далее в статье можем не делать различий между кольцом формальных матриц K и кольцом эндоморфизмов $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$.

Кольца формальных матриц над кольцами вычетов подробно рассматриваются в статьях [3] и [4], также им уделяют внимание в работах [5–7]. Имеет место следующий критерий обратимости в кольце формальных матриц K .

Теорема 1.1 [3, 7]. Матрица $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in K$ обратима тогда и

только тогда, когда числа a и d не делятся на p . ■

Кольца формальных матриц над кольцами вычетов могут представлять интерес как основа для построения некоммутативного протокола шифрования данных. Этот раздел криптографии – некоммутативная алгебраическая криптография – в последнее время привлекает большой интерес специалистов по шифрованию данных. Кольцо K , очевидно, не является коммутативным, однако оно рассматривается над несколькими коммутативными кольцами $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, весьма просто устроенными. Также кольца K при $m > n$ не изоморфны кольцам обычных матриц $M(2, R)$. На данный момент предпринималось несколько попыток сконструировать протоколы шифрования, использующие кольца формальных матриц (см.: [8–11]).

2. Нильпотентные и ниль-хорошие формальные матрицы над кольцами вычетов

Пусть k – натуральное, $k > 1$. Напомним, что элемент кольца мы называем *k-хорошим*, если его можно записать в виде суммы k обратимых элементов этого кольца. Кольцо называем *k-хорошим*, если все его элементы таковы. Если все элементы кольца *k-хороши*, но для разных натуральных k , т.е. невозможно подобрать одно такое k , что все элементы являются *k-хорошими*, то называем кольцо в таком случае ω -хорошим. А если в кольце есть элементы, непредставимые в виде конечной суммы обратимых, то говорим, что кольцо не является хорошим.

Изучение колец, аддитивно порождаемых своими обратимыми элементами, началось с середины прошлого века. Эта тема вызывает интерес многих специалистов по алгебре. Выделим связанные с ней вопросы:

1. *Изящность* элемента кольца – возможность записать его как сумму нильпотентного и обратимого элементов. Кольцо называем изящным, если все его элементы, кроме нулевого, изящны. Если в кольце есть ненулевые элементы, не представимые в виде суммы нильпотента и обратимого, то говорим, что кольцо не является изящным.

2 *Ниль-хорошесть* элемента кольца – возможность записать его как сумму нильпотента и элемента, который либо обратим, либо равен нулю кольца. Кольцо называем ниль-хорошим, если все его элементы таковы. Если в кольце есть хотя бы один не ниль-хороший элемент, то и все кольцо называем не ниль-хорошим.

3. *k-ниль-хорошесть* элемента кольца – возможность записать его в виде суммы одного нильпотентного и k обратимых элементов. Кольцо называем k -ниль-хорошим, если все его элементы таковы. Здесь, как и в случае с k -хорошестью, если все элементы кольца k -ниль-хороши, но для разных k , то называем кольцо в таком случае ω -ниль-хорошим.

Очевидно, что из изящности следует ниль-хорошесть. Из k -хорошести вытекает k -ниль-хорошесть. Подробнее об этих свойствах можно прочитать в работах [4] и [12] и в литературе, упоминаемой в них.

При $p > 2$ кольцо K является 2-хорошим [4], а значит и 2-ниль-хорошим. Вместе с тем при $p = 2$ кольцо K не является хорошим, т.е. в K найдутся матрицы, не представимые в виде сумм конечного числа обратимых матриц. Также в [4] был задан вопрос: будет ли $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ изящным или хотя бы ниль-хорошим кольцом? Что можно сказать о ниль-хорошести и изящности кольца $E((\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}))$, $m > n$?

Для ответа на эти вопросы нужно знать необходимые и достаточные условия нильпотентности формальных матриц в K . Нам удалось их получить.

Теорема 2.1. Пусть $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & d + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in K$. Матрица A нильпотентна

тогда и только тогда, когда числа a и d кратны p .

Доказательство. Пусть A – нильпотентная матрица, т.е. $A^k = 0$ для какого-то натурального k . Легко показать по индукции, что при любом натуральном i матрица A^i имеет вид:

$$A^i = \begin{pmatrix} a^i + p^{m-n}(\dots) + p^m\mathbb{Z} & (\dots) + p^n\mathbb{Z} \\ (\dots) + p^n\mathbb{Z} & d^i + p^{m-n}(\dots) + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того чтобы элементы на главной диагонали матрицы A^k получились нулевыми (в смысле колец $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$), числа a и d должны быть кратны p .

Обратно, пусть a и d кратны p . Тогда существуют такие числа a' и d' , что $a = pa'$ и $d = pd'$. Вычислим A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + p^{m-n}bc + p^m\mathbb{Z} & ab + bd + p^n\mathbb{Z} \\ ca + dc + p^n\mathbb{Z} & p^{m-n}cb + d^2 + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

Далее можем расписать

$$\begin{aligned} a^2 + p^{m-n}bc &= pa'a + p \cdot p^{m-n-1}bc = p(a'a + p^{m-n-1}bc), \\ ab + bd &= pa'b + bpd' = p(a'b + bd'), \\ ca + dc &= cpa' + pd'c = p(ca' + d'c), \\ p^{m-n}cb + d^2 &= p \cdot p^{m-n-1}cb + pd'd = p(p^{m-n-1}cb + d'd). \end{aligned}$$

Итак,

$$A^2 = \begin{pmatrix} p(a'a + p^{m-n-1}bc) + p^m \mathbf{Z} & p(a'b + bd') + p^n \mathbf{Z} \\ p(ca' + d'c) + p^n \mathbf{Z} & p(p^{m-n-1}bc + d'd) + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Снова пользуясь индукцией, легко показать, что при любом натуральном i

$$A^{2i} = \begin{pmatrix} p^i(\dots) + p^m \mathbf{Z} & p^i(\dots) + p^n \mathbf{Z} \\ p^i(\dots) + p^n \mathbf{Z} & p^i(\dots) + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Тогда можем заключить, что по крайней мере

$$A^{2m} = \begin{pmatrix} p^m(\dots) + p^m \mathbf{Z} & p^m(\dots) + p^n \mathbf{Z} \\ p^m(\dots) + p^n \mathbf{Z} & p^m(\dots) + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Следствие 2.2. Нильпотентные матрицы кольца K образуют идеал. ■

Далее, зная условия нильпотентности матриц в K , можем вывести следующий факт.

Следствие 2.3. K – не ниль-хорошее кольцо.

Доказательство. Пусть $A \in K$ – не нильпотентная и необратимая матрица. Такие матрицы существуют, это легко вывести из теорем 1.1 и 2.1. Допустим, что A – ниль-хорошая, тогда $A = N + 0$ или $A = N + U$, где N – нильпотентная, U – обратимая матрицы. В первом случае получаем, что A – нильпотентная, что противоречит нашему предположению. Пусть $A = N + U$, тогда по теореме 2.1 и теореме 1.1 матрицы N и U имеют вид:

$$N = \begin{pmatrix} pa + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & pd + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} a' + p^m \mathbf{Z} & b' + p^n \mathbf{Z} \\ c' + p^n \mathbf{Z} & d' + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где $a, a', b, b', c, c', d, d' \in \mathbf{Z}$, причем a' и d' не делятся на p . Тогда, как несложно видеть,

$$A = \begin{pmatrix} a' + pa + p^m \mathbf{Z} & b + b' + p^n \mathbf{Z} \\ c + c' + p^n \mathbf{Z} & d' + pd + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \in U(K),$$

что противоречит нашему предположению, что A – необратимая матрица. Значит, A не может быть ниль-хорошей. Следовательно, K – не ниль-хорошее кольцо. ■

Как мы отмечали выше, изящное кольцо всегда будет ниль-хорошим. Следовательно, кольцо, не являющееся ниль-хорошим, не может быть изящным.

Следствие 2.4. Кольцо K не изящно. ■

Таким образом, мы ответили на оба вопроса, поставленных ранее в [4]: кольцо формальных матриц K не будет ни изящным, ни ниль-хорошим ни при каком простом p .

Заметим, однако, что при $m = n$ и $p = 2$ кольцо $K = M(2, \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})$ – 2-ниль-хорошее, ниль-хорошее, но не изящное [4. Предложение 3.11].

3. Чистые, ниль-чистые и ниль-хорошие чистые формальные матрицы над кольцами вычетов

Напомним, что элемент кольца называется *чистым*, если его можно разложить в сумму идемпотентного и обратимого элементов кольца. Кольцо называем чистым, если все его элементы чистые. Со свойством чистоты также связаны понятия:

1. *Ниль-чистота* – элемент кольца называем ниль-чистым, если его можно разложить в сумму идемпотентного и нильпотентного элементов кольца. Кольцо называем ниль-чистым, если все его элементы ниль-чисты.

2. *k-ниль-чистота* – элемент кольца называем *k-ниль-чистым*, если его можно разложить в сумму одного нильпотентного и *k* идемпотентных элементов кольца, где *k* – натуральное число. Кольцо называем *k-ниль-чистым*, если все его элементы *k-ниль-чисты*.

3. *Ниль-хорошая чистота* – элемент кольца называем ниль-хорошим чистым, если его можно разложить в сумму идемпотентного, нильпотентного и обратимого элементов кольца. Кольцо называем ниль-хорошим чистым, если все его элементы ниль-хорошие чистые.

Для более подробного ознакомления с этими свойствами см. литературу, упоминаемую, например, в [4] и [12].

Теорема 3.1 [5]. Если *R* и *S* – чистые кольца, то кольцо формальных матриц $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ – тоже чистое. ■

Поскольку при любых простых *p* и *n* ∈ **N** кольцо $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ является чистым, то получаем

Следствие 3.2. Кольцо *K* – чистое. ■

Следующее утверждение можно проверить непосредственно.

Лемма 3.3. Для любого простого *p* и для любых натуральных *m* и *n*, *m* ≥ *n*, следующие (формальные) матрицы являются нетривиальными идемпотентами в *K*:

$$\begin{pmatrix} 1+p^m\mathbb{Z} & 0+p^n\mathbb{Z} \\ 0+p^n\mathbb{Z} & 0+p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0+p^m\mathbb{Z} & 0+p^n\mathbb{Z} \\ 0+p^n\mathbb{Z} & 1+p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+p^m\mathbb{Z} & 1+p^n\mathbb{Z} \\ 0+p^n\mathbb{Z} & 0+p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1+p^m\mathbb{Z} & 0+p^n\mathbb{Z} \\ 1+p^n\mathbb{Z} & 0+p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0+p^m\mathbb{Z} & 1+p^n\mathbb{Z} \\ 0+p^n\mathbb{Z} & 1+p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0+p^m\mathbb{Z} & 0+p^n\mathbb{Z} \\ 1+p^n\mathbb{Z} & 1+p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Лемма 3.4. Если элемент кольца ниль-чист, то он будет и *k-ниль-чист* для любого *k* ≥ 1.

Действительно, пусть *a* = *n* + *e*, где *n* – нильпотент, *e* – идемпотент. Тогда *a* = *n* + *e* + 0 + ... + 0 – *k-ниль-чистое* разложение элемента *a* с *k* – 1 нулевыми слагаемыми. ■

Теорема 3.5. Кольцо *K* является (*p* – 1)-ниль-чистым.

Доказательство. Пусть $A = \begin{pmatrix} x+pa+p^m\mathbb{Z} & b+p^n\mathbb{Z} \\ c+p^n\mathbb{Z} & y+pd+p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} \in K$, где *a*, *b*, *c*, *d*, *x*, *y* ∈ **Z**, причем 0 ≤ *x* < *p* и 0 ≤ *y* < *p*. Считаем, что *x* ≥ *y* (случай *x* ≤ *y* рассматривается аналогично). Тогда можем записать

$$A = \begin{pmatrix} pa+p^m\mathbb{Z} & b+p^n\mathbb{Z} \\ c+p^n\mathbb{Z} & pd+p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} + \sum_{y \text{ раз}} \begin{pmatrix} 1+p^m\mathbb{Z} & 0+p^n\mathbb{Z} \\ 0+p^n\mathbb{Z} & 1+p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} + \\ + \sum_{x-y \text{ раз}} \begin{pmatrix} 1+p^m\mathbb{Z} & 0+p^n\mathbb{Z} \\ 0+p^n\mathbb{Z} & 0+p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Получили сумму одной нильпотентной и x идемпотентных матриц. Понятно, что если $x = y$, то слагаемых вида $\begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$ в разложении (1) просто не будет.

Далее, поскольку $x < p, y < p$, то слагаемых $\begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 1 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$ в разложении (1) матрицы A не может быть больше $p - 1$. А если таких слагаемых меньше $p - 1$, то всегда можно добавить нужное количество нулевых матриц (см. лемму 3.4). ■

Следствие 3.6. Кольцо $K = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/2^m \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$ – ниль-чистое.

Вопрос 3.7. Может ли K быть ниль-чистым кольцом при $p > 2$?

Для ответа на этот вопрос нужно знать, когда формальная матрица $A \in K$ является идемпотентной.

Проблема 3.8. Найти необходимые и достаточные условия идемпотентности матриц из K .

В завершение установим ниль-хорошую чистоту кольца K .

Предложение 3.9. Кольцо K является ниль-хорошим чистым.

Доказательство. Если $A \in K$ – обратимая матрица, то можем записать $A = 0 + 0 + A$; таким образом, A – ниль-хорошая чистая.

Если матрица $A \in K$ нильпотентна, то можем записать $A = A + E + (-E)$ – сумма нильпотентной, идемпотентной и обратимой матриц.

Пусть $A \in K$ – не нильпотентная и необратимая матрица. Тогда

$A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$, где либо a делится на p и d не делится на p , либо d делится на p и a не делится на p . Для определенности пусть a делится на p и d не делится. Полагая

$$X = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} -1 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

получаем, что $A = X + Y + Z$, где матрица X нильпотентна в силу теоремы 2.1, матрица Y идемпотентна по лемме 3.3, и матрица Z обратима в силу теоремы 1.1. ■

Список источников

1. Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. Sect. A. 1958. V. 6. P. 83–142.
2. Loustau P., Shapiro J. Morita contexts // Non-Commutative Ring Theory. Springer, 1990. P. 80–92. (Lecture Notes in Mathematics; v. 1448). doi: 10.1007/BFb0091253
3. Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 30–42. doi: 10.17223/19988621/74/4
4. Норбосамбуев Ц.Д. Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 32–42. doi: 10.17223/19988621/85/3

5. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. М. : МЦНМО, 2017.
6. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Формальные матрицы и их определители // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2014. № 1 (19). С. 65–119.
7. Крылов П.А. Определители обобщенных матриц порядка 2 // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2015. № 5 (20). С. 95–112.
8. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. Key exchange protocols over noncommutative rings. The case of $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$ // *International Journal of Computer Mathematics*. 2012. V. 89. P. 1753–1763. doi: 10.1080/00207160.2012.696105
9. Climent J.-J., López-Ramos J.A. Public key protocols over the ring $E_p^{(m)}$ // *Advances in Mathematics of Communications*. 2016. V. 10. P. 861–870.
10. Long D.T., Thu D.T., Thuc D.N. A Bergman ring based cryptosystem analogue of RSA // *International Conference on IT Convergence and Security, ICITCS 2013*. doi: 10.1109/ICITCS.2013.6717769
11. Farida N.J., Irawati. On the arithmetic of endomorphism ring $\text{End}(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p)$ and its RSA variants // *South East Asian Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2023. V. 19 (2). P. 53–64. doi: 10.56827/SEAJMMS.2023.1902.4
12. Норбосамбиев Ц.Д., Тимошенко Е.А. О k -ниль-хороших кольцах формальных матриц // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 77. С. 17–26. doi: 10.17223/19988621/77/2

References

1. Morita K. (1958) Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*. 6. pp. 83–142.
2. Loustau P., Shapiro J. (1990) Morita contexts. *Non-Commutative Ring Theory* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1448). Springer. pp. 80–92. DOI: 10.1007/BFb0091253.
3. Stepanova A.Yu., Timoshenko E.A. (2021) Matrichnoye predstavleniye endomorfizmov primarnykh grupp malykh rangov [Matrix representation of endomorphisms of primary groups of small ranks]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 30–42. DOI: 10.17223/19988621/74/4.
4. Norbosambuev T.D. (2023) Khoroshiye kol'tsa formal'nykh matrits nad kol'tsami vychetov [Good formal matrix rings over residue class rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 32–42. DOI: 10.17223/19988621/85/3.
5. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal Matrices*. (Algebra and Applications, Vol. 23). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-53907-2.
6. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2015) Formal matrices and their determinants. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 211(3). pp. 341–380. DOI: 10.1007/s10958-015-2610-3.
7. Krylov P.A. (2018) Determinants of generalized matrices of order 2. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 230(3). pp. 414–427. DOI: 10.1007/s10958-018-3748-6.
8. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. (2012) Key exchange protocols over noncommutative rings. The case of $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$. *International Journal of Computer Mathematics*. 89. pp. 1753–1763. DOI: 10.1080/00207160.2012.696105.
9. Climent J.-J., López-Ramos J.A. (2016) Public key protocols over the ring $E_p^{(m)}$. *Advances in Mathematics of Communications*. 10. pp. 861–870.
10. Long D.T., Thu D.T., Thuc D.N. (2013) A Bergman ring based cryptosystem analogue of RSA. *International Conference on IT Convergence and Security, ICITCS*. DOI: 10.1109/ICITCS.2013.6717769.

11. Farida N.J., Irawati (2023) On the arithmetic of endomorphism ring $\text{End}(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p)$ and its RSA variants. *South East Asian Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 19(2). pp. 53–64. DOI: 10.56827/SEAJMMS.2023.1902.4.
12. Norbosambuev T.D., Timoshenko E.A. (2022) О k -nil'-khoroshikh kol'tsakh formal'nykh matrits [On k -nil-good formal matrix rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 17–26. DOI: 10.17223/19988621/77/2.

Сведения об авторах:

Елфимова Анастасия Максимовна – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: elfimova.nastya@bk.ru

Норбосамбиев Цырендоржи Дашацыренович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nstsddts@yandex.ru

Подкорытов Максим Вадимович – студент механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: maximthegreate@yandex.ru

Information about the authors:

Elfimova Anastasia M. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: elfimova.nastya@bk.ru

Norbosambuev Tsyrendorzh D. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nstsddts@yandex.ru

Podkorytov Maxim V. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: maximthegreate@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 28.02.2024; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 28.02.2024; accepted for publication 03.10.2024

Научная статья

УДК 512.552

doi: 10.17223/19988621/91/4

MSC: 16R99

Кольца инцидентности и их автоморфизмы

Евгений Владимирович Кайгородов¹, Петр Андреевич Крылов²

¹ Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия

² Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ gazetaintegral@gmail.com

² krylov@math.tsu.ru

Аннотация. Пусть $I(X, R)$ – кольцо инцидентности предпорядоченного множества X над кольцом R . Осуществлено исследование свойств группы автоморфизмов этого кольца. При некоторых довольно общих предположениях доказано, что всякий автоморфизм кольца $I(X, R)$ является композицией внутреннего, мультипликативного, кольцевого и порядкового автоморфизмов.

Ключевые слова: алгебра инцидентности, автоморфизм

Благодарности: Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00375, <https://rscf.ru/en/project/23-21-00375/>

Для цитирования: Кайгородов Е.В., Крылов П.А. Кольца инцидентности и их автоморфизмы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 41–50. doi: 10.17223/19988621/91/4

Original article

Incidence rings and their automorphisms

Evgeniy V. Kaigorodov¹, Piotr A. Krylov²

¹ Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, Russian Federation

² Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ krylov@math.tsu.ru

² nstsddts@yandex.ru

Abstract. The paper is devoted to automorphisms of incidence algebras. Let $I(X, R)$ be an incidence algebra of a preordered set X over a T -algebra R (T is a commutative ring). The algebra $I(X, R)$ is assumed to satisfy a condition of sufficiently general character. It is called condition (II). In the case when the algebra $I(X, R)$ satisfies condition (II), it is proved that any automorphism of such algebra after conjugation by an inner automorphism has a diagonalized form in a certain sense (Theorem 3.1).

The other two main results of the paper are Theorem 4.1 and Corollary 4.2. In these propositions, in addition to condition (II), the algebra $I(X, R)$ satisfies two other certain conditions. All three conditions are fulfilled if, for example, R is a local ring or a domain of principal left (right) ideals. Under these assumptions, it is proved that every automorphism of the algebra $I(X, R)$ can be written as a product of inner, multiplicative, ring, and order automorphisms. These four kinds of automorphisms can be called standard. Here we consider an automorphism to be standard, if its structure is quite clear.

Keywords: incidence algebra, automorphism

Acknowledgements: The study of the second author is supported by Russian Scientific Foundation, grant no. 23-21-00375, <https://rscf.ru/en/project/23-21-00375/>

For citation: Kaigorodov, E.V., Krylov, P.A. (2024) Incidence rings and their automorphisms. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 41–50. doi: 10.17223/19988621/91/4

Введение

В данной работе изучаются автоморфизмы кольца инцидентности $I(X, R)$ предпорядоченного множества X над кольцом R . Автоморфизмы колец инцидентности давно привлекают внимание специалистов. За информацией по этому поводу можно обратиться к книге [1] и статьям [2–8].

Раздел 1 настоящей работы содержит некоторые определения и вспомогательные результаты. В разделе 2 проведены предварительные рассмотрения. В частности, вводятся условия (I) и (II) на кольцо $I(X, R)$, играющие существенную роль в дальнейшем.

Основные результаты статьи изложены в разделах 3 и 4. К ним можно отнести теоремы 3.1, 3.3, 4.1 и следствие 4.2. Перечисленные утверждения раскрывают строение группы автоморфизмов кольца $I(X, R)$, удовлетворяющего определенным условиям, в частности условию (II).

Мы рассматриваем только ассоциативные кольца с ненулевой единицей. Если S – некоторое кольцо (алгебра), то $\text{Aut } S$ – группа автоморфизмов алгебры S , $\text{In}(\text{Aut } S)$ – подгруппа ее внутренних автоморфизмов. Затем, $M(n, S)$ – кольцо всех квадратных матриц порядка n со значениями в S , $J(S)$ – радикал Джекобсона кольца S . Полупрямое произведение групп G и H обозначаем $G \rtimes H$.

1. Кольца инцидентности

Кратко изложим некоторые первоначальные сведения о предпорядоченных множествах (более детально можно познакомиться с ними в книге [1]).

Пусть X – произвольное множество и $\leq$ – рефлексивное и транзитивное отношение на X . В таком случае система $\langle X, \leq \rangle$ называется предпорядоченным множеством, а $\leq$ – предпорядок на X . Если отношение $\leq$ еще и антисимметрично, то $\langle X, \leq \rangle$ – частично упорядоченное множество.

Считаем далее, что $\langle X, \leq \rangle$ – предупорядоченное множество. Для любых элементов $x, y \in X$ через $[x, y]$ обозначим подмножество $\{z \in X \mid x \leq z \leq y\}$. Оно называется интервалом в X . Интервал вида $[x, x]$ будем обозначать через $[x]$. Отметим два полезных свойства интервалов:

- (а) для любых $y, z \in [x]$ имеем равенство $[y, z] = [x]$;
- (б) если $x < y$, то для произвольных элементов $s \in [x]$ и $t \in [y]$ верно, что $s < t$.

Зададим на X бинарное отношение $\sim$, положив $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$ и $y \leq x$. Ясно, что $\sim$ – отношение эквивалентности на X . Соответствующие классы эквивалентности имеют вид $[x]$ для всевозможных $x \in X$. Из свойства (б) вытекает, что отношение предпорядка $\leq$ согласовано с отношением эквивалентности $\sim$. Следовательно, на фактормножестве $\bar{X} = X / \sim$ появляется индуцированное отношение $\leq$, причем $\langle \bar{X}, \leq \rangle$ – частично упорядоченное множество.

Договоримся, что все интервалы в X конечны. В таком случае X называют локально конечным предупорядоченным множеством. Условимся в дальнейшем обозначать через x элементы частично упорядоченного множества $\bar{X}$, т.е. классы эквивалентности вида $[x]$. Иными словами, для обозначения класса $[x]$ будем использовать какой-нибудь его представитель. Такая договоренность корректна и не приведет к путанице. В конкретной ситуации всегда ясно, об элементах какого именно множества ($\bar{X}$ или X) идет речь.

Пусть далее буква R обозначает алгебру над некоторым коммутативным кольцом T . Правда, само кольцо T почти не используется явно.

Алгебра инцидентности представляет собой некоторое кольцо функций. Пусть $\langle X, \leq \rangle$ – произвольное локально конечное предупорядоченное множество. Положим $I(X, R) = \{f : X \times X \rightarrow R \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \not\leq y\}$. Функции складываются поточечно. Произведение функций f и g из $I(X, R)$ задается формулой

$$(fg)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) \cdot g(z, y) \quad (1)$$

для каждых $x, y \in X$. Для любых $t \in T$ и $x, y \in X$ еще полагаем $(tf)(x, y) = tf(x, y)$.

В результате получаем T -алгебру $I(X, R)$, называемую алгеброй инцидентности или кольцом инцидентности предупорядоченного множества X над кольцом R . В дальнейшем конкретную алгебру $I(X, R)$ обозначаем буквой A .

Введем некоторые специальные функции из $I(X, R)$. Для данного $x \in X$ положим $e_{[x]}(t, t) = 1$ для всех $t \in [x]$ и $e_{[x]}(z, y) = 0$ для оставшихся пар (z, y) . Система $\{e_{[x]} \mid x \in X\}$ состоит из попарно ортогональных центральных в L идемпотентов (кольцо L определено в следующем абзаце). В соответствии с соглашением об обозначении класса $[x]$ некоторым его представителем будем писать e_x вместо $e_{[x]}$.

Определим подкольцо L и идеал M в A . Положим $L = \{f \in A \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \not\leq y\}$ и $M = \{f \in A \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \sim y\}$. Имеем прямую сумму T -модулей

$A = L \oplus M$, т.е. кольцо A есть расщепляющееся расширение идеала M с помощью подкольца L . Идеал M естественным образом считаем L - L -бимодулем. Кроме того, M – неунитальная алгебра.

Идеал M лежит в радикале Джекобсона алгебры A . Следовательно, элемент $1+d$ обратим в A для всякого $d \in M$ (см.: [1. Теорема 1.2.3], теорему 1.2 и следствие 1.3).

Пусть дан произвольный интервал $[x]$. Обозначим через $R_{[x]}$ множество функций $f \in A$, для которых $f(z, y) = 0$, если $z \not\prec x$ или $y \not\prec x$. Как и в случае идемпотентов e_x , пишем R_x вместо $R_{[x]}$. Справедливы равенства $R_x = e_x A e_x = e_x L e_x$. Заключаем, что R_x – кольцо с единицей e_x . Если перейти к ограничениям функций из A на $[x] \times [x]$, то фактически R_x – это алгебра всех функций $[x] \times [x] \rightarrow R$ с поточечным сложением и произведением типа свертки, как в (1). Выберем какую-либо нумерацию интервала $[x]$: $[x] = \{x_1, \dots, x_n\}$. После этого, если функции $f \in R_x$ поставить в соответствие матрицу $(f(x_i, x_j))$, то придем к изоморфизму алгебр $R_x \cong M(n, R)$. Возьмем теперь два различных интервала $[x]$, $[y]$ и положим

$$M_{xy} = \{f \in A \mid f(s, t) = 0, \text{ если } s \not\prec x \text{ или } t \not\prec y\}.$$

Тогда $M_{xy} = e_x A e_y$, и значит M_{xy} является R_x - R_y -бимодулем.

Уточним, что $M_{xy} = 0$, если $x \not\leq y$. А при $x < y$ существует канонический изоморфизм $M_{xy} \cong M(n \times m, R)$, где $n = |[x]|$, $m = |[y]|$, относительно указанных выше изоморфизмов $R_x \cong M(n, R)$ и $R_y \cong M(m, R)$. После отождествлений всех алгебр R_x с $M(n, R)$ и бимодулей M_{xy} с $M(n \times m, R)$ становится ясно, что действия колец R_x и R_y на M_{xy} будут обычными умножениями матриц. Ясно также, что M_{xy} есть L - L -бимодуль. Действие L на M_{xy} сводится к действию R_x слева и R_y справа. Ещё раз обратим внимание, что под индексами в R_x и M_{xy} подразумеваем $[x]$ и $[x][y]$ соответственно (см. выше).

Произведение $\prod_{x, y \in X} M_{xy}$ обладает структурой L - L -бимодуля. Именно, если $f \in L$, $(g_{xy}) \in \prod_{x, y \in X} M_{xy}$, то $f(g_{xy}) = (f_x g_{xy})$ и $(g_{xy})f = (g_{xy} f_y)$, где $f_x = e_x f e_x$ и $f_y = e_y f e_y$.

Определим теперь в бимодуле $\prod_{x, y \in X} M_{xy}$ умножение посредством формулы $(g_{xy}) \cdot (h_{xy}) = (d_{xy})$, где $d_{xy} = \sum_{x \leq z \leq y} g_{xz} \cdot h_{zy}$, после чего этот бимодуль становится (неунитальной) алгеброй.

Предложение 1.1. Существуют канонические изоморфизмы алгебр $L \cong \prod_{x \in X} R_x$, а также L - L -бимодулей и алгебр $M \cong \prod_{x, y \in X} M_{xy}$.

Доказательство. Определим отображение $\omega: L \rightarrow \prod_{x \in X} R_x$, полагая $\omega(f) = (f_x)$ для каждого $f \in L$, где $f_x = e_x f e_x$. Тогда ω – изоморфизм алгебр. Отображение

$\varepsilon: M \rightarrow \prod_{x,y \in X} M_{xy}$, $\varepsilon(g) = (g_{xy})$, где $g_{xy} = e_x g e_y$, будет изоморфизмом L - L -бимодулей

и алгебр. ■

В дальнейшем мы не будем различать соответствующие объекты относительно изоморфизмов ω и ε .

Будет полезна информация об обратимых элементах алгебры A (см.: [1, 6–7]).

Теорема 1.2. Записанные ниже утверждения о функции f из A равносильны:

- 1) f – обратимая функция;
- 2) если $f = g + h$, где $g \in L$, $h \in M$, то функция g обратима в L .

Следствие 1.3. Для любого элемента $h \in M$ элемент $1 + h$ обратим.

Каждый обратимый элемент v алгебры A дает ее автоморфизм μ_v согласно правилу $\mu_v(a) = v^{-1}av$, $a \in A$. Такой автоморфизм называется внутренним автоморфизмом, определяемым элементом v . Все внутренние автоморфизмы образуют нормальную подгруппу $\text{In}(\text{Aut } A)$ группы $\text{Aut } A$. Через $\text{In}_1(\text{Aut } A)$ (соответственно, $\text{In}_0(\text{Aut } A)$) будем обозначать подгруппу внутренних автоморфизмов алгебры A , определяемых обратимыми элементами вида $1 + d$, $d \in M$ (соответственно, обратимыми элементами алгебры L). Первая подгруппа является нормальной в $\text{Aut } A$. Используя полупрямое разложение $U(A) = (1 + M) \rtimes U(L)$, можно убедиться в существовании разложения $\text{In}(\text{Aut } A) = \text{In}_1(\text{Aut } A) \rtimes \text{In}_0(\text{Aut } A)$ (см. также: [6. Разд. 4]).

2. Два условия на алгебру A

Пусть φ – произвольный автоморфизм алгебры A . Исходя из прямой суммы T -модулей $A = L \oplus M$ автоморфизму φ (как и любому T -эндоморфизму) обычным образом можно сопоставить квадратную матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ второго порядка (см.: [6. Разд. 3]). Не будем различать автоморфизм и соответствующую ему матрицу. Иногда мы пишем «треугольный автоморфизм φ », если $\gamma = 0$, и «диагональный автоморфизм φ », если $\gamma = 0$ и $\delta = 0$. В дальнейшем будем иметь дело только с матрицами этих двух видов.

Пусть $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ – треугольный автоморфизм алгебры A . Тогда отображения α , δ и β удовлетворяют равенствам (1) из [6. Разд. 3]. В частности, α – автоморфизм алгебры L , β – автоморфизм (неунитальной) алгебры M . Если ещё $\delta = 0$, т.е. φ – диагональный автоморфизм, то β является автоморфизмом L - L -бимодуля M относительно автоморфизма α .

Сформулируем два условия на алгебру A (см. также: [6. Разд. 8, 9]).

(I) Для любого $\varphi \in \text{Aut } A$ верно равенство $\varphi M = M$, т.е. всякий автоморфизм является треугольным.

(II) Для любого $\varphi \in \text{Aut } A$ и произвольного $x \in X$ справедливо включение $\varphi(e_x) \in e_y + M$ для некоторого $y \in X$. Данное условие позволяет контролировать характер действия автоморфизмов на кольцах R_x и бимодулях M_{xy} .

Лемма 2.1 [7]. Для алгебры A справедливы следующие утверждения:

1. Из выполнения условия (II) вытекает выполнение условия (I).
2. Для неразложимого кольца R условия (I) и (II) равносильны.

Возникает закономерный вопрос: какие условия на кольца R и $I(X, R)$ являются наиболее общими и могут служить инструментами для вычисления группы $\text{Aut } A$, где $A = I(X, R)$?

Одним из таких условий можно назвать условие (II). В самом деле, если оно выполняется, то в силу леммы 2.1 выполняется и условие (I). Значит, все автоморфизмы алгебры A будут треугольными. Далее, пусть $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \in \text{Aut } A$.

Условие (II) гарантирует следующее. Для любого $x \in X$ существует такой элемент $y \in X$, что $\alpha(e_x) = e_y$ и $\alpha R_x = R_y$. А это влечет существование определенного автоморфизма частично упорядоченного множества $\bar{X}$, который используется в дальнейшем (см.: [7. Разд. 5]). Пусть также $\delta = 0$, т.е. φ – диагональный автоморфизм. Тогда для каждой пары элементов x, y с условием $x \not\leq y$ имеем $\beta M_{xy} = M_{st}$, где $e_s = \alpha(e_x)$, $e_t = \alpha(e_y)$.

Перечислим некоторые типы колец R , для которых алгебра $I(X, R)$ удовлетворяет условию (II):

- a) R – локальное кольцо;
- b) R – область главных левых (правых) идеалов;
- c) R – коммутативное дедекиндово кольцо;
- d) X – частично упорядоченное множество, и R не имеет ненулевых идемпотентов, кроме 1;
- e) такое кольцо R , что факторкольцо $R/J(R)$ неразложимо.

Соглашение. В оставшейся части статьи считаем, что алгебра A , равная $I(X, R)$, удовлетворяет условию (II).

Например, это будет так, если кольцо R относится к одному из типов, указанных в пунктах a)–e).

Определим один групповой гомоморфизм и несколько групп автоморфизмов. Пусть $f: \text{Aut } A \rightarrow \text{Aut } L$ – такой гомоморфизм, что $f(\varphi) = \alpha$ для каждого

$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$. Затем, пусть Λ – подгруппа диагональных автоморфизмов,

a) $C = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Lambda \mid \alpha R_x = R_x \text{ для каждого } x \in X \right\}$. Обозначим через $\text{Mult } A$

нормальную подгруппу в $\text{Aut } A$, состоящую из автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$,

а через $\text{Mult}_0 A$ – подгруппу всех внутренних автоморфизмов, определяемых обратимыми центральными элементами кольца L . Здесь $\text{Mult}_0 A$ – нормальная подгруппа в $\text{Mult } A$. Автоморфизмы из $\text{Mult } A$ называют мультипликативными, из $\text{Mult}_0 A$ – дробными. И, наконец, пусть $\Omega = \text{Im } f$ и $\Omega_1 = \{ \alpha \in \Omega \mid \alpha R_x = R_x \text{ при всех } x \in X \}$.

3. Изоморфизмы и разложения для группы $\text{Aut } A$

Возьмем произвольный автоморфизм $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ алгебры A . Для каждого $x \in X$ найдется такой $y \in X$, что $\alpha(e_x) = e_y$ (об этом уже говорилось в разд. 2). Отсюда можно вывести, что α индуцирует автоморфизм τ_α частично упорядоченного множества $\bar{X}$. Соответствие $\varphi \rightarrow \tau_\alpha$ определяет групповой гомоморфизм $p: \text{Aut } A \rightarrow \text{Aut } \bar{X}$ (см.: [7. Разд. 6, 7]). Кроме того, автоморфизм α «переставляет» кольца R_x в соответствии с автоморфизмом τ_α . Если же $\delta = 0$, то аналогично действует на бимодулях M_{xy} и автоморфизм β .

Утверждение 1 следующей теоремы можно интерпретировать как возможность диагонализировать любой автоморфизм алгебры A .

Теорема 3.1. Пусть алгебра A удовлетворяет условию (II). Справедливы следующие равенства.

1. $\text{Aut } A = \text{In}_1(\text{Aut } A) \rtimes \Lambda$.
2. $\text{Ker } f = \text{In}_1(\text{Aut } A) \rtimes \text{Mult } A$.

Доказательство.

1. Пусть $\varphi \in \text{Aut } A$ и τ – автоморфизм множества $\bar{X}$, соответствующий φ (он введен перед теоремой). Образует элемент $v = (v_{st})$ в A , где $v_{st} = \varphi(e_{\tau^{-1}(t)})(s, t)$ для любых $s, t \in X$. Отметим, что $ve_x = \varphi(e_{\tau^{-1}(x)})e_x$ при всяком $x \in X$. Имеем $v_{tt} = 1$, и, следовательно, элемент v обратим в A (теорема 1.2 или следствие 1.3).

Итак, для каждого $z \in X$ выполняется равенство $ve_{\tau(z)} = \varphi(e_z)e_{\tau(z)}$. С другой стороны, $\varphi(e_z)v = \varphi(e_z)e_{\tau(z)}$. Таким образом, получаем $\varphi(e_z)v = ve_{\tau(z)}$ и $v^{-1}\varphi(e_z)v = e_{\tau(z)}$. Пусть μ – внутренний автоморфизм, определяемый элементом v . Тогда $\mu \in \text{In}_1(\text{Aut } A)$ и $\mu\varphi(e_z) = e_{\tau(z)}$ для всякого $z \in X$. Полагаем $\gamma = \mu\varphi$, откуда $\varphi = \mu^{-1}\gamma$, где $\mu^{-1} \in \text{In}_1(\text{Aut } A)$, $\gamma \in \Lambda$.

Проверим, что $\text{In}_1(\text{Aut } A) \cap \Lambda = \langle 1 \rangle$. Пусть $v \in \text{In}_1(\text{Aut } A) \cap \Lambda$, и v определяется элементом $1 + d$, где $d \in M$. Тогда $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ для некоторого γ . Для произвольного элемента $a \in L$ имеем $v(a) = (1 + d')a(1 + d) = a + d'a + ad + d'ad$, где $1 + d'$ – обратный к $1 + d$ элемент. Значит, $d'a + ad + d'ad = 0$. В частности, $d'e_x + e_xd + d'e_xd = 0$, $e_xd'e_x + e_xd + e_xd'e_xd = e_xd = 0$ для всякого $x \in X$. Поэтому $d = 0$, откуда $v = 1$. Можно утверждать, что полупрямое разложение из 1 действительно имеет место.

2. Равенство в 2 получается из 1 и включения $\text{In}_1(\text{Aut } A) \subseteq \text{Ker } f$. ■

Соберем вместе несколько интересных и полезных равенств и изоморфизмов.

Предложение 3.2 [7. Предложение 6.3]. Имеют место записанные ниже равенства и изоморфизмы.

1. $\text{Mult } A \cap \text{In}(\text{Aut } A) = \text{Mult } A \cap \text{In}_0(\text{Aut } A) = \text{Mult}_0 A$.

2. $\Lambda / (\text{In}_0(\text{Aut } A) \cdot \text{Mult } A) \cong \Omega / \text{In}(\text{Aut } L)$, $C / (\text{In}_0(\text{Aut } A) \cdot \text{Mult } A) \cong \Omega_1 / \text{In}(\text{Aut } L)$.
3. $\Lambda / C \cong \Omega / \Omega_1$.

Запишем теперь основной результат раздела.

Теорема 3.3. Пусть алгебра A удовлетворяет условию (II). Справедливы следующие изоморфизмы: $\text{Aut } A / \text{Ker } f \cong \Omega \cong \Lambda / \text{Mult } A$ и $C / \text{Mult } A \cong \Omega_1$.

Доказательство. Указанные изоморфизмы непосредственно выводятся из теоремы 3.1 и предложения 3.2. ■

4. Строение группы $\text{Aut } A$

Приведем некоторую информацию об автоморфизмах предпорядоченного множества X (см.: [7. Разд. 7]). Автоморфизм τ этого множества называется внутренним, если он оставляет на месте каждый интервал вида $[x]$, $x \in X$. Все внутренние автоморфизмы образуют нормальную подгруппу $\text{In}(\text{Aut } X)$ в группе $\text{Aut } X$. Факторгруппа $\text{Aut } X / \text{In}(\text{Aut } X)$ называется группой внешних автоморфизмов множества X и обозначается $\text{Out } X$. Имеет место (неканоническое) прямое разложение $\text{Aut } X = \text{In}(\text{Aut } X) \rtimes G$, где G – некоторая подгруппа в $\text{Aut } X$, изоморфная $\text{Out } X$. Удобно отождествить ее с $\text{Out } X$. Существует вложение $t: \text{Aut } X \rightarrow \text{Aut } A$, $\tau \rightarrow \xi_\tau$, где $\xi_\tau(f)(x, y) = f(\tau(x), \tau(y))$, $f \in A$, $x, y \in X$. Отождествим τ с ξ_τ , а $\text{Aut } X$ с $\text{Im } t$.

Сформулируем условие, которое позволит уточнить строение группы $\text{Aut } X$. Назовем его (n, m) -условием.

Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ из $M(n, R) \cong M(m, R)$ следует $n = m$.

(n, m) -условию удовлетворяют коммутативные кольца, локальные кольца, области главных левых (правых) идеалов. Выполнение (n, m) -условия после некоторого соглашения гарантирует наличие включения $\text{Im } p \subseteq G$ (гомоморфизм p введен в начале разд. 3). Так что, учитывая факт отождествления групп G и $\text{Out } X$, о чем написано выше, фактически имеем гомоморфизм $p: \text{Aut } A \rightarrow \text{Out } X$ (см.: [7. Разд. 6, 7, 9]). Композиция pt действует тождественно на $\text{Out } X$. Следовательно, p расщепляется, и мы имеем полупрямое произведение $\text{Aut } A = \text{Ker } p \rtimes \text{Out } X$, где $\text{Ker } p = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \in \text{Aut } A \mid \alpha R_x = R_x \text{ для всех } x \in X \right\}$. Также существуют гомоморфизмы $ft: \text{Out } X \rightarrow \Omega$, $r: \Omega \rightarrow \text{Out } X$ и полупрямое разложение $\Omega = \Omega_1 \rtimes \text{Out } X$. Теперь можем записать такую теорему.

Теорема 4.1. Пусть алгебра A удовлетворяет условию (II) и (n, m) -условию. Тогда имеют место полупрямые разложения: $\Omega = \Omega_1 \rtimes \text{Out } X$, $\Lambda = C \rtimes \text{Out } X$, $\text{Aut } A = \text{In}_1(\text{Aut } A) \rtimes C \rtimes \text{Out } X$.

Доказательство. Выше установлено, что $\text{Aut } A = \text{Ker } p \rtimes \text{Out } X$. Ввиду теоремы 3.1 имеем равенство $\text{Aut } A = \text{In}_1(\text{Aut } A) \rtimes \Lambda$. Равенства в теореме вытекают теперь из включения $\text{In}_1(\text{Aut } A) \subseteq \text{Ker } p$. ■

В разд. 9 работы [7] при одном дополнительном предположении относительно колец R_X , записанном ниже, находится точное строение группы C из теоремы 4.1 и, как следствие, группы A . Кратко изложим соответствующий материал.

Договоримся, что символ n_X обозначает порядок матриц из кольца R_X . Пусть натуральное число k таково, что всякое n_X кратно k . Обозначим через P кольцо матриц $M(k, R)$. Любой автоморфизм кольца P влечет кольцевой (говорят также «индуцированный») автоморфизм (блочный) кольца R_X . Он, в свою очередь, влечет автоморфизм кольца L и затем алгебры A . Подобные автоморфизмы тоже назовем кольцевыми. Обозначим через D подгруппу всех кольцевых автоморфизмов алгебры A . Она канонически изоморфна группе $\text{Aut } P$. Запишем следующее условие (*) для алгебры A .

Для всякого $\alpha = (\alpha_X) \in \Omega_1$ любой автоморфизм α_X является произведением в $\text{Aut } R_X$ внутреннего и кольцевого (блочного) автоморфизмов.

Условие (*) выполняется, если R – локальное кольцо или область главных левых (правых) идеалов [8. Следствие 4.5].

Следствие 4.2. Предположим, что алгебра A удовлетворяет условиям (II), (*) и (n, m) -условию, а множество X связное. Тогда верны следующие равенства и изоморфизм: $\text{Aut } A = \text{In}_1(\text{Aut } A) \rtimes (\text{In}_0(\text{Aut } A) \cdot (\text{Mult } A) \cdot D) \rtimes \text{Out } X$, где $D \cong \text{Aut } P$, или, более кратко, $\text{Aut } A = \text{In}(\text{Aut } A) \rtimes ((\text{Mult } A) \cdot D) \rtimes \text{Out } X$.

Следствие 4.3. Пусть R – коммутативное неразложимое кольцо и рассматриваются только автоморфизмы R -алгебр.

1. Справедливо равенство $\text{Aut } A = (\text{In}(\text{Aut } A) \cdot (\text{Mult } A)) \rtimes \text{Out } X$.

2 [1]. Если X – частично упорядоченное множество, то имеем равенство $\text{Aut } A = \text{In}_1(\text{Aut } A) \rtimes \text{Mult } A \rtimes \text{Aut } X$.

Список источников

1. Spiegel E., O'Donnell C.J. Incidence Algebras. New York : Marcel Dekker, 1997. 334 p.
2. Brusamarello R., Fornaroli É.Z., Santulo E.A. jun. Multiplicative automorphisms of incidence algebras // Comm. Algebra. 2015. V. 43 (2). P. 726–736. doi: 10.1080/00927872.2013.847951
3. Brusamarello R., Lewis D.W. Automorphisms and involutions on incidence algebras // Linear Multilinear Algebra. 2011. V. 59 (11). P. 1247–1267. doi: 10.1080/03081087.2010.496113
4. Drozd Y., Kolesnik P. Automorphisms of incidence algebras // Comm. Algebra. 2007. V. 35 (12). P. 3851–3854. doi: 10.1080/00927870701511756
5. Khrypchenko M. Automorphisms of finitary incidence rings // Algebra Discrete Math. 2010. V. 9 (2). P. 78–97.
6. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. Automorphism groups of formal matrix rings // J. Math. Sci. 2021. V. 258 (2). P. 222–249. doi: 10.1007/s10958-021-05543-8
7. Krylov P., Tuganbaev A. Incidence rings: automorphisms and derivations // arXiv:2305.02984v1 [math.RA], 2023. doi: 10.48550/arXiv.2305.02984
8. Krylov P., Tuganbaev A. Formal matrix rings: Automorphisms // Int. Journ. of Algebra and Comp. 2023. V. 33 (4). P. 687–698. doi: 10.1142/S0218196723500303

References

1. Spiegel E., O'Donnell C.J. (1997) *Incidence Algebras*. New York: Marcel Dekker.

2. Brusamarello R., Fornaroli É.Z., Santulo E.A. jun (2015) Multiplicative automorphisms of incidence algebras. *Communications in Algebra*. 43(2). pp. 726–736. DOI: 10.1080/00927872.2013.847951.
3. Brusamarello R., Lewis D.W. (2011) Automorphisms and involutions on incidence algebras. *Linear Multilinear Algebra*. 59(11). pp. 1247–1267. DOI: 10.1080/03081087.2010.496113.
4. Drozd Y., Kolesnik P. (2007) Automorphisms of incidence algebras. *Communications in Algebra*. 35(12). pp. 3851–3854. DOI: 10.1080/00927870701511756.
5. Khrypchenko M. (2010) Automorphisms of finitary incidence rings. *Algebra and Discrete Mathematics*. 9(2). pp. 78–97.
6. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2021) Automorphism groups of formal matrix rings. *Journal of Mathematical Sciences*. 258(2). pp. 222–249. DOI: 10.1007/s10958-021-05543-8.
7. Krylov P., Tuganbaev A. (2023) Incidence rings: automorphisms and derivations. *arXiv:2305.02984v1 [math.RA]*. DOI: 10.48550/arXiv.2305.02984.
8. Krylov P., Tuganbaev A. (2023) Formal matrix rings: Automorphisms. *International Journal of Algebra and Computation*. 33(4). pp. 687–698. DOI: 10.1142/S0218196723500303.

Сведения об авторах:

Кайгородов Евгений Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики, заведующий лабораторией алгебры и математических методов в естественных науках Горно-Алтайского государственного университета (Горно-Алтайск, Россия). E-mail: gazetaintegral@gmail.com

Крылов Петр Андреевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: krylov@math.tsu.ru

Information about the authors:

Kaigorodov Evgeniy V. (Candidate of Physics and Mathematics, Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, Russian Federation). E-mail: gazetaintegral@gmail.com

Krylov Piotr A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: krylov@math.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 01.02.2024; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 01.02.2024; accepted for publication 03.10.2024

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 531-18, 531.113.8

doi: 10.17223/19988621/91/5

**О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета.
Часть II****Софья Борисовна Богданова¹, Сергей Октябринович Гладков²**^{1,2} *Московский авиационный институт (МАИ), Москва, Россия*¹ *sonjaf@list.ru*² *sglad51@mail.ru*

Аннотация. Приведен алгоритм вывода системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение тел в неинерциальных системах отсчета, которые движутся по заданной пространственной кривой. Вывод системы основан на использовании формул Серре–Френе, являющихся основными в теории гладких кривых. Проиллюстрировано численное решение полученной системы уравнений для случая свободно падающего тела, если явно заданы три аналитических траектории: цилиндрическая, гиперболическая и коническая винтовые линии.

Ключевые слова: неинерциальная система отсчета, сопровождающий трехгранник кривой, кривизна, кручение

Для цитирования: Богданова С.Б., Гладков С.О. О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета. Часть II // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 51–60. doi: 10.17223/19988621/91/5

Original article

**On the trajectories of bodies in non-inertial reference frames.
Part II****Sof'ya B. Bogdanova¹, Sergey O. Gladkov²**^{1,2} *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation*¹ *sonjaf@list.ru*² *sglad51@mail.ru*

Abstract. This paper provides a detailed solution to the problem of determining the trajectories of body motion in non-inertial frames of reference. The problem is solved in the basis τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ moving along a given spatial curve. The orts of the basis are the vectors of the tangent τ , principal normal $\mathbf{n}$, and binormal $\mathbf{b}$ to the curve. The motion of the non-inertial frame of reference completely determines the vector of translational motion along the curve $\mathbf{R}_0(t)$ with velocity $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{R}}_0(t)\tau$ and the Darboux vector of angular rotation

$\omega = \chi\tau + K\mathbf{b}$. The curvature K and torsion χ are specified by the curve equation. Vectors τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ are bound by the Frenet–Serret formulas. A system of second-order linear differential equations describing the free fall of a body from the point of view of an observer located in the basis τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ for cylindrical, hyperbolic, and conical helical lines is numerically analyzed. The corresponding trajectories of the bodies are plotted by computer modeling methods. A significant difference is observed in the trajectories of motion of one and the same body in the inertial and non-inertial frames of reference.

Keywords: non-inertial reference frames, accompanying trihedron curve, curvature, torsion

For citation: Bogdanova, S.B., Gladkov, S.O. (2024) On the trajectories of bodies in non-inertial reference frames. Part II. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 51–60. doi: 10.17223/19988621/91/5

Введение

Настоящее сообщение является логическим продолжением работы [1], где были исследованы траектории движения тел в неинерциальных системах отсчета (НСО) в двухмерном случае. В этой работе речь пойдет о трехмерной задаче, и нашей целью здесь является описание движения тел с точки зрения наблюдателя, находящегося в центре подвижного базиса пространственной кривой $\mathbf{R}_0(t) = x_0(t)\mathbf{i} + y_0(t)\mathbf{j} + z_0(t)\mathbf{k}$, ортами которого, как хорошо известно [2], служат вектор касательной τ , вектор главной нормали $\mathbf{n}$ и вектор бинормали $\mathbf{b}$ (рис. 1). Движение базиса τ – $\mathbf{n}$ – $\mathbf{b}$ является ускоренным, а потому его можно рассматривать в качестве неинерциальной системы отсчета [3], из центра которой мы и будем наблюдать траектории тел, движущихся под действием каких-либо конкретных сил.

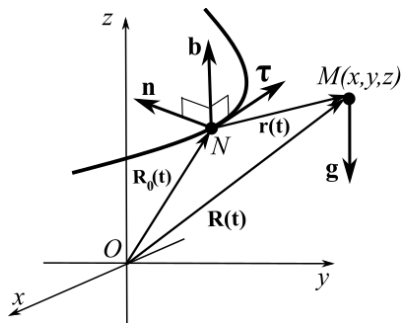


Рис. 1. Неинерциальная система отсчета τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ совершает криволинейное движение вдоль заданной кривой $\mathbf{R}_0(t) = x_0(t)\mathbf{i} + y_0(t)\mathbf{j} + z_0(t)\mathbf{k}$

Fig. 1. Non-inertial basis τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ moving along the given curve $\mathbf{R}_0(t) = x_0(t)\mathbf{i} + y_0(t)\mathbf{j} + z_0(t)\mathbf{k}$

Основные уравнения

Для любой гладкой кривой всегда можно ввести подвижный базис τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, который образует так называемый сопровождающий трехгранник. Связь между ортами τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ устанавливается формулами Серре–Френе [2, 4–5]:

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} = K\mathbf{n}, \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -K\tau - \chi\mathbf{b}, \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \chi\mathbf{n}, \end{cases} \quad (1)$$

где дифференцирование ведется по длине дуги кривой, функция $K(t) = \frac{|\dot{\mathbf{R}}_0 \times \ddot{\mathbf{R}}_0|}{|\dot{\mathbf{R}}_0|^3}$

представляет собой кривизну кривой, а функция $\chi(t) = \frac{(\dot{\mathbf{R}}_0, \ddot{\mathbf{R}}_0, \ddot{\mathbf{R}}_0)}{|\dot{\mathbf{R}}_0 \times \ddot{\mathbf{R}}_0|^2}$ характеризует

кручение траектории. Если в формулах (1) перейти к дифференцированию по времени, то получим

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dt} = v K\mathbf{n}, \\ \frac{d\mathbf{n}}{dt} = -v(K\tau + \chi\mathbf{b}), \\ \frac{d\mathbf{b}}{dt} = v\chi\mathbf{n}, \end{cases} \quad (2)$$

где скорость движения вдоль кривой определяется как $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}_0(t)$ или $\mathbf{v} = v\tau$. Из (2) также следует, что кривизна и кручение являются угловыми скоростями для векторов τ и $\mathbf{n}$ соответственно при выполнении условия $v=1$.

Как видно из рис. 1, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}$. Тогда очевидно, что

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}} - \ddot{\mathbf{R}}_0. \quad (3)$$

Также, как и в работе [1], координаты движущейся точки M в базисе τ - $\mathbf{n}$ - $\mathbf{b}$ будем обозначать прописными буквами $M(X, Y, Z)$. Задача, таким образом, сводится к получению системы дифференциальных уравнений для функций $X(t), Y(t), Z(t)$. Для этого нам предстоит выразить каждый вектор из (3) через векторы подвижного базиса τ - $\mathbf{n}$ - $\mathbf{b}$.

Нахождение вектора $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(X(t) \cdot \tau + Y(t) \cdot \mathbf{n} + Z(t) \cdot \mathbf{b})$ связано с использованием формул (2), и после довольно громоздких преобразований мы приходим к выражению

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) = & \tau \left(\ddot{X} - 2\dot{Y}vK - Xv^2K^2 - Y\dot{v}K - Yv\dot{K} + Z\chi v^2K^2 \right) + \\ & + \mathbf{n} \left(\ddot{Y} + 2\dot{X}vK - 2\dot{Z}\chi v + X\dot{v}K + Xv\dot{K} - Yv^2K^2 - Y\chi v^2 - Z\dot{\chi}v - Z\chi\dot{v} \right) + \\ & + \mathbf{b} \left(\ddot{Z} + Xv^2\chi K + \dot{Y}\chi v + Y\dot{\chi}v + Y\chi\dot{v} - Z\chi^2v^2 \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где $v = v(t)$, $X = X(t)$, $Y = Y(t)$, $Z = Z(t)$.

Рассмотрим случай, когда подвижный базис τ - $\mathbf{n}$ - $\mathbf{b}$ движется с постоянной скоростью v . В результате соотношение (4) упростится, и мы получим

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) = & \boldsymbol{\tau} \left(\ddot{X} - 2\dot{Y}vK - Xv^2K^2 - Yv\dot{K} + Z\chi v^2K^2 \right) + \\ & + \mathbf{n} \left(\ddot{Y} + 2\dot{X}vK - 2\dot{Z}\chi v + Xv\dot{K} - Yv^2K^2 - Y\chi^2v^2 - Z\dot{\chi}v \right) + \\ & + \mathbf{b} \left(\ddot{Z} + Xv^2\chi K + \dot{Y}\chi v + Y\dot{\chi}v - Z\chi^2v^2 \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Если в качестве иллюстрирующего примера взять, скажем, винтовую цилиндрическую линию (рис. 2), заданную уравнением

$$\mathbf{R}_0(t) = a \cos t \cdot \mathbf{i} + a \sin t \cdot \mathbf{j} + bt \cdot \mathbf{k}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

то для нее кривизна $K = \frac{a}{a^2 + b^2}$ и кручение $\chi = \frac{b}{a^2 + b^2}$ постоянны [6].

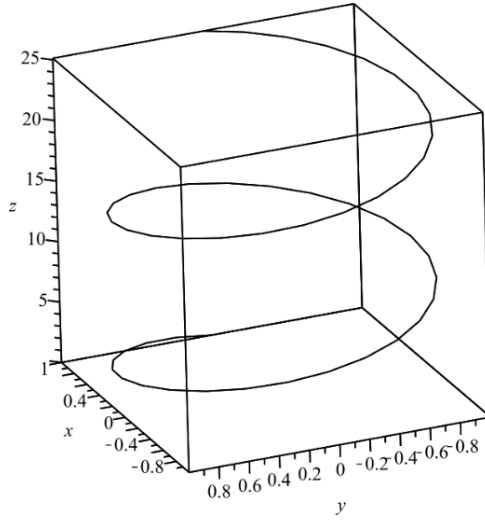


Рис. 2. Цилиндрическая винтовая линия с параметрами $a = 1$, $b = 2$

Fig. 2. Cylindrical helical line with parameters $a = 1$ and $b = 2$

Тогда из (5) следует, что

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) = & \boldsymbol{\tau} \left(\ddot{X} - 2\dot{Y}vK - Xv^2K^2 + Z\chi v^2K \right) + \\ & + \mathbf{n} \left(\ddot{Y} + 2\dot{X}vK - 2\dot{Z}\chi v - Yv^2K^2 - Y\chi^2v^2 \right) + \\ & + \mathbf{b} \left(\ddot{Z} + Xv^2\chi K + \dot{Y}\chi v - Z\chi^2v^2 \right), \end{aligned} \quad (6)$$

В случае же гиперболической винтовой линии (рис. 3), для которой $\mathbf{R}_0(t) = a \cosh t \cdot \mathbf{i} + a \sinh t \cdot \mathbf{j} + at \cdot \mathbf{k}$, кривизна и кручение будут равны, т.е. $K = \chi = \frac{1}{2a \cosh^2 t}$ [6],

и вместо (6) получим

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) = & \boldsymbol{\tau} \left(\ddot{X} - 2\dot{Y}vK + v^2K^2(Z - X) - Yv\dot{K} \right) + \\ & + \mathbf{n} \left(\ddot{Y} + 2vK(\dot{X} - \dot{Z}) + v\dot{K}(X - Z) - 2Yv^2K^2 \right) + \\ & + \mathbf{b} \left(\ddot{Z} + v^2K^2(X - Z) + \dot{Y}Kv + Y\dot{K}v \right). \end{aligned} \quad (7)$$

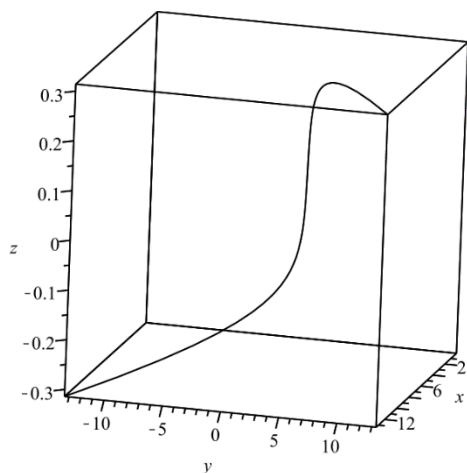


Рис. 3. Гиперболическая винтовая линия

с параметром $a = \frac{1}{20}$. Зависимость

построена для сегмента $-2\pi \leq t \leq 2\pi$

Fig. 3. Hyperbolic helical line with parameter

$a = \frac{1}{20}$. The dependence is valid

for a segment $-2\pi \leq t \leq 2\pi$

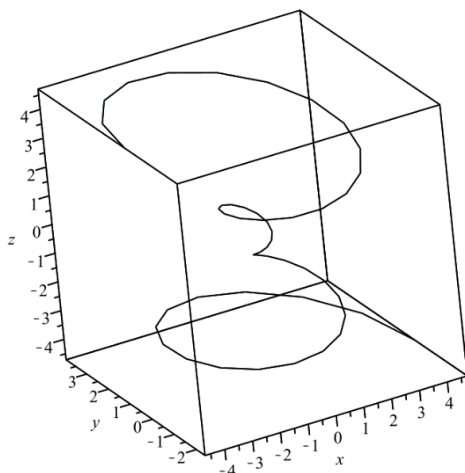


Рис. 4. Коническая винтовая линия

построена при $a = \frac{1}{2}$ и $-3\pi \leq t \leq 3\pi$

Fig. 4. A conical helical line plotted

for $a = \frac{1}{2}$ at $-3\pi \leq t \leq 3\pi$

Если рассмотреть, например, коническую винтовую линию, уравнение которой выглядит как $\mathbf{R}_0(t) = at \cos t \cdot \mathbf{i} + at \sin t \cdot \mathbf{j} + at \cdot \mathbf{k}$ (рис. 4), то для нее кривизна

$$K = \frac{\sqrt{8+5t^2+t^4}}{a(2+t^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ и кручение } \chi = \frac{6+t^2}{a(8+5t^2+t^4)} \text{ не равны, однако формула (5)}$$

при этом остается без изменений.

В уравнении (3) нас интересует вектор $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$, где $\mathbf{F}$ – векторная сумма всех действующих на тело сил [3]. Поскольку $\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -mg \cdot \mathbf{k}$ (см. рис. 1), а система векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ является ортонормированной, то мы имеем право записать следующую цепочку равенств:

$$np_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad np_{\mathbf{n}} \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}, \quad np_{\mathbf{b}} \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}, \quad (8)$$

где орты $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ подвижного трехгранника кривой $\mathbf{R}_0(t) = x_0(t) \cdot \mathbf{i} + y_0(t) \cdot \mathbf{j} + z_0(t) \cdot \mathbf{k}$ могут быть выражены через декартовы координаты. Действительно

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{v} (\dot{x}_0(t) \cdot \mathbf{i} + \dot{y}_0(t) \cdot \mathbf{j} + \dot{z}_0(t) \cdot \mathbf{k}), \quad (9)$$

где скорость $v = \sqrt{\dot{x}_0^2(t) + \dot{y}_0^2(t) + \dot{z}_0^2(t)}$, а согласно верхней формуле в системе (2) вектор главной нормали таков:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{v^2 K} (\ddot{x}_0(t) \cdot \mathbf{i} + \ddot{y}_0(t) \cdot \mathbf{j} + \ddot{z}_0(t) \cdot \mathbf{k}). \quad (10)$$

Из средней формулы системы (2) с учетом (10) и (11) получим

$$\mathbf{b} = \frac{-K\dot{x}_0 - \frac{\ddot{x}_0}{v^2 K} + \frac{\ddot{x}_0 \dot{K}}{v^2 K^2}}{\chi v} \cdot \mathbf{i} + \frac{-K\dot{y}_0 - \frac{\ddot{y}_0}{v^2 K} + \frac{\ddot{y}_0 \dot{K}}{v^2 K^2}}{\chi v} \cdot \mathbf{j} + \frac{-K\dot{z}_0 - \frac{\ddot{z}_0}{v^2 K} + \frac{\ddot{z}_0 \dot{K}}{v^2 K^2}}{\chi v} \cdot \mathbf{k}. \quad (11)$$

С помощью найденных соотношений находим

$$\begin{aligned} np_{\tau} \mathbf{F} &= -\frac{mg}{v} \dot{z}_0, \\ np_n \mathbf{F} &= -\frac{mg}{v^2 K} \ddot{z}_0, \\ np_b \mathbf{F} &= \frac{mg}{v\chi} \left(K\dot{z}_0 + \frac{\ddot{z}_0}{v^2 K} - \frac{\ddot{z}_0 \dot{K}}{v^2 K^2} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

т.е.

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{g}{v} \dot{z}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{g}{v^2 K} \ddot{z}_0 \cdot \mathbf{n} + \frac{g}{v\chi} \left(K\dot{z}_0 + \frac{\ddot{z}_0}{v^2 K} - \frac{\ddot{z}_0 \dot{K}}{v^2 K^2} \right) \cdot \mathbf{b}. \quad (13)$$

Возвращаясь к формуле (3) с учетом (5), (13) и соотношения $\ddot{\mathbf{R}}_0(t) = v^2 \cdot K \cdot \mathbf{n}$ приходим к искомой системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{X} = 2\dot{Y}vK + Xv^2K^2 + Yv\dot{K} - Z\chi v^2K - \frac{g}{v} \dot{z}_0, \\ \ddot{Y} = Yv^2K^2 + Y\chi^2v^2 + Z\chi v + 2\dot{Z}\chi v - Xv\dot{K} - 2v\dot{X}K - \frac{g}{v^2K} \ddot{z}_0 - v^2K, \\ \ddot{Z} = Z\chi^2v^2 - Y\dot{\chi}v - \dot{Y}\chi v - Xv^2\chi K + \frac{g}{v\chi} \left(K\dot{z}_0 + \frac{\ddot{z}_0}{v^2K} - \frac{\ddot{z}_0 \dot{K}}{v^2K^2} \right), \end{cases} \quad (14)$$

моделирующей траекторию свободно падающего тела в НСО для произвольного вида пространственной кривой

$$\mathbf{R}_0(t) = x_0(t) \cdot \mathbf{i} + y_0(t) \cdot \mathbf{j} + z_0(t) \cdot \mathbf{k}.$$

Анализ основных уравнений (14) в частных случаях

1. Цилиндрическая винтовая линия. В этом случае $\dot{z}_0 = b$, $\ddot{z}_0 = \ddot{z}_0 = 0$, а кривизна и кручение постоянны. В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{X} = 2\dot{Y}vK + Xv^2K^2 - Z\chi v^2K - \frac{gb}{v}, \\ \ddot{Y} = Yv^2 \cdot (K^2 + \chi^2) + 2\dot{Z}\chi v - 2\dot{X}vK - v^2K, \\ \ddot{Z} = Z\chi^2v^2 - \dot{Y}\chi v - Xv^2\chi K + \frac{gKb}{v\chi}. \end{cases} \quad (15)$$

2. Гиперболическая винтовая линия. Тогда $K = \chi$ и $\dot{z}_0 = a$, $\ddot{z}_0 = \ddot{z}_0 = 0$. Для этого случая система (14) приводится к виду:

$$\begin{cases} \ddot{X} = 2\dot{Y}vK + v^2K^2 \cdot (X - Z) + Yv\dot{K} - \frac{ga}{v}, \\ \ddot{Y} = 2Yv^2K^2 + \dot{K}v \cdot (Z - X) + 2Kv \cdot (\dot{Z} - \dot{X}) - v^2K, \\ \ddot{Z} = K^2v^2 \cdot (Z - X) - v \cdot (Y\dot{K} + \dot{Y}K) + \frac{ga}{v}. \end{cases} \quad (16)$$

3. Коническая винтовая линия. Для нее $\dot{z}_0 = a$, $\ddot{z}_0 = \ddot{z}_0 = 0$ и уравнения (14) сводятся к следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{X} = 2\dot{Y}vK + Xv^2K^2 + Yv\dot{K} - Z\chi v^2K - \frac{ag}{v}, \\ \ddot{Y} = Yv^2K^2 + Y\chi^2v^2 + Z\dot{\chi}v + 2\dot{Z}\chi v - Xv\dot{K} - 2\dot{X}vK - v^2K, \\ \ddot{Z} = Z\chi^2v^2 - Y\dot{\chi}v - \dot{Y}\chi v - Xv^2\chi K + \frac{agK}{v\chi}. \end{cases} \quad (17)$$

Результаты численного моделирования систем (15)–(17) показаны на рис. 5–7.

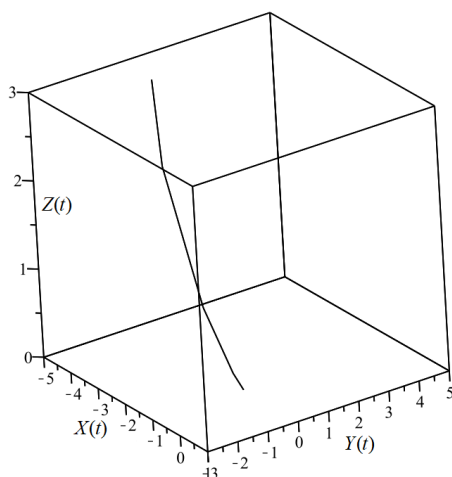


Рис. 5. Траектория свободно падающего тела в базисе $\tau, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, который движется по цилиндрической винтовой линии

$$\mathbf{R}_0(t) = \cos t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cdot \mathbf{j} + 2t \cdot \mathbf{k}.$$

Начальные условия: $X(0) = X'(0) = Y(0) = Y'(0) = Z(0) = Z'(0) = 0$, $0 \leq t \leq 4\pi$

Fig. 5. Trajectory of a free-falling body in the basis $\tau, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ moving along the cylindrical helical line $\mathbf{R}_0(t) = \cos t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cdot \mathbf{j} + 2t \cdot \mathbf{k}$

with initial conditions: $X(0) = X'(0) = Y(0) = Y'(0) = Z(0) = Z'(0) = 0$, $0 \leq t \leq 4\pi$

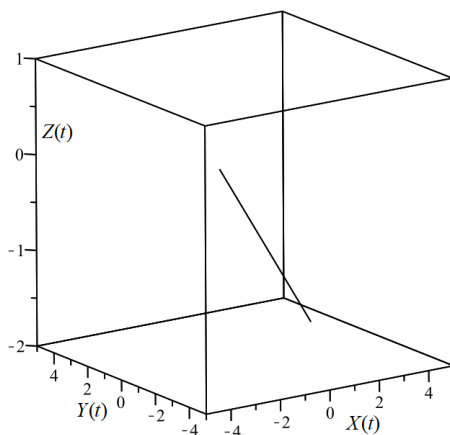


Рис. 6. Траектория свободно падающего тела в базисе $\tau, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ для случая гиперболической винтовой линии

$$\mathbf{R}_0(t) = \frac{1}{20} \operatorname{ch} t \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{20} \operatorname{sh} t \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{20} t \cdot \mathbf{k}.$$

Начальные условия: $X(0) = X'(0) = Y(0) = Y'(0) = Z(0) = Z'(0) = 0$, $0 \leq t \leq 3\pi$

Fig. 6. Trajectory of a free-falling body in the basis $\tau, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ moving along the hyperbolic helical line $\mathbf{R}_0(t) = \frac{1}{20} \operatorname{ch} t \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{20} \operatorname{sh} t \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{20} t \cdot \mathbf{k}$

with initial conditions: $X(0) = X'(0) = Y(0) = Y'(0) = Z(0) = Z'(0) = 0$, $0 \leq t \leq 3\pi$

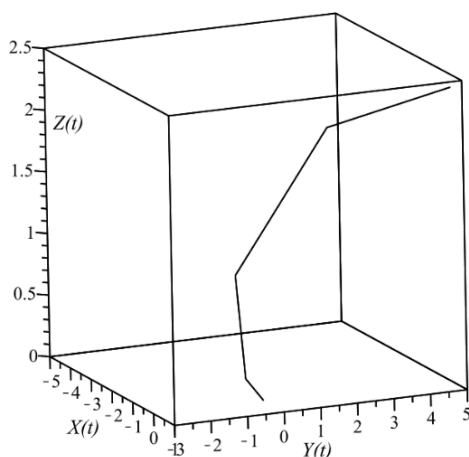


Рис. 7. Траектория свободно падающего тела в подвижном базисе τ, n, b ,двигающегося по конической винтовой линии $\mathbf{R}_0(t) = \frac{1}{2}t \cos t \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{2}t \sin t \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{2}t \cdot \mathbf{k}$. Начальные условия:

$$X(0) = X'(0) = Y(0) = Y'(0) = Z(0) = Z'(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 3\pi$$

Fig. 7. Trajectory of a free-falling body in the basis τ, n, b moving along the conical helical line

$$\mathbf{R}_0(t) = \frac{1}{2}t \cos t \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{2}t \sin t \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{2}t \cdot \mathbf{k} \text{ with initial conditions}$$

$$X(0) = X'(0) = Y(0) = Y'(0) = Z(0) = Z'(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 3\pi$$

Базис τ, n, b , как мы это видели выше, совершает два вида движения: поступательное вдоль пространственной траектории со скоростью $|\dot{\mathbf{R}}_0(t)| = v(t)$ и вращательное с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = v(\chi\boldsymbol{\tau} + K\mathbf{b})$ [7] (так называемый вектор Дарбу). В общем случае такое сложное перемещение тела вдоль криволинейной траектории, тем не менее, позволяет наметить общий алгоритм решения задачи о выяснении конкретного вида кривых в неинерциальных системах отсчета, что, с нашей точки зрения, представляется довольно важным обстоятельством в плане практического приложения полученных выше результатов. Отметим также, что подобной тематикой занимались и другие авторы, о чем свидетельствуют, например, работы [8–10].

Заключение

В заключение еще раз обратим внимание на три основных результата:

1. В неинерциальной системе координат получена общая система дифференциальных уравнений, описывающая траекторию движения тела, подверженного воздействию любых внешних сил.
2. В условиях воздействия одной только силы тяжести приведено подробное исследование найденных систем уравнений, когда движение осуществляется по цилиндрической, гиперболической и конической винтовым линиям.
3. Приведена графическая иллюстрация численного решения полученных уравнений в НСО.

Список источников

1. Богданова С.Б., Гладков С.О. О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 68–80. doi: 10.17223/19988621/84/6
2. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. М. : Просвещение, 1975. Т. 2: Проективное пространство и методы изображений основания геометрии. Элементы топологии. Линии и поверхности в евклидовом пространстве. 366 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Механика. М. : Наука, 1988. 215 с.
4. Фиктенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. : Физматлит, 1962. Т. 1. 607 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М. : Физматлит, 1967. Т. 2. 628 с.
6. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М. : Физматгиз, 1958. 244 с.
7. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия. М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1949. 512 с.
8. Подобная Е.Д., Попова О.П., Глазачев Д.О. Оценка траектории метеороидов по марсианским кластерам // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 97–107. doi: 10.17223/19988621/80/9
9. Voytik V.V. On a special transformation to a non-inertial, radially rigid reference frame // Gravitation and Cosmology. 2013. V. 19, № 3. P. 193–200. doi: 10.1134/S0202289313030110
10. Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G. The task of the relativistic oscillator in a non-inertial frame of reference // European Journal of Physics. 2016. V. 37, № 5. Art. 055604. doi: 10.1088/0143-0807/37/5/055604

References

1. Bogdanova S.B., Gladkov S.O. (2023) O traektoriyakh tel v neinertsial'nykh sistemakh otscheta [On the trajectories of bodies in non-inertial reference frames]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 68–80. doi: 10.17223/19988621/84/6
2. Bazylev V.T., Dunichev K.I. (1975) *Geometriya* [Geometry]. Moscow: Prosveshchenie.
3. Landau L., Lifshitz E. (1976) *Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann.
4. Fikhtengol'ts G.M. (1962) *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Moscow: Fizmatlit.
5. Smirnov V.I. (1967) *Kurs vysshey matematiki* [Course of higher mathematics]. Moscow: Fizmatlit.
6. Norden A.P. (1958) *Kratkiy kurs differentsial'noy geometrii* [Short course in differential geometry]. Moscow: Fizmatlit.
7. Vygodskiy M.Ya. (1949) *Differentsial'naya geometriya* [Differential geometry]. Moscow: Fizmatlit.
8. Podobnaya E.D., Popova O.P., Glazachev D.O. (2022) Otsenka traektorii meteoroidov po marsianskim klasteram [Estimation of the trajectory of meteoroids from Martian clusters]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 97–107. doi: 10.17223/19988621/80/9
9. Voytik V.V. (2013) On a special transformation to a non-inertial, radially rigid reference frame. *Gravitation and Cosmology*. 19(3). pp. 193–200. doi: 10.1134/S0202289313030110
10. Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G. (2016) The task of the relativistic oscillator in a non-inertial frame of reference. *European Journal of Physics*. 37(5). Article 055604. doi: 10.1088/0143-0807/37/5/055604

Сведения об авторах:

Богданова Софья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (МАИ) (Москва, Россия). E-mail: sonjaf@list.ru

Гладков Сергей Октябрьнович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (МАИ) (Москва, Россия). E-mail: sglad51@mail.ru

Information about the authors:

Bogdanova Sof'ya B. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

Gladkov Sergey O. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru

Статья поступила в редакцию 08.10.2023; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 08.10.2023; accepted for publication 03.10.2024

Научная статья

УДК 536.2; 544.012

doi: 10.17223/19988621/91/6

Аналитические модели теплопроводности в двухфазных дисперсных средах. 2. Сравнение теории с экспериментами

Борис Владимирович Бошенятов¹, Анатолий Алексеевич Глазунов²,
Александр Николаевич Ищенко³, Юлия Николаевна Карнет⁴

^{1,4} *Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия*

^{2,3} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *bosbosh@mail.ru*

² *gla@niipmm.tsu.ru*

³ *ichan@niipmm.tsu.ru*

⁴ *iam@iam.ras.ru*

Аннотация. Получено экспериментальное подтверждение ранее теоретически установленного факта, что область применимости аналитических моделей теплопроводности, которые не учитывают коллективное взаимодействие дисперсных частиц, значительно шире, чем это считалось ранее. Показано, что аналитическая формула Максвелла дает погрешность менее 2.7% во всем диапазоне концентраций и параметров фаз. Новая аналитическая зависимость, инвариантная относительно преобразования инверсии фаз, наилучшим образом описывает эксперименты в бинарных металлических смесях, когда не удается выделить непрерывную фазу.

Ключевые слова: дисперсные среды, композитные материалы, взаимодействие дисперсных частиц, уравнение Лапласа, эффективный коэффициент теплопроводности

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ.

Для цитирования: Бошенятов Б.В., Глазунов А.А., Ищенко А.Н., Карнет Ю.Н. Аналитические модели теплопроводности в двухфазных дисперсных средах. 2. Сравнение теории с экспериментами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 61–74. doi: 10.17223/19988621/91/6

Original article

Analytical models of thermal conductivity in two-phase dispersion media. 2. Comparison of theoretical and experimental data

Boris V. Boshenyatov¹, Anatoliy A. Glazunov²,
Aleksandr N. Ishchenko³, Yuliya N. Karnet⁴

^{1,4} *Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

^{2,3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ bosbosh@mail.ru

² gla@niipmm.tsu.ru

³ ichan@niipmm.tsu.ru

⁴ iam@iam.ras.ru

Abstract. It is traditionally believed that theories and formulas for averaging (homogenization) the physical properties of dispersion media, which exclude the effect of the collective interaction of dispersed particles, are applicable only at low concentrations of the dispersed phase. This opinion was disapproved theoretically and then experimentally in a previous paper. It has been established that with an increase in the concentration of dispersed particles, the main effect on the change in the effective thermal conductivity coefficient of the dispersion medium is exerted by the purely geometric factor of compaction of dispersed particles. Therefore, if the experimental conditions correspond to the theoretical premises considering a two-phase medium as homogeneous and isotropic and the dispersed particles as isolated from each other, then Maxwell's analytical formula is applicable (with an error of less than 2.7%) over the entire range of variation of concentrations and phase parameters. It is shown that the proposed new analytical dependence, which is invariant with respect to the phase inversion transformation and does not take into account the interaction of particles, best describes experiments in binary metal mixtures when it is impossible to isolate a continuous dispersed phase.

Keywords: dispersion media, composite materials, interaction of dispersed particles, Laplace's equation, effective thermal conductivity coefficient

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation: Boshenyatov, B.V., Glazunov, A.A., Ishchenko, A.N., Karnet, Yu.N. (2024) Analytical models of thermal conductivity in two-phase dispersion media. 2. Comparison of theoretical and experimental data. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 61–74. doi: 10.17223/19988621/91/6

Введение

Развитие физических основ математического описания движения многофазных (гетерогенных) сред [1–3] играет важнейшую роль при решении проблем повышения эффективности [4] промышленного производства нового технологического уклада. В ряде случаев такие среды можно рассматривать как однородные, описывая их физические свойства эффективными параметрами, усредненными по некоторому объему Ω , $l^3 \ll \Omega \ll L^3$, где l – характерный размер структурных неоднородностей среды, например усредненное расстояние между центрами масс соседних дисперсных частиц, L – характерный масштаб неоднородности после усреднения.

Традиционно считается, что существующие теории и формулы усреднения (гомогенизации) физических свойств дисперсных сред, которые не учитывают влияния коллективного взаимодействия дисперсных частиц, применимы только при малых концентрациях дисперсной фазы [5, 6]. Физическую природу коллективного взаимодействия частиц легко понять на примере гидродинамических возмущений, поскольку при движении каждая дисперсная частица генерирует в окружающей ее жидкости соответствующее поле скоростей. При повышенной

концентрации движение отдельной частицы зависит не только от внешнего поля, но и от полей возмущений окружающих ее частиц. Коллективное взаимодействие частиц осуществляется и через поля возмущений иной физической природы – температурные, электромагнитные и др. Ясно, что при малых концентрациях дисперсной фазы взаимодействием частиц можно пренебречь, поскольку частицы находятся на относительно большом расстоянии друг от друга, т.е. параметр $\delta = \frac{a}{l} \ll 1$, где a – радиус дисперсной частицы. С другой стороны, из-за чрезвычайной математической сложности задачи получить количественную оценку степени влияния коллективного взаимодействия частиц на эффективные свойства даже для простейшей двухфазной дисперсной среды до недавнего времени не представлялось возможным [7–9].

В предыдущей работе [10] с учетом коллективного взаимодействия частиц получена аналитическая зависимость эффективного коэффициента теплопроводности λ^* статистически однородной и изотропной двухфазной дисперсной среды, в которой идентичные однородные сферические частицы (коэффициент теплопроводности λ_2) случайным образом расположены в однородной и непрерывной дисперсионной фазе (λ_1). При этом параметры дисперсной среды $\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2}$ (где

$\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$) и объемная концентрация дисперсной фазы f_2 изменяются в диапазонах: $-0.5 < \beta < 1$ и $0 < f_2 < 1$:

$$\beta^* = f_2 \beta \frac{1 + k(\beta) f_2}{1 + k(\beta) f_2^2}, \quad (1)$$

$$k(\beta) = 0.0486\beta + 0.0628\beta^2 + 0.0003\beta^3$$

В формулах (1) $\beta^* = \frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 2}$, $\alpha^* = \frac{\lambda^*}{\lambda_1}$. Когда взаимодействие частиц мало, т.е.

$k(\beta) \ll 1$, формула (1) при любых концентрациях f_2 совпадает с так называемой эвристической формулой Максвелла [11]:

$$\beta_M^* = \beta f_2 \text{ или } \alpha_M^* = \frac{1 + 2\beta f_2}{1 - \beta f_2}. \quad (2)$$

Следуя работе [10], будем называть формулу (2) аналитической формулой Максвелла. Сравнивая формулы (1) и (2), нетрудно убедиться, что максимальная относительная погрешность аналитической формулы Максвелла $\varepsilon = \frac{\beta^* - \beta_M^*}{\beta_M^*} 100\% \approx$

$\approx 100k(\beta) f_1 f_2 \%$, возникающая из-за пренебрежения взаимодействием дисперсных частиц, имеет место при $f_2 = 0.5$ и составляет 2.77%.

Таким образом, теоретические исследования [10] показали, что с увеличением концентрации дисперсных частиц основное влияние на эффективную теплопроводность среды оказывает чисто геометрический фактор стесненности частиц, который в полной мере учитывается формулой (2). Учет коллективного взаимодействия частиц дает лишь незначительную поправку на конечный результат.

С использованием этого замечательного свойства и свойства симметрии дисперсной среды из аналитической формулы Максвелла было получено точное решение, инвариантное относительно преобразования инверсии фаз $(\lambda_1, f_1) \leftrightarrow (\lambda_2, f_2)$, предназначенное для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности в трехмерных неупорядоченных структурно симметричных двухфазных средах, когда трудно выделить непрерывную фазу:

$$\frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 2}(\alpha + 2)f_1 + \frac{\alpha^* - \alpha}{\alpha^* + 2\alpha}(2\alpha + 1)f_2 = 0. \quad (3)$$

В частном случае, при равных объемных концентрациях фаз $f_1 = f_2 = 0.5$, формула (3) упрощается до уравнения

$$(\alpha^*)^2 + \frac{2\alpha}{\alpha + 1}\alpha^* - 2\alpha = 0 \quad (4)$$

Единственное положительное решение уравнения (4) $\alpha^* = f(\alpha)$ показано ниже, при сравнении этого решения с экспериментами по измерению эффективной электропроводности различных бинарных металлических смесей.

Отметим, что в силу математической эквивалентности задач в безразмерном виде формулы (1)–(3) пригодны для вычисления эффективного коэффициента электропроводности, электростатической диэлектрической и магнитной проницаемости и других подобных физических величин [12].

В данной работе с целью подтверждения достоверности полученных теоретических результатов [10], дается их сравнение с имеющимися в литературе экспериментами по измерениям эффективных коэффициентов теплопроводности, электропроводности и диэлектрической проницаемости в различных дисперсных средах: суспензиях, эмульсиях, пузырьковых газожидкостных средах, композитах и бинарных металлических смесях. При этом по возможности выбирались экспериментальные данные, которые соответствуют основным предположениям нашей теоретической модели: дисперсные частицы представляют собой однородные твердые (жидкие или газообразные) сферы, которые не касаются друг друга и статистически равномерно распределены в непрерывной и однородной дисперсионной фазе, находящейся в любом агрегатном состоянии.

Экспериментальная проверка области применимости аналитической формулы Максвелла

В работе [13] дано сравнение аналитических формул (1) и (2) с многочисленными экспериментами различных авторов по измерению эффективных коэффициентов электропроводности в газожидкостных дисперсных средах (от пузырьковых до пен), при $\alpha \ll 1$ и $0 < f_2 < 1$, приведенных в работе [14]. Теоретический расчет по формуле Максвелла (2) в данном случае практически совпадает (с погрешностью менее 0.5%) с расчетом по формуле (1), которая учитывает гидродинамическое взаимодействие пузырьков. Показано, что расчет по формуле Максвелла (2) дает отклонение от усредненной экспериментальной зависимости менее 5% во всем диапазоне концентраций пузырьков, в то время как разброс экспериментальных данных составляет до 10%. Линейное приближение $O(f_2^2)$ аналитической формулы Максвелла дает погрешность менее 5% лишь в диапазоне объемных концентраций $0 < f_2 < 0.22$.

На рис. 1 дано сравнение экспериментов [15] по измерению коэффициента теплопроводности в суспензиях с расчетами по формуле Максвелла (2). Суспензии состояли из шарообразных полистироловых бусинок ($\lambda_2 = 0.035$ Вт/м·К) с диаметром 2 мм (темные маркеры) и 6.5 мм, хаотично диспергированных в геле ($\lambda_1 = 0.60$ Вт/м·К). Как и в случае газожидкостных сред, параметр $\alpha = 0.058 \ll 1$. Погрешность измерения коэффициента теплопроводности не превышала 2.5%. Видно, что результаты экспериментов практически идеально совпадают с расчетами по аналитической формуле Максвелла в всем диапазоне объемных концентраций дисперсной фазы – от нуля до максимальной упаковки сфер при хаотической укладке $0 < f_2 < 0.637$.

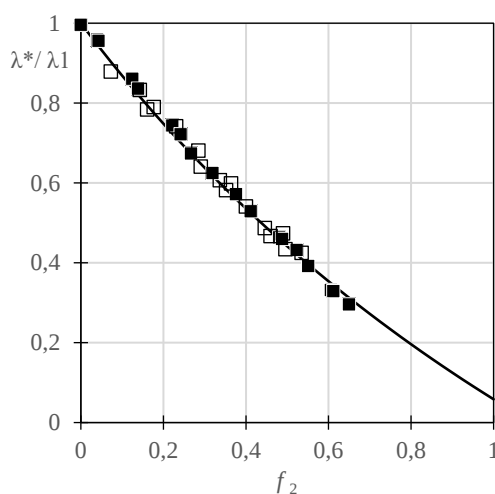


Рис. 1. Сравнение результатов измерений эффективного коэффициента теплопроводности в суспензиях [15] с теоретическим расчетом по формуле Максвелла (2) при $\alpha = 0.058 \ll 1$: линия – теория; маркеры – эксперименты

Fig. 1. Comparison of measured effective thermal conductivity in suspensions [15] with a theoretical calculation by Maxwell's formula (2) at $\alpha = 0.058 \ll 1$: theory (solid line) and experiments (markers)

В работе [16] измерялся коэффициент теплопроводности композитов на основе полипропиленовой матрицы ($\lambda_1 = 0.24$ Вт м⁻¹ К⁻¹) и диспергированных в ней медного ($\lambda_2 = 389.6$ Вт м⁻¹ К⁻¹) и алюминиевого ($\lambda_2 = 209.3$ Вт м⁻¹ К⁻¹) порошков со средним диаметром частиц 230 и 8 мкм соответственно. На рис. 2 дано сравнение этих экспериментов с расчетом по аналитической формуле Максвелла для другого предельного случая ($\alpha \gg 1$).

Видно, что вплоть до начала слипания мелких дисперсных частиц в кластеры эксперименты строго следуют теоретическому расчету. Начало слипания медных частичек соответствует объемной концентрации $f_2 = 0.1$. Алюминиевые частички, несмотря на меньший размер, начинают объединяться при $f_2 = 0.2$. Этот факт объясняется тем, что алюминиевые частицы покрываются оксидной пленкой, которая затрудняет их кластеризацию при приготовлении композита. Теоретическое объяснение увеличения коэффициента теплопроводности композита вследствие кластеризации дисперсных частиц дано в работах [17, 18].

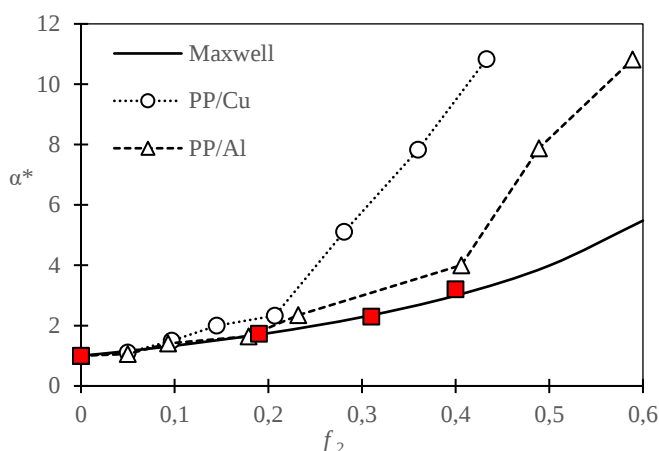


Рис. 2. Сравнение экспериментов по измерению эффективного коэффициента теплопроводности в порошковых композитах с теоретическим расчетом по формуле Максвелла (2) при $\alpha \gg 1$: линия – теория; маркеры – эксперименты

Fig. 2. Comparison of experimentally measured effective thermal conductivity in powder composites with a theoretical calculation by Maxwell's formula (2) at $\alpha \gg 1$: theory (solid line) and experiments (markers)

В работе [19] композит – кремнийорганический лак КО-916К ($\lambda_1 = 0.17$ Вт/м·К) и наночастицы из нитрида алюминия (размер 50–200 нм, $\lambda_1 = 99.9$ Вт/м·К), полученные газофазным способом, – в процессе приготовления подвергался ультразвуковой обработке, что препятствовало кластеризации частиц. На рис. 2 приведена зависимость $\alpha^* = f(f_2)$ такого композита [19, 20]. Видно, что в этом случае совпадение экспериментов с теоретическим расчетом по формуле (2) имеет место в диапазоне концентраций $0 < f_2 < 0.37$.

Таким образом, если принять специальные меры, препятствующие непосредственному контакту частиц и образованию кластеров, то результаты экспериментов при $\alpha \gg 1$ соответствуют теоретическому расчету и при достаточно высоких концентрациях дисперсной фазы. Так, в работе [21] дано сравнение аналитической формулы Максвелла (2) и экспериментов [22] по измерению электропроводности, которые проводились на 1/8 части модельной ячейки объемно-центрированной кубической периодической решетки (body-centered cubic lattice). Максимальная величина объемной концентрации такой упаковки составляет $f_2^{\max} = 0.680$, при этой концентрации сферические частицы касаются друг друга и электропроводность ячейки при $\alpha \gg 1$ стремится к бесконечности. Было показано, что эксперимент соответствует теории (1) с погрешностью менее 3% в диапазоне концентраций $0 < f_2 < 0.55$. Аналитическая формула Максвелла и теория Джеффрея [4], которая учитывает парные взаимодействия частиц в приближении $O(f_2^3)$, имеют ту же погрешность в диапазоне концентраций $0 < f_2 < 0.3$. Линейное приближение формулы Максвелла применимо лишь в диапазоне концентраций $0 < f_2 < 0.1$.

В работе [23] приведены результаты экспериментов при $\alpha \gg 1$, которые показывают, что и для хаотического расположения дисперсных частиц в различных суспензиях аналитическая формула Максвелла применима вплоть до концентраций, лишь немного отличающихся от плотной упаковки $0 < f_2 < 0.58$.

На рис. 3 дано сравнение расчетов по аналитическим формулам (1) и (2) с экспериментами [24] по измерению коэффициентов электростатической диэлектрической проницаемости $\alpha^* = \epsilon^* / \epsilon_1$ в водно-масляных эмульсиях при промежуточном значении параметра $\alpha = 35.5$.

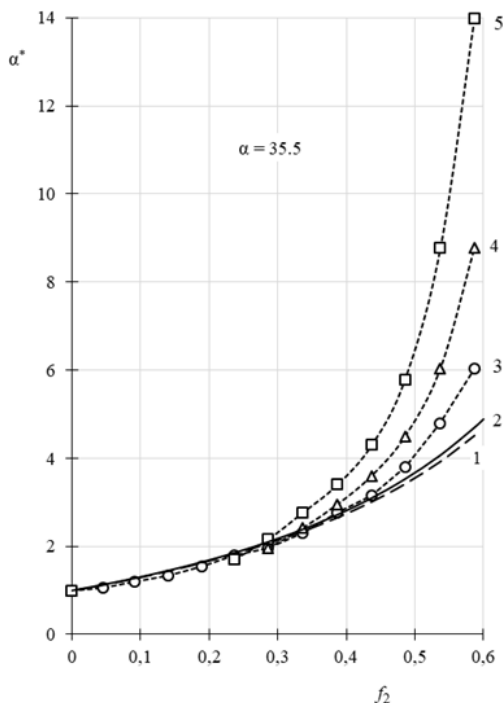


Рис. 3. Сравнение теории с экспериментами по измерению эффективных значений диэлектрической проницаемости в полидисперсных водно-масляных эмульсиях при $\alpha = 35.5$: 1 – расчет по формуле Максвелла (2); 2 – расчет по аналитической формуле (1), которая учитывает взаимодействие частиц; маркеры – эксперименты [24] при температурах: 3 – $T = 10^\circ\text{C}$, 4 – $T = 15^\circ\text{C}$, 5 – $T = 20^\circ\text{C}$

Fig. 3. Validation of effective permittivity in polydisperse water-oil emulsions at $\alpha = 35.5$: (1) calculation by Maxwell's formula (2); (2) calculation by analytical formula (1) accounting for the interaction of particles; markers indicate experiments [24] at temperatures $T =$ (3) 10, (4) 15, and (5) 20°C

Известно, что водно-масляные эмульсии, стабилизированные добавкой небольшого количества поверхностно-активных веществ (ПАВ), агрегативно устойчивы и представляют собой полидисперсный состав мелких (размером до 10 нм) сферических капель воды, окруженных монослоем молекул ПАВ, диспергированных в непрерывной масляной среде. На рис. 3 представлены результаты экспериментов при трех различных температурах среды. Видно, что с увеличением температуры отклонение экспериментальных точек от расчетных зависимостей начинается при меньших значениях объемной концентрации капель. Так, например, при температуре 10°C , расчетные зависимости (1) и (2) практически совпадают с экспериментами в диапазоне объемных концентраций капель $0 < f_2 < 0.45$, далее эксперименты дают более высокие значения коэффициента α^* . При температуре 20°C экспери-

ментальная зависимость начинает уходить вверх уже при значениях $f_2 \geq 0.3$. Наблюдаемая зависимость α^* от температуры объясняется тем, что начиная с некоторой концентрации $f_2 \geq f_2^{\text{cl}}$ мелкие капли начинают объединяться в кластеры (как и на рис. 2), что и является причиной увеличения коэффициента α^* , а кинетика процесса кластеризации капель и критическая величина f_2^{cl} зависят от температуры эмульсии.

Экспериментальная проверка новой аналитической формулы усреднения, инвариантной относительно преобразования инверсии фаз

В работе [10] было получено неизвестное ранее точное решение (3), инвариантное относительно преобразования инверсии фаз. Формула (3) пригодна для описания различных дисперсных систем, в которых нельзя четко выделить непрерывную компоненту (матрицу). Одним из примеров таких систем являются бинарные металлические смеси.

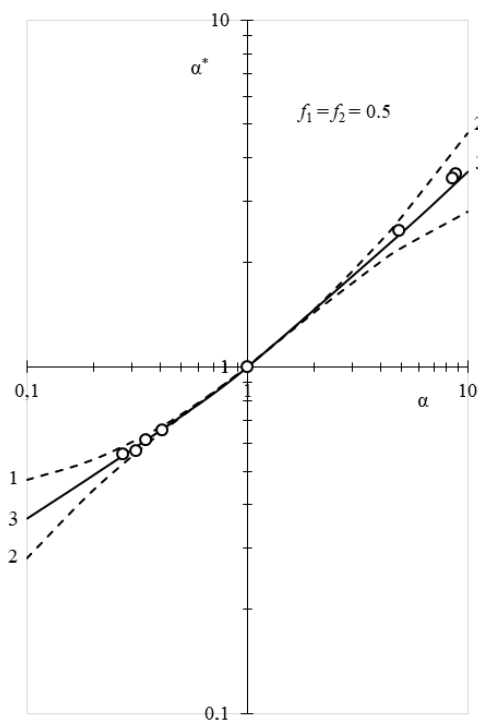


Рис. 4. Сравнение новой теоретической зависимости (3) с экспериментами при $f_1 = f_2 = 0.5$: пунктирные линии 1 и 2 – границы Хашина–Штрикмана; 1 – аналитическая формула Максвелла; 3 – аналитическая зависимость (4); Маркеры – эксперименты по измерению электропроводности бинарных металлических смесей [25], слева направо: Cu₂Sb–Sb, Cu–Fe, Cd–Pb, Pb–Sb, Bi–Bi₂Pb, Mg₂Pb–Pb, Bi–Sn

Fig. 4. Comparison of new theoretical dependence (3) with experiments at $f_1 = f_2 = 0.5$: dashed lines 1 and 2 indicate Hashin-Shtrikman bounds; (1) Maxwell's analytical formula and (3) analytical dependence (4); Circles indicate experimentally measured electrical conductivity of the following binary metal mixtures [25] (from left to right): Cu₂Sb–Sb, Cu–Fe, Cd–Pb, Pb–Sb, Bi–Bi₂Pb, Mg₂Pb–Pb, Bi–Sn

На рис. 4 дано сравнение единственного положительного решения (линия 3) уравнения (4) с экспериментами по измерению электропроводности семи различных бинарных металлических смесей при равных объемных концентрациях компонент $f_1 = f_2 = 0.5$. Эти данные, полученные из экспериментов [25], приведены в таблице.

Результаты измерений [25] эффективного коэффициента электропроводности α^* бинарных металлических смесей при объемных концентрациях компонент $f_1 = f_2 = 0.5$

Химическая формула смеси	Cu ₂ Sb–Sb	Cu–Fe	Cd–Pb	Pb–Sb	Bi–Bi ₂ Pb	Mg ₂ Pb–Pb	Bi–Sn
№ смеси	1	2	3	4	5	6	7
α	0.27	0.31	0.346	0.407	4.845	8.5	8.79
α^*	0.56	0.574	0.6154	0.66	2.479	3.5	3.6

Для сравнения на рис. 4 показаны расчетные зависимости (штриховые линии 1 и 2) границ изменения коэффициентов переноса любых однородных и изотропных дисперсных сред, известные как границы Хашина–Штрикмана (Х–Ш).

Как и следовало ожидать, эксперименты находятся внутри границ Х–Ш. Видно, что и при повышенной объемной концентрации компонент ($f_1 = f_2 = 0.5$) эксперименты достаточно хорошо согласуются с полученной теоретической зависимостью (4) и существенно отличаются от расчета по формуле Максвелла (см. линию 1 и смеси 5, 6 и 7 из таблицы).

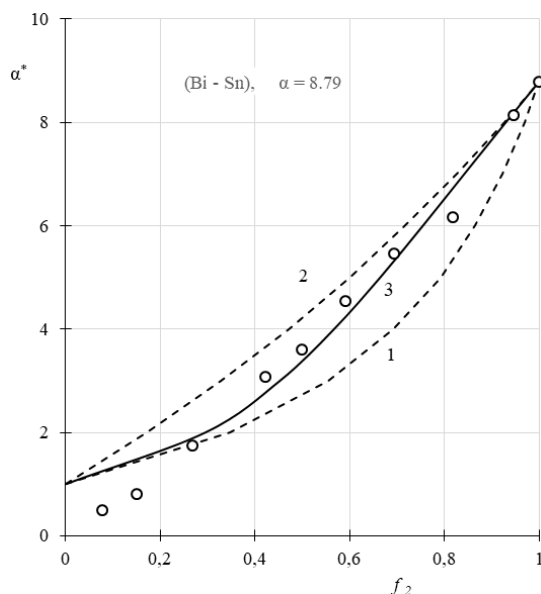


Рис. 5. Сравнение теоретической зависимости (3) с экспериментами [25] по измерению электропроводности бинарной металлической смеси висмута с оловом ($\alpha = 8.79$) в зависимости от объемной концентрации олова (обозначения те же, что и на рис. 4)

Fig. 5. Comparison of theoretical dependence (3) with experiments [25] on measuring the electrical conductivity of a binary metal mixture of bismuth with tin ($\alpha = 8.79$) as a function of the volume concentration of tin (designations are the same as in Figure 4)

На рис. 5 и 6 в безразмерных координатах представлено сравнение теоретической зависимости (3) и экспериментов по измерению относительной электропроводности бинарных металлических смесей: висмута с оловом (Bi–Sn, $\alpha = 8.79$) и кристаллов сурьмянистой меди с сурьмой ($\text{Cu}_2\text{Sb–Sb}$, $\alpha = 0.27$) соответственно, в зависимости от объемной доли олова и сурьмы.

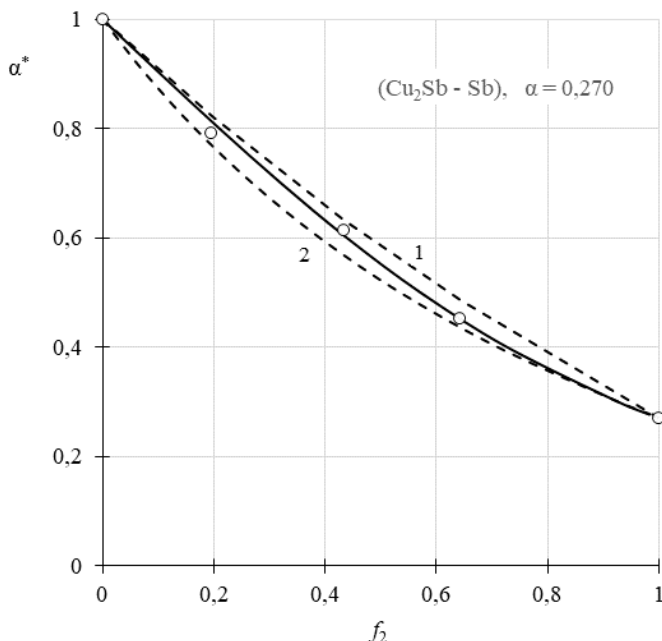


Рис. 6. Сравнение теоретической зависимости (3) с экспериментами [25] по измерению электропроводности бинарной металлической смеси сурьмянистая медь с сурьмой ($\text{Cu}_2\text{Sb–Sb}$, $\alpha = 0.27$) в зависимости от объемной концентрации сурьмы (обозначения те же, что и на рис. 4)

Fig. 6. Comparison of theoretical dependence (3) with experiments [25] on measuring the electrical conductivity of a binary metal mixture of antimony copper with antimony ($\text{Cu}_2\text{Sb–Sb}$, $\alpha = 0.27$) as a function of the volume concentration of antimony (designations are the same as in Figure 4)

Там же приведены (пунктирными линиями) границы X–III; при $\alpha > 0$ нижняя граница X–III совпадает с расчетом по формуле Максвелла (2).

Из рис. 4–6 видно, что предложенная аналитическая зависимость (3) описывает экспериментальные данные наилучшим образом.

Заключение

Сравнение полученных в предыдущей работе аналитических решений с соответствующими экспериментами полностью подтвердило основной теоретический вывод о том, что основное влияние на изменение эффективного коэффициента теплопроводности дисперсной среды с увеличением концентрации дисперсных частиц оказывает чисто геометрический фактор стесненности частиц. Относительное влияние коллективного взаимодействия частиц не превышает нескольких

процентов при предельно неблагоприятных параметрах дисперсной среды: $f_2 \geq 0.5$ и $\alpha \gg 1$. В частности показано, что:

– если объемная концентрация дисперсных частиц не изменяется (нет кластеризации частиц) и соответствует расчетной, то экспериментальные данные отличаются от теоретических расчетов с учетом взаимодействия частиц не более погрешности соответствующих экспериментов;

– если в двухфазных средах нельзя четко выделить непрерывную фазу, например в бинарных металлических смесях, и особенно когда параметры коэффициентов переноса компонент (коэффициенты теплопроводности, электропроводности и др.) отличаются в 10 и более раз, то аналитическая формула Максвелла дает лишь грубую оценку эффективных параметров смеси. В этих случаях наилучшее совпадение с экспериментом дает полученная в предыдущей работе аналитическая зависимость, инвариантная относительно преобразования инверсии фаз, которая также не учитывает коллективное взаимодействие частиц.

Список источников

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М. : Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.; Ч. 2. 360 с.
2. Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С., Шрагер Г.Р. Динамическое взаимодействие частиц дисперсной фазы в гетерогенных потоках. Томск : Изд. Дом Том. гос. ун-та, 2019. 328 с.
3. Псахье С.Г., Обьедков А.Ю., Лернер М.И., Ищенко А.Н., Ивонин И.В., Бирюков Ю.А., Бузник В.М., Дунаевский Г.Е. Ультрадисперсные и наноразмерные порошки: создание, строение, производство и применение / под ред. В.М. Бузника. Томск : Изд-во НТЛ, 2009. 192 с.
4. Бошенятов Б.В. Микропузырьковые газожидкостные среды и перспективы их использования. Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 170 p.
5. Jeffrey D.J. Conduction through a random suspension of spheres // Proc. Roy. Soc. London. 1973. V. A335. P. 355–367. doi: 10.1098/rspa.1973.0130
6. Samantray P.K., Karthikeyan P., Reddy K.S. Estimating effective thermal conductivity of two-phase materials // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2006. V. 49 (21-22). P. 4209–4219. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.03.015
7. Струминский В.В., Гусков О.Б., Корольков Г.А. Гидродинамическое взаимодействие частиц в потенциальных потоках идеальной жидкости // Доклады АН СССР. 1986. Т. 290, № 4. С. 820–824.
8. Felderhof B.U. Virtual mass and drag in two-phase flow // J. Fluid Mech. 1991. V. 225. P. 177–196. doi: 10.1017/S002211209100201X
9. Kristensson G. Homogenization of spherical inclusions // Progress In Electromagnetics Research, PIER. 2003. V. 42. P. 1–25. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.05.001
10. Бошенятов Б.В., Глазунов А.А., Ищенко А.Н., Карнет Ю.Н. Аналитические модели теплопроводности в двухфазных дисперсных средах. 1. Теоретические исследования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 35–54. doi: 10.17223/19988621/86/3
11. Maxwell J.C. Electricity and magnetism. 1st ed. Clarendon Press, 1873.
12. Дульнев Г.Н., Новиков В.В. Процессы переноса в неоднородных средах. Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1991. 248 с.
13. Бошенятов Б.В. Теплопроводность пузырьковых газожидкостных сред повышенной концентрации // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 45. С. 69–79. doi: 10.17223/19988621/45/6
14. Feitosa K., Marze S., Saint-Jalmes A., Durian D.J. Electrical conductivity of dispersions: from dry foams to dilute suspensions // Journal of Physics: Condensed Matter. 2005. V. 17, № 41. P. 6301–6305. doi: 10.1088/0953-8984/17/41/001

15. Carson J.K., Lovatt S.J., Tanner D.J., Cleland A.C. Experimental measurements of the effective thermal conductivity of a pseudo-porous food analogue over a range of porosities and mean pore sizes // *Journal of Food Engineering*. 2004. V. 63. P. 87–95. doi: 10.1016/S0260-8774(03)00286-3
16. Boudenne A., Ibos L., Géhin E., Fois M., Majesté J.C. Anomalous behavior of thermal conductivity and diffusivity in polymeric materials filled with metallic particles // *Journal of Materials Science*. 2005. V. 40. P. 4163–4167. doi: 10.1007/S10853-005-3818-2
17. Бошенятов Б.В. Роль взаимодействия частиц в кластерной модели теплопроводности наножидкостей // *Письма в ЖТФ*. 2018. Т. 44 (3). С. 17–24.
18. Bedeaux D., Wind M.M., van Dijk M.A. The Effective Dielectric Constant of a Dispersion of Clustering Spheres // *Z. Phys. B – Condensed Matter*. 1987. V. 68. P. 343–354. doi: 10.1007/BF01304251
19. Ягунов А.И., Елагин А.А., Лыткин В.В., Бекетов А.Р., Баранов М.В., Денисенко В.И., Стоянов О.В. Применение композиционного материала «Нитрид алюминия–кремний-органический лак КО-916к» в качестве пазовой изоляции обмоток статора асинхронных электродвигателей малой и средней мощности // *Вестник Казанского технологического университета*. 2013. Т. 16 (5). С. 161–166.
20. Ягунов А.И., Аскольд Р.Б., Баранов М.В., Стоянов О.В. Применимость современных моделей для оценки теплофизических характеристик кремнийорганического лака, наполненного тонкодисперсным нитридом алюминия // *Вестник Казанского технологического университета*. 2013. Т. 16 (13). С. 129–132.
21. Бошенятов Б.В. К расчету эффективных коэффициентов переноса в монодисперсных суспензиях сферических частиц // *Письма в ЖТФ*. 2015. Т. 41 (3). С. 67–73.
22. McKenzie D.R., McPhedran R.C., Derrick G.H. The conductivity of lattices of spheres. II. The body centered and face centered cubic lattices // *Proceedings of the Royal Society of London Ser. A. Mathematical and Physical Sciences*. 1978. V. 362. P. 211–232. doi: 10.1098/rspa.1978.0129
23. Кашевский Б.Э., Кордонский В.И., Прохоров И.В., Хутская Н.Г. К вопросу о теплопроводности концентрированных суспензий // *Прикладная механика и техническая физика*. 1990. № 6. С. 95–96.
24. Van Dijk M.A., Broekman E., Joosten J.G.H., Bedeaux D. Dielectric study of temperature dependent aerosol of water/isooctane microemulsion structure // *Journal de Physique*. 1986. V. 47 (5). P. 727–731. doi: 10.1051/jphys:01986004705072700
25. Landauer R. The electrical resistance of binary metallic mixtures // *Journal of Applied Physics*. 1952. V. 23, № 7. P. 779–784. doi: 10.1063/1.1702301

References

1. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka.
2. Arhipov V.A., Vasenin V.A., Usanina A.S., Shrager G.R. (2019) *Dinamicheskoe vzaimodeystvie chastits dispersnoy fazy v geterogennykh potokakh* [Dynamic interaction of dispersed phase particles in heterogeneous flows]. Tomsk: Izdatel'skiy Dom Tomskogo gosudarstvennogo universiteta.
3. Psakh'e S.G., Ob'edkov A.Yu., Lerner M.I., Ishchenko A.N., Ivonin I.V., Biryukov Yu.A., Dunaevskiy G.E. (2009) *Ul'tradispersnye i nanorazmernye poroshki: sozdanie, stroenie, proizvodstvo i primeneniye* [Ultrafine and nanosized powders: formation, structure, production and application]. Tomsk: Izdatel'stvo NTL.
4. Boshenyatov B.V. (2016) *Mikropuzyr'kovye gazozhidkostnye sredy i perspektivy ikh ispol'zovaniya* [Microbubble gas-liquid media and their prospects of applying]. LAMBERT Academic Publishing.

5. Jeffrey D.J. (1973) Conduction through a random suspension of spheres. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 335. pp. 355–367. doi: 10.1098/rspa.1973.0130
6. Samantray P.K., Karthikeyan P., Reddy K.S. (2006) Estimating effective thermal conductivity of two-phase materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 49(21-22). pp. 4209–4219. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.03.015
7. Struminskii V.V., Gus'kov O.B., Korol'kov G.A. (1986) Hydrodynamic interaction of particles in potential flow of an ideal fluid. *Soviet Physics. Doklady*. 31(10). pp. 787–789.
8. Felderhof B.U. (1991) Virtual mass and drag in two-phase flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 225. pp. 177–196. doi: 10.1017/S002211209100201X
9. Kristensson G. (2003) Homogenization of spherical inclusions. *Progress In Electromagnetics Research*. 42. pp. 1–25. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.05.001
10. Boshenyatov B.V., Glazunov A.A., Ishchenko A.N., Karnet Yu.N. (2023) Analiticheskie modeli teploprovodnosti v dvukhfaznykh sredakh. Teoreticheskie issledovaniya [Analytical models of thermal conductivity in two-phase dispersive media. 1. Theoretical investigation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 35–54. doi: 10.17223/19988621/86/3
11. Maxwell J.C. (1873) *Electricity and Magnetism*. Clarendon Press.
12. Dul'nev G.N., Novikov V.V. (1991) *Protsessy perenosa v neodnorodnykh sredakh* [Transfer processes in inhomogeneous media]. Leningrad: Energoatomizdat.
13. Boshenyatov B.V. (2017) Teploprovodnost' puzyr'kovoy gazozhidkostnoy sredy vysokoy kontsentratsii [Thermal conductivity of the bubble gas-liquid media with a high concentration]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(45). pp. 69–79. doi: 10.17223/19988621/45/6
14. Feitosa K., Marze S., Saint-Jalmes A., Durian D.J. (2005) Electrical conductivity of dispersions: from dry foams to dilute suspensions. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 17(41). pp. 6301–6305. doi: 10.1088/0953-8984/17/41/001
15. Carson J.K., Lovatt S.J., Tanner D.J., Cleland A.C. (2004) Experimental measurements of the effective thermal conductivity of a pseudo-porous food analogue over a range of porosities and mean pore sizes. *Journal of Food Engineering*. 63. pp. 87–95. doi: 10.1016/S0260-8774(03)00286-3
16. Boudenne A., Ibos L., Géhin E., Fois M., Majesté J.C. (2005) Anomalous behavior of thermal conductivity and diffusivity in polymeric materials filled with metallic particles. *Journal of Materials Science*. 40. pp. 4163–4167. doi: 10.1007/S10853-005-3818-2
17. Boshenyatov B.V. (2018) The role of particle interaction in the cluster model of heat conductivity of nanofluids. *Technical Physics Letters*. 44(2). pp. 94–97. doi: 10.1134/S1063785018020049
18. Bedeaux D., Wind M.M., van Dijk M.A. (1987) The effective dielectric constant of a dispersion of clustering spheres. *Zeitschrift fur Physik B. Condensed Matter*. 68. pp. 343–354. doi: 10.1007/BF01304251
19. Yakupov A.I., Elagin A.A., Lytkin V.V., Beketov A.P., Baranov M.V., Denisenko V.I., Stoyanov O.V. (2013) Primenenie kompozitsionnogo materiala «Nitrid alyuminiya – kremniyorganicheskiy lak KO-916k» v kachestve fazovoy izolyatsii obmotok statora asinkhronnykh elektrodvigatelyay maloy i sredney moshchnosti [Application of the composite material “Aluminum nitride–organosilicon varnish KO-916k” as slot insulation of the stator windings of low and medium power asynchronous electric motors]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta – Herald of Technological University*. 16(5). pp. 161–166.
20. Yakupov A.I., Askol'd R.B., Baranov M.V., Stoyanov O.V. (2013) Primenimost' sovremennykh modeley dlya otsenki teplofizicheskikh kharakteristik kremniyorganicheskogo laka, napolnen-nogo tonkodispersnym nitridom alyuminiya [Applicability of modern models for assessing the thermophysical characteristics of silicone varnish filled with finely dispersed aluminum

- nitride]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta – Herald of Technological University*. 16(13). pp. 129–132.
21. Boshenyatov B.V. (2015) On calculation of effective transport coefficients in monodisperse suspension of spherical particles. *Technical Physics Letters*. 41(2). pp. 136–138. doi: 10.1134/S1063785015020054D
 22. McKenzie D.R., McPhedran R.C., Derrick G.H. (1978) The conductivity of lattices of spheres. II. The body centered and face centered cubic lattices. *Proceedings of the Royal Society of London Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 362. pp. 211–232. doi: 10.1098/rspa.1978.0129
 23. Kashevskiy B.E., Kordonskiy V.I., Prokhorov I.V., Khutskaia N.G. (1990) K voprosu o teploprovodnosti kontsentririrovannykh suspenziy [On the issue of thermal conductivity of concentrated suspensions]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 6. pp. 95–96.
 24. Van Dijk M.A., Broekman E., Joosten J.G.H., Bedeaux D. (1986) Dielectric study of temperature dependent aerosol of water/isooctane microemulsion structure. *Journal de Physique*. 47(5). pp. 727–731. doi: 10.1051/jphys:01986004705072700
 25. Landauer R. (1952) The electrical resistance of binary metallic mixtures. *Journal of Applied Physics*. 23(7). pp. 779–784. doi: 10.1063/1.1702301

Сведения об авторах:

Бошенятков Борис Владимирович – доктор технических наук, главный научный сотрудник Института прикладной механики РАН (Москва, Россия). E-mail: bosbosh@mail.ru

Глазунов Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Ищенко Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Карнет Юлия Николаевна – кандидат физико-математических наук, ученый секретарь Института прикладной механики Российской академии наук (Москва, Россия). E-mail: iam@iam.ras.ru

Information about the authors:

Boshenyatov Boris V. (Doctor of Technical Sciences, Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: bosbosh@mail.ru

Glazunov Anatoliy A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Ishchenko Aleksandr N. (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Karnet Yuliya N. (Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: iam@iam.ras.ru

Статья поступила в редакцию 19.09.2023; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 19.09.2023; accepted for publication 03.10.2024

Научная статья

УДК 533.6.011.6

doi: 10.17223/19988621/91/7

Экспериментальное исследование изменения давления и температуры при сверхзвуковом течении воздушного потока в канале плоской формы

Алексей Сергеевич Груздев¹, Алексей Юрьевич Крайнов²,
Валерий Владимирович Фарапонов³

^{1,2,3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ afl_975@yandex.ru

² akrainov@ftf.tsu.ru

³ fff@ftf.tsu.ru

Аннотация. Представлено исследование изменения статического давления и температуры в пристеночной зоне канала плоской формы при сверхзвуковом течении воздушного потока. Проанализированы экспериментальные зависимости давления и температуры от времени и удаления от переднего торца модели с проточным каналом. Проведен сравнительный анализ структуры течения в каналах осесимметричной и плоской форм. Экспериментальные результаты показаны для двух скоростей потока.

Ключевые слова: сверхзвуковое течение газа в канале, аэродинамические испытания, поле температуры, поле давления

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания FSWM-2020-0036.

Для цитирования: Груздев А.С., Крайнов А.Ю., Фарапонов В.В. Экспериментальное исследование изменения давления и температуры при сверхзвуковом течении воздушного потока в канале плоской формы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 75–84. doi: 10.17223/19988621/91/7

Original article

Experimental study of pressure and temperature variations in a supersonic air flow through a flat channel

Aleksey S. Gruzdev¹, Aleksey Yu. Krainov², Valeriy V. Faraponov³

^{1,2,3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ afl_975@yandex.ru

² akrainov@ftf.tsu.ru

³ fff@ftf.tsu.ru

Abstract. In this paper, the experimental dependences of static pressure and temperature on time and distance for channel flow are presented and analyzed. The choice of channel

geometry is determined by the fact that a backward-facing step can be considered as a convergent-divergent diffuser, air duct, combustion chamber, etc. The experiments are carried out on a supersonic short-term aerodynamic setup with airflow at Mach numbers of 5 and 6. The obtained data are compared with the results of similar wind-tunnel tests in an axisymmetric case. For flat-channel flows, the recirculation zone occurs only behind the step. No other recirculation zones are observed due to the sufficient increase in transverse velocity along the channel. At the same time, the longitudinal velocity decreases, which leads to an increase in the static pressure. Thus, the intensity of the reflected shock waves abruptly becomes weaker, so that no other recirculation zones appear in the flow. The obtained temperature distributions in the near-wall zone at air deceleration during the flow over a backward-facing step at the considered flow velocities are found to have a minimum. The temperature then increases due to significant flow deceleration.

Keywords: supersonic gas flow in a channel, aerodynamic tests, temperature field, pressure field

Acknowledgments: This research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. FSWM-2020-0036).

For citation: Gruzdev, A.S., Krainov, A.Yu., Faraponov, V.V. (2024) Experimental study of pressure and temperature variations in a supersonic air flow through a flat channel. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 75–84. doi: 10.17223/19988621/91/7

Введение

Взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем у поверхности стенки проточного канала является причиной формирования сложной картины течения. Это проявляется, прежде всего, в наличии зон дозвуковой и сверхзвуковой скорости, больших градиентов давления. В экспериментально-расчетных работах и исключительно вычислительных исследованиях часто рассматриваются течения газа в каналах с внезапным расширением и внезапным сужением [1–3]. Выбор такой геометрии канала для изучения обусловлен тем, что канал с обратным уступом может быть рассмотрен в качестве сверхзвукового диффузора, воздуховода, камеры сгорания и т.д. В работах [4, 5] описаны расчетно-экспериментальные исследования распределения газодинамических параметров вдоль стенки для тела с осесимметричным каналом с внезапным расширением.

Цель представленного экспериментального исследования – выявление взаимосвязи между геометрией канала и течением, которое в нем реализуется. Объектом исследования являются сверхзвуковое течение газа в канале плоской формы и его структура. Предмет исследования – распределение давления и температуры в пристеночной зоне модели потока воздуха при его движении в плоском канале.

Экспериментальное исследование статического давления

Эксперименты проводились с использованием сверхзвуковой аэродинамической установки кратковременного действия Томского государственного университета [6]. Использование съемных сопел позволяет получить сверхзвуковой поток с числами Маха $M_\infty = 2 \div 7$. Время работы аэродинамической установки 3 с. Режим квазистационарного обтекания модели наблюдается $\sim 1.5\text{--}2$ с.

Модель состоит из двух стальных жестко закрепленных параллельно друг другу пластин так, что между ними формируется канал плоской формы. В вертикальном сечении проточный канал выбранного тела имеет ту же форму, что и осесимметричный канал в работе [4]. На рис. 1. показаны общий вид модели с каналом плоской формы (а) и геометрия проточного канала с расширением уступами 2.5 мм (b). Ширина данной модели составляет 150 мм, высота проточного канала на входе – 15 мм, на выходе – 20 мм.

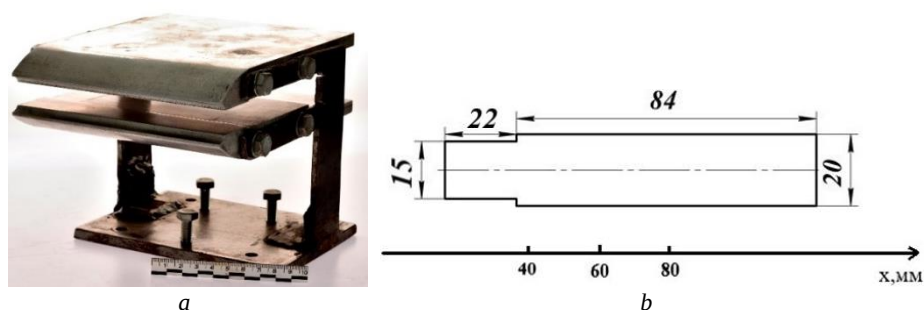


Рис. 1. Модель с внутренним каналом плоской формы:

а – общий вид модели, b – геометрия плоского канала с расширением уступами 2.5 мм

Fig. 1. Model with a flat internal channel:

(a) design of the model and (b) geometry of a backward-facing step with a height of 2.5 mm

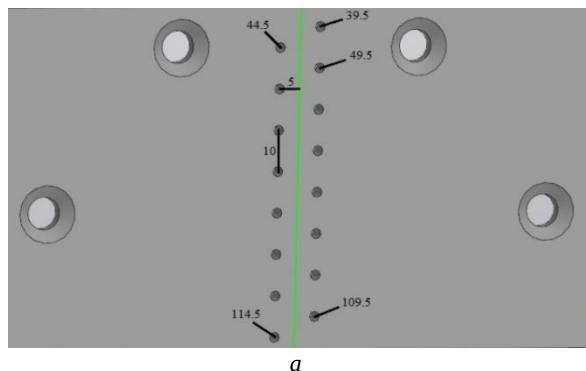


Рис. 2. Нижняя половина модели с точками регистрации параметров:

а – схема расположения точек регистрации, b – общий вид нижней поверхности канала с установленной панелью измерения

Fig. 2. Bottom half of the model with parameter recording points:

(a) scheme of the location of registration points and (b) design of the lower surface of the channel with an installed pressure measurement panel

Если проводится серия дренажных экспериментов, то на нижней пластине предусмотрено крепление панели, на которой смонтированы дренажные трубки. Принцип работы такого зондирующего устройства для регистрации давления вдоль стенки канала базируется на методике классических дренажных испытаний в аэродинамических трубках [7]. Внутренний диаметр трубок равен 1 мм. Они

соединены с датчиками абсолютного давления типа ТДМ2-А. Полученные с датчиков сигналы записываются через аналого-цифровой преобразователь ЛА-2USB на компьютер. Всего на панели предусмотрено 16 точек для измерений. Центры точек регистрации давлений удалены от переднего торца модели на расстояния от $x_1 = 39.5$ мм до $x_{16} = 114.5$ мм. На рис. 2. приведены схема расположения дренажных отверстий (а) и фотография нижней половины модели (b). Все центры удалены от вертикальной плоскости симметрии модели на 5 мм так, что справа и слева от этой плоскости находится по 8 точек регистрации. Расстояние между центрами, находящимися справа от плоскости симметрии (слева тоже), равно 10 мм.

В экспериментах модель устанавливалась в рабочую часть аэродинамической установки. Обдувалась она внешним потоком воздуха при числах Маха $M_\infty = 5$ и $M_\infty = 6$. Для регистрации каждого параметра проводилось по 3 эксперимента. Среднеквадратичное отклонение для измеряемых давлений во всех 16 точках не превысило 3%. На рис. 3. показаны характерные зависимости статического давления от времени после сглаживания быстрым преобразованием Фурье [8] для двух точек регистрации. Видна повторяемость результатов измерения давления в точке $x_4 = 54.5$ мм при обдувке модели потоком воздуха при $M_\infty = 6$ (а) и в точке $x_{15} = 109.5$ мм при обдувке модели потоком воздуха при $M_\infty = 5$ (b). Усредненные данные давлений вычислялись на отрезке времени от 1 до 1.5 с.

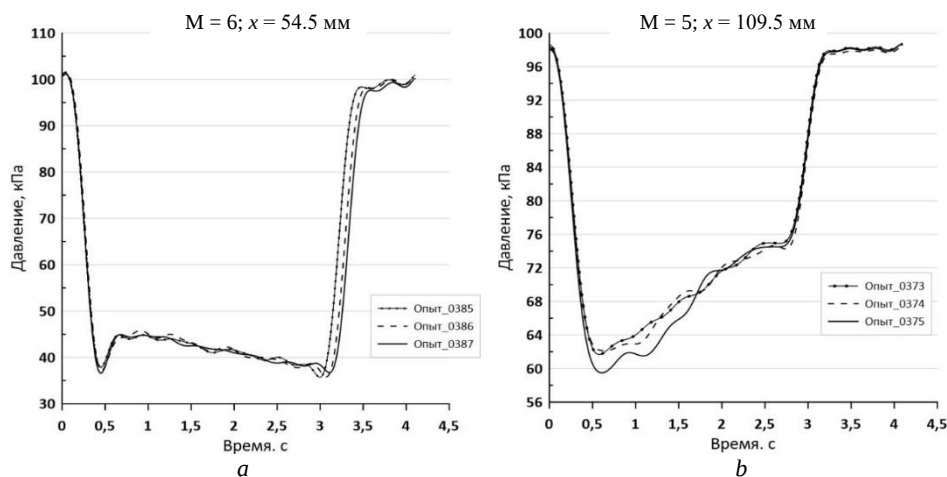


Рис. 3. Зависимости давления от времени для трех опытов в точке $x_4 = 54.5$ мм при $M_\infty = 6$ (а) и $x_{15} = 109.5$ мм при $M_\infty = 5$ (b)

Fig. 3. Time dependence of pressure for three tests at point (a) $x_4 = 54.5$ mm with $M_\infty = 6$ and (b) $x_{15} = 109.5$ mm with $M_\infty = 5$

В ходе аэродинамических испытаний с помощью шлирен-прибора [9] проводилась видеорегистрация. На рис. 4 представлены фрагменты видеоряда установившегося течения газа в канале плоской формы при обтекании тела сверхзвуковым потоком воздуха при $M_\infty = 5$ (а) и $M_\infty = 6$ (b). Оба снимка соответствуют ~ 1.2 с опытов.

Предварительно были проведены опыты по измерению числа Маха на оси канала за уступом с помощью трубки Пито–Прандля [10]. Скорость движения воз-

духа на оси проточного канала соответствует числу $M = 1.87$ при внешнем обтекании модели потоком с $M_\infty = 5$. При обтекании модели потоком $M_\infty = 6$ измеренное значение скорости воздуха на оси проточного канала получено $M = 2.05$. Сверхзвуковое течение в канале обеспечивается наличием на его входе сопла. На рис. 4 видно образование скачков уплотнения при прохождении потоком зоны внезапного расширения. Угол, образованный скачками с верхнего и нижнего уступов, на рис. 4, а (~ 40.40) больше угла на рис. 4, б (~ 34.60), а точка их пересечения смещена по потоку на ~ 5 мм.

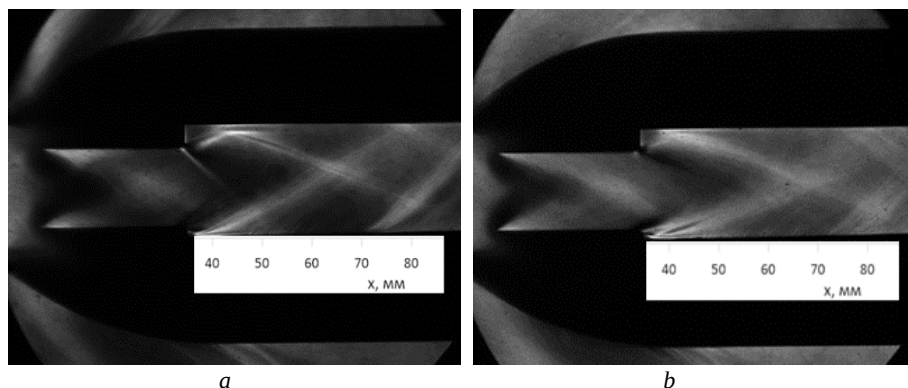


Рис. 4. Фрагменты видеоряда течения газа в канале при $M_\infty = 5$ (а) и $M_\infty = 6$ (б)
Fig. 4. Fragments of a video sequence with gas flowing through the channel at $M_\infty =$ (а) 5 and (б) 6

На рис. 5. представлены графики полученных усредненных значений давления для модели с проточным каналом плоской формы для $M_\infty = 5$ (а) и $M_\infty = 6$ (б). Для сравнения здесь же приведены данные, полученные для канала осесимметричной формы [5].

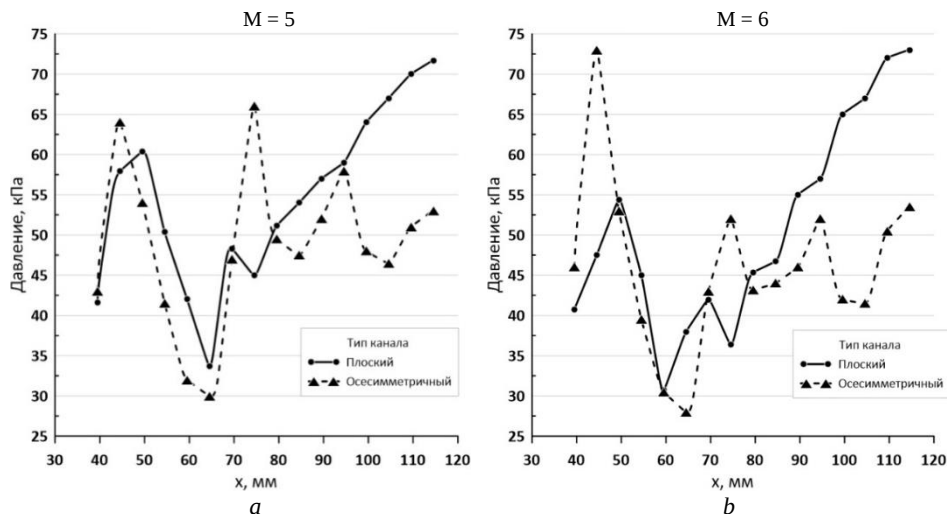


Рис. 5. Распределение давлений для двух типов каналов при $M_\infty = 5$ (а) и $M_\infty = 6$ (б)
Fig. 5. Pressure distributions for two types of channels at $M_\infty =$ (а) 5 and (б) 6

Графики показывают согласование закономерностей изменения давления для обоих видов каналов за уступами до $x_7 = 69.5$ мм. Сначала наблюдается максимум за уступами канала, затем регистрируется характерный минимум. Поведение графиков после указанных точек сильно отличается.

В осесимметричном канале чередование максимумов с минимальными значениями объясняется наличием зон рециркуляции потока в пристеночной области [2, 3]. Для модели с каналом плоской формы зона рециркуляции [11] образуется только за входным уступом. Это может быть объяснено тем, что воздушный поток, вышедший из осесимметричного сопла аэродинамической установки, попадая в осесимметричный канал модели, практически имеет только продольную составляющую скорости. В случае попадания в канал плоской формы воздушный поток приобретает достаточно большую поперечную составляющую скорости. При этом продольная составляющая скорости потока уменьшается, что приводит к увеличению статического давления. Интенсивность отраженных скачков уплотнения в проточном тракте плоской формы резко ослабевает, поэтому повторных зон рециркуляции не наблюдается.

Экспериментальное измерение температуры в пристеночной зоне канала

Для получения распределения статических температур вдоль стенки проточного тракта [12] использовалось зондирующее устройство, схема расположения точек регистрации которого приведена на рис. 2. В качестве датчиков температуры применялись медь–константановые термопары, соединенные с медным диском диаметром 3 мм и толщиной 0.2 мм. Диаметры проводов термопар равны 0.3 мм. Медные диски монтировались в плоскости зондирующего устройства. Для всех точек регистрации проводилась по три раза.

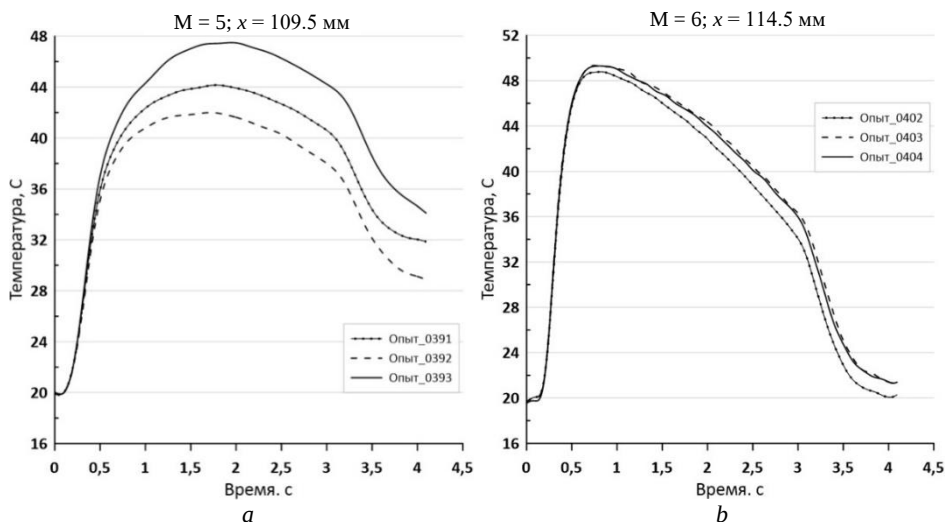


Рис. 6. Примеры сигналов датчиков температуры, полученных в точке $x_{15} = 109.5$ мм при $M_\infty = 5$ (a), в точке $x_{16} = 114.5$ мм при $M_\infty = 6$ (b)

Fig. 6. Examples of temperature sensor signals received at point (a) $x_{15} = 109.5$ mm with $M_\infty = 5$ and (b) $x_{16} = 114.5$ mm with $M_\infty = 6$

На рис. 6. приведены характерные сигналы датчиков температуры, полученные в точках $x_{15} = 109.5$ мм при $M_{\infty} = 5$ (a) и $x_{16} = 114.5$ мм при $M_{\infty} = 6$ (b) после быстрого преобразования Фурье. Неопределенность измерений температур в рамках серии экспериментов во всех 16 точках не превысила 8%.

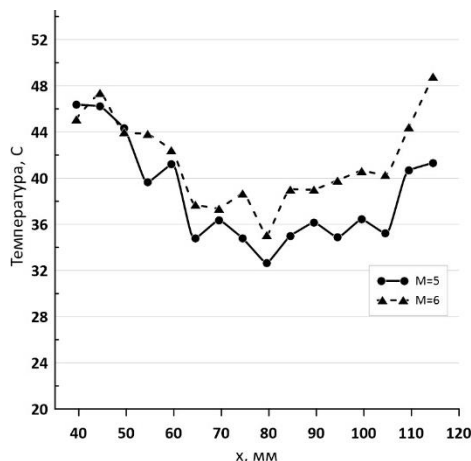


Рис. 7. Распределение усредненных температур при $M_{\infty} = 5$ и $M_{\infty} = 6$

Fig. 7. Average temperature distribution at $M_{\infty} = 5$ and $M_{\infty} = 6$

Распределение усредненных значений температуры потока воздуха в пристеночной зоне модели в проточном тракте плоской формы, полученное экспериментально, представлено на рис. 7. Характер изменения температур в обоих случаях одинаковый: снижение на 10° до $x_9 = 79,5$ мм, что связано с заметным расширением потока после уступов. Далее следует ее возрастание из-за торможения потока. Ранее для осесимметричной модели также зафиксировано аналогичное распределение температуры [4]. Диапазон температур был выше на 20° . Это может быть объяснено тем, что зондирующее устройство для осесимметричного канала было выполнено из теплоизоляционного материала (капролона), тогда как панель с термодатчиками для плоского канала изготовлена из дюралюминия. Кроме того, верхняя часть модели с плоским каналом (сталь) также забирала тепловую энергию потока. Следует отметить, что возрастание температуры и давления зарегистрировано в близких по величине координатах x .

Заключение

В работе описано экспериментальное исследование сверхзвукового течения газа, которое формируется в плоском канале с внезапным расширением. Приведено описание модели с плоским проточным трактом для регистрации статического давления и пристеночной температуры при ее продувке в аэродинамической трубе кратковременного действия при скоростях, соответствующих числам $M_{\infty} = 5$ и $M_{\infty} = 6$.

Проведено сравнение полученных данных с результатами дренажных испытаний при аэродинамических продувках модели с каналом осесимметричной формы. Положение и протяженность зон рециркуляции в осесимметричном канале с вне-

запным расширением оказывает влияние на структуру течения и распределение давления в потоке воздуха. Для модели с проточным трактом плоской формы зона рециркуляции образуется только за входным уступом. Отсутствие остальных зон рециркуляции объяснено тем, что воздушный поток в канале плоской формы приобретает достаточно большую поперечную составляющую скорости. При этом продольная составляющая скорости потока уменьшается, что приводит к увеличению статического давления. Интенсивность отраженных скачков уплотнения в проточном тракте плоской формы резко ослабевает, поэтому повторных зон рециркуляции не наблюдается.

Полученные распределения температуры в пристеночной зоне модели потока воздуха при его торможении в проточном тракте плоской формы при $M_\infty = 5$ и $M_\infty = 6$ имеют некоторый минимум при $x_9 = 79.5$ мм, связанный с заметным расширением потока после уступов. Далее температура возрастает, что является следствием значительного торможения потока.

Список источников

1. Гурyleва Н.В. и др. Исследование особенностей течений в каналах при взаимодействии возмущений с псевдоскачком // Ученые записки ЦАГИ. 2012. Т. 43, № 6. С. 40–54.
2. Булат П.В., Засухин О.Н., Усков В.Н. О классификации режимов течения в канале с внезапным расширением // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 2. С. 209–222.
3. Липанов А.М., Карсканов С.А. Применение схем высокого порядка аппроксимации при моделировании процессов торможения сверхзвуковых течений в прямоугольных каналах // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6, № 3. С. 292–299.
4. Скибина Н.П. Исследование нестационарных термогазодинамических процессов в проточном канале при сверхзвуковом обтекании модельного тела : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.05. Томск, 2022. 165 с.
5. Скибина Н.П. и др. Экспериментально-теоретическое исследование распределения давления вдоль стенки при движении сверхзвукового потока газа в осесимметричном канале с внезапным расширением // Теплофизика и аэромеханика. 2022. Т. 29, № 1. С. 1–5.
6. Звезгинцев В.И. Газодинамические установки кратковременного действия. Новосибирск : Параллель, 2014. Ч. I: Установки для научных исследований. 551 с.
7. Краснов Н.Ф. и др. Прикладная аэродинамика. М. : Высш. школа, 1974. 732 с.
8. Исакова О.П., Тарасевич Ю.Ю., Юзюк Ю.И. Обработка и визуализация данных физического эксперимента с помощью пакета Origin. Астрахань : АИПКП, 2007. 68 с.
9. Горлин С.М., Слезингер И.И. Аэромеханические измерения (методы и приборы). М. : Наука, 1964. 720 с.
10. Maslov E.A., Faraponov V.V., Arkhipov V.A., Zharova I.K., Kozlov E.A., Savkina N.V. Investigation of working processes in a flowing channel of ramjet engine // Thermal Science. 2019. V. 23, № 2. P. S531–S536.
11. Носатов В.В., Семенёв П.А. Расчетно-экспериментальное исследование сверхзвукового турбулентного отрывного течения и локальной теплоотдачи в плоском канале с внезапным расширением // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 1 (52). С. 551–566.
12. Петунин А.Н. Методы и техника измерения параметров газового потока. М. : Машиностроение, 1972. 332 с.

References

1. Guryleva N.V., Ivankin M.A., Lapinskiy D.A., Timoshenko V.I. (2012) Issledovanie osobennostey techeniy v kanalakakh pri vzaimodeystvii vozmushcheniy s psevdoskachkom [Investiga-

- tion of the features of flows in channels during the interaction of disturbances with a pseudo-shock]. *Uchenye zapiski TsAGI – TsAGI Science Journal*. 43(6). pp. 40–54.
2. Bulat P.V., Zasikhin O.N., Uskov V.N. (2015) O klassifikatsii rezhimov techeniya v kanale s vnezapnym rasshireniem [On classification of flow regimes in a channel with sudden expansion]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 19(2). pp. 209–222.
 3. Lipanov A.M., Karskanov S.A. (2013) Primenenie skhem vysokogo poriyadka approksimatsii pri modelirovanii protsessov tormozheniya sverkhzvukovykh techeniy v pryamougol'nykh kanalakh [Application of high-order schemes for modeling the process of braking of supersonic flows in rectangular channels]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*. 6(3). pp. 292–299. doi: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.33
 4. Skibina N.P. (2022) *Issledovanie nestatsionarnykh termogazodinamicheskikh protsessov v protochnom kanale pri sverkhzvukovom obtekanii model'nogo tela* [Investigation of unsteady thermal gasdynamic processes in a flowing channel at supersonic streamline of the model]. Dissertation. Tomsk: Tomsk State University.
 5. Skibina N.P., Tyrtshyny S.A., Faraponov V.V. (2022) Eksperimental'no-teoreticheskoe issledovanie raspredeleniya davleniya vdol' stenki pri dvizhenii sverkhzvukovogo potoka gaza v osesimmetrichnom kanale s vnezapnym rasshireniem [Experimental and theoretical study of pressure distribution along the wall during supersonic gas flow in an axisymmetric channel with sudden expansion]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 29(1). pp. 1–5.
 6. Zvegintsev V.I. (2014) *Gazodinamicheskie ustanovki kratkovremennogo deystviya. Chast' I. Ustanovki dlya nauchnykh issledovaniy* [Gas-dynamic short-term installations. Part I. Facilities for scientific research]. Novosibirsk: Parallel'.
 7. Krasnov N.F. (1964) *Prikladnaya aerodinamika* [Applied aerodynamics]. Moscow: Vysshaya shkola.
 8. Isakova O.P., Tarasevich Yu.Yu., Yuzyul Yu.I. (2007). *Obrabotka i vizualizatsiya dannykh fizicheskogo eksperimenta s pomoshch'yu paketa Origin* [Processing and visualization of data from a physical experiment using Origin]. Astrakhan: Southern Federal University.
 9. Gorlin S.M., Slezinger I.I. (1963) *Aeromekhanicheskie izmereniya (metody i pribory)* [Aeromechanical measurements (methods and devices)]. Moscow: Nauka.
 10. Maslov E., Faraponov V., Arkhipov V., Zharova I., Kozlov E., Savkina N. (2019) Investigation of working processes in a flowing channel of ramjet engine. *Thermal Science*. 23(2). pp. 531–536. doi: 10.2298/TSCI19S2531M
 11. Nosatov V.V., Semenev P.A. (2014) Raschetno-eksperimental'noe issledovanie sverkhzvukovogo turbulentnogo otryvnogo techeniya i lokal'noy teplotdachi v ploskom kanale s vnezapnym rasshireniem [Computational and experimental study of the supersonic turbulent detached flow and local heat emission in a flat duct with a sudden expansion]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya «Estestvennye nauki» – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 1(52). pp. 66–77.
 12. Petunin A.N. (1972) *Metody i tekhnika izmereniya parametrov gazovogo potoka* [Methods and techniques of measuring gas flow parameters]. Moscow: Mashinostroenie.

Сведения об авторах:

Груздев Алексей Сергеевич – магистрант кафедры динамики полета физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: afl-975@yandex.ru

Крайнов Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

Фарапонов Валерий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры динамики полета физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: fff@ftf.tsu.ru

Information about the authors:

Gruzdev Aleksey S. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: afl-975@yandex.ru

Krainov Aleksey Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

Faraponov Valeriy V. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: fff@ftf.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 08.05.2024; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 08.05.2024; accepted for publication 03.10.2024

Научная статья

УДК 620.173.2; 519.25

doi: 10.17223/19988621/91/8

Новый метод поиска прямолинейного участка на экспериментальной диаграмме напряжение–деформация

Алексей Валерьевич Лихачев¹, Марина Владимировна Табанюхова²

¹ *Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН,
Новосибирск, Россия,*

² *Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,
Новосибирск, Россия*

¹ *ipm1@iae.nsk.su*

² *m.tabanyukhova@sibstrin.ru*

Аннотация. Предложен новый метод поиска прямолинейного участка на начальной части диаграммы напряжение–деформация, основанный на проверке статистической гипотезы по критерию Пирсона. С использованием этого метода по пяти диаграммам сжатия образцов из полиэтилентерефталат-гликоля (PETG) был найден модуль Юнга данного пластика. Он оказался равным 2.044×10^9 Па, что согласуется с результатами, полученными в работе J.M. Mercado-Colmenero и соавт., где механические свойства PETG исследовались при аналогичных условиях.

Ключевые слова: проверка статистических гипотез, критерий Пирсона, диаграмма напряжение–деформация, модуль Юнга

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 121022000116-0).

Для цитирования: Лихачев А.В., Табанюхова М.В. Новый метод поиска прямолинейного участка на экспериментальной диаграмме напряжение–деформация // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 85–98. doi: 10.17223/19988621/91/8

Original article

A new method for searching rectilinear section in an experimental stress–strain diagram

Aleksey V. Likhachev¹, Marina V. Tabanyukhova²

¹ *Institute of Automation and Electrometry of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

² *Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin),
Novosibirsk, Russian Federation*

¹ *ipm1@iae.nsk.su*² *m.tabanyukhova@sibstrin.ru*

Abstract. Polyethylene terephthalate glycol (PETG) is characterized by a double refraction effect which is used when modeling the stress states of building structures. This paper aims to study the mechanical properties of PETG due to the need for practical approval of the modeling results.

Experiments show that, for most plastics, the initial region of the stress–strain diagram significantly deviates from a straight line. However, an extended interval can be distinguished in this region, where the diagram is well approximated by a linear function. If the deviations of the diagram from the straight line are random, it is possible to test the statistical hypothesis of their correspondence. Only diagrams with valid hypothesis are applied in this study.

Twelve PETG samples have been tested using the fused deposition modeling (FDM) method. For the five diagrams, the hypothesis of the presence of the linear region in interval $\varepsilon \in [0.0075; 0.0275]$ is confirmed at a deviation significance level of 1%. The Young's modulus determined using the diagrams is $2.044 \pm_{0.027}^{0.047} \times 10^9$ Pa. This value falls within interval $2.01 \times 10^9 \div 2.11 \times 10^9$ Pa presented on Wikipedia. The obtained yield strength is 49.71 ± 1.81 MPa, which is consistent with the results reported in the literature and reference data.

Keywords: statistical hypothesis testing, Pearson criterion, stress–strain diagram, Young modulus

Acknowledgments: This work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 121022000116-0).

For citation: Likhachev, A.V., Tabanyukhova, M.V. (2024) A new method for searching rectilinear section in an experimental stress–strain diagram. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 85–98. doi: 10.17223/19988621/91/8

Введение

В настоящее время пластики являются перспективными материалами для многих приложений, что объясняется широким разнообразием их свойств. В предлагаемой работе рассматривается полиэтилентерефталат-гликоль (PETG). Его использование в качестве материала для изготовления предметов повседневного быта (контейнеры для пищевых продуктов, емкости для жидкостей и т.п.) хорошо известно. Он также применяется в медицине для производства одноразовых шприцев и других расходных средств [1, 2]. Развитие методов 3D-печати [3–5] открыло новые возможности для применения PETG. В частности, по этой технологии теперь производятся имплантаты, а также фантомы для рентгеновской и магниторезонансной томографии [6, 7]. Изготовление изделий из PETG для различных отраслей промышленности и науки описано в работах [8, 9].

Интерес к PETG вызван не только его использованием в качестве материала для разнообразных промышленных изделий. Наряду с некоторыми другими веществами он обладает эффектом изменения оптических свойств в зависимости от внутренних напряжений, на котором основан метод фотоупругости [10, 11], нашедший применение в научных исследованиях, технологических процессах, а также в медицине. В частности, в офтальмологии с его помощью исследуется роговица

глаза [12]. В стоматологии посредством фотоупругого анализа оценивается распределение напряжений в зубных протезах [13, 14], а в сосудистой хирургии – напряжения в моделях кровеносной сети сосудов [15, 16]. Метод фотоупругости является эффективным средством изучения напряженных состояний деталей и узлов машин и механизмов [17–19], а в работе [20] он использовался для оценивания напряжений в массивах горных пород. В строительстве также представлены подобные исследования – как для моделей из пьезооптических материалов [21–24], так и для участков натуральных конструкций, на которые наносился слой фотоупругого покрытия [25, 26].

Данные для метода фотоупругости получают посредством расшифровки снятых соответствующим образом интерференционных картин. Для этого используется специальное оборудование, описанное, например, в [27]. На нем проводились эксперименты с образцами, изготовленными из PETG, результаты математической обработки которых представлены в [27–29]. В частности, в работах [28, 29] рассматриваются методы определения координат точек, трассирующих серединную линию интерференционной полосы.

Настоящее исследование посвящено изучению механических свойств PETG. Оно обусловлено необходимостью переносить результаты, полученные для изготовленных из него моделей, на реальные конструкции. Ставится задача получить из экспериментальной диаграммы напряжение–деформация, регистрируемой при одномерном сжатии образца, оценку значения модуля Юнга (ниже обозначается как E), а также диапазон напряжений, в котором материал работает в линейном режиме, т.е. для него выполняется закон Гука $\sigma = \varepsilon E$, где σ – нормальное напряжение, ε – относительное изменение длины образца. Подобные работы уже проводились ранее зарубежными исследователями. Смеси PETG с другими полимерами изучались в [30, 31]. В [32, 33] рассматривалась деформация образцов, изготовленных из PETG, в частности в [33] оценивались механические параметры с учетом анизотропии, вызванной особенностями технологии 3D-печати.

Отличие предлагаемого здесь метода состоит в способе выбора начального участка диаграммы, соответствующего работе материала в линейно-упругом режиме. Метод основывается на проверке соответствующей статистической гипотезы по критерию Пирсона. Он позволяет более точно найти границы участка, а также количественно оценить его близость к графику линейной функции. Это, в свою очередь, позволяет уменьшить случайную ошибку, не прибегая к усреднению по большому количеству диаграмм, как это было сделано, например, в упомянутой работе [33]. Возможность избежать такого усреднения является важным преимуществом, поскольку оно может привести к потере важной информации.

Заметим, что разработанный метод можно применять также и для анализа нелинейных участков диаграммы напряжение–деформация. При этом диаграмму на соответствующем интервале следует аппроксимировать подходящей функцией и выполнить операции, описанные в следующем разделе. При этом будет получено согласованное с данными аналитическое выражение для зависимости $\sigma(\varepsilon)$. Его наличие очень важно при исследовании механических свойств материалов, работающих в нелинейном режиме. В частности, по нему можно вычислять касательный и секущий модули, являющиеся аналогом модуля Юнга в нелинейном случае.

Предлагаемый метод

Экспериментальные исследования показывают, что диаграммы напряжение–деформация для большинства пластиков имеют широкую площадку текучести, а участок от нуля до ее начала может существенно отклоняться от прямой. Однако на нем можно выделить достаточно протяженный интервал, где диаграмма хорошо аппроксимируется линейной функцией $\sigma = a\varepsilon + b$. Первым этапом разработанного метода является визуальное определение такого участка, единого для всех имеющихся диаграмм. Обозначим его левую и правую границы через ε_0 и ε_n соответственно. Будем считать, что отклонения диаграмм от прямой на отрезке $[\varepsilon_0, \varepsilon_n]$ являются случайными величинами, имеющими одинаковое распределение. Для каждой диаграммы в отдельности проведем процедуру, аналогичную известной в математической статистике процедуре проверки соответствия данных гипотетическому распределению по критерию Пирсона [34]. Разобьем интервал $[\varepsilon_0, \varepsilon_n]$ на n одинаковых отрезков длины $l = (\varepsilon_n - \varepsilon_0)/n$. Их концы будут находиться в точках $\varepsilon_k = \varepsilon_0 + kl$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Обозначим отрезки $[\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, через Δ_k соответственно. Диаграммы регистрировались в моменты времени, разделенные одинаковыми промежутками. При этом число отсчетов, приходящееся на разные отрезки Δ_k , было различным (см. описание эксперимента в следующем разделе). Обозначим через m_k число отсчетов, попавших в отрезок Δ_k , для рассматриваемой диаграммы. (В случае если отсчет совпадает с границей считается, что он принадлежит левому интервалу.) Будем полагать, что отсчеты производятся достаточно часто, так что в каждый отрезок Δ_k , их попадает не менее двух. Вычислим критерий близости между прямой $a\varepsilon + b$ и диаграммой на участке $[\varepsilon_0, \varepsilon_n]$ по следующей формуле:

$$Z = M \sum_{k=1}^n \frac{(I_k - S_k)^2}{I_k}. \quad (1)$$

Здесь M – полное число отсчетов, попавших в интервал $[\varepsilon_0, \varepsilon_n]$, т.е. сумма всех m_k ; I_k – интеграл от функции $a\varepsilon + b$ на отрезке Δ_k :

$$I_k = \int_{\varepsilon_k}^{\varepsilon_{k+1}} (a\varepsilon + b) d\varepsilon = \frac{a}{2} (\varepsilon_{k+1}^2 - \varepsilon_k^2) + b(\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k). \quad (2)$$

В работе параметры a и b , определяющие прямолинейный участок, вычислялись для каждой диаграммы по всем M точкам, попавшим в интервал $[\varepsilon_0, \varepsilon_n]$, методом наименьших квадратов. Через S_k в (1) обозначена аппроксимация интеграла от диаграммы на отрезке Δ_k конечной суммой:

$$S_k = \frac{1}{m_k - 1} \sum_{i=1}^{m_k} \sigma(\varepsilon_{k,i}). \quad (3)$$

где $\sigma(\varepsilon_{k,i})$ – значение диаграммы в точке $\varepsilon_{k,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots, m_k$. Таким образом, в (3) перебираются все отсчеты, принадлежащие отрезку Δ_k .

В силу того что отклонения диаграммы от прямой на интервале $[\varepsilon_0, \varepsilon_n]$ носят случайный характер, критерий Z , вычисляемый по формуле (1), также является случайной величиной. Известны условия, при выполнении которых он будет иметь распределение χ^2 с $n - 3$ степенями свободы. Зададим малую вероятность p (на практике обычно берется $0.001 \leq p \leq 0.05$). Обозначим через x_p квантиль по-

рядка $1 - p$ распределения $\chi^2(n - 3)$. Тогда вероятность события $Z \geq x_p$ равна p . Таким образом, если вычисленный для данной диаграммы критерий (1) оказался не меньше, чем x_p , то произошло маловероятное событие. Это, в свою очередь, означает, что предположение о том, что прямая $\sigma = a\varepsilon + b$ хорошо аппроксимирует экспериментальную диаграмму на интервале $[\varepsilon_0, \varepsilon_n]$, оказалось неверным и его следует отбросить. Далее для оценки величины модуля Юнга отбираются только те диаграммы, для которых было выполнено условие $Z < x_p$.

Описание эксперимента

Образцы для испытаний, изготовленные из PETG, представляют собой круглые цилиндры высотой $h = 30$ и диаметром $d = 20$ мм. Для их получения использовалась технология 3D-печати (см.: [3–5]). Применялся метод послойного наплавления FDM [35]. Слои при печати располагались перпендикулярно продольной оси образца, соответственно, ортогонально по отношению к линии приложения нагрузки. Печать производилась на 3D-принтере FLSUN QQ при температуре 240°C . Заполнение материалом образца составляло 100%.

Всего было изготовлено 12 цилиндров. Фотография одного из них представлена на рис. 1 слева. Образцы сжимались на широко распространенной в российских высших учебных заведениях установке КСИМ-40 (Комплекс для статических испытаний материалов до 40 кН, английская аббревиатура CSTM-40). Оборудование работало в режиме постоянной скорости перемещения активного захвата, которая составляла 10 мм/мин при диапазоне возможных скоростей от 0.5 до 60 мм/мин. Размеры моделей и скорость нагружения соответствуют ГОСТу 4651–2014 [37]. Регистрировались приложенная сила и перемещение подвижной траверсы, которое равно абсолютной деформации образца. Запись проводилась через равные промежутки времени. Из-за неравномерности истинного движения траверсы расстояния между ее последовательно измеренными позициями оказываются неравными. В проведенном эксперименте их значения принадлежат интервалу от 48 до 91 мкм при средней величине 62 мкм. Деформированный образец показан на рис. 1 справа.

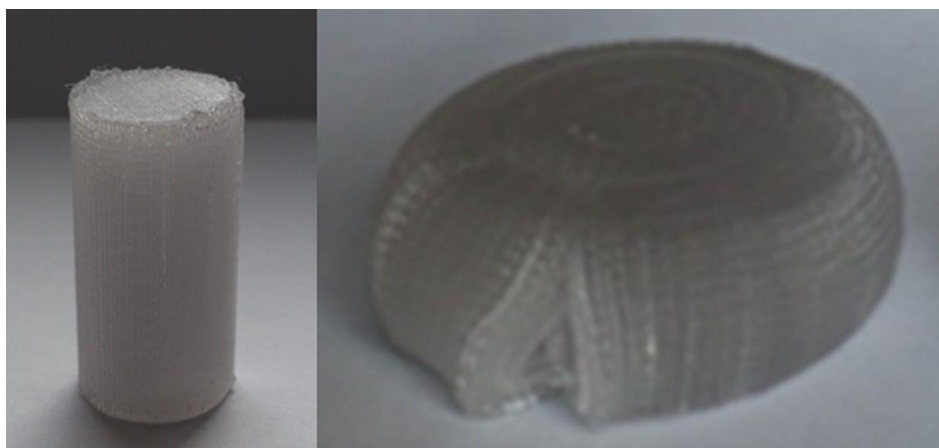


Рис. 1. Один из исследованных образцов до и после испытания
Fig. 1. One of the tested samples before and after testing

Обработка экспериментальных данных

Всего было снято 12 диаграмм, и только для пяти из них была подтверждена гипотеза о том, что они имеют линейный участок при $\varepsilon \in [0.0075, 0.0275]$ для 1%-ного уровня значимости отклонения (т.е. вероятность p равняется 0.01). Их начальные участки показаны на рис. 2: по горизонтальной оси отложена координата δx подвижной траверсы в микрометрах, по вертикальной – прилагаемая сила F в Ньютонах. На рис. 3 эти же диаграммы представлены в координатах относительных деформаций $\varepsilon = \delta x/h$ и расчетных напряжений $\sigma_c = 4F/\pi d^2$, которые выражены в МПа. Приведенные ниже результаты относятся именно к этим диаграммам.

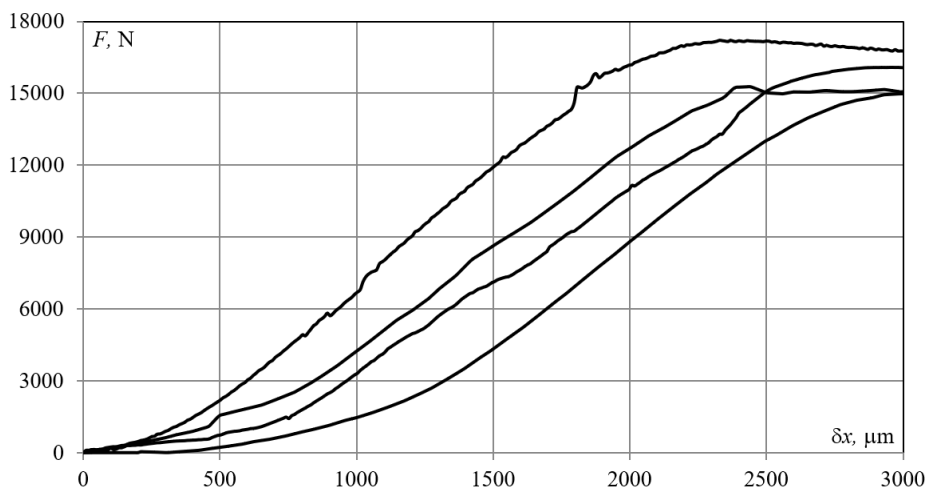


Рис. 2. Диаграммы усилие–абсолютное сжатие

Fig. 2. Force–absolute compression diagrams

На рис. 3 также приведена кривая, полученная путем арифметического усреднения пяти диаграмм:

$$\sigma_{avr}(\varepsilon_i) = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \sigma_{c,j}(\varepsilon_i). \quad (4)$$

Она выделена жирной линией. В (4) через $\sigma_{c,j}(\varepsilon_i)$ обозначено расчетное напряжение для j -й экспериментальной диаграммы при значении относительной деформации ε_i . На рис. 4 представлена часть кривой $\sigma_{avr}(\varepsilon)$ на интервале $[0.0075, 0.0275]$, сплошная линия. Найденная методом наименьших квадратов прямая $L_1(\varepsilon) = 2044\varepsilon - 12.29$, аппроксимирующая $\sigma_{avr}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \in [0.0075, 0.0275]$, показана пунктиром. Если считать, что модуль Юнга материала E численно равен тангенсу угла наклона прямой $L_1(\varepsilon)$, то получается, что $E = 2.044 \times 10^9$ Па. Это значение попадает в интервал, приведенный в [36]: $2.01 \times 10^9 \div 2.11 \times 10^9$ Па. Также оно согласуется с результатами, опубликованными в работе [33]. Таким же образом были получены значения модуля Юнга для каждой из пяти диаграмм в отдельности. Максимальное из них оказалось равным 2.091×10^9 Па, а минимальное – 2.017×10^9 Па. Поэтому точность результата мы оценили как $E = 2.044 \pm_{0.027}^{0.047} \times 10^9$ Па.

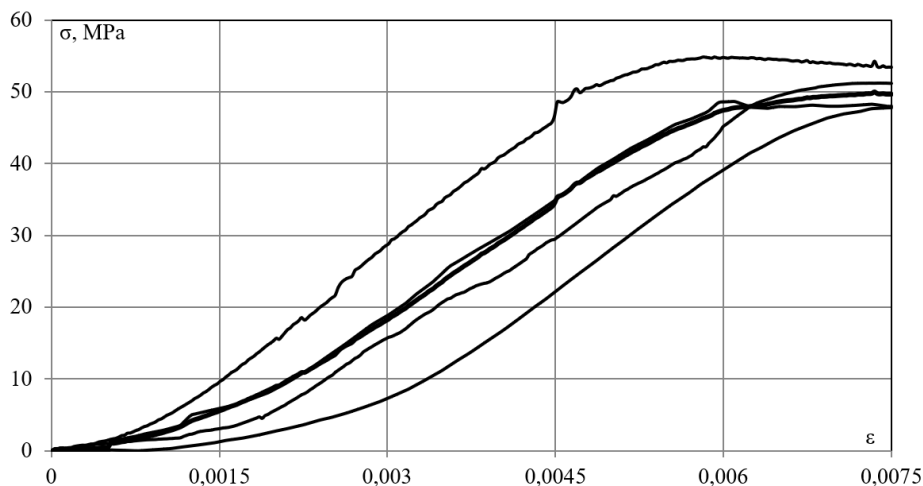


Рис. 3. Диаграммы напряжение–деформация

Fig. 3. Stress–strain diagrams

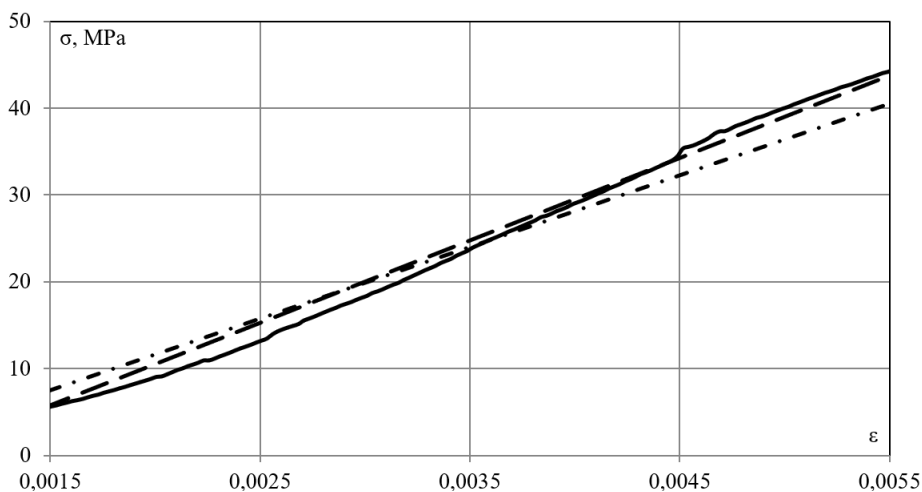


Рис. 4. Различные аппроксимации участка $\varepsilon \in [0,0075, 0,0275]$ усредненной диаграммы

Fig. 4. Various approximations of region $\varepsilon \in [0,0075, 0,0275]$ in the averaged diagram

Как видно из рис. 3, при $\varepsilon > 0,036$ кривая $\sigma_{avr}(\varepsilon)$ становится приблизительно параллельной оси абсцисс. За оценку предела текучести пластика PETG (ниже обозначается как σ_s) была принята величина $\sigma_{avr}(0,0375) = 49,71$ МПа. Это согласуется с данными, приведенными в [36]: от 47,9 до 52,9 МПа. Значения напряжения при $\varepsilon_s = 0,0375$ для других кривых на рис. 3 следующие: $\sigma_{c,1}(\varepsilon_s) = 53,42$ МПа, $\sigma_{c,2}(\varepsilon_s) = 51,17$ МПа, $\sigma_{c,3}(\varepsilon_s) = 49,85$ МПа, $\sigma_{c,4}(\varepsilon_s) = 47,98$ МПа, $\sigma_{c,5}(\varepsilon_s) = 47,72$ МПа. По этим данным вычислялось среднее абсолютное отклонение (MAD – mean absolute derivation) для оценки предела текучести:

$$MAD_{os} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 |\sigma_{avr}(\varepsilon_s) - \sigma_{c,j}(\varepsilon_s)| = 1,81. \quad (5)$$

Отметим, что значения $\sigma_s - MAD_{\sigma_s} = 47.9$ МПа и $\sigma_s + MAD_{\sigma_s} = 51.52$ МПа также укладываются в диапазон, указанный в [36].

Штрихпунктирной линией на рис. 4 показана прямая $L_2(\varepsilon) = 1981\varepsilon - 8.63$, аппроксимирующая усредненную диаграмму $\sigma_{avr}(\varepsilon)$ на участке $[0, \varepsilon_s]$, где она заметно нелинейна. Определенный по ней модуль Юнга равен 1.81×10^9 Па, что несколько меньше нижней границы приведенной в [36] оценки. Модуль Юнга, вычисленный по всем 12 зарегистрированным нами диаграммам на участках $[0.0075, 0.0275]$ и $[0; \varepsilon_s]$ оказался соответственно равным 2.36×10^9 и 1.82×10^9 Па. Обе эти величины отличаются от справочных значений и результатов работы [33]. Кроме того, модуль Юнга был вычислен по диаграммам, приведенным на рис. 2, по ГОСТу 4651–2014. Его величина оказалась равной 1.84×10^9 Па.

Рисунок 3 показывает, что на начальном участке $\varepsilon \in [0, 0.0375]$ диаграмма существенно отклоняется от линейной функции. Чтобы оценить степень близости между двумя кривыми, использовалось нормированное среднеквадратичное отклонение. Для оцифрованных кривых $C_1(\varepsilon_i)$ и $C_2(\varepsilon_i)$ оно вычисляется как

$$\Delta = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (C_1(\varepsilon_i) - C_2(\varepsilon_i))^2}, \quad (6)$$

где N – число узлов на интервале, в котором сравниваются кривые.

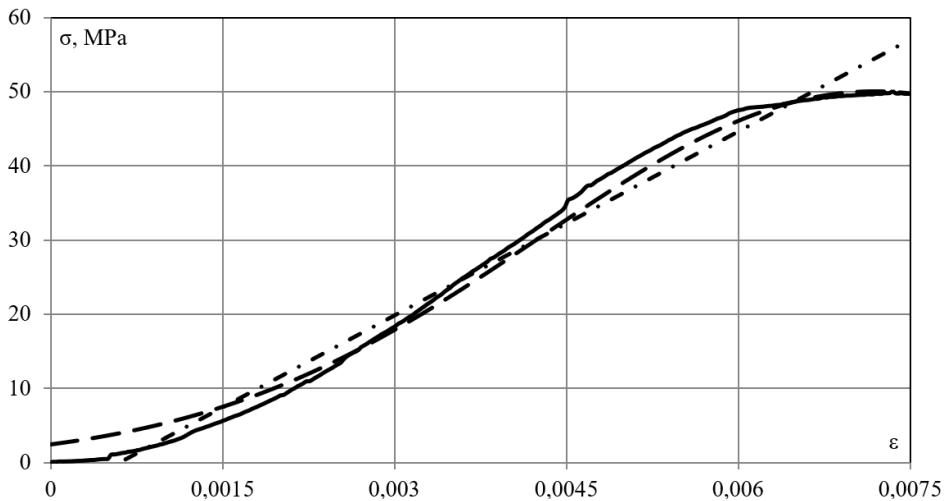


Рис. 5. Различные аппроксимации участка $\varepsilon \in [0, 0.0375]$ усредненной диаграммы

Fig. 5. Various approximations of region $\varepsilon \in [0, 0.0375]$ in the averaged diagram

По результатам численного моделирования оказалось, что гауссова функция значительно лучше, чем прямая, аппроксимирует экспериментальную диаграмму при малых деформациях. На рис. 5 сплошной линией проведена усредненная экспериментальная диаграмма $\sigma_{avr}(\varepsilon)$, штрихами изображен график функции $g(\varepsilon) = 50 \exp(-0.0000118(\varepsilon - 0.00719)^2)$. Ее параметры были найдены путем подбора. Отклонение (6) между $\sigma_{avr}(\varepsilon)$ и $g(\varepsilon)$ составляет 0.0514. Это почти в полтора раза меньше, чем отклонение между $\sigma_{avr}(\varepsilon)$ и $L_1(\varepsilon)$ (штрих-пунктирная линия), которое равно 0.0883.

Заключение

В работе предложен новый метод поиска участка на диаграмме напряжение–деформация, где материал работает в линейно-упругом режиме. В его основе лежит проверка гипотезы о соответствии участка диаграммы отрезку прямой по критерию Пирсона. Такой подход позволяет уменьшить статистическую ошибку по сравнению с обычно применяемой процедурой усреднения, не увеличивая при этом объем регистрируемых данных. На общедоступном оборудовании серийного производства, используемом в лабораториях высших учебных заведений России, были зарегистрированы диаграммы при сжатии 12 образцов, изготовленных из полиэтилентерефталат-гликоля (PETG). Для пяти из них была подтверждена гипотеза о том, что на отрезке $\varepsilon \in [0.0075, 0.0275]$ они соответствуют прямой. Полученное по ним значение модуля Юнга оказалось равным $E = 2.044 \pm_{0.027}^{0.047} \times 10^9$ Па. Это близко к величине 1.84×10^9 Па, которая была вычислена по ГОСТу 4651–2014 по тем же диаграммам. Оба этих значения согласуются со справочными данными, а также не противоречат результатам работ зарубежных авторов, использовавших высококлассное экспериментальное оборудование, на котором были сняты десятки диаграмм.

На всех зарегистрированных нами диаграммах имеется широкая площадка текучести, лежащая в диапазоне относительных деформаций от 0.0372 до 0.192. По ним была получена следующая оценка предела текучести: $\sigma_s = 49.71 \pm 1.81$ МПа, что согласуется со справочными данными [36]. Прилагаемое к образцам усилие изменялось в диапазоне от нуля до 40 000 Н, максимальное расчетное напряжение достигало 1.23×10^9 Па. Однако образцы не были разрушены окончательно, поэтому был сделан вывод, что предел прочности при сжатии PETG превосходит эту величину. Рассматриваемая полностью часть диаграммы до наступления текучести оказалась существенно нелинейной. Наилучшей аппроксимацией для нее оказалась гауссова функция.

Список источников

1. Mraz S.J. Taking advantage of medical plastics // *Machine Design*. 1994. V. 66 (17). P. 42–44.
2. King R.H. Plastics infiltrate medical-device redesign // *Design News*. 1996. V. 51 (1). P. 70–74.
3. Huang T.C., Lin C.Y. From 3D modeling to 3D printing: development of a differentiated spatial ability teaching model // *Telematics and Informatics*. 2017. V. 34 (2). P. 604–613. doi: 10.1016/j.tele.2016.10.005
4. Wang H., Zhang W., Yang J.K.W. Toward near-perfect diffractive optical elements via nanoscale 3D printing // *ACS Nano*. 2020. V. 14 (8). P. 10452–10461. doi: 10.1021/acsnano.0c04313
5. Lee A.Y., Zhou A., An J., Zhang Y., Chua C.K. Contactless reversible 4D-printing for 3D-to-3D shape morphing // *Virtual and Physical Prototyping*. 2020. V. 15 (4). P. 481–495. doi: 10.1080/17452759.2020.1822189
6. Laurikaitiene J., Puiso J., Jaselske E. Investigation of X-ray attenuation properties in 3D printing materials used for development of head and neck phantom // *Recent Advances in Technology Research and Education*. Springer, 2019. P. 137–143. doi: 10.1007/978-3-319-99834-3_18
7. Singh G., Saini A. Application of 3D printing technology in the development of biomedical implants: A review // *Trends in Biomaterials and Artificial Organs*. 2021. V. 35 (1). P. 95–103.
8. Alagoz A.S., Hasirci V. 3D printing of polymeric tissue engineering scaffolds using open-source fused deposition modeling // *Emergent Materials*. 2019. V. 3 (2). P. 429–439. doi: 10.1007/s42247-019-00048-2

9. Drees C., Höving S., Vautz W., Franzke J., Brandt S. 3D-printing of a complete modular ion mobility spectrometer // *Materials Today*. 2021. V. 44 (4). P. 58–68. doi: 10.1016/j.mattod.2020.10.033
10. Fukuda S., Karasaki T., Shiosaki T., Kawabata A. Photoelasticity and acousto-optic diffraction in piezoelectric semiconductors // *Physical Review B: Condensed Matter*. 1979. V. 20 (10). P. 4109–4119.
11. Ainola L., Aben H. Alternative equations of magnetophotoelasticity and approximate solution of the inverse problem // *Journal of the Optical Society of America A: Optics, Image Science, and Vision*. 2002. V. 19 (9). P. 1886–1893. doi: 10.1364/JOSAA.19.001886
12. Кочина М.Л., Демин Ю.А., Каплин И.В., Ковтун Н.М. Модель напряженно-деформированного состояния роговицы глаза // *Восточно-европейский научный журнал*. 2017. № 2-2. С. 62–67.
13. Демидова И.И. Фотоупругость и стоматология // *Российский журнал биомеханики*. 1999. № 2. С. 26–27.
14. Котенко М.В., Раздорский В.В., Лелявин А.Б. Поляризационно-оптический метод в исследовании напряженно-деформированного состояния моделей с дентальными имплантатами из нитинола // *Сибирский медицинский журнал*. 2018. № 8. С. 34–38.
15. Matsushima M., Tercero C., Ikeda S., Fukuda T., Negoro M. Three-dimensional visualization of photoelastic stress analysis for catheter insertion robot // *Proceedings of 23rd IEEE/RSJ 2010 International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2010. Taipei, 2010. P. 879–884. doi: 10.1109/IROS.2010.5650275
16. Matsushima M., Tercero C., Ikeda S., Fukuda T., Arai F., Negoro M., Takahashi I. Photoelastic stress analysis in blood vessel phantoms: three-dimensional visualization and saccular aneurysm with bleb // *International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery*. 2011. V. 7 (1). P. 33–41. doi: 10.1002/rcs.365
17. Паулиш А.Г., Сидоров В.И., Федоринин В.Н., Шатов В.А. Пьезооптический датчик деформации и метод контроля параметров движения подъемных механизмов // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. 2018. № 6. С. 530–538. doi: 10.17586/0021-3454-2018-61-6-530-538.
18. Xi X., Wong G.K.L., Weiss T., Russell P.S.J. Measuring mechanical strain and twist using helical photonic crystal fiber // *Optics Letters*. 2013. V. 38 (24). P. 5401–5404. doi: 10.1364/OL.38.005401
19. Волков И.В. Внестендовая спекл-голография. Использование голографической и спекл-интерферометрии при измерении деформаций натурных конструкций // *Компьютерная оптика*. 2010. № 1. С. 82–89.
20. Feng W., Laishou L., Junhua Z., Chun Y., Yue W. Research on the effect of bedrock upon the stress of a gravity dam bulk by the photoelastic method // *Journal of Materials Processing Technology*. 2002. V. 123 (2). P. 236–240. doi: 10.1016/S0924-0136(01)01185-2
21. Морозова Д.В., Серова Е.А. Исследование влияния конструктивного решения узлов металлических конструкций при вариантном проектировании // *Экология и строительство*. 2015. № 2. С. 4–8.
22. Попова М.В., Шохин П.Б., Глебова Т.О., Шабардина Н.Д. Особенности инженерного расчета деревокомпозитных конструкций // *Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова*. 2018. № 8, С. 36–43. doi: 10.12737/article_5b6d5846d16d19.35588118
23. Zerkal S.M., Kharinova N.V., Tabanyukhova M.V. Investigation of stress state in plane truss nodes // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. XIII International Scientific Conference Architecture and Construction 2020. Bristol : IOP Publishing Ltd., 2020. Art. 012008. doi: 10.1088/1757-899X/953/1/012008
24. Албаут Г.Н., Матус Е.П., Табанюхова М.В. Исследование напряженного состояния дисперсно-армированных балок с привлечением метода фотоупругости // *Деформация и разрушение материалов*. 2009. № 4. С. 46–48.

25. Ахметзянов Ф.Х. Влияние поверхности бетонных и железобетонных элементов на повреждаемость (часть 2) // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2010. № 1. С. 96–101.
26. Маковецкая-Абрамова О.В., Хлопова А.В., Маковецкий В.А. Исследование концентрации напряжений при сварке трубопроводов // Техничко-технологические проблемы сервиса. 2014. № 2. С. 25–27.
27. Aseyev M.A., Tabanyukhov K.A., Tabanyukhova M.V. Search for plastics with piezo optic properties // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. The conference proceedings ICCATS-2020. IOP Publishing Ltd, 2020. Art. 022074. doi: 10.1088/1757-899X/962/2/022074
28. Лихачев А.В., Табанюхова М.В. Оценка расстояния от заданной точки до максимума интерференционной полосы // Автометрия. 2021. Т. 57, № 3. С. 30–38. doi: 10.15372/AUT20210304
29. Лихачев А.В., Табанюхова М.В. Новый алгоритм обработки данных метода фотоупругости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 100–110. doi: 10.17223/19988621/79/9
30. Subramaniam C.K., Kaiser A.B., Gilberd P.W., Liu C.J., Wessling B. Conductivity and thermopower of blends of polyaniline with insulation polymers (PETG and PMMA) // Solid State Communications 1996. V. 97 (3). P. 235–238.
31. Hwang S.H., Jeong K.S., Jung J.C. Thermal and mechanical properties of amorphous copolyester (PETG)/LCP blends // European Polymer Journal. 1999. V. 35 (8). P. 1439–1443.
32. Dupaix R.B., Boyce M.C. Finite strain behavior of poly(ethylene terephthalate) (PET) and poly(ethylene terephthalate)-glycol (PETG) // Polymer. 2005. V. 46 (13). P. 4827–4838. doi: 10.1016/j.polymer.2005.03.083
33. Mercado-Colmenero J.M., Mata-Garcia E., Rodriguez-Santiago M., Martin-Doñate C., Dolores La Rubia M. Experimental and numerical analysis for the mechanical characterization of PETG polymers manufactured with FDM technology under pure uniaxial compression stress states for architectural applications // Polymers. 2020. V. 12 (10). Art. 2202. doi: 10.3390/polym12102202
34. Пузачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М. : Наука, 1979.
35. Wickramasinghe S., Tran P., Do T. FDM-based 3D printing of polymer and associated composite: A review on mechanical properties, defects and treatments. // Polymers. 2020. V. 12 (7). Art. 1529. doi: 10.3390/polym12071529
36. Полиэтилентерефталат-гликоль (ПЭТГ) – пластик // Википедия : свободная энциклопедия. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Полиэтилентерефталат-гликоль \(ПЭТГ\) — пластик](https://ru.wikipedia.org/wiki/Полиэтилентерефталат-гликоль_(ПЭТГ)_—_пластик)
37. ГОСТ 4651–2014. Пластмассы. Метод испытания на сжатие. Изм. 1. Взамен ГОСТ 4651–82; введен 29.05.2014. М. : Стандартиформ, 2014.

References

1. Mraz S.J. (1994) Taking advantage of medical plastics. *Machine Design*. 66(17). pp. 42–44.
2. King R.H. (1996) Plastics infiltrate medical-device redesign. *Design News*. 51(1). pp. 70–74.
3. Huang T.C., Lin C.Y. (2017) From 3D modeling to 3D printing: development of a differentiated spatial ability teaching model. *Telematics and Informatics*. 34(2). pp. 604–613. doi: 10.1016/j.tele.2016.10.005
4. Wang H., Zhang W., Yang J.K.W (2020) Toward near-perfect diffractive optical elements via nanoscale 3D printing. *ACS Nano*. 14(8). pp. 10452–10461. doi: 10.1021/acsnano.0c04313
5. Lee A.Y., Zhou A., An J., Zhang Y., Chua C.K. (2020) Contactless reversible 4D-printing for 3D-to-3D shape morphing. *Virtual and Physical Prototyping*. 15(4). pp. 481–495. doi: 10.1080/17452759.2020.1822189
6. Laurikaitiene J., Puiso J., Jaselske E. (2019) Investigation of X-ray attenuation properties in 3D printing materials used for development of head and neck phantom. *Recent Advances in Technology Research and Education*. pp. 137–143. doi: 10.1007/978-3-319-99834-3_18

7. Singh G., Saini A. (2019) Application of 3D printing technology in the development of bio-medical implants: A review. *Trends in Biomaterials and Artificial Organs*. 35(1). pp. 95–103.
8. Alagoz A.S., Hasirci V. (2020) 3D printing of polymeric tissue engineering scaffolds using open-source fused deposition modeling. *Emergent Materials*. 3(2). pp. 429–439. doi: 10.1007/s42247-019-00048-2
9. Drees C., Höving S., Vautz W., Franzke J., Brandt S. (2021) 3D-printing of a complete modular ion mobility spectrometer. *Materials Today*. 44(4). pp. 58–68. doi: 10.1016/j.mattod.2020.10.033
10. Fukuda S., Karasaki T., Shiosaki T., Kawabata A. (1979) Photoelasticity and acousto-optic diffraction in piezoelectric semiconductors. *Physical Review B: Condensed Matter*. 20(10). pp. 4109–4119.
11. Ainola L., Aben H. (2002) Alternative equations of magnetophotoelasticity and approximate solution of the inverse problem. *Journal of the Optical Society of America A: Optics, Image Science, and Vision*. 19(9). pp. 1886–1893. doi: 10.1364/JOSAA.19.001886
12. Kochina M.L., Demin Yu.A., Kaplin I.V., Kovtun N.M. (2017) Model' napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya rogovitsy glaza [Model of stress-deformed status of the eye cornea]. *Vostochno-evropeyskiy nauchnyy zhurnal – Eastern European Scientific Journal*. 2(2). pp. 62–67.
13. Demidova I.I. (1999) Photoelasticity and dentistry. *Russian Journal of Biomechanics*. 3(2). pp. 9–10.
14. Kotenko M.V., Razdorskiy V.V., Lelyavin A.B. (2018) Polarizatsionno-opticheskiy metod v issledovanii napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya modeley s dental'nymi implantatami iz nitinola [Polarization-optical method in the study of the stress-strain state of models with dental implants made of nitinol]. *Sibirskiy meditsinskiy zhurnal (Irkutsk) – Siberian Medical Journal (Irkutsk)*. 147(8). pp. 34–38.
15. Matsushima M., Tercero C., Ikeda S., Fukuda T., Negoro M. (2010) Three-dimensional visualization of photoelastic stress analysis for catheter insertion robot. *Proceedings of 23rd International Conference on Intelligent Robots and Systems. Taipei, 2010*. pp. 879–884. doi: 10.1109/IROS.2010.5650275
16. Matsushima M., Tercero C., Ikeda S., Fukuda T., Arai F., Negoro M., Takahashi I. (2011) Photoelastic stress analysis in blood vessel phantoms: three-dimensional visualization and saccular aneurysm with bleb. *International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery*. 7(1). pp. 33–41. doi: 10.1002/rcs.365
17. Paulish A.G., Sidorov V.I., Fedorinin V.N., Shatov V.A. (2018) P'ezoopticheskiy datchik deformatsii i metod kontrolya parametrov dvizheniya pod'iomnykh mekhanizmov [Piezo-optical deformation sensor and method for monitoring movement parameters of lifting mechanisms]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 61(6). pp. 530–538. doi: 10.17586/0021-3454-2018-61-6-530-538
18. Xi X., Wong G.K.L., Weiss T., Russell P.S.J. (2013) Measuring mechanical strain and twist using helical photonic crystal fiber. *Optics Letters*. 38(24). pp. 5401–5404. doi: 10.1364/OL.38.005401
19. Volkov I.V. (2010) Vnestendovaya spekl-golografiya. Ispol'zovanie golograficheskoy i spekl-interferometrii pri izmerenii deformatsiy naturnykh konstruksiy [Off-brand speckle holography. The use of holographic and speckle interferometry in measuring deformations of full-scale structures]. *Komp'yuternaya optika – Computer Optics*. 34(1). pp. 82–89.
20. Feng W., Laishou L., Junhua Z., Chun Y., Yue W. (2002) Research on the effect of bedrock upon the stress of a gravity dam bulk by the photoelastic method. *Journal of Materials Processing Technology*. 123(2). pp. 236–240. doi: 10.1016/S0924-0136(01)01185-2
21. Morozova D.V., Serova E.A. (2015) Issledovanie vliyaniya konstruktivnogo resheniya uzlov metallicheskih konstruksiy pri variantnom proektirovanii [Research of influence of constructive solutions to the nodes of metal structures under random design]. *Ekologiya i stroitel'stvo*. 2. pp. 4–8.
22. Popova M.V., Shokhin P.B., Glebova T.O., Shabardina N.D. (2018) Osobennosti inzhernogo raschiota derevokompozitnykh konstruksiy [Features of engineering calculation of

- wood composite structures]. *Vestnik Belgorodskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta im. V.G. Shukhova – Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*. 8. pp. 36–43. doi: 10.12737/article_5b6d5846d16d19.35588118
23. Zerkal S.M., Kharinova N.V., Tabanyukhova M.V. (2020) Investigation of stress state in plane truss nodes. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. XIII International Scientific Conference Architecture and Construction. BRISTOL, 2020*. Article 012008. doi: 10.1088/1757-899X/953/1/012008
 24. Albaut G.N., Matus E.P., Tabanyukhova M.V. (2009) Issledovanie napryazhennogo sostoyaniya dispersno-armirovannykh balok s privlecheniem metoda fotouprugosti [Investigation of the stress state of dispersed-reinforced beams using the photoelasticity method]. *Deformatsiya i razrushenie materialov – Russian Metallurgy (Metally)*. 4. pp. 46–48.
 25. Akhmetzyanov F.Kh. (2010) Vliyanie poverkhnosti betonnykh i zhelezobetonnykh elementov na povrezhdaemost' (chast' 2) [Influence of surface the concretes and reinforced concretes elements on the damage (Part 2)]. *Izvestiya Kazanskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – News of the Kazan State University of Architecture and Engineering*. 1. pp. 96–101.
 26. Makovetskaya-Abramova O.V., Khlopova A.V., Makovetskiy V.A. (2014) Issledovanie kontsentratsii napryazheniy pri svarke truboprovodov [Research of concentration of tensions at welding of pipelines]. *Tekhniko-tekhnologicheskie problemy servisa*. 2. pp. 25–27.
 27. Aseyev M. A., Tabanyukhov K. A., Tabanyukhova M. V. (2020) Search for plastics with piezo optic properties. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. The conference proceedings ICCATS-2020*. Article 022074. doi: 10.1088/1757-899X/962/2/022074
 28. Likhachev A.V., Tabanyukhova M.V. (2021) Assessing the distance from a given point to the maximum of interference band. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 57(3). pp. 250–256. doi: 10.3103/S8756699021030109
 29. Likhachev A.V., Tabanyukhova M.V. (2022) Novyy algoritm obrabotki dannykh metoda fotouprugosti [A new algorithm for processing the data of the photoelasticity method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 100–110. doi: 10.17223/19988621/79/9
 30. Subramaniam C.K., Kaiser A.B., Gilberd P.W., Liu C.J., Wessling B. (1996) Conductivity and thermopower of blends of polyaniline with insulation polymers (PETG and PMMA). *Solid State Communications*. 97(3). pp. 235–238.
 31. Hwang S.H., Jeong K.S., Jung J.C. (1999) Thermal and mechanical properties of amorphous copolyester (PETG)/LCP blends. *European Polymer Journal*. 35(8). pp. 1439–1443.
 32. Dupaix R.B., Boyce M.C. (2005) Finite strain behavior of polyethylene terephthalate (PET) and polyethylene terephthalate-glycol (PETG). *Polymer*. 46(13). pp. 4827–4838. doi: 10.1016/j.polymer.2005.03.083
 33. Mercado-Colmenero J.M., Mata-Garcia E., Rodriguez-Santiago M., Martin-Doñate C., Dolores La Rubia M. (2020) Experimental and numerical analysis for the mechanical characterization of PETG polymers manufactured with FDM technology under pure uniaxial compression stress states for architectural applications. *Polymers*. 12(10). A. Article 2202. doi: 10.3390/polym12102202
 34. Pugachev V.S. (1979) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability theory and mathematical statistics]. Moscow: Nauka.
 35. Wickramasinghe S., Tran P., Do T. (2020) FDM-based 3D printing of polymer and associated composite: A review on mechanical properties, defects and treatments. *Polymers*. 12(7). A. Article 1529. doi: 10.3390/polym12071529
 36. Polyethylene Terephthalate glycol (PETG) – plastic. Internet resource "Wikipedia". URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki>
 37. GOST 4651–2014. Plastmassy. Metod ispytaniy na szhatie [Plastics. Compression test method]. Moscow: Standartinform.

Сведения об авторах:

Лихачев Алексей Валерьевич – доктор технических наук, старший научный сотрудник Института автоматизации и электрометрии Сибирского отделения РАН (Новосибирск, Россия). E-mail: ipm1@iae.nsk.su

Табанюхова Марина Владимировна – кандидат технических наук, доцент, заведующая кафедрой строительной механики Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин) (Новосибирск, Россия). E-mail: m.tabanyukhova@sibstrin.ru

Information about the authors:

Likhachev Aleksey V. (Doctor of Technical Sciences, Institute of Automation and Electrometry of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: ipm1@iae.nsk.su

Tabanyukhova Marina V. (Candidate of Technical Sciences, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: m.tabanyukhova@sibstrin.ru

Статья поступила в редакцию 11.07.2023; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 11.07.2023; accepted for publication 03.10.2024

Научная статья

УДК 532.5.031

doi: 10.17223/19988621/91/9

Образование каверны с неподвижными точками отрыва при вертикальном разгоне плавающего кругового цилиндра

Михаил Викторович Норкин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия, norkinmi@mail.ru

Аннотация. Рассматривается процесс образования присоединенной каверны при вертикальном и отрывном разгоне цилиндра в идеальной, несжимаемой, тяжелой жидкости. Предполагается, что точки пересечения внутренней свободной границы жидкости с поверхностью тела (точки отрыва) остаются неподвижными в течение некоторого небольшого промежутка времени. Изучается возможность представления решения данной задачи в виде асимптотического разложения по целым степеням малого времени, члены которого удовлетворяют условию ограниченности скорости жидкости вблизи точек отрыва.

Ключевые слова: круговой цилиндр, отрывной разгон, присоединенная каверна, неподвижные точки отрыва, малые времена, степенные асимптотики, число Фруда, давление в каверне

Для цитирования: Норкин М.В. Образование каверны с неподвижными точками отрыва при вертикальном разгоне плавающего кругового цилиндра // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 99–112. doi: 10.17223/19988621/91/9

Original article

CAVITY FORMATION WITH FIXED SEPARATION POINTS DURING VERTICAL ACCELERATION OF A FLOATING CIRCULAR CYLINDER

Mikhail V. Norkin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation, norkinmi@mail.ru

Abstract. The plane problem of the initial stage of motion of a circular cylinder under the free surface of an ideal, incompressible, heavy fluid is considered. It is assumed that the cylinder moves from the rest state in the vertical direction with constant acceleration. A feature of this problem is that under certain conditions, liquid particles separate from the surface of the body, and an attached cavity is formed behind the body. This phenomenon occurs when the cylinder moves at a high acceleration rate or when the accelerated motion of the body is accompanied by artificial cavitation. Assuming additionally that the separation points are immobile, the possibility of representing the problem solution

in terms of an asymptotic power series with respect to small time intervals is considered. The desired expansion with the first two terms of the asymptotics exists only at a certain Froude number and pressure in the cavity. These values are chosen such that the Kutta-Zhukovskii condition is exactly fulfilled at the separation points.

Keywords: circular cylinder, separation acceleration, attached cavity, fixed separation points, small times, power asymptotics, Froude number, cavity pressure

For citation: Norkin, M.V. (2024) Cavity formation with fixed separation points during vertical acceleration of a floating circular cylinder. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 99–112. doi: 10.17223/19988621/91/9

Введение

Изучение различных физических ситуаций, возникающих при взаимодействии твердых тел с жидкостью, приводит к необходимости учитывать явление кавитации. В частности, это имеет место при ударе плавающего тела или его разгоне с большими ускорениями [1]. Если задача разгона решается с учетом искусственной кавитации, то ускорение цилиндра не обязательно предполагается большим. В этом случае отрыв происходит под влиянием двух факторов – ускоренного движения тела и искусственной подачи газа в предполагаемую зону отрыва непосредственно перед началом движения. В статье [2] рассматривалось ускоренное и отрывное движение кругового цилиндра в жидкости в горизонтальном направлении. Для определения главного асимптотического приближения на малых временах была предложена модель с односторонними ограничениями, обобщающая классическую модель удара с отрывом на случай конечных ускорений цилиндра. Неравенства, которые формулировались в зонах контакта и отрыва, гарантировали ограниченность первых производных потенциала скорости вблизи точек отрыва (т.е. гарантировали выполнение условия Кутты–Жуковского). В следующем приближении по времени данное физическое условие обеспечивалось за счет специального выбора положения точек отрыва. При этом, строго говоря, условие Кутты–Жуковского выполнялось не точно, а приближенно. Это было связано с необходимостью сгладить корневые особенности у производной соответствующей граничной функции в маленьких окрестностях точек отрыва. Помимо этого, использовалась специальная замена переменных, фиксирующая положение точек отрыва, которая сильно усложняла техническую работу. По этим причинам до конца не ясным оставался вопрос о возможности представления решения задачи разгона кругового цилиндра в жидкости в виде асимптотического разложения по целым степеням малого времени, члены которого строго удовлетворяют сформулированному условию в точках отрыва. Здесь имеются в виду асимптотики, в которых кроме главного приближения учитывается еще по крайней мере один член.

В настоящей статье предлагается исследовать данный вопрос при дополнительном предположении о неподвижности точек отрыва. Поскольку в этом случае нет необходимости делать специальную замену переменных, то техническая работа сильно упрощается. Показывается, что при движении цилиндра в вертикальном направлении искомое разложение, содержащее первые два члена асимп-

тотики, существует только при определенном выборе характерных физических величин – числа Фруда и давления в каверне. Эти величины выбираются таким образом, чтобы точно выполнялось условие ограниченности скорости жидкости в точках отрыва. В общем случае (для любой физической ситуации, без сделанного предположения о неподвижности точек отрыва) структура асимптотики меняется, а точки отрыва движутся. В такой общей ситуации эффективным оказывается метод, предложенный в статье [2]. Заметим также, что при искусственной кавитации (когда давление в каверне порядка атмосферного и выше) условие положительности давления в зоне контакта обычно выполняется.

Проблема построения регулярного асимптотического разложения по целым степеням малого времени при специальном выборе физических параметров возникает также в задаче гидродинамического кавитационного удара. Для кругового цилиндра ее исследование проведено в [3].

Впервые процедура разложения по целым степеням малого времени применялась в задачах генерации волн движущимся в жидкости телом (круговым цилиндром) [4, 5]. В них использовался прямой асимптотический метод, а движение тела предполагалось безотрывным. В статьях [6, 7] такие асимптотики строились на основе интегро-дифференциального уравнения свободной границы. Подобный подход в задачах генерации волн является более обоснованным. Обзор основных результатов по близкой проблеме входа твердого тела в жидкость с учетом явления кавитации дан в [8]. В [9] представлены эксперименты по ударному воздействию жидкости на твердые стенки в условиях кавитации. В [10] исследовались задачи подводного старта ракет кавитационным способом. Многие важные результаты, полученные в области численного и экспериментального моделирования многосвязных течений сплошных сред со свободными границами, отражены в [11–13]. В монографиях [14–15] изложены общие принципы кавитационных течений при взаимодействии жидкости с твердыми телами.

Постановка задачи

Рассматривается плоская задача о вертикальном движении кругового цилиндра в жидкости из состояния покоя с постоянным ускорением. Жидкость является идеальной, несжимаемой, однородной. При определенных физических условиях сразу после начала движения возникает отрыв жидкости от тела, вследствие которого формируется присоединенная каверна. Главным моментом работы является предположение о неподвижности точек отрыва. При таком допущении изучается возможность представления решения данной задачи в виде асимптотического разложения по целым степеням малого времени. Используя подвижные координаты и безразмерные переменные, приходим к следующей связанной нелинейной системе (рис. 1–3):

$$\Delta\Phi = 0, \quad r \in \Omega(t); \quad (1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \alpha t n_y, \quad r \in S_{11}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \alpha t \frac{\partial\Phi}{\partial y} + 0.5(\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}(y + 0.5\alpha t^2 - H) - 0.5\chi = 0, \quad r \in S_{12}(t); \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \alpha t \sin \theta = \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \dot{\theta}(t) + \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad r \in S_{12}(t);$$

$$\dot{\theta}(t) = R^{-2} [x(\Phi_y - \alpha t) - y\Phi_x] = R^{-2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \alpha t R \cos \theta \right];$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \alpha t \frac{\partial \Phi}{\partial y} + 0.5(\nabla \Phi)^2 + Fr^{-2}\xi(x,t) = 0, \quad r \in S_2(t);$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad r \in S_2(t);$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b - 0.5\alpha t^2; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad x = \pm H_R;$$

$$\Phi(x, y, 0) = 0, \quad \xi(x, 0) = 0, \quad \eta(\theta, 0) = 0;$$

$$h(t) = 0.5\alpha t^2.$$

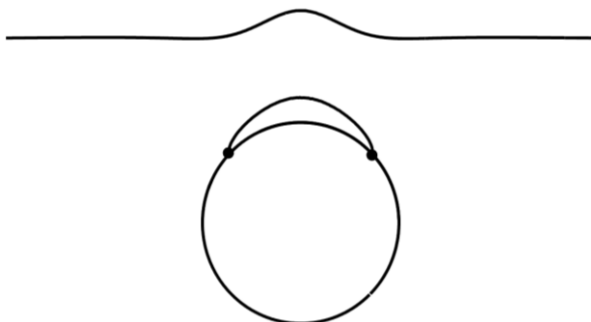


Рис. 1. Форма присоединенной каверны при $t = 0.4$

Fig. 1. The shape of the attached cavity at $t = 0.4$

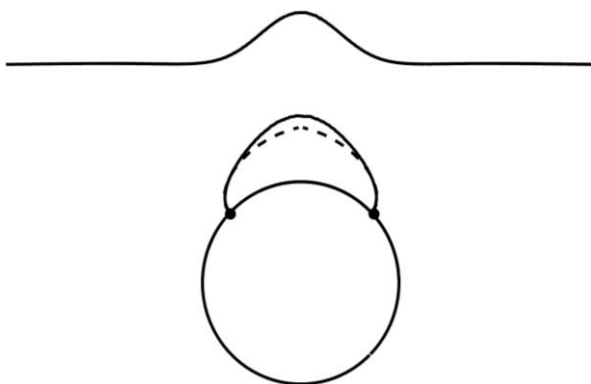


Рис. 2. Форма присоединенной каверны при $t = 0.6$.

Пунктирной линией изображены пограничные решения

Fig. 2. The shape of the attached cavity at $t = 0.6$.

The dotted line indicates the boundary layer solutions

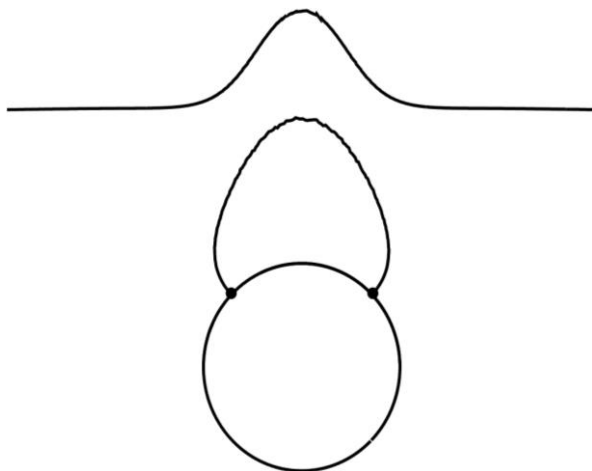


Рис. 3. Форма присоединенной каверны при $t = 0.8$

Fig. 3. The shape of the attached cavity at $t = 0.8$

Задача (1)–(9) содержит следующие характерные параметры:

$$Fr = \sqrt{\frac{|w_0|}{g}}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho |w_0| a}, \quad \alpha = \frac{w_0}{|w_0|},$$

где Fr – число Фруда, связанное с ускорением цилиндра w_0 ; χ – безразмерная разность давлений на внешней свободной поверхности и в каверне; p_a – атмосферное давление; p_c – давление в каверне; g – ускорение свободного падения; ρ – плотность жидкости; a – радиус цилиндра; α – параметр, характеризующий направление движения цилиндра ($\alpha = -1$ соответствует движению вдоль вектора силы тяжести).

Безразмерные переменные вводятся по формулам

$$t' = \sqrt{\frac{a}{|w_0|}} \cdot t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad \Phi' = a\sqrt{|w_0|} a \cdot \Phi, \quad p' = \rho |w_0| ap,$$

где штрихами помечаются размерные величины.

Неподвижные координаты X, Y связаны с подвижными x, y соотношениями $X = x, Y = y + h(t)$, где $h(t)$ – закон движения цилиндра, ось y направлена против вектора силы тяжести, начало координат находится в центре цилиндра. Картина течения жидкости является симметричной относительно оси y .

В статье также используются следующие обозначения: Φ – потенциал скоростей абсолютного движения жидкости, записанный относительно подвижной системы координат; $\Omega(t)$ – область течения жидкости; S_{11} – часть поверхности цилиндра, на которой не происходит отрыва частиц жидкости; $S_{12}(t)$ – внутренняя свободная граница (граница каверны); $S_2(t)$ – внешняя свободная поверхность жидкости ($y = H$ – ее уравнение при $t = 0$); $\theta_s, \pi - \theta_s$ – полярные углы, соответствующие точкам отрыва; $Y = -H_b$ – плоское дно; $x = \pm H_R$ – уравнения симметричных боковых стенок; через (x, y) обозначены координаты радиус-вектора r ; R, θ – цилиндрические координаты ($x = R \cos \theta, y = R \sin \theta$).

Вкратце поясним происхождение системы (1)–(9). Так как течение идеальной жидкости, начинающееся из состояния покоя, является потенциальным, то в каждый момент времени в силу условия несжимаемости потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа во всей области, занятой жидкостью (формула (1)). В зоне контакта S_{11} нормальная компонента скоростей жидких частиц, непосредственно прилегающих к границе тела, совпадает с нормальной компонентой скоростей соответствующих точек границы тела (формула (2)). На свободных границах жидкости задаются динамические и кинематические условия. Динамическое условие состоит в том, что давление на свободной поверхности задано. Предполагается, что на внешней свободной границе действует атмосферное давление, а на внутренней свободной границе давление зависит от способа искусственной подачи газа в каверну. Динамические условия (3), (5) записываются на основании интеграла Коши–Лагранжа в подвижной системе координат. Кинематическое условие заключается в том, что жидкие частицы никогда не покидают свободную границу. Формы внутренней и внешней свободных границ определяются равенствами

$$R = 1 + \eta(\theta, t); \quad y = H + \xi(x, t) - h(t)$$

Взяв производную от каждого из этих равенств по времени вдоль траектории движения жидкой частицы, приходим к уравнениям (4), (6). В точках контакта внутренней свободной границы с поверхностью цилиндра ставится условие ограниченности скорости жидкости. На дне и боковых стенках формулируются условия непротекания (формулы (7)). Так как в начальный момент времени жидкость невозмущена, то потенциал скоростей и возмущения свободных границ в этот момент равны нулю (формулы (8)). Последняя формула определяет закон движения цилиндра.

Асимптотический анализ задачи на малых временах

Неизвестные заранее физические величины Fr и χ должны быть определены из условия ограниченности скорости жидкости вблизи точек отрыва. При этом допускается зависимость величины χ от времени и от угловой координаты:

$$\chi = \chi_0 + t^2 \chi_1 + t^2 \chi_2 f(\theta), \quad (10)$$

где χ_0, χ_1, χ_2 являются постоянными величинами.

В формуле (10) в качестве функции, зависящей от угловой координаты, может быть взята любая четная относительно точки 0.5π функция, производная которой имеет корневые особенности в точках отрыва. Последнее условие позволяет решить тонкие вопросы, связанные с регулярностью второго асимптотического приближения. В случае $\chi_2 = 0$ получается самый простой закон искусственной кавитации, которому уделяется особое внимание. Конкретные численные примеры, рассмотренные ниже, соответствуют именно этому случаю.

Сделанное в работе весьма существенное предположение о неподвижности точек отрыва будет оправдано, если удастся построить корректное с физической точки зрения решение поставленной задачи, удовлетворяющее условиям ограниченности скорости жидкости и положительности давления.

Решение задачи (1)–(9) будем искать в виде асимптотических разложений по целым степеням малого времени:

$$\Phi = t\Phi_0 + t^3\Phi_1 + \dots, \quad (11)$$

$$\eta(\theta, t) = t^2\eta_0(\theta) + t^4\eta_1(\theta) + \dots, \quad (12)$$

$$\xi(x, t) = t^2\xi_0(x) + t^4\xi_1(x) + \dots \quad (13)$$

Для упрощения технической работы будем использовать представление (10) с конкретной функцией $f(\theta)$:

$$f(\theta) = \eta_0(\theta)\sin\theta.$$

Заметим, что функция $f(\theta)$ применяется только во втором асимптотическом приближении, а функция $\eta_0(\theta)$ определяется на основе анализа первого приближения. Также обратим внимание на то, что при таком выборе функции $f(\theta)$ условие регулярности соответствующей граничной функции в задаче для второго асимптотического приближения не будет зависеть от точки отрыва θ_s .

После подстановки выражений (11)–(13) в исходную задачу (1)–(9) выполняется стандартная процедура переноса краевых условий на невозмущенный уровень. Здесь в первую очередь следует обратить внимание на границы $S_{12}(t)$, $S_2(t)$, $y = -H_b - 0.5\alpha t^2$, которые меняются относительно подвижной системы координат с течением времени. Все функции, входящие в краевые условия на этих границах (после подстановки выражений (11)–(13)), раскладываются по целым степеням малого времени с помощью формулы Тейлора. В результате получают краевые условия на неподвижных (первоначально невозмущенных) границах. Затем приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях t . На остальных границах, которые остаются неподвижными относительно системы координат x, y , после подстановки выражений (11)–(13), сразу применяется метод неопределенных коэффициентов. В итоге приходим к следующим двум задачам для нахождения функций Φ_0 и Φ_1 (к первой задаче добавляются краевые условия типа неравенств):

$$\Delta\Phi_0 = 0, \quad r \in \Omega(0); \quad (14)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = \alpha n_y, \quad 0.5\chi_0 - \Phi_0 + Fr^{-2}(H - y) \geq 0, \quad r \in S_{11}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} \geq \alpha n_y, \quad 0.5\chi_0 - \Phi_0 + Fr^{-2}(H - y) = 0, \quad r \in S_{12}(0); \quad (16)$$

$$\Phi_0 = 0, \quad y = H; \quad (17)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b; \quad (18)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} = 0, \quad x = \pm H_R; \quad (19)$$

$$\Delta\Phi_1 = 0, \quad r \in \Omega(0); \quad (20)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0, \quad r \in S_{11}; \quad (21)$$

$$3\Phi_1 = -2\eta_0^2(\theta) - 0.5\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\right)^2 + \alpha\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\sin\theta - (\alpha Fr^{-2} + 0.5Fr^{-4})\cos^2\theta - 0.5\alpha Fr^{-2} +$$

$$+0.5\chi_1 - (\alpha + Fr^{-2} - 0.5\chi_2)\eta_0(\theta)\sin\theta, \quad r \in S_{12}(0); \quad (22)$$

$$3\Phi_1 = -\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\right)^2 - 0.5(Fr^{-2} - 3\alpha)\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}, \quad y = H; \quad (23)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = -0.5\alpha\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}, \quad y = -H_b; \quad (24)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = 0, \quad x = \pm H_R. \quad (25)$$

Так как неравенства в формулах (15) и (16) не являются прямым следствием описанного подхода, то необходимо пояснить их смысл. Соотношение в (15) означает, что в главном приближении давление в зоне контакта не может быть ниже давления в каверне. Неравенство в (16) показывает, что жидкие частицы могут перемещаться только в сторону жидкости. Задача (14)–(19) имеет такую же структуру, как и классическая модель удара с отрывом, для которой справедлива теорема существования и единственности решения [16]. Вследствие этого однозначно определяются точки раздела краевых условий (точки отрыва), в которых решение задачи (14)–(19) имеет непрерывные первые производные. Таким образом, в главном приближении по времени условие Кутты–Жуковского выполняется автоматически.

Далее определим условия, при которых второе приближение для потенциала скорости будет непрерывно дифференцируемым в точках смены краевых условий. На основании свойств решения задачи (14)–(19) можно сделать вывод, что в общем случае функция, стоящая в правой части равенства (22), будет непрерывной в указанных точках, а ее первая производная будет иметь в них особенность типа квадратного корня. Эта особенность содержится только в последнем члене формулы (22) (производные по угловой координате от первого слагаемого, а также от суммы второго и третьего слагаемых не имеют особенности). Таким образом, регулярность данной граничной функции будет обеспечена только при специальном выборе физических параметров задачи, которые должны быть связаны соотношением

$$\alpha + Fr^{-2} - 0.5\chi_2 = 0 \quad (26)$$

(зануляется коэффициент при корневой особенности у производной граничной функции).

В дальнейшем соотношение (26) предполагается выполненным. В этом случае производная от решения задачи (20)–(25) по угловой координате θ при $\theta \rightarrow \theta_s - 0$ ($r = 1$) имеет корневую особенность. Таким образом, остается подобрать постоянную χ_1 так, чтобы коэффициент при этой особенности обратился в ноль. Заметим, что при невыполнении условия (26) особенность у названной производной со стороны зоны контакта будет не чисто корневой (появляется еще логарифмический множитель). Это приводит к нарушению условия Кутты–Жуковского со стороны зоны отрыва и делает неправильными дальнейшие рассуждения по нахождению коэффициента χ_1 . При выполнении условия (26) логарифмический множитель появляется только в младших членах, что никак не влияет на дальнейшие рассуждения. Отметим, что в частном случае $\chi_2 = 0$, $\alpha = -1$ число Фруда будет равно единице. Таким образом, если давление в каверне имеет квад-

ратичную зависимость от времени с постоянными коэффициентами (сохраняются первые два члена в формуле (10)) и цилиндр движется вдоль вектора силы тяжести, то регулярность граничного условия (22) обеспечивается только при данном конкретном числе Фруда, которое равно единице (ускорение цилиндра совпадает с ускорением силы тяжести). Интересно отметить, что при $\chi_2 = 0$, $\alpha = 1$ число Фруда не удастся подобрать из условия регулярности данной граничной функции.

Решение задачи (20)–(25) представимо в виде:

$$\Phi_1 = 6^{-1} \chi_1 u + v,$$

где функции u , v определяются решениями линейных краевых задач.

Проводя аналогию с работой [2], в которой регулярность потенциала скорости обеспечивалась за счет выбора положения точек отрыва (при фиксированных физических параметрах задачи), приходим к следующему выражению для коэффициента χ_1 :

$$\chi_1 = -\frac{6a_2}{a_1}, \quad a_1 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sqrt{\theta_s - \theta}, \quad a_2 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial v}{\partial \theta} \sqrt{\theta_s - \theta}, \quad (27)$$

Таким образом, для построения регулярного асимптотического разложения потенциала скорости (с учетом первых двух членов асимптотики) нужно подобрать параметры Fr , χ_2 так, чтобы выполнялось соотношение (26), а после этого найти коэффициент χ_1 по формулам (27). Кроме этого нужно еще гарантировать существование самого отрыва жидкости от тела. Например, при небольших ускорениях цилиндра и очень маленьком давлении в каверне (естественная ситуация) движение цилиндра будет безотрывным. При выполнении условия (26) отрыв будет происходить при соответствующем выборе параметра χ_0 . Отметим, что если в (10) – (13) ограничиться только главным асимптотическим приближением, то величину χ_0 можно интерпретировать как число кавитации. При небольших ускорениях цилиндра отрыв будет происходить при отрицательных числах кавитации.

После решения краевых задач (14)–(25) по формулам (12) и (13) определяются возмущения свободных границ жидкости. Для коэффициентов асимптотических разложений (12) и (13) приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} 2\eta_0(\theta) &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} - \alpha \sin \theta; \\ 4\eta_1(\theta) &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - 2\eta_0^2(\theta) + (Fr^{-2} + \alpha)(\eta_0(\theta) \cos \theta)'; \\ 2\xi_0(x) &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \quad 4\xi_1(x) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \end{aligned}$$

Интересно отметить, что в случае $\chi_2 = 0$, $\alpha = -1$ ($Fr = 1$) вторая из этих формул сильно упрощается. При этом функция $\eta_1(\theta)$ оказывается непрерывной в точках отрыва (в общем случае она имеет там корневые особенности).

Решения типа пограничного слоя

Учитывая свойства задачи (14)–(19), можно утверждать, что производная функции $\eta_0(\theta)$ имеет в точках отрыва особенности типа квадратного корня.

Функция $\eta_1(\theta)$ в общем случае уже сама имеет такие особенности. Следовательно, актуальными являются построение решений типа пограничного слоя и согласование их с внешним разложением (12). В силу симметрии задачи рассуждения проведем только для правой точки отрыва. Помимо этого, ограничимся случаем $\alpha = -1$ (соотношение (26) предполагается выполненным). Учитывая, что при $r = 1$, $\theta \rightarrow \theta_s + 0$ справедливы асимптотические формулы

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \sin \theta \sim \beta \sqrt{\theta - \theta_s}, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \sim -Fr^{-2} \cos \theta_s, \quad (28)$$

придем к следующему представлению уравнения (4) в маленькой окрестности точки отрыва:

$$t\beta\sqrt{\theta - \theta_s} = t[1 - Fr^{-2}] \cos \theta_s \frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

где коэффициент β определяется численно на основе первого из равенств (28). Решение последнего уравнения будем искать в виде:

$$\eta(\theta, t) = \beta t^3 F(\tau) + \dots, \quad \tau = \frac{\theta - \theta_s}{t^2}.$$

После подстановки этого проекта решения в дифференциальное уравнение приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t^2 . В результате для определения функции $F(\tau)$ придем к следующей задаче:

$$(\tau - \beta_1)F'(\tau) - 1.5F(\tau) = -0.5\sqrt{\tau}, \quad \beta_1 = 0.5(1 - Fr^{-2}) \cos \theta_s, \\ F(0) = 0, \quad F(\tau) \sim \frac{1}{2} \left[\sqrt{\tau} - \frac{\beta_1}{4\sqrt{\tau}} \right], \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Условие сращивания получается путем перехода в (12) к погранслошной переменной τ и использования приведенной выше асимптотической формулы (28). Решение последней задачи при $\beta_1 > 0$ ($Fr > 1$) имеет вид (аналогия с [2]):

$$F(\tau) = \frac{1}{3\beta_1} \tau^{3/2}, \quad 0 \leq \tau \leq \beta_1; \\ F(\tau) = \frac{1}{3\beta_1} \left[\tau^{3/2} - (\tau - \beta_1)^{3/2} \right], \quad \beta_1 \leq \tau \leq \infty \quad (29)$$

Теперь, чтобы получить погранслошное решение, соответствующее случаю $\chi_2 = 0$, $\alpha = -1$ ($Fr = 1$), нужно β_1 устремить к нулю. При этом первая формула (29) в пределе исчезает вместе с промежутком изменения τ . Вторая формула (29) в пределе принимает вид (например, можно воспользоваться правилом Лопиталя):

$$F(\tau) = 0.5\sqrt{\tau}, \quad 0 \leq \tau \leq \infty.$$

В рассматриваемом частном случае возмущение внутренней свободной границы в маленькой окрестности точки отрыва имеет вид:

$$\eta(\theta, \tau) \sim 0.5\beta t^2 \sqrt{\theta - \theta_s}, \quad \theta \rightarrow \theta_s + 0.$$

Обратим внимание на то, что последняя формула может быть получена из (12) заменой первого слагаемого его асимптотикой вблизи точки отрыва (при этом второе слагаемое не учитывается). Проведенные рассуждения показывают, что

при $Fr = 1$ внутренняя свободная граница составляет прямой угол с границей тела в точке отрыва, а при $Fr > 1$ этот угол сглаживается.

Численная реализация и анализ результатов

Задача (14)–(19) решается с помощью итерационного метода, в котором поэтапно уточняются неизвестные заранее точки контакта внутренней свободной границы жидкости с поверхностью тела [2]. На каждом шаге метода возникают линейные краевые задачи (с фиксированными точками смены краевых условий), для решения которых применяется пакет конечных элементов FreeFem++ [17]. Линейные краевые задачи для функций u и v также решаются с помощью данного пакета.

При рассмотрении конкретных численных примеров задаются следующие безразмерные параметры задачи: $\chi_0 = -1$; $\chi_2 = 0$; $\alpha = -1$; $H = 1.2$; $H_b = 5$; $H_R = 5$. Угловая координата точки отрыва и коэффициенты χ_1 и β находятся численно и имеют следующие приближенные значения:

$$\theta_s = 0.766, \quad \chi_1 = -5.28, \quad \beta = 3.09.$$

На рис. 1–3 показана динамика каверны в моменты времени $t = 0.4, 0.6, 0.8$. Рисунок 2 демонстрирует хорошее согласование решений типа пограничного слоя с разложением (12) в широком временном диапазоне и практически во всем диапазоне изменения угловой координаты θ (при уменьшении времени эти кривые сливаются).

Заметим, что коэффициент χ_1 можно определить другим способом – из условия непрерывности нормальной производной функции Φ_1 при $r = 1, \theta = \theta_s$:

$$\chi_1 = -\frac{6d_2}{d_1}, \quad d_1 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_s + 0} \frac{\partial u}{\partial r} \sqrt{\theta - \theta_s}, \quad d_2 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_s + 0} \frac{\partial v}{\partial r} \sqrt{\theta - \theta_s}, \quad r = 1.$$

Численные расчеты показали хорошее согласование двух разных подходов.

Заключение

Рассмотрена задача об отрывном и вертикальном движении цилиндра в жидкости из состояния покоя с постоянным ускорением. При дополнительном предположении о неподвижности точек отрыва изучена возможность представления решения данной задачи в виде асимптотического разложения по целым степеням малого времени. Показано, что искомые асимптотики, содержащие первые два члена разложения, существуют только при определенном выборе числа Фруда и давления в каверне. Указанные физические величины выбираются таким образом, чтобы в точках отрыва выполнялось условие ограниченности скорости жидкости (условие Кутты–Жуковского). Рассмотрены конкретные примеры с численными решениями.

Список источников

1. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
2. Норкин М.В. Образование каверны на начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с постоянным ускорением // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 4. С. 74–82. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/pmtf1384>

3. Норкин М.В. Образование присоединенной каверны с неподвижными точками отрыва при ударе плавающего кругового цилиндра // Журнал технической физики. 2023. Т. 93, № 10. С. 1403–1409. doi: 10.21883/JTF.2023.10.56277.33-23
4. Tyvand P.A., Miloh T.V. Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged circular cylinder // Journal of Fluid Mechanics. 1995. V. 286, № 10. P. 67–101. doi: 10.1017/S0022112095000656
5. Tyvand P.A., Landrini M. Free-surface flow of a fluid body with an inner circular cylinder in impulsive motion // Journal of Engineering Mathematics. 2001. V. 40, № 2. P. 109–140. doi: 10.1023/A:1017527310600
6. Макаренко Н.И., Костиков В.К. Неустановившееся движение эллиптического цилиндра под свободной поверхностью // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 3. С. 30–41. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/pmtf1174>
7. Голиков А.Е., Макаренко Н.И. Гидродинамические нагрузки при разгоне цилиндра под свободной поверхностью // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т. 63, № 5. С. 89–99. doi: 10.15372/PMTF20220509
8. Reinhard M., Korobkin A.A., Cooker M.J. Cavity Formation on the Surface of a Body Entering Water with Deceleration // Journal of Engineering Mathematics. 2016. V. 96, № 1. P. 155–174. doi: 10.1007/s10665-015-9788-8
9. Аганин А.А., Ильгамов М.А., Мустафин И.Н. Ударная кавитация жидкости в цилиндрической емкости // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. 2020. Т. 162, кн. 1. С. 27–37. doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.27-37
10. Пегов В.И., Мошкин И.Ю. Расчет гидродинамики кавитационного способа старта ракет // Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, № 4. С. 476–485. doi: 10.24411/2500-0101-2018-13408
11. Коробицын В.А. Моделирование кавитационного обтекания тел // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20, № 5. С. 85–96.
12. Иценко А.Н., Афанасьева С.А., Бондарчук С.С., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Хабибуллин М.В., Чупашев А.В. Моделирование движения суперкавитирующих ударников при групповом пушечном старте // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93, № 4. С. 890–900. doi: 10.1007/s10891-020-02188-3
13. Иценко А.Н., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Чупашев А.В. Подводный старт суперкавитирующего ударника из лабораторной баллистической установки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 97–107. doi: 10.17223/19988621/82/8
14. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М. : Наука, 1979. 536 с.
15. Иванов А.Н. Гидродинамика развитых кавитационных течений. Л. : Судостроение, 1980. 240 с.
16. Юдович В.И. Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость // Владикавказский математический журнал. 2005. Т. 7, № 3. С. 79–91. URL: <http://mi.mathnet.ru/vmj168>
17. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2008. 256 с.

References

1. Sedov L.I. (1966) *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Plane problems in hydrodynamics and aerodynamics]. Moscow: Nauka.
2. Norkin M.V. (2012) Formation of a cavity in the initial stage of motion of a circular cylinder in a fluid with a constant acceleration. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 53(4). pp. 532–539. doi: 10.1134/S0021894412040074

3. Norkin M.V. (2023) Formation of an attached cavity with fixed separation points upon impact of a floating circular cylinder. *Technical Physics*. 93(10). pp. 1403–1409. doi: 10.21883/JTF.2023.10.56277.33-23
4. Tyvand P.A., Miloh T.V. (1995) Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*. 286(10). pp. 67–101. doi: 10.1017/S0022112095000656
5. Tyvand P.A., Landrini M. (2001) Free-surface flow of a fluid body with an inner circular cylinder in impulsive motion. *Journal of Engineering Mathematics*. 40(2). pp. 109–140. doi: 10.1023/A:1017527310600
6. Makarenko N.I., Kostikov V.K. (2013) Unsteady motion of an elliptic cylinder under a free surface. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 54(3). pp. 367–376. doi: 10.1134/S0021894413030048
7. Golikov A.E., Makarenko N.I. (2022) Hydrodynamic loads during acceleration of a cylinder under a free surface. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 63(5). pp. 806–815. doi: 10.1134/S0021894422050091
8. Reinhard M., Korobkin A.A., Cooker M.J. (2016) Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration. *Journal of Engineering Mathematics*. 96(1). pp. 155–174. doi: 10.1007/s10665-015-9788-8
9. Aganin A.A., Il'gamov M.A., Mustafin I.N. (2020) Udamaya kavitatsiya zhidkosti v tsilindricheskoy yomkosti [Impact-induced cavitation in a cylindrical container with liquid]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki – Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*. 162(1). pp. 27–37. doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.27-37
10. Pegov V.I., Moshkin I.Yu. (2018) Raschet gidrodinamiki kavitatsionnogo sposoba starta raket [Analysis of fluid dynamics of cavitation launch technique]. *Chelyabinskii fiziko-matematicheskii zhurnal – Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*. 3(4). pp. 476–485. doi: 10.24411/2500-0101-2018-13408
11. Korobitsyn V.A. (2015) Modelirovanie kavitatsionnogo obtekaniya tel [Simulation of cavitation flow over bodies]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 20(5). pp. 85–96.
12. Ishchenko, A.N., Afanas'eva, S.A., Bondarchuk, S.S., Burkin V.V., D'yachkovskii A.S., Khabibullin M.V., Chupashev A.V. (2020) Modeling the motion of supercavitating strikers in a group gun-start. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 93. pp. 858–867. doi: 10.1007/s10891-020-02188-3
13. Ishchenko, A.N., Burkin, V.V., D'yachkovskiy, A.S., Chupashev A.V. (2023) Podvodnyy start superkavitiruyushchego udarnika iz laboratornoy ballisticheskoy ustanovki [Underwater launching of a supercavitating projectile out of a ballistic test setup]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 97–107. doi: 10.17223/19988621/82/8
14. Gurevich M.I. (1979) *Teoriya struy ideal'noy zhidkosti* [Theory of jets in ideal fluids]. Moscow: Nauka.
15. Ivanov A.N. (1980) *Gidrodinamika razvitykh kavitatsionnykh techeniy* [Hydrodynamics of developed cavitation flows]. Leningrad: Sudostroenie.
16. Yudovich V.I. (2005) Odnaznachnaya razreshimost' zadachi ob udare s otryvom tverdogo tela o neodnorodnuyu zhidkost' [Unique solvability of the problem of impact with detachment of a rigid body against an inhomogeneous fluid]. *Vladikavkazskiy matematicheskii zhurnal – Vladikavkaz Mathematical Journal*. 7(3). pp. 79–91.
17. Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. (2008) *Ispol'zovanie paketa konechnykh elementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii* [Using the FreeFem++ finite element package for problems of hydrodynamics, electrophoresis and biology]. Rostov-on-Don: Southern Federal University Publishing House.

Сведения об авторе:

Норкин Михаил Викторович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры вычислительной математики и математической физики Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (Ростов-на-Дону, Россия). E-mail: norkinmi@mail.ru

Information about the author:

Norkin Mikhail V. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation). E-mail: norkinmi@mail.ru

Статья поступила в редакцию 19.10.2023; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 19.10.2023; accepted for publication 03.10.2024

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/91/10

Влияние начальных напряжений на распространение звуковых волн в гипопругих анизотропных материалах

Марина Юрьевна Соколова¹, Алексей Александрович Маркин²

^{1,2} Тульский государственный университет, Тула, Россия

¹ m.u.sokolova@gmail.com

² markin-nikram@yandex.ru

Аннотация. Для гипопругих изотропных и анизотропных материалов получено линеаризованное уравнение распространения акустических волн в телах с предварительными конечными деформациями и начальными напряжениями. Уравнение записано относительно поля скоростей, приводящего к возмущению начальной конфигурации среды. Для плоских монохроматических волн выписано выражение для акустического тензора. Проведен анализ влияния вида начальных напряжений на фазовые скорости распространения волн в анизотропных материалах с кубической симметрией свойств и в изотропных материалах.

Ключевые слова: гипопругость, анизотропия, конечные деформации, динамические уравнения, акустические волны, начальные напряжения, фазовые скорости

Благодарности: Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Для цитирования: Соколова М.Ю., Маркин А.А. Влияние начальных напряжений на распространение звуковых волн в гипопругих анизотропных материалах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 113–124. doi: 10.17223/19988621/91/10

Original article

The effect of initial stresses on sound wave propagation in hypoelastic anisotropic materials

Marina Yu. Sokolova¹, Aleksey A. Markin²

^{1,2} Tula State University, Tula, Russian Federation

¹ m.u.sokolova@gmail.com

² markin-nikram@yandex.ru

Abstract. A linearized equation for the propagation of acoustic waves in bodies with preliminary finite deformations and initial stresses is obtained for hypoelastic materials. The equation is written in terms of the velocity field, which leads to perturbations of the

initial configuration of the medium. The formula for a symmetric acoustic tensor is written for plane monochromatic waves.

It is shown that if a plane wave propagates along one of the anisotropy axes in cubic material, then the normal stresses in the plane of the wave front affect the phase propagation velocities of both longitudinal and transverse waves. The normal stresses acting perpendicular to the wave normal vector affect only the magnitude of the phase velocity of the transverse wave polarized along the stress direction. The shear stresses acting in the plane of the wave front have an effect on the propagation velocities of quasi-longitudinal and quasi-transverse waves. The shear stresses acting in the plane perpendicular to the wave front affect only the phase velocities of transverse waves. Analysis of the effect of initial stress on wave propagation in an isotropic material allowed revealing the occurrence of anisotropy in the acoustic properties of the medium and to describe shear wave splitting.

Keywords: hypoelasticity, anisotropy, finite strains, dynamic equations, acoustic waves, initial stresses, phase velocities

Acknowledgments: This research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. FEWG-2023-0002).

For citation: Sokolova, M.Yu., Markin, A.A. (2024) The effect of initial stresses on sound wave propagation in hypoelastic anisotropic materials. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 113–124. doi: 10.17223/19988621/91/10

Введение

Классической задачей эластодинамики является задача о распространении акустических (упругих) волн в безграничной среде [1]. В основном в работах о распространении волн в упругой среде с предварительными конечными деформациями и напряжениями используются гиперупругие модели материалов, как изотропных [1–3], так и анизотропных [4–6]. Значительно меньшее число работ посвящено распространению акустических волн в гипотупругих материалах [7–10]. В этих работах рассматривается изотропный материал, а в качестве объективной производной тензора напряжений используется производная Яуманна. В [7–10] исследуется распространение волн в недеформированной среде с начальными напряжениями. В [7, 8] отмечается, что наличие начальных напряжений в гипотупругой среде приводит к несимметрии акустического тензора. Из этого делается вывод, что при некотором распределении начальных напряжений происходит «блокировка» определенных видов акустических волн. На наш взгляд, описываемый в [8] эффект требует экспериментального подтверждения. Влияние поля начальных напряжений на фазовые скорости распространения упругих волн и появление акустической анизотропии свойств, индуцируемой внутренними напряжениями, в моделях гипотупругих материалов отмечается в работах [7, 9, 10]. Проявление этих эффектов в начально изотропных средах наблюдается и в экспериментальных исследованиях [3, 11]. Эксперименты, в которых регистрируется влияние предварительных напряжений на фазовые скорости распространения упругих волн в анизотропных материалах, описаны, например, в работе [12].

Динамические уравнения распространения акустических волн в средах с предварительными напряжениями и деформациями в [1, 13] записаны относительно поля перемещений. В работах [13, 14] распространение акустических волн рас-

смачивается как процесс наложения малых возмущений поля перемещений на начальные конечные деформации материала. В статье [15] динамические уравнения записаны в смешанной форме Лагранжа–Эйлера относительно поля скоростей, рассмотрен пример распространения волн в гиперупругом изотропном материале с квадратичным относительно деформаций упругим потенциалом.

Целью данной работы является исследование влияния начальных напряжений на распространение волн в гиперупругих анизотропных материалах. Для этого будет получена линеаризованная форма уравнений распространения акустических волн, записанная относительно поля скоростей. В отличие от работ [7–10] будет использован вариант соотношений гиперупругости, связывающий скорость изменения тензора напряжений относительно полярного базиса и тензор деформаций скорости [16].

Уравнения распространения акустических волн в гиперупругой среде

Процесс распространения звуковых волн в предварительно деформированном гиперупругом материале будем рассматривать в рамках теории наложения на конечные деформации малых возмущений поля перемещений [13, 14]. Обычно при этом рассматривают три конфигурации среды: отсчетную, соответствующую моменту времени $t = t_0$, начальную ($t = t_1$) и конечную ($t > t_1$) [14]. Полагают, что в отсчетной конфигурации материал находится в естественном состоянии, т.е. в нем отсутствуют напряжения и деформации. В результате движения среда переходит в начальное состояние, которое характеризуется полем перемещений $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_0, t_1)$ и аффинором деформаций

$$\Phi_1 = \mathbf{E} + \nabla_0 \mathbf{u}_1, \quad \nabla_0(\cdot) = \mathbf{a}_i \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_0^i}, \quad (1)$$

где ∇_0 – набла-оператор отсчетного состояния, $\mathbf{E} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3$ – единичный тензор, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ – единичные ортогональные базисные векторы, радиус-вектор точки в отсчетном состоянии $\mathbf{x}_0 = x_0^i \mathbf{a}_i$.

Напряжения характеризуются тензором истинных напряжений Коши $\mathbf{S}_1$. Считаем, что в начальном состоянии поля деформаций и напряжений однородны, поэтому выполняются условия равновесия

$$\nabla_1 \cdot \mathbf{S}_1 = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_1 = \frac{d^2 \mathbf{u}_1}{dt^2} = \mathbf{0}.$$

В уравнениях (2) введен набла-оператор начального состояния

$$\nabla_1(\cdot) = \mathbf{a}_i \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1^i}, \quad x_1^i = x_0^i + u_1^i.$$

Переход из начальной конфигурации в конечную связан с возмущением поля перемещений, определяемым вектором $\mathbf{u}_{12}$. В конечной конфигурации поле перемещений определяется выражением

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_0, t_1) + \mathbf{u}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau), \quad \text{где } \tau = t - t_1. \quad (3)$$

Аффинор деформаций (1) в конечном состоянии может быть представлен в виде:

$$\Phi_2 = \Phi_1 \cdot \Phi_{12}, \quad \Phi_{12} = \mathbf{E} + \nabla_1 \mathbf{u}_{12}. \quad (4)$$

Поле напряжений в конечном состоянии характеризуется тензором

$$\mathbf{S}_2(\mathbf{x}_2, t) = \mathbf{S}_1(\mathbf{x}_1, t_1) + \mathbf{S}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau), \quad (5)$$

где $\mathbf{S}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau)$ – изменение поля напряжений, вызванное возмущением перемещений $\mathbf{u}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau)$.

Напряжения (5) удовлетворяют уравнениям движения, Эйлера форма которых имеет вид:

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{S}_2 = \rho_2 \ddot{\mathbf{u}}_2, \quad (6)$$

где набла-оператор конечного состояния

$$\nabla_2() = \mathbf{a}_i \frac{\partial}{\partial x_2^i}, \quad x_2^i = x_0^i + u_2^i = x_1^i + u_{12}^i.$$

Набла-операторы конечного, начального и отсчетного состояний связаны известными соотношениями [13, 16]

$$\nabla_2() = \Phi_2^{-1} \cdot \nabla_0() = \Phi_{12}^{-1} \cdot \nabla_1(). \quad (7)$$

Плотность среды в конечном ρ_2 и начальном ρ_1 состояниях связана с плотностью среды в отсчетной конфигурации ρ_0 выражениями

$$\rho_2 = J_2^{-1} \rho_0 = J_{12}^{-1} \rho_1, \quad \rho_1 = J_1^{-1} \rho_0, \quad \text{где } J_k = \det \Phi_k. \quad (8)$$

Подставляя напряжения (5) в уравнения (6), учитывая соотношения (2)–(4), (7) и (8), после преобразований получим уравнения движения в виде:

$$J_{12} \Phi_{12}^{-1} \cdot \nabla_1 \cdot (J_1 \mathbf{S}_{12}) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{12}. \quad (9)$$

При рассмотрении акустических волн принято считать, что перемещения $\mathbf{u}_{12}$ и их градиенты малы [13, 14]. В связи с этим предположением сохраним в уравнениях (9) только члены первого порядка относительно градиентов $\mathbf{u}_{12}$ и получим линеаризованные уравнения распространения малых возмущений поля перемещений в виде:

$$\nabla_1 \cdot (J_1 \mathbf{S}_{12}) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{12}. \quad (10)$$

Определяющие соотношения для гипотетических материалов устанавливают связь между объективной производной обобщенного тензора истинных напряжений $\Sigma = J \mathbf{S}$ и тензором деформации скорости $\mathbf{W}$:

$$\Sigma^\Delta = \mathbf{N} \cdot \mathbf{W}, \quad (11)$$

где $\mathbf{N}$ – тензор четвертого ранга, определяемый свойствами среды.

В качестве объективной производной в (11) используем полярную производную [16]

$$\Sigma^\Delta = \dot{\Sigma} + \Omega \cdot \Sigma - \Sigma \cdot \Omega, \quad \Omega = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}, \quad (12)$$

где Ω – тензор спина, $\mathbf{R}$ – тензор поворота, входящий в полярное разложение аффинора деформаций $\Phi = \mathbf{U} \mathbf{R}$, $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}$, $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$.

Полярная производная Σ^Δ (12) определяет скорость изменения тензора Σ относительно полярного базиса, вращающегося со скоростью Ω относительно неподвижного базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Полная производная тензора Σ определяет скорость его изменения относительно неподвижного базиса.

Пусть $\Sigma_1 = J_1 \mathbf{S}_1$ и $\Sigma_2 = J_2 \mathbf{S}_2$ – обобщенный тензор напряжений в начальном и конечном состояниях. Обозначим через Σ_{12} изменение обобщенного тензора напряжений, связанное с возмущением поля перемещений:

$$\Sigma_{12}(\mathbf{x}_1, \tau) = \Sigma_2(\mathbf{x}_2, t) - \Sigma_1(\mathbf{x}_1, t_1). \quad (13)$$

На основании представлений (5) и (13) связь между тензорами $\mathbf{S}_{12}$ и $\mathbf{\Sigma}_{12}$ определяется соотношением

$$\mathbf{S}_{12} = J_1^{-1} \left(J_{12}^{-1} \mathbf{\Sigma}_{12} + (J_{12}^{-1} - 1) \mathbf{\Sigma}_1 \right),$$

которое после линеаризации принимает вид:

$$J_1 \mathbf{S}_{12} = \mathbf{\Sigma}_{12} - (\nabla_1 \cdot \mathbf{u}_{12}) \mathbf{\Sigma}_1. \quad (14)$$

Подставим (14) в уравнения (10) и преобразуем полученные уравнения к виду:

$$\nabla_1 \cdot \mathbf{\Sigma}_{12} - \mathbf{\Sigma}_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{u}_{12} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{12}. \quad (15)$$

Продифференцируем уравнения (15) по времени τ :

$$\nabla_1 \cdot \dot{\mathbf{\Sigma}}_{12} - \mathbf{\Sigma}_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{v} = \rho_0 \ddot{\mathbf{v}}, \quad (16)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x}_1, \tau) = \frac{\partial \mathbf{u}_{12}}{\partial \tau}$ – скорости перемещения частиц среды, конвективные производные опускаем как малые второго порядка; $\dot{\mathbf{\Sigma}}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau) = \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_{12}}{\partial \tau}$ – скорость изменения напряжений относительно начальной конфигурации.

Скорость изменения тензора $\mathbf{\Sigma}_{12}$ определим из выражений (12):

$$\dot{\mathbf{\Sigma}}_{12} = \mathbf{\Sigma}_{12}^\Delta - \mathbf{\Omega}_{12} \cdot \mathbf{\Sigma}_1 + \mathbf{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{\Omega}_{12},$$

или с учетом определяющих соотношений (11):

$$\dot{\mathbf{\Sigma}}_{12} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{W}_{12} - \mathbf{\Omega}_{12} \cdot \mathbf{\Sigma}_1 + \mathbf{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{\Omega}_{12}. \quad (17)$$

Тогда уравнения (16) принимают вид:

$$\mathbf{N} \cdot \nabla_1 \mathbf{W}_{12} - \nabla_1 \cdot \mathbf{\Omega}_{12} \cdot \mathbf{\Sigma}_1 + \mathbf{\Sigma}_1 \cdot \nabla_1 \mathbf{\Omega}_{12} - \mathbf{\Sigma}_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{v} = \rho_0 \ddot{\mathbf{v}}. \quad (18)$$

В соотношениях (17), (18) тензор деформации скорости определяется выражением

$$\mathbf{W}_{12} = \frac{1}{2} (\nabla_1 \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla_1). \quad (19)$$

Для отыскания тензора спина представим тензор поворота $\mathbf{R}_2$ конечного состояния в виде произведения $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{12}$ и линеаризуем тензор поворота $\mathbf{R}_{12}$ с учетом малости градиентов перемещений $\mathbf{u}_{12}$:

$$\mathbf{R}_{12} \approx \mathbf{E} + \frac{1}{2} (\nabla_1 \mathbf{u}_{12} - \mathbf{u}_{12} \nabla_1),$$

тогда линеаризованное представление тензора спина после преобразований имеет вид:

$$\mathbf{\Omega}_{12} \approx \frac{1}{2} (\nabla_1 \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla_1). \quad (20)$$

Подставляя (19) и (20) в уравнения (18), после преобразований получим уравнения распространения акустических волн, записанные в скоростях:

$$\mathbf{N} \cdot \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{v} - \frac{1}{2} \mathbf{\Sigma}_1 \cdot (\nabla_1 \cdot \nabla_1 \mathbf{v} + \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{2} (\mathbf{\Sigma}_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{v} - \nabla_1 \mathbf{v} \nabla_1 \cdot \mathbf{\Sigma}_1) = \rho_0 \ddot{\mathbf{v}}. \quad (21)$$

Уравнения (21) позволяют в гипотезе упругой среде учитывать влияние однородных начальных напряжений $\mathbf{\Sigma}_1$ на распространение акустических волн. При этом возмущение начального состояния среды определяется полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}_1, \tau)$.

Пусть возмущение начального состояния связано с прохождением плоской монохроматической звуковой волны с полем скоростей

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_1, \tau) = A \mathbf{p} \exp(i(\mathbf{k} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_1 + \omega \tau)). \quad (22)$$

В представлении (22) A – амплитуда, $\mathbf{p}$ – вектор поляризации единичной длины, k – волновое число, ω – частота, $\mathbf{n}$ – единичный вектор волновой нормали. Для поля скоростей (22) воздействие набла-оператором равносильно умножению на вектор $i\mathbf{k}\mathbf{n}$, а дифференцирование по времени приводит к умножению на $i\omega$ [13]. Вычисляя входящие в (21) дифференциальные операторы, после преобразований получим уравнения вида:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{p}, \quad (23)$$

где $c = \omega/k$ – фазовая скорость распространения волны, $\mathbf{A}$ – акустический тензор [13].

Акустический тензор из уравнений (23) определяется выражением

$$\mathbf{A} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}(\Sigma_1 \cdot \mathbf{n}\mathbf{n}\mathbf{E} - \Sigma_1) - \frac{1}{2}(\Sigma_1 \cdot \mathbf{n}\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{n} \cdot \Sigma_1). \quad (24)$$

Из уравнений (23) следует, что фазовые скорости определяются через собственные значения акустического тензора, а векторы поляризации являются его собственными векторами. В отличие от результатов, полученных авторами работ [8, 9], акустический тензор (24) при любых начальных напряжениях является симметричным, его собственные значения являются действительными числами, а векторы поляризации ортогональны.

Влияние начальных напряжений на фазовые скорости распространения волн в анизотропном теле

Рассмотрим анизотропное тело с симметрией свойств, присущей кристаллам кубической сингонии [16–18]. Для таких материалов тензор $\mathbf{N}$ можно представить разложением по собственным упругим состояниям в виде [16–18]:

$$\mathbf{N} = N_1 \mathbf{I}^{00} + N_2 (\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22}) + N_3 (\mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}), \quad (25)$$

где N_1, N_2, N_3 – константы материала, $\mathbf{I}^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 5$) – тензоры, определяемые в базисе канонических (главных) осей анизотропии $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ [17] выражениями

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha), \quad (26)$$

$$\mathbf{I}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2), \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2),$$

$$\mathbf{I}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3).$$

Из представлений (25), (26) следует, что для рассматриваемого анизотропного материала с кубической симметрией свойств канонические оси равноправны. Свойства материала одинаковы в направлении каждого из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

Далее для констант материала N_1, N_2, N_3 используем обозначения

$$N_1 = 3\lambda + 2G, \quad N_2 = 2G, \quad N_3 = 2G'.$$

Пусть в направлении одной из канонических осей распространяется плоская монохроматическая волна с вектором волновой нормали $\mathbf{n} = \mathbf{a}_1$. Тогда тензор Кристоффеля анизотропного материала с кубической симметрией свойств определяется выражением

$$\mathbf{M} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = (\lambda + 2G)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + G'(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_3). \quad (27)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи начальных напряжений в теле. Пусть в плоскости, параллельной фронту волны и имеющей нормаль $\mathbf{n}$, действуют только нормальные или только касательные напряжения. На рис. 1 показаны векторы напряжений $\mathbf{P} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1$ в этой плоскости. В первом из этих случаев тензор напряжений $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \sigma \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1$, т.е. тело подвергается одноосному растяжению или сжатию в направлении распространения волны (см. рис. 1, а). Акустический тензор (24) с учетом (27) в этом случае принимает вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \sigma \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + 0.5 \sigma (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3),$$

а его собственные векторы и собственные значения определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{a}_1; \quad \rho_0 c_1^2 = \lambda + 2G - \sigma; \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{a}_2; \quad \rho_0 c_2^2 = G' + 0.5\sigma; \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{a}_3; \quad \rho_0 c_3^2 = G' + 0.5\sigma. \end{aligned} \quad (28)$$

Из (28) следует, что в этом случае в теле распространяются продольная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_1$ и фазовой скоростью c_1 и две поперечные волны с векторами поляризации $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_3$ и равными фазовыми скоростями $c_2 = c_3$.

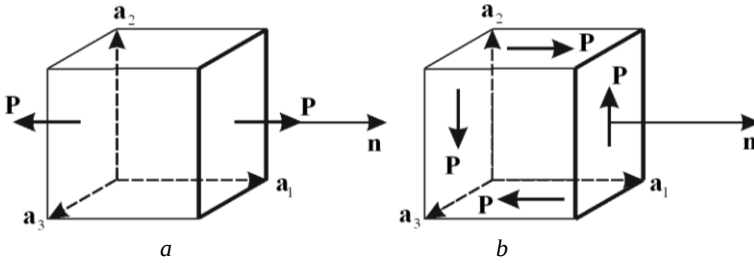


Рис. 1. Векторы начальных напряжений $\mathbf{P}$ в плоскости с нормалью $\mathbf{n}$:

а – нормальные напряжения; б – касательные напряжения

Fig. 1. Vectors of initial stresses $\mathbf{P}$ in the plane with normal $\mathbf{n}$:

(a) normal and (b) tangential stresses

Рассмотрим случай, когда в плоскости, параллельной фронту волны, действуют касательные напряжения $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \tau (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1)$ (см. рис. 1, б). Акустический тензор (24) имеет вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \tau (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1),$$

а решение задачи о его собственных векторах и собственных значениях дается выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_2; \quad \rho_0 c_1^2 = 0.5 \left(\lambda + 2G + G' + \sqrt{(\lambda + 2G - G')^2 + 4\tau^2} \right); \\ \mathbf{p}_2 &= -\sin \varphi \mathbf{a}_1 + \cos \varphi \mathbf{a}_2; \quad \rho_0 c_2^2 = 0.5 \left(\lambda + 2G + G' - \sqrt{(\lambda + 2G - G')^2 + 4\tau^2} \right); \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{a}_3; \quad \rho_0 c_3^2 = G'. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражения (29) показывают, что если в плоскости фронта волны действуют касательные напряжения, то в теле распространяется квазипродольная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_1$, отклоняющимся от вектора волновой нормали на угол φ , причем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2\tau} \left(\lambda + 2G - G' - \sqrt{(\lambda + 2G - G')^2 + 4\tau^2} \right).$$

В теле также распространяются квазипоперечная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_2$ и поперечная волна с вектором поляризации $\mathbf{p}_3$ и фазовой скоростью c_3 , которая не зависит от начальных напряжений.

Пусть начальные напряжения действуют в плоскости, перпендикулярной фронту волны и имеющей нормальный вектор $\mathbf{m} = \mathbf{a}_2$. На рис. 2 показаны векторы напряжений $\mathbf{P} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1$ в этой плоскости. Если напряжения сводятся только к нормальным с тензором $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \sigma \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2$, то это соответствует распространению плоской волны в направлении, перпендикулярном одноосному растяжению или сжатию (см. рис. 2, а). В этом случае акустический тензор (24) имеет вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - 0.5\sigma \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2,$$

а его собственные значения и собственные векторы определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{a}_1; \quad \rho_0 c_1^2 = \lambda + 2G; \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{a}_2; \quad \rho_0 c_2^2 = G' - 0.5\sigma; \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{a}_3; \quad \rho_0 c_3^2 = G'. \end{aligned} \quad (30)$$

Результат (30) показывает, что начальные нормальные напряжения, действующие в рассматриваемой плоскости, не оказывают влияния на скорости распространения продольной c_1 и поперечной c_3 волн, а влияют только на скорость распространения поперечной волны с вектором поляризации $\mathbf{p}_2 = \mathbf{m}$.

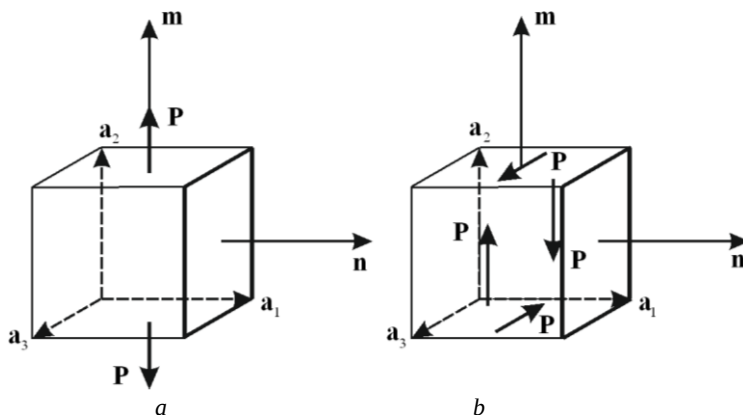


Рис. 2. Векторы начальных напряжений $\mathbf{P}$ в плоскости с нормалью $\mathbf{m}$:

а – нормальные напряжения; б – касательные напряжения

Fig. 2. Vectors of initial stresses $\mathbf{P}$ in the plane with normal $\mathbf{m}$:

(a) normal and (b) tangential stresses

Если в плоскости, перпендикулярной фронту волны, действуют только касательные напряжения, а в плоскости фронта волны напряжения отсутствуют (см. рис. 2, б), то $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \tau (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2)$, акустический тензор

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \tau (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2),$$

его собственные векторы и собственные значения определяются выражениями

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{a}_1; & \rho_0 c_1^2 &= \lambda + 2G; \\
\mathbf{p}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3); & \rho_0 c_2^2 &= G' - 0.5\tau; \\
\mathbf{p}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3); & \rho_0 c_3^2 &= G' + 0.5\tau.
\end{aligned} \tag{31}$$

Из (31) следует, что в кубическом материале касательные напряжения, действующие в плоскостях, перпендикулярных фронту волны, не влияют на скорость распространения продольной волны c_1 , а влияют только на фазовые скорости поперечных волн c_2 и c_3 .

Влияние начальных напряжений на фазовые скорости распространения волн в изотропном теле

Рассмотренные выше примеры распространения волн в анизотропных телах с кубической симметрией свойств легко сводятся к случаю распространения волн в изотропном теле, поскольку кубические материалы по своим упругим свойствам близки к изотропным материалам. Для изотропного материала разложение тензора $\mathbf{N}$ по собственным упругим состояниям имеет вид [16, 18]:

$$\mathbf{N} = N_1 \mathbf{I}^{00} + N_2 (\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}), \tag{32}$$

где базисные тензоры $\mathbf{I}^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 5$) определяются выражениями (26), в которых в качестве базисных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ может быть взята любая тройка взаимно ортогональных единичных векторов.

Собственные значения тензора упругости для изотропного материала выражаются через константы Ламе [13, 16]:

$$N_1 = 3\lambda + 2G, \quad N_2 = 2G.$$

Пусть в изотропном теле распространяется плоская волна с вектором волновой нормали $\mathbf{n} = \mathbf{a}_1$, а начальные напряжения Σ_1 соответствуют схемам, приведенным на рис. 1 и 2. Сравнение представлений (32) и (25) позволяет использовать результаты (27)–(31) по определению скоростей распространения акустических волн в кубическом материале для изотропного материала, положив в них $G' = G$.

Влияние начальных напряжений на распространение акустических волн в изотропных гипотропных телах рассматривалось в работах [9, 10]. В работе [10] подробно рассмотрен эффект расщепления сдвиговых (поперечных) волн в изотропном материале при действии начальных напряжений. Этот эффект заключается в том, что при действии определенных начальных напряжений в изотропном материале распространяются две сдвиговые волны с разными фазовыми скоростями. Это подтверждается и расчетами по соотношениям (28)–(31) при $G' = G$, причем выражения для фазовых скоростей поперечных волн совпадают с приведенными в [10]. В отличие от работы [10] соотношения (27) и (28) применительно к изотропному материалу прогнозируют изменение фазовой скорости продольной волны, которое наблюдается в экспериментах [11]. Показано, что если начальные напряжения сводятся к нормальным напряжениям в плоскости, параллельной фронту волны, то в изотропном материале это не приводит к расщеплению сдвиговых волн.

Результаты проведенного анализа показывают, что при действии начальных напряжений изотропный материал приобретает анизотропию акустических свойств.

Это проявляется не только в эффекте расщепления сдвиговых волн, но и в том, что при действии в плоскости фронта волны касательных напряжений вектор поляризации продольной волны отклоняется от вектора волновой нормали, т.е. в материале распространяются квазипродольная, квазипоперечная и поперечная волны, что присуще анизотропным материалам.

Заключение

В статье получено линеаризованное уравнение распространения акустических волн в гипотупругих средах, записанное относительно поля скоростей, приводящего к возмущению начальной конфигурации среды. Начальное состояние среды характеризуется однородными конечными деформациями и начальными напряжениями. Учет геометрической нелинейности в уравнениях динамики позволил получить симметричный акустический тензор (24). Проведен анализ влияния начальных напряжений на фазовые скорости распространения волн в анизотропных материалах с кубической симметрией свойств и в изотропных материалах.

Показано, что если в кубическом материале плоская волна распространяется вдоль одной из осей анизотропии, то нормальные напряжения в плоскости фронта волны оказывают влияние на фазовые скорости распространения как продольных, так и поперечных волн. Нормальные напряжения, действующие перпендикулярно вектору волновой нормали, влияют только на величину фазовой скорости поперечной волны, поляризованной вдоль направления действия напряжений. Касательные напряжения, действующие в плоскости фронта волны, влияют на скорости распространения квазипродольной и квазипоперечной волн. Касательные напряжения, действующие в плоскости, перпендикулярной фронту волны, влияют только на фазовые скорости поперечных волн. Учет влияния начальных напряжений на распространение волн в изотропном гипотупругом материале позволил выявить появление анизотропии акустических свойств среды и описать эффект расщепления поперечных волн.

Список источников

1. Truesdell C. General and exact theory of waves in finite elastic strain // Arch. Ratio. Mech. Anal. 1961. V. 8, № 1. P. 263–296. doi: 10.1007/978-3-642-88691-1_5
2. Pau A., Vestroni F. The role of material and geometric nonlinearities in acoustoelasticity // Wave Motion. 2019. V. 86. P. 79–90. doi: 10.1016/j.wavemoti.2018.12.005
3. Yang H., Fu L.-Y., Fu B.-Y., Müller T.M. Acoustoelastic FD simulation of elastic wave propagation in prestressed media // Front. Earth Sci. 2022. V. 10. Art. 886920. doi: 10.3389/feart.2022.886920
4. Kolpakov A.G., Andrianov I.V., Rakin S.I. On the influence of initial stresses on the velocity of elastic waves in composites // Computation. 2023. V. 11, № 15. P. 1–19. doi: 10.3390/computation11020015
5. Kube C.M. Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion // J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 141, № 6. P. 4756–4767. doi: 10.1121/1.4986747
6. Domański W., Jemioło S., Franus A. Propagation and interaction of weakly nonlinear plane waves in transversely isotropic elastic materials // J. Eng. Math. 2021. V. 127, № 8. P. 1–15. doi: 10.1007/s10665-021-10093-8
7. Rushchitsky J.J. Nonlinear plane waves in hypoelastic materials // Nonlinear elastic waves in materials. Foundations of Engineering Mechanics. Cham : Springer, 2014. doi: 10.1007/978-3-319-00464-8_8

8. Rushchitsky J.J. On the types and number of plane waves in hypoelastic materials // *International Applied Mechanics*. 2005. V. 41, № 11. P. 1288–1298. doi: 10.1007/s10778-006-0035-x
9. Demidov V.N. Acoustic properties of isotropic hypoelastic materials with residual technological stresses // *Key Engineering Materials*. 2016. V. 712. P. 384–389. doi: 10.4028/www.scientific.net/kem.712.384
10. Демидов В.Н. О расщеплении волн сдвига в изотропных гипопругих материалах // *Физическая мезомеханика*. 2000. Т. 3, № 2. С. 15–36.
11. Коробов А.И., Кокиайский А.И., Михалев Е.С., Одина Н.И., Ширгина Н.В. Исследования упругих свойств полимера PLA статическими и ультразвуковыми методами // *Акустический журнал*. 2021. Т. 67, № 4. С. 387–394. doi: 10.31857/S0320791921040067
12. Telichko A.V., Erohin S.V., Kvashnin G.M., Sorokin P.B., Sorokin B.P., Blank V.D. Diamond's third-order elastic constants: ab initio calculations and experimental investigation // *J. Mater. Sci*. 2017. V. 52. P. 3447–3456. doi: 10.1007/s10853-016-0633-x
13. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 512 с.
14. Haupt P., Pao Y.-H., Hutter K. Theory of incremental motion in a body with initial elastoplastic deformation // *J. Elasticity*. 1992. V. 28. P. 93–221. doi: 10.1007/BF00132211
15. Роменский Е.И., Лысь Е.В., Чеверда В.А., Энов М.И. Динамика деформирования упругой среды с начальными напряжениями // *Прикладная механика и техническая физика*. 2017. Т. 58, № 5. С. 178–189. doi: 10.15372/PMTF20170518
16. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
17. Соколова М.Ю., Христич Д.В. Конечные деформации нелинейно упругих анизотропных материалов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 70. С. 103–116. doi: 10.17223/19988621/70/9
18. Соколова М.Ю., Христич Д.В. Об обращении нелинейных определяющих соотношений для гиперупругих анизотропных материалов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2023. № 85. С. 157–167. doi: 10.17223/19988621/85/12

References

1. Truesdell C. (1961) General and exact theory of waves in finite elastic strain. In: *Wave Propagation in Dissipative Materials*. Berlin – Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-88691-1_5
2. Pau A., Vestroni F. (2019) The role of material and geometric nonlinearities in acoustoelasticity. *Wave Motion*. 86. pp. 79–90. doi: 10.1016/j.wavemoti.2018.12.005
3. Yang H., Fu L.-Y., Fu B.-Y., Müller T.M. (2022) Acoustoelastic FD simulation of elastic wave propagation in prestressed media. *Frontiers Earth Science*. 10. Article 886920. doi: 10.3389/feart.2022.886920
4. Kolpakov A.G., Andrianov I.V., Rakin S.I. (2023) On the influence of initial stresses on the velocity of elastic waves in composites. *Computation*. 11(15). doi: 10.3390/computation11020015
5. Kube C.M. (2017) Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion. *Journal of the Acoustical Society of America*. 141(6). pp. 4756–4767. doi: 10.1121/1.4986747
6. Domański W., Jemioło S., Franas A. (2021) Propagation and interaction of weakly nonlinear plane waves in transversely isotropic elastic materials. *Journal of Engineering Mathematics*. 127(8). doi: 10.1007/s10665-021-10093-8
7. Rushchitsky J.J. (2014) Nonlinear plane waves in hypoelastic materials. In: *Nonlinear Elastic Waves in Materials. Foundations of Engineering Mechanics*. Cham: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-00464-8_8
8. Rushchitsky J.J. (2005) On the types and number of plane waves in hypoelastic materials. *International Applied Mechanics*. 41. pp. 1288–1298. doi: 10.1007/s10778-006-0035-x
9. Demidov V.N. (2016) Acoustic properties of isotropic hypoelastic materials with residual technological stresses. *Key Engineering Materials*. 712. pp. 384–389. doi: 10.4028/www.scientific.net/kem.712.384

10. Demidov V.N. (2000) O rasshcheplenii voln sdviga v izotropnykh gipouprugikh materialakh [On the splitting of shear waves in isotropic hypoelastic materials]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 3(2). pp. 15–36.
11. Korobov A.I., Kokshaitskii A.I., Mikhalev E.S., Odina N.I., Shirgina N.V. (2021) A study of the elastic properties of the polymer PLA by static and ultrasonic methods. *Acoustical Physics*. 67(4). pp. 375–380. doi: 10.1134/S1063771021040060
12. Telichko A.V., Erohin S.V., Kvashnin G.M., Sorokin P.B., Sorokin B.P., Blank V.D. (2017) Diamond's third-order elastic constants: ab initio calculations and experimental investigation. *Journal of Materials Science*. 52. pp. 3447–3456. doi: 10.1007/s10853-016-0633-x
14. Haupt P., Pao Y.-H., Hutter K. (1992) Theory of incremental motion in a body with initial elasto-plastic deformation. *Journal of Elasticity*. 28. pp. 93–221. doi: 10.1007/BF00132211
15. Romenskii E.I., Lys' E.B., Cheverda V.A., Epov M.I. (2017) Dynamics of deformation of an elastic medium with initial stresses. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 58(5). pp. 914–923. doi: 10.1134/S0021894417050182
16. Markin A.A., Sokolova M.Yu. (2015) *Thermomechanics of Elastoplastic Deformation*. Cambridge: Cambridge International Science Publishing.
17. Sokolova M.Yu., Khristich D.V. (2021) Konechnye deformatsii nelineyno uprugikh anizotropnykh materialov [Finite strains of nonlinear elastic anisotropic materials]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 70. pp. 103–116. doi: 10.17223/19988621/70/9
18. Sokolova M.Yu., Khristich D.V. (2023) Ob obrashchenii nelineynykh opredelyayushchikh sootnosheniy dlya giperuprugikh anizotropnykh materialov [On inversion of nonlinear constitutive relations for hyperelastic anisotropic materials]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 157–167. doi: 10.17223/19988621/85/12

Сведения об авторах:

Соколова Марина Юрьевна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (Тула, Россия). E-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Маркин Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (Тула, Россия). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

Information about the authors:

Sokolova Marina Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Markin Aleksey A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 19.03.2024; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 19.03.2024; accepted for publication 03.10.2024

Научная статья

УДК 532.5-1/-9

doi: 10.17223/19988621/91/11

Новый подход к моделированию развития трещин автоГРП

Константин Михайлович Фёдоров¹,
Александр Павлович Шевелёв², Александр Янович Гильманов³,
Алексей Александрович Изотов⁴,
Александр Вячеславович Кобяшев⁵

^{1, 2, 3} Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

^{4, 5} ООО «Тюменский нефтяной научный центр», Тюмень, Россия

¹ k.m.fedorov@utmn.ru

² a.p.shevelev@utmn.ru

³ a.y.gilmanov@utmn.ru

⁴ aaizotov@tnnc.rosneft.ru

⁵ avkobyashev@tnnc.rosneft.ru

Аннотация. Предложен новый подход к моделированию развития трещин автогидроразрыва пласта. В рамках квазистационарной математической модели роста трещины автогидроразрыва пласта выделяются область, где происходит оседание дисперсных частиц, и область, в которой происходит рост трещины с запаздывающим движением фронта суспензии. Математическая постановка задачи основана на системе уравнений механики многофазных сред. Решение полученной интегродифференциальной системы уравнений проведено аналитически. Показано влияние параметров породы и флюида на рост трещины автогидроразрыва пласта.

Ключевые слова: рост трещины автоГРП, закон сохранения массы, концентрация частиц, интегральное гидравлическое сопротивление, модель глубокого проникновения частиц, коэффициент повреждения породы

Для цитирования: Фёдоров К.М., Шевелёв А.П., Гильманов А.Я., Изотов А.А., Кобяшев А.В. Новый подход к моделированию развития трещин автоГРП // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 125–140. doi: 10.17223/19988621/91/11

A NEW APPROACH FOR MODELING THE DEVELOPMENT OF INJECTION-INDUCED HYDRAULIC FRACTURES

Konstantin M. Fyodorov¹, Aleksandr P. Shevelev²,
Aleksandr Ya. Gil'manov³, Aleksey A. Izotov⁴, Aleksandr V. Kobyashev⁵

^{1, 2, 3} University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

^{4, 5} Tyumen Petroleum Research Center, Tyumen, Russian Federation

¹ k.m.fedorov@utmn.ru

² a.p.shevelev@utmn.ru

³ a.y.gilmanov@utmn.ru

⁴ aaizotov@tnc.rosneft.ru

⁵ avkobyashev@tnc.rosneft.ru

Abstract. A new approach for modeling the development of injection-induced hydraulic fractures is proposed in this paper. The fracture is assumed to be elliptical in the cross-section. The initial fracture length is determined by the mass conservation law and Darcy's law. A quasi-stationary mathematical model of injection-induced hydraulic fracture growth is based on the specification of two characteristic areas of the fracture: in the first, the dispersed particles settle down near the boundaries of the developed fracture; in the second, the fracture expands with the retarded motion of the suspension front. The mathematical formulation of the problem includes the law of conservation of phase mass, Darcy's law, and the equation for the integral hydraulic resistance. Boundary conditions correspond to the injection of water with dispersed particles through the well into the fracture. The resulting integro-differential system of equations is solved analytically. The effect of the reservoir and fluid parameters on the growth of injection-induced hydraulic fracture is shown. The fracture growth decelerates over time. The increased rock-damage factor leads to faster fracture growth.

Keywords: fracture growth, mass conservation law, particle concentration, integral hydraulic resistance, model of deep bed penetration of particles, rock damage factor

For citation: Fyodorov, K.M., Shevelyov, A.P., Gil'manov, A.Ya., Izotov, A.A., Kobyashev, A.V. (2024) A new approach for modeling the development of injection-induced hydraulic fractures. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 125–140. doi: 10.17223/19988621/91/11

Введение

При заводнении нефтяных месторождений в центральной части, как правило, осуществляется компенсация отбора жидкости закачкой в пласт воды [1, 2]. Увеличение темпов закачки воды приводит к росту давления вблизи нагнетательной скважины. В результате этого давление нагнетания может превысить максимальное давление, которое выдерживает порода [3, 4], что приводит к образованию трещин автогидроразрыва пласта, или автоГРП [5, 6]. Вместе с закачкой техниче-

ской воды в пласт поступают дисперсные частицы, что приводит к ухудшению фильтрационно-емкостных свойств пласта вблизи трещины [7, 8]. При постоянном расходе закачиваемой воды засорение зоны вблизи трещины ведет к росту давления в трещине и увеличению ее размеров [3, 9] до тех пор, пока не произойдет компенсация закачки оттоком воды через боковые стенки трещины. Неконтролируемый рост трещины может вызвать образование высокопроводящего канала между нагнетательной и добывающими скважинами, что приведет к росту доли воды в добываемой продукции [10]. Прогнозирование развития трещины автоГРП позволяет определить время для начала мероприятий, направленных на ограничение ее размеров и роста [2, 11].

Распространенным подходом к моделированию и прогнозированию развития трещин гидроразрыва пласта является использование одномерных моделей [12, 13]. Среди одномерных моделей развития техногенной трещины выделяется две модели, различных по геометрии вертикального сечения техногенной трещины и геомеханическим соотношениям. В первой предполагается, что это сечение является прямоугольным, а геомеханические напряжения на стенке трещины рассматриваются в латеральной плоскости развития трещины. Такая модель называется KGD (модель Христиановича–Гирстмы–Де Клерка (Khristianovich–Geertsma–De Klerk)) [14, 15]. В другой модели вертикальное сечение трещины считается эллиптическим, а геомеханические напряжения рассматриваются в вертикальной плоскости. Такая модель называется PKN (модель Перкинса–Керна–Нордгрена (Perkins–Kern–Nordgren)) [16–18]. Обе модели основаны на законах сохранения массы и импульса, а также геомеханических соотношениях между шириной трещины и давлением в ней. Хотя более сложные гибридные [19] и многомерные модели [20–22] позволяют проводить точные расчеты, для экспресс-оценок при оперативном принятии решений необходимо использовать одномерные модели. Описанные одномерные модели не учитывают рост трещины автоГРП, вызванный падением оттока из трещины из-за оседания дисперсных частиц вблизи границы трещины, и соответствующее нарушение баланса притока жидкости в трещину и оттока из нее. Этот эффект учитывается в настоящей работе впервые. Механизм оседания дисперсных частиц отличен от законов переноса проппанта и требует разработки принципиально новой математической модели.

Анализ процесса развития трещины в рамках одномерных моделей показал, что рост трещины происходит на масштабах времен минут и часов. В то же время процесс загрязнения зоны вблизи трещины автоГРП суспензией, переносимой вместе с закачиваемой водой, происходит на значительно больших масштабах времен. То есть снижение проницаемости зоны около трещины и соответствующий рост давления в трещине при постоянном расходе закачиваемой жидкости можно рассматривать в рамках квазистационарного режима. Таким образом, задача расщепляется на две составляющие: проникновение суспензии в пласт и снижение его проводимости, при этом в каждый момент времени реализуется стационарный режим работы трещины. В работе впервые предлагается квазистационарная модель развития трещины, рост которой обусловлен закачкой воды с дисперсными частицами в трещину. В отличие от существующих моделей, в этой модели процесс оседания дисперсных частиц в пористой среде вблизи границ трещины описывается в рамках приближения глубокого проникновения суспензии в пористую среду [23, 24].

Определение квазистационарной длины трещины автоГРП в нулевой момент времени

Постановка задачи о стабилизации размеров трещины автоГРП является следующей. Пусть имеется пласт с абсолютной проницаемостью k , в который пробурена нагнетательная скважина для закачки воды с постоянным расходом $2Q_0$, где Q_0 – расход закачиваемой в половину трещины воды. Давление гидроразрыва пласта превышает горное давление вышележащих пород, при отсутствии экспериментальных и промысловых данных часто используется стандартная оценка минимальных напряжений по формуле Итона

$$P_f = P_r + \frac{\nu}{1-\nu}(P_m - P_r) + P_l,$$

где P_r – пластовое давление, ν – коэффициент Пуассона, P_m – горное давление, P_l – предел прочности породы на разрушение, P_f – давление гидроразрыва породы.

В силу предполагаемой симметрии трещины достаточно рассмотреть половину длины трещины l . Задача рассматривается в одномерном приближении с осью координат x , направленной вдоль трещины, начало координат расположено на забое нагнетательной скважины (рис. 1). Вертикальное сечение трещины считается эллиптическим, а горизонтальное подлежит определению, что соответствует геометрии модели PKN. Мощность трещины считается величиной, постоянной по всей ее длине. Пласт считается изотропным и состоящим из одного пропластка. Вводится допущение о линейности оттока жидкости в пласт, также не будут учитываться различные краевые эффекты в прискважинных зонах. При этом скорость фильтрации жидкости должна быть достаточно низкой, чтобы было возможно использовать закон Дарси для описания оттока жидкости в пласт. Оседание дисперсных частиц в пласте является «медленным» процессом по сравнению с формированием трещины автоГРП, поэтому на первом этапе этим оседанием пренебрегается. Вводится односкоростное приближение для потока жидкости и дисперсных частиц по трещине.

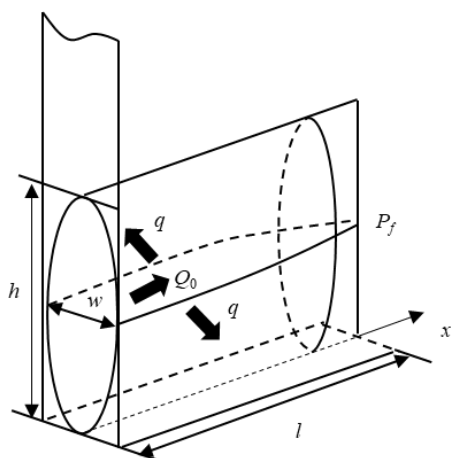


Рис. 1. Схема геометрии задачи с направлением потоков
Fig. 1. Schematic geometry of the problem with flow directions

Первоначальное состояние трещины описывается стационарным уравнением сохранения массы суспензии в трещине эллиптической формы с постоянной длиной. Это уравнение при условии $h \gg w$ (h – вертикальный размер трещины (считается, этот размер совпадает с мощностью продуктивного интервала), w – максимальная ширина трещины в поперечном движении жидкости направлении) имеет вид:

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{\pi h_e}{\sqrt{2}} q, \quad (1)$$

где Q – суммарный поток суспензии через одно крыло трещины, q – удельный отток суспензии из трещины через ее стенки, h_e – эффективная мощность пласта (за вычетом глинистых пропластков). Граничное условие для потока задается как постоянный расход Q_0 на входе в крыло трещины:

$$Q|_{x=0} = Q_0. \quad (2)$$

Для рассмотрения стационарного состояния трещины автоГРП зона возмущений давления в пласте ограничивается «контуrom питания скважины». Для вертикальной скважины принимается, что на удалении L от трещины поддерживается пластовое давление P_r . Для расчета распределения давления необходима математическая модель, состоящая из закона сохранения массы в одномерном случае для дисперсных частиц и для несущей фазы в дифференциальной форме

$$\frac{\partial(hwC)}{\partial t} + \frac{\partial(hwCv)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(hw(1-C))}{\partial t} + \frac{\partial(hw(1-C)v)}{\partial x} = -qh_e,$$

закона Пуазейля для скорости течения суспензии по трещине

$$v = -\frac{w^2}{16\mu} \frac{\partial P}{\partial x},$$

закона Дарси для оттока жидкости из трещины в пласт

$$q = \frac{kk_r(S_{or})}{\mu L} (P - P_r).$$

Здесь C – массовая концентрация частиц в потоке, v – скорость потока по трещине, $k_r(S_{or})$ – относительная фазовая проницаемость воды при остаточной нефтенасыщенности S_{or} , μ – вязкость закачиваемой суспензии в пластовых условиях, P – давление.

Граничные условия соответствуют заданному забойному P_w и пластовому P_r давлениям:

$$P(x=0) = P_w, \quad P(x=l) = P_r.$$

Рассмотрение задачи в «квазистационарном» состоянии, когда характерные времена загрязнения пласта значительно превышают время роста трещины автоГРП, позволяют считать, что поле давления вблизи трещины также имеет стационарный вид. Расчеты по традиционным моделям развития трещин показывают, что давление в трещине незначительно превышает давление гидроразрыва, в пределах 3–5%, поэтому давление в трещине примерно равно давлению гидроразрыва [25]. Это же подтверждается расчетом по вышеприведенной математической модели. Тогда отток жидкости из трещины автоГРП, согласно закону Дарси и сделанным допущениям, примет вид:

$$q = \frac{kk_r(S_{or})}{\mu L}(P_f - P_r). \quad (3)$$

С учетом квазистационарного приближения загрязнение призабойной зоны скважины и рост забойного давления до значения гидроразрыва приводят к формированию первого квазистационарного состояния – трещины автоГРП без загрязнения пласта вблизи ее стенок. Это квазистационарное состояние соответствует интегральному равенству потока суспензии, закачиваемой в пласт, и ее оттока через стенки трещины в незагрязненный пласт:

$$\int_0^{l_0} \frac{dQ}{dx} dx = - \int_0^{l_0} \frac{\pi h_e}{\sqrt{2}} q dx, \quad Q_0 = \frac{\pi h_e}{\sqrt{2}} \frac{kk_r(S_{or})}{\mu L} (P_f - P_r) l_0, \quad (4)$$

где l_0 – начальная длина трещины автоГРП в квазистационарном приближении. Значение l_0 определяет размеры первой зоны трещины.

Трещины автоГРП на практике являются нежелательным явлением, приводящим к преждевременному обводнению продукции добывающих скважин [26]. Для предотвращения их формирования необходимо контролировать расход закачиваемой воды. В этом случае предельный расход, при котором трещина автоГРП не формируется, может быть оценен по классической формуле Дюпюи как расход, при котором забойное давление не превосходит давления разрыва породы.

Квазистационарная модель роста трещины автоГРП

После «быстрого» формирования первой зоны трещины автоГРП в нулевой момент времени начинается «медленный» процесс фильтрации суспензии (потока воды и частиц малого размера, проникающих в пористую среду) в направлении, перпендикулярном развитию трещины. Процессы фильтрации суспензии и засорения пористой среды в рамках известной теории глубокого проникновения частиц (deep bed suspension penetration) рассмотрены в работах [7, 8, 23, 24]. Задача о распространении суспензии в перпендикулярном к трещине направлении рассматривается в одномерном приближении, когда распределение частиц в каждом сечении трещины меняется слабо и пренебрегается потоком суспензии в пласте в направлении оси x . Загрязнение пористой среды в приведенных исследованиях описывается функцией дополнительного гидравлического сопротивления $g(t, z)$ [7], где z – координата, перпендикулярная оси x , t – время. Интегральное гидравлическое сопротивление осевших в пористой среде частиц определяется интегралом

$$g_0(t) = \frac{1}{L} \int_0^L g(t, z) dz.$$

Соответственно, проницаемость пласта с учетом загрязнения будет равна $k^* = k/g_0(t)$. В первой области формирования исходной трещины автоГРП интегральное загрязнение пласта проходит однородно по времени и не зависит от координаты x в силу одинаковых начальных и граничных условий для оттока суспензии вдоль первой зоны трещины. Загрязнение, как отмечалось выше, приводит к росту давления закачки при постоянном расходе суспензии, поступающей в трещину, и дальнейшему росту длины трещины. Таким образом, будет происходить формирование второй зоны развития трещины автоГРП. В первой, ограниченной размером l_0 , загрязнение пласта зависит только от времени, во вто-

рой загрязнение будет зависеть от координаты x или от времени подхода конца трещины к этой же координате t_x . Схема развития трещины в этот период приведена на рис. 2. В этом случае закон сохранения массы суспензии сохранит вид (1) при том же граничном условии (2) на входе в первую зону.

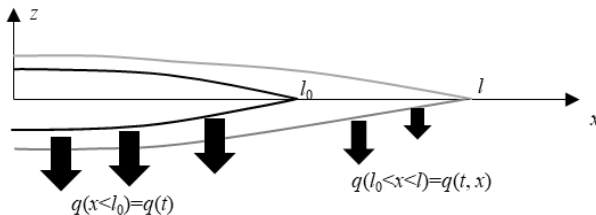


Рис. 2. Образование трещины автоГРП в первой области и ее развитие с образованием второй области

Fig. 2. Formation of an injection-induced hydraulic fracture in the first area and its development with the formation of the second area

Однако отток жидкости из трещины (3) будет учитывать наличие дополнительного гидравлического сопротивления в двух вышеописанных зонах развития трещины автоГРП:

$$q = \begin{cases} \frac{kk_r(S_{or})}{\mu L g_0(t)} (P_f - P_r), x \leq l_0, \\ \frac{kk_r(S_{or})}{\mu L g_0(t - t_x)} (P_f - P_r), x > l_0. \end{cases}$$

При этом функция t_x является обратной к искомой функции $l(t)$ во второй зоне $x > l_0$. Баланс массы суспензии в первой области будет иметь вид:

$$\int_0^{l_0} \frac{dQ}{dx} dx = Q_1(t) - Q_0 = -\frac{\pi h_e}{\sqrt{2}} \frac{kk_r(S_{or})}{\mu L} \frac{l_0}{g_0(t)} (P_f - P_r). \quad (5)$$

Из этого соотношения можно определить расход на входе во вторую область $Q_1(t)$, а также найти производную скорости развития квазистационарной трещины в начальный момент времени:

$$\left. \frac{dl}{dt} \right|_{t=0} = \frac{Q_0 \mu L \sqrt{2}}{\pi h_e kk_r(S_{or}) (P_f - P_r)} \frac{dg_0(t)}{dt}. \quad (6)$$

Во второй области интегральный баланс массы суспензии записывается в виде:

$$\int_{l_0}^l \frac{dQ}{dx} dx = -Q_1(t) = -\frac{\pi h_e}{\sqrt{2}} \frac{kk_r(S_{or})}{\mu L} (P_f - P_r) \int_{l_0}^l \frac{dx}{g_0(t - t_x)}. \quad (7)$$

При сложении формул (5) и (7) получается следующее выражение:

$$\int_0^{l_0} \frac{dQ}{dx} dx + \int_{l_0}^l \frac{dQ}{dx} dx = -\frac{\pi h_e}{\sqrt{2}} \frac{kk_r(S_{or})}{\mu L} (P_f - P_r) \left(\frac{l_0}{g_0(t)} + \int_{l_0}^l \frac{dx}{g_0(t - t_x)} \right).$$

С учетом условия равенства потока нулю на конце трещины:

$$\frac{Q_0 \mu L \sqrt{2}}{\pi h_e kk_r(S_{or}) (P_f - P_r)} = \frac{l_0}{g_0(t)} + \int_{l_0}^l \frac{dx}{g_0(t - t_x)}.$$

Результатом дифференцирования полученного выражения по l является дифференциальное уравнение для скорости роста трещины

$$0 = -\frac{l_0}{g_0^2(t)} \frac{dg_0(t)}{dt} \frac{dt}{dl} + 1, \quad (8)$$

в котором учтено, что $t_x(l) = t$. Для его решения необходимо определить динамику загрязнения пласта вблизи трещины $g_0(t)$. Начальным условием для этого уравнения является выражение $l(t=0) = l_0$.

Для определения дополнительного гидравлического сопротивления $g_0(t)$ необходимо решить задачу о фильтрации суспензии из трещины в пласт. Задача решается в рамках приближения глубокого проникновения в пласт суспензии (deep bed suspension penetration), учитывающего одинаковую скорость фаз. Основные уравнения этого приближения состоят из законов сохранения массы частиц в потоке, удержанных частиц и несущей фазы:

$$\frac{\partial(mC + \sigma)}{\partial t} + \frac{\partial(qC)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda q C, \quad m \frac{\partial(1-C)}{\partial t} + \frac{\partial(q(1-C))}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

где m – пористость, C – массовая концентрация частиц в потоке, λ – коэффициент фильтрации, σ – массовая концентрация удержанных частиц.

Обобщенный закон Дарси, учитывающий удерживание частиц в пористой среде, имеет вид:

$$q = \frac{kk_r(S_{or})}{\mu g(t, z)} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (10)$$

здесь P – давление в пористой среде, $g(t, z)$ – дополнительное гидравлическое сопротивление за счет удержанных частиц, которое имеет вид:

$$g(t, z) = 1 + \beta \sigma(t, z), \quad (11)$$

где β – коэффициент повреждения породы.

Модель проникновения частиц в пласт, или уравнения (9)–(11), решается относительно пяти неизвестных: C , σ , q , P , g . Первый порядок малости имеют величины C и σ по сравнению с остальными величинами.

При сложении уравнений в (9) можно получить выражение

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0.$$

Поскольку концентрация частиц примеси мала, то можно пренебречь малым членом – производной массовой концентрации удержанных частиц по времени – по сравнению с большим – производной потока q по z , тогда из получившегося уравнения поток q не зависит от координаты z .

Далее для упрощения процедуры решения и уменьшения числа параметров, входящих в систему уравнений (9)–(11), вводятся безразмерные переменные

$$Z = \frac{z}{L}; \quad T = \frac{1}{mL} \int_0^t q dt; \quad \Lambda = \lambda L.$$

Начальные и граничные условия для представленной системы уравнений формулируются как задача Коши:

$$T = 0, Z > 0: \quad C = \sigma = 0; \quad T > 0, Z = 0: \quad C = C_0,$$

где C_0 – значение концентрации дисперсных частиц в закачиваемой смеси.

Решение задачи Коши для безразмерных уравнений методом характеристик подробно описано в [7] и имеет вид:

$$C = C_0 e^{-\Lambda z}; \quad \sigma = m \Lambda T C_0 e^{-\Lambda z}; \quad g = 1 + \beta m \Lambda T C_0 e^{-\Lambda z}.$$

Отличие полученного решения заключается в том, что в [7] решение строится для постоянного расхода суспензии, поступающей в пласт, в приведенном решении в трещине поддерживается постоянное давление. Значение интегрального гидравлического сопротивления приводится с учетом полученных решений к виду:

$$g_0(t) = 1 + \frac{\beta C_0 k k_r (S_{or}) (1 - e^{-\Lambda L}) (P_f - P_r)}{\mu L^2} \int_0^t \frac{dt}{g_0(t)}. \quad (12)$$

Начальное условие для интегрального гидравлического сопротивления осевших в пористой среде частиц очевидно:

$$g_0(t=0) = 1. \quad (13)$$

Дифференцирование уравнения (12) позволяет получить обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $g_0(t)$, решение которого с учетом (13) имеет вид:

$$g_0(t) = \sqrt{1 + \frac{2\beta C_0 k k_r (S_{or}) (1 - e^{-\Lambda L}) (P_f - P_r)}{\mu L^2} t}.$$

С учетом полученного решения для интегрального гидравлического сопротивления можно аналитически разрешить уравнение (8). Согласно этому решению зависимость длины трещины от времени имеет вид:

$$l = l_0 \left[2 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\beta C_0 k k_r (S_{or}) (1 - e^{-\Lambda L}) (P_f - P_r)}{\mu L^2} t}} \right]. \quad (14)$$

Анализ результатов дифференцирования выражения (14) в момент времени $t = 0$ приводит к эквивалентному (6) выражению, что свидетельствует о корректности проведенных преобразований.

Расчет динамики роста трещины автоГРП

Рассматривается модельный пласт со следующими параметрами породы и закачиваемого флюида: $\beta = 400$, $C_0 = 0.01$, $\lambda = 10 \text{ м}^{-1}$, $L = 250 \text{ м}$, $k = 20 \text{ мД}$, $\mu = 1 \text{ мПа}\cdot\text{с}$, $Q_0 = 0.001 \text{ м}^3/\text{с}$, $P_r = 30 \text{ МПа}$, $h_e = 20 \text{ м}$, $k_r(S_{or}) = 0.2$, $\nu = 0.2$, $P_m = 70 \text{ МПа}$, $P_l = 5 \text{ МПа}$. При указанных параметрах по формуле (14) рассчитана динамика увеличения длины трещины автоГРП, приведенная на рис. 3. Начальный размер трещины при заданных параметрах составляет 94 м. В соответствии с моделью РKN данное значение достигается за время порядка 1 ч. При этом процесс квазистационарного роста трещины за счет загрязнения дисперсными частицами зоны вблизи границ трещины продолжается несколько лет (см. рис. 3). Поэтому начальная длина трещины 94 м принята в момент времени $t = 0$. Анализ полученной зависимости показывает, что за 5 лет длина трещины увеличивается примерно на 32%.

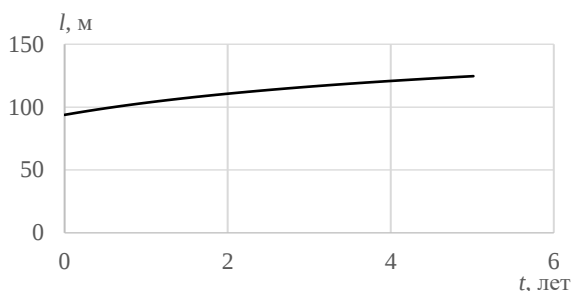


Рис. 3. Динамика развития трещины автоГРП
Fig. 3. Dynamics of the injection-induced hydraulic fracture

Медленный рост трещины подтверждает справедливость квазистационарного приближения, поскольку в соответствии с классической моделью РКН первоначальный рост трещины вследствие разрыва породы длится в пределах нескольких часов [18]. Скорость роста трещины постепенно снижается. Со временем часть трещины, которая увеличивается из-за превышения значения закачиваемого расхода над величиной оттока из трещины, составляет все меньшую долю от общей длины трещины. Однако даже увеличение длины трещины на 32% может привести к ее попаданию в зону дренирования добывающей скважины, поэтому необходим контроль ее развития.

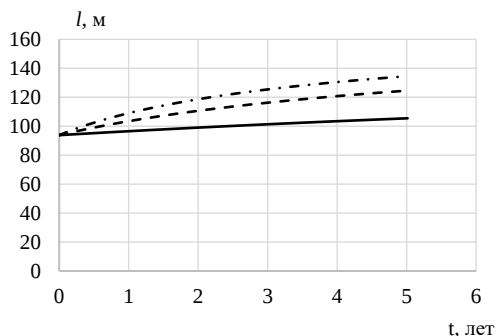


Рис. 4. Влияние коэффициента повреждения породы β на динамику развития трещины автоГРП: сплошная кривая соответствует $\beta = 100$, штрихованная – $\beta = 400$, штрихпунктирная – $\beta = 700$

Fig. 4. Effect of the rock damage factor β on the dynamics of the injection-induced hydraulic fracture development: $\beta = 100$ (solid line), $\beta = 400$ (dashed line), and $\beta = 700$ (dotted and dashed line)

Рост трещины автоГРП на месторождении может быть быстрее или медленнее в зависимости от свойств пласта и флюида. Наибольший интерес с практической точки зрения представляют коэффициент повреждения породы, концентрация дисперсных частиц в воде и проницаемость пласта. Коэффициент повреждения породы характеризует снижение проницаемости из-за оседания дисперсных частиц в поровых каналах вблизи трещины. Концентрация дисперсных частиц C является показателем их массы в закачиваемой смеси. Проницаемость пласта

фактически характеризует его сопротивление разрыву, поскольку в более проницаемых пластах отток из трещины будет больше. Оценка влияния коэффициента повреждения породы показывает, что с возрастанием его значения длина трещины увеличивается быстрее (рис. 4). Этот ожидаемый эффект вызван снижением оттока из трещины из-за снижения проницаемости при увеличении значения β .

Увеличение C также приводит к более быстрому развитию трещины (рис. 5), поскольку в этом случае большая масса дисперсных частиц оседает в пористой среде вблизи границ трещины.

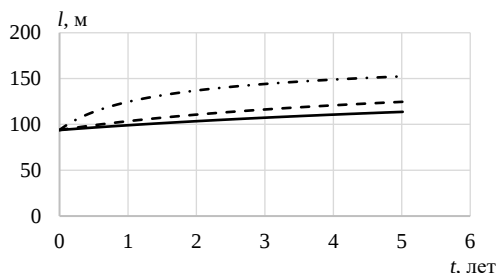


Рис. 5. Влияние концентрации дисперсных частиц C_0 на динамику развития трещины автоГРП: сплошная кривая соответствует $C_0 = 0.005$, штрихованная – $C_0 = 0.01$, штрихпунктирная – $C_0 = 0.05$

Fig. 5. Effect of the concentration of dispersed particles C_0 on the dynamics of the injection-induced hydraulic fracture development: $C_0 = 0.005$ (solid line), $C_0 = 0.01$ (dashed line), and $C_0 = 0.05$ (dotted and dashed line)

С ростом проницаемости пласта отток из трещины в пласт увеличивается. Поэтому расход нагнетаемой смеси в большей степени скомпенсирован этим оттоком. В таком случае в соответствии с (4) и начальная длина трещины будет меньше (рис. 6), а трещина увеличивается до меньших размеров.

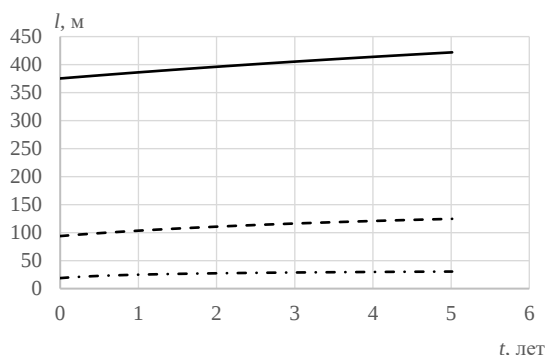


Рис. 6. Влияние проницаемости пласта k на динамику развития трещины автоГРП: сплошная кривая соответствует $k = 5$ мД, штрихованная – $k = 20$ мД, штрихпунктирная – $k = 100$ мД

Fig. 6. Effect of the reservoir permeability k on the dynamics of the injection-induced hydraulic fracture development: $k = 5$ mD (solid line), $k = 20$ mD (dashed line), and $k = 100$ mD (dotted and dashed line)

Заключение

Разработан новый подход к моделированию развития трещин автоГРП, заключающийся в рассмотрении двух стадий процесса: стабилизации длины трещины при компенсации закачиваемого расхода смеси оттоком из трещины и квазистационарного роста трещины вследствие снижения оттока из-за оседания дисперсных частиц в пласте вблизи границ трещины. Расчеты проведены при следующих параметрах: $\beta = 400$, $C_0 = 0.01$, $\lambda = 10 \text{ м}^{-1}$, $L = 250 \text{ м}$, $k = 20 \text{ мД}$, $\mu = 1 \text{ мПа}\cdot\text{с}$, $Q_0 = 0.001 \text{ м}^3/\text{с}$, $P_r = 30 \text{ МПа}$, $h_e = 20 \text{ м}$, $k_r(S_{or}) = 0.2$, $v = 0.2$, $P_m = 70 \text{ МПа}$, $P_l = 5 \text{ МПа}$.

Показано, что решение интегро-дифференциальной системы уравнений позволяет получить зависимость длины трещины автоГРП от времени, причем при увеличении времени рост трещины замедляется по зависимости с показателем степени $-1/2$.

Установлено, что увеличение коэффициента повреждения породы и концентрации дисперсных частиц в закачиваемой смеси приводит к более быстрому росту трещины автоГРП. Это обусловлено большим снижением оттока из трещины при увеличении этих параметров. В случае если зона дренирования добывающей скважины расположена на расстоянии 125 м от нагнетательной, при заданных модельных параметрах трещина автоГРП попадет в эту зону спустя 5 лет для значений концентрации дисперсных частиц, больших 0.01, после чего ее будет необходимо блокировать. Поэтому на практике необходима очистка нагнетаемой воды, чтобы концентрация частиц в ней не превышала 1%.

Определено, что с ростом проницаемости пласта начальная длина трещины будет меньше, поскольку в этом случае расход нагнетаемой смеси в большей степени скомпенсирован оттоком из трещины, причем зависимость начальной длины трещины от проницаемости пласта является обратно пропорциональной. Показано, что для пластов с проницаемостью менее 5 мД начальная длина трещины составит порядка 400 м, что приведет к попаданию трещины автоГРП в зону дренирования добывающей скважины. Поэтому для низкопроницаемых пластов необходимо поддерживать расход воды на таких значениях, которые меньше предельных, определенных по формуле Дюпюи.

Установлено, что расход нагнетательной скважины для предотвращения формирования трещины автоГРП должен быть меньше предельного значения, определяемого по формуле Дюпюи как значение расхода, при котором забойное давление не превышает давления разрыва породы. Если трещина автоГРП сформировалась, то необходимо провести расчет по разработанной модели и установить, через какое время длина трещины окажется такой, что она попадет в зону дренирования добывающей скважины, тогда необходимо либо снижать расход закачки, либо проводить блокирование трещины автоГРП суспензией.

Список источников

1. Yang Y., Xiao W., Bernabe Y., Xie Q., Wang J., He Y., Li M., Chen M., Ren J., Zhao J., Zheng L. Effect of pore structure and injection pressure on waterflooding in tight oil sandstone cores using NMR technique and pore network simulation // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2022. V. 217. Art. 110886. doi: 10.1016/j.petrol.2022.110886
2. Гильманов А.Я., Фёдоров К.М., Шевелёв А.П. Задача о блокировании техногенной трещины в пласте суспензионной смесью // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 6. С. 27–35. doi: 10.31857/S0568528122600230

3. He J.-C., Zhang K.-S., Liu H.-B., Tang M.-R., Zheng X.-L., Zhang G.-Q. Laboratory investigation on hydraulic fracture propagation in sandstone-mudstone-shale layers // *Petroleum Science*. 2022. V. 19. P. 1664–1673. doi: 10.1016/j.petsci.2022.03.018
4. Yan X., Yu H. Numerical simulation of hydraulic fracturing with consideration of the pore pressure distribution based on the unified pipe-interface element model // *Engineering Fracture Mechanics*. 2022. Art. 108836. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108836
5. Шляпкин А.С. Подход к моделированию гидроразрыва пласта в скважинах с горизонтальным окончанием // *Нефтепромысловое дело*. 2020. № 9. С. 14–19.
6. Сазонов Е.О., Хабибуллин И.Л. Типовые кривые забойного давления для скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва с учетом скин-фактора // *Нефтяное хозяйство*. 2021. № 11. С. 130–132. doi: 10.24887/0028-2448-2021-11-130-132
7. Fedorov K.M., Gilmanov A.Ya., Shevelev A.P., Kobayashv A.V., Anuriev D.A. A theoretical analysis of profile conformance improvement due to suspension injection // *Mathematics*. 2021. V. 9, № 15. P. 1727–1741. doi: 10.3390/math9151727
8. Sacramento R.N., Yang Y., You Z., Waldmann A., Martins A.L., Vaz A.S.L., Zitha P.L.J., Bedrikovetsky P. Deep bed and cake filtration of two-size particles suspension in porous media // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2015. V. 126. P. 201–210. doi: 10.1016/j.petrol.2014.12.001
9. Татосов А.В., Шляпкин А.С. Движение проппанта в раскрывающейся трещине гидроразрыва пласта // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2018. Т. 18, № 2. С. 217–226. doi: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226
10. Байков В.А., Бураков И.М., Латыпов И.Д., Яковлев А.А., Асмандияров Р.Н. Контроль развития техногенных трещин автоГРП при поддержании пластового давления на месторождениях ООО «РН-Юганскнефтегаз» // *Нефтяное хозяйство*. 2012. № 11. С. 30–33.
11. Петухов Н.Ю., Кулушев М.М., Емельянов А.Г., Мироненко А.А. Опыт реализации программы ограничения закачки рабочего агента на Приобском месторождении // *Нефтяное хозяйство*. 2020. № 10. С. 54–58. doi: 10.24887/0028-2448-2020-10-54-58
12. Шляпкин А.С., Татосов А.В. О решении задачи гидроразрыва пласта в одномерной математической постановке // *Нефтяное хозяйство*. 2020. № 12. С. 118–121. doi: 10.24887/0028-2448-2020-12-118-121
13. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есинов Д.В., Куранаков Д.С. Методы моделирования зарождения и распространения трещин. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2016. 312 с.
14. Paullo Munoz L.F., Mejia C., Rueda J., Roehl D. Pseudo-coupled hydraulic fracturing analysis with displacement discontinuity and finite element methods // *Engineering Fracture Mechanics*. 2022. V. 274. Art. 108774. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108774
15. Zhou Y., Yang D., Zhang X., Chen W., Xia X. Numerical investigation of the interaction between hydraulic fractures and natural fractures in porous media based on an enriched FEM // *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. V. 235. Art. 107175. doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.107175
16. Detournay E., Cheng A.H.-D., McLennan J.D. A poroelastic PKN hydraulic fracture model based on an explicit moving mesh algorithm // *Journal of Energy Resource Technology*. 1990. V. 112, № 4. P. 224–230.
17. Байков В.А., Булгакова Г.Т., Ильясов А.М., Кашапов Д.В. К оценке геометрических параметров трещины гидроразрыва пласта // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2018. № 5. С. 64–75.
18. Nordgren R.P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // *SPE Journal*. 1972. V. 12, № 4. P. 306–314. doi: 10.2118/3009-PA
19. Смирнов Н.Н., Тагирова В.Р. Задача о распространении трещины газового разрыва в пористой среде // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2008. № 3. С. 77–93.
20. Киселев А.Б., Кайжуй Л., Смирнов Н.Н., Пестов Д.А. Моделирование течения жидкости в трещине гидроразрыва неоднородно трещиностойкого пласта в плоско-трехмерной

- постановке // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2021. № 2. С. 15–28. doi: 10.31857/S0568528121020055
21. Peirce A. Modeling multi-scale processes in hydraulic fracture propagation using the implicit level set algorithm // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2015. V. 283. P. 881–908. doi: 10.1016/j.cma.2014.08.024
 22. Baykin A.N., Abdullin R.F., Dontsov E.V., Golovin S.V. Two-dimensional models for waterflooding induced hydraulic fracture accounting for the poroelastic effects on a reservoir scale // *Geoenery Science and Engineering*. 2023. V. 224. Art. 211600. doi: 10.1016/j.geoen.2023.211600
 23. Bedrikovetsky P., Zeinijahromi A., Siqueira F.D., Furtado C.A., de Souza A.L.S. Particle detachment under velocity alternation during suspension transport in porous media // *Transport in Porous Media*. 2012. V. 91. P. 173–197. doi: 10.1007/s11242-011-9839-1
 24. Vaz A., Bedrikovetsky P., Fernandes P.D., Badalyan A., Carageorgos T. Determining model parameters for non-linear deep-bed filtration using laboratory pressure measurements // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2017. V. 151. P. 421–433. doi: 10.1016/j.petrol.2017.01.001
 25. Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Моделирование нестационарной фильтрации в системе пласт – трещина гидроразрыва // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 77. С. 158–168. doi: 10.17223/19988621/77/12
 26. Шель Е.В., Кабанова П.К., Ткаченко Д.Р., Базыров И.Ш., Логвинюк А.В. Моделирование инициации и распространения трещины гидроразрыва пласта на нагнетательной скважине для нетрещиноватых терригенных пород на примере Приобского месторождения // *Экспозиция Нефть Газ : научно-технический журнал*. 2020. № 2. С. 34–42.

References

1. Yang Y., Xiao W., Bernabe Y., Xie Q., Wang J., He Y., Li M., Chen M., Ren J., Zhao J., Zheng L. (2022) Effect of pore structure and injection pressure on waterflooding in tight oil sandstone cores using NMR technique and pore network simulation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 217. Article 110886. doi: 10.1016/j.petrol.2022.110886
2. Gil'manov A.Ya., Fedorov K.M., Shevelev A.P. (2022) Problem of blocking a technogenic fracture in the reservoir using a suspension mixture. *Fluid Dynamics*. 57(6). pp. 720–728. doi: 10.1134/S0015462822600936
3. He J.-C., Zhang K.-S., Liu H.-B., Tang M.-R., Zheng X.-L., Zhang G.-Q. (2022) Laboratory investigation on hydraulic fracture propagation in sandstone-mudstone-shale layers. *Petroleum Science*. 19. pp. 1664–1673. doi: 10.1016/j.petsci.2022.03.018
4. Yan X., Yu H. (2022) Numerical simulation of hydraulic fracturing with consideration of the pore pressure distribution based on the unified pipe-interface element model. *Engineering Fracture Mechanics*. 275. Article 108836. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108836
5. Shlyapkin A.S. (2020) Podkhod k modelirovaniyu gidrorazryva plasta v skvazhinakh s gorizontal'nym okonchaniem [An approach for modeling the hydraulic fracturing in horizontal wells]. *Neftepromyslovoe delo – Oilfield Engineering*. 9. pp. 14–19.
6. Sazonov E.O., Khabibullin I.L. (2021) Tipovye krivye zaboy'nogo davleniya dlya skvazhiny s vertikal'noy treshchinoy gidrorazryva s uchyotom skin-faktora [Bottomhole pressure type curves for a well with a vertical hydraulic fracture under skin-effect conditions]. *Neftyanoe khozyaystvo – Oil Industry*. 11. pp. 130–132. doi: 10.24887/0028-2448-2021-11-130-132
7. Fedorov K.M., Gilmanov A.Ya., Shevelev A.P., Kobayashv A.V., Anuriev D.A. (2021) A theoretical analysis of profile conformance improvement due to suspension injection. *Mathematics*. 9(15). pp. 1727–1741. doi: 10.3390/math9151727
8. Sacramento R.N., Yang Y., You Z., Waldmann A., Martins A.L., Vaz A.S.L., Zitha P.L.J., Bedrikovetsky P. (2015) Deep bed and cake filtration of two-size particles suspension in porous media. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 126. pp. 201–210. doi: 10.1016/j.petrol.2014.12.001

9. Tatosov A.V., Shlyapkin A.S. (2018) Dvizhenie proppanta v raskryvayushcheysya treshchine gidrorazryva plasta [The motion of propping agent in an opening crack in hydraulic fracturing plast]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Series Mathematics. Mechanics. Informatics.* 18(2). pp. 217–226. doi: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226
10. Baykov V.A., Burakov I.M., Latypov I.D., Yakovlev A.A., Asmandiyarov R.N. (2012) Kontrol' razvitiya tekhnogennykh treshchin avtoGRP pri podderzhanii plastovogo davleniya na mestorozhdeniyakh OOO "RN-Yuganskneftegaz" [The control of self-induced hydraulic fracturing process on RN-Yuganskneftegaz LLC oilfields]. *Neftyanoe khozyaystvo – Oil Industry.* pp. 30–33.
11. Petukhov N.Yu., Kulushev M.M., Emel'yanov A.G., Mironenko A.A. (2020) Opyt realizatsii programmy ogranicheniya zakachki rabocheho agenta na Priobskom mestorozhdenii [Experience in implementation a program for limiting the injection of a working agent at the Priobskoye field]. *Neftyanoe khozyaystvo – Oil Industry.* 10. pp. 54–58. doi: 10.24887/0028-2448-2020-10-54-58
12. Shlyapkin A.S., Tatosov A.V. (2020) O reshenii zadachi gidrorazryva plasta v odnomernoy matematicheskoy postanovke [On solving the fracturing problem in a hybrid PKN-KGD formulation]. *Neftyanoe Khozyaystvo – Oil Industry.* 12. pp. 118–121. doi: 10.24887/0028-2448-2020-12-118-121
13. Chyornyy S.G., Lapin V.N., Esipov D.V., Kuranakov D.S. (2016) *Metody modelirovaniya zarozhdeniya i rasprostraneniya treshchin* [Methods of modeling the initiation and propagation of fractures]. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN.
14. Paulo Munoz L.F., Mejia C., Rueda J., Roehl D. (2022) Pseudo-coupled hydraulic fracturing analysis with displacement discontinuity and finite element methods. *Engineering Fracture Mechanics.* 274. Article 108774. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108774
15. Zhou Y., Yang D., Zhang X., Chen W., Xia X. (2020) Numerical investigation of the interaction between hydraulic fractures and natural fractures in porous media based on an enriched FEM. *Engineering Fracture Mechanics.* 235. Article 107175. doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.107175
16. Detournay E., Cheng A.H.-D., McLennan J.D. (1990) A poroelastic PKN hydraulic fracture model based on an explicit moving mesh algorithm. *Journal of Energy Resource Technology.* 112(4). pp. 224–230.
17. Baikov V.A., Bulgakova G.T., Il'yasov A.M., Kashapov D.V. (2018) Estimation of the geometric parameters of a reservoir hydraulic fracture. *Fluid Dynamics.* 53(5). pp. 642–653. doi: 10.1134/S0015462818050038
18. Nordgren R.P. (1972) Propagation of a vertical hydraulic fracture. *SPE Journal.* 12(4). pp. 306–314. doi: 10.2118/3009-PA
19. Smirnov N.N., Tagirova V.R. (2008) Problem of propagation of a gas fracture in a porous medium. *Fluid Dynamics.* 43(3). pp. 402–417. doi: 10.1134/S0015462808030083
20. Kiselev A.B., Kay-Zhui L., Smirnov N.N., Pestov D.A. (2021) Simulation of fluid flow through a hydraulic fracture of a heterogeneous fracture-tough reservoir in the planar 3D formulation. *Fluid Dynamics.* 56(2). pp. 164–177. doi: 10.1134/S0015462821020051
21. Peirce A. (2015) Modeling multi-scale processes in hydraulic fracture propagation using the implicit level set algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 283. pp. 881–908. doi: 10.1016/j.cma.2014.08.024
22. Baykin A.N., Abdullin R.F., Dontsov E.V., Golovin S.V. (2023) Two-dimensional models for waterflooding induced hydraulic fracture accounting for the poroelastic effects on a reservoir scale. *Geoenery Science and Engineering.* 224. Article 211600. doi: 10.1016/j.geoen.2023.211600
23. Bedrikovetsky P., Zeinijahromi A., Siqueira F.D., Furtado C.A., de Souza A.L.S. (2012) Particle detachment under velocity alternation during suspension transport in porous media. *Transport in Porous Media.* 91. pp. 173–197. doi: 10.1007/s11242-011-9839-1

24. Vaz A., Bedrikovetsky P., Fernandes P.D., Badalyan A., Carageorgos T. (2017) Determining model parameters for non-linear deep-bed filtration using laboratory pressure measurements. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 151. pp. 421–433. doi: 10.1016/j.petrol.2017.01.001
25. Khabibullin I.L., Khisamov A.A. (2022) Modelirovanie nestatsionarnoy fil'tratsii v sisteme plast – treshchina gidrorazryva [Modeling of unsteady filtration in a formation–hydraulic fracture system]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 158–168. doi: 10.17223/19988621/77/12
26. Shel' E.V., Kabanova P.K., Tkachenko D.R., Bazyrov I.Sh., Logvinyuk A.V. (2020) Modelirovanie initsiatsii i rasprostraneniya treshchiny gidrorazryva plasta na magnetatel'noy skvazhine dlya netreshchinovatykh terrigennykh porod na primere Priobskogo mestorozhdeniya [Modeling of a hydraulic fracture initiation and propagation on an injection well for non-fractured terrigenous rocks on the Priobskoye field]. *Ekspozitsiya Neft' Gaz Exposition Oil & Gas*. 2. pp. 34–42.

Сведения об авторах:

Фёдоров Константин Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры моделирования физических процессов и систем Школы естественных наук Тюменского государственного университета (Тюмень, Россия). E-mail: k.m.fedorov@utmn.ru

Шевелёв Александр Павлович – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры моделирования физических процессов и систем Школы естественных наук Тюменского государственного университета (Тюмень, Россия). E-mail: a.p.shevelev@utmn.ru

Гильманов Александр Янович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры моделирования физических процессов и систем Школы естественных наук Тюменского государственного университета (Тюмень, Россия). E-mail: a.y.gilmanov@utmn.ru

Изотов Алексей Александрович – директор по науке и инновациям ООО «Тюменский нефтяной научный центр» (Тюмень, Россия). E-mail: aaizotov@tnnc.rosneft.ru

Кобяшев Александр Вячеславович – главный менеджер ООО «Тюменский нефтяной научный центр» (Тюмень, Россия). E-mail: avkobyashev@tnnc.rosneft.ru

Information about the authors:

Fedorov Konstantin M. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: k.m.fedorov@utmn.ru

Shevelev Aleksandr P. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: a.p.shevelev@utmn.ru

Gil'manov Aleksandr Ya. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: a.y.gilmanov@utmn.ru

Izotov Aleksey A. (Director for Science and Innovations, Tyumen Petroleum Research Center, Tyumen, Russian Federation). E-mail: aaizotov@tnnc.rosneft.ru

Kobyashev Aleksandr V. (Senior Manager, Tyumen Petroleum Research Center, Tyumen, Russian Federation). E-mail: avkobyashev@tnnc.rosneft.ru

Статья поступила в редакцию 29.08.2023; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 29.08.2023; accepted for publication 03.10.2024

Научная статья

УДК 620.17

doi: 10.17223/19988621/91/12

Деформирование и разрушение слоистого тканевого стеклопластика при изгибе на кольцевой опоре: влияние трехмерного армирования и скорости нагружения

**Галина Анатольевна Форенталь¹, Сергей Борисович Сапожников²,
Анастасия Валерьевна Игнатова³, Ольга Stanisлавовна Буслаева⁴,
Александр Вячеславович Херувимов⁵**

^{1, 2, 3, 4, 5} Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

¹ gforental@mail.ru

² sapozhnikovsb@susu.ru

³ ignatovaav@susu.ru

⁴ buslaevaos@susu.ru

⁵ kheruvimovav@mail.ru

Аннотация. Представлены экспериментальные исследования влияния локального трехмерного армирования (фелтинга) на сопротивление изгибу на кольцевой опоре слоистых пластин из стеклопластика. Рассмотрено квазистатическое и низкоскоростное ударное локальное нагружение сферическим индентором. Показано, что при плотности фелтинга 10 ударов на 1 см² тканевая структура композита несколько повреждается, жесткость на изгиб снижается. Однако максимальные нагрузки и площади локальных дефектов (расслоения и разрывы волокон) при наличии фелтинга существенно снижаются.

Ключевые слова: тканевый стеклопластик, трехмерное армирование, изгиб на кольцевой опоре, статическое нагружение, низкоскоростной удар

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-13007. Авторы выражают благодарность А.В. Никонову, М.В. Жихареву и А.В. Безмельницыну за помощь при изготовлении образцов.

Для цитирования: Форенталь Г.А., Сапожников С.Б., Игнатова А.В., Буслаева О.С., Херувимов А.В. Деформирование и разрушение слоистого тканевого стеклопластика при изгибе на кольцевой опоре: влияние трехмерного армирования и скорости нагружения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 141–152. doi: 10.17223/19988621/91/12

Deformation and failure of laminated fabric fiber-glass reinforced plastic during bending on an annular support: effect of 3D reinforcement and loading rate

Galina A. Forental¹, Sergey B. Sapozhnikov², Anastasiya V. Ignatova³,
Ol'ga S. Buslaeva⁴, Aleksandr V. Kheruvimov⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

¹ gforental@mail.ru

² sapozhnikovsb@susu.ru

³ ignatovaav@susu.ru

⁴ buslaevaos@susu.ru

⁵ kheruvimovav@mail.ru

Abstract. Felting is a needle-punching technology in which the impacts of barbed needles partially damage the dry fibers of the fabric stack and pull them normally to the surface. The result is transversal reinforcement at a given impact density per 1 cm² in the local area. In this work, the effect of felting on the resistance to bending on the annular support of laminated fabric fiber-glass reinforced plastic at various loading rates is experimentally studies. During quasi-static tests, the area of defects observed by the backlit of the specimens with felting decreases by approximately 20% compared to the specimens without felting at indenter diameters of 10 and 20 mm.

During the low-velocity impact tests, the damaged area decreases on average by 9% (velocity is 1.93 m/s) and 15% (velocity is 2.4 m/s) with felting at an indenter diameter of 10 mm. For a diameter of 20 mm, the damaged area with felting also decreases compared with the specimens without felting (by 11% at 1.42 m/s, by 22% at 1.98 m/s, and by 34% at 2.42 m/s). The experimental results show that even the minimum density felting (10 cm⁻²) significantly reduces the delamination area (up to 34%) during a local impact.

Keywords: fabric fiber-glass reinforced plastic, three-dimensional reinforcement, bending on the annular support, static loading, low-velocity impact

Acknowledgments: This study was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-29-13007). The authors are grateful to A.V. Nikonov, M.V. Zhikharev and A.V. Bezmelnitsyn for assistance in preparing the specimens.

For citation: Forental', G.A., Sapozhnikov, S.B., Ignatova, A.V., Buslaeva, O.S., Kheruvimov A.V. (2024) Deformation and failure of laminated fabric fiber-glass reinforced plastic during bending on an annular support: effect of 3D reinforcement and loading rate. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 141–152. doi: 10.17223/19988621/91/12

Введение

Композитные материалы применяются в аэрокосмической, автомобильной технике, в области ветроэнергетики, где предъявляются высокие требования к прочности материалов в присутствии локальных дефектов эксплуатации. Одним из самых опасных видов воздействий на слоистые композитные материалы является

удар в направлении нормали к плоскости укладки армирующих слоев композита. Ударные воздействия приводят к возникновению расслоений в структуре материала и разрывам волокон, которые можно уменьшить, используя трехмерное армирование [1–4]. К способам трехмерного армирования в настоящее время относят тафтинг, прошивку, введение Z-стержней, фелтинг и др. [5, 6]. Фелтинг представляет собой пробивку пакета стандартных сухих тканей с плоским плетением специальной иглой с зазубринами [7, 8], часть нитей в плоскости XU разрывается и протягивается зазубринами в направлении нормали (Z). В результате может быть получен композитный материал с трехмерным армированием. Количество вытянутых в направлении Z нитей зависит от плотности фелтинга, т.е. количества ударов иглой на 1 см^2 площади тканевого пакета. Полученный после фелтинга материал обладает повышенными трансверсально-сдвиговыми характеристиками в плоскостях XZ и YZ , что может привести к повышению сопротивления локальным ударным нагрузкам. Однако за счет ослабления материала в плоскости укладки слоев XU наблюдается ухудшение механических характеристик при нагружении материала в этой плоскости [9].

Исследование механического поведения полимерных композитов проводят при различных скоростях нагружения, так как полимеры имеют заметную чувствительность прочности к этому параметру [10–13]. Испытания на трансверсальный сдвиг, как правило, наиболее чувствительны к скорости нагружения по сравнению с нагружением в плоскости армирования [14]. Поэтому в данной работе были проведены сравнительные экспериментальные исследования влияния фелтинга на механическое поведение слоистого стеклопластика при изгибе на кольцевой опоре при различных скоростях нагружения.

Изготовление материалов и образцов

С помощью иглопробивной машины с числовым программным управлением [15] осуществляли процесс фелтинга 15 слоев сухой стеклоткани полотняного переплетения (толщина слоя 0.2 мм, стекловолокна типа Е, средний диаметр 9 мкм). Плотность фелтинга – 10 см^{-2} . Тканевые преформы после фелтинга пропитывали эпоксидной смолой холодного отверждения ЭТАЛ ИНЖЕКТ SL (производитель фирма «Эпитал» [16]) методом вакуумной инфузии. Режим отверждения включал выдержку при комнатной температуре в течение 24 ч и постотверждение при температуре 90°C в течение 4 ч. Так же был пропитан контрольный пакет из 15 слоев сухой стеклоткани без фелтинга. После отверждения изготовленные пластины разрезали на станке с ЧПУ пальцевой фрезой шагами 0.2 мм по толщине на образцы с размерами $25 \times 25 \text{ мм}$ для последующих испытаний. Толщина полученных образцов без фелтинга составляла $2.88 \pm 0.05 \text{ мм}$, для образцов с плотностью фелтинга 10 см^{-2} – $2.86 \pm 0.09 \text{ мм}$.

Методы испытаний

В данной работе использовано два метода исследования влияния фелтинга на механические характеристики композитного материала в зависимости от скорости нагружения: статические испытания и испытания при низкоскоростном ударе.

Статические испытания проводили на универсальной испытательной машине INSTRON 5900R. Схема статических испытаний показана на рис. 1, *a*. Образец помещали на цилиндр диаметром 20 мм с конусным углублением диаметром 19 мм и углом конусности 12°. Нагружение проводили стальными полусферами диаметрами 10 и 20 мм. В одинаковых условиях испытывали серии из 4 образцов каждая.

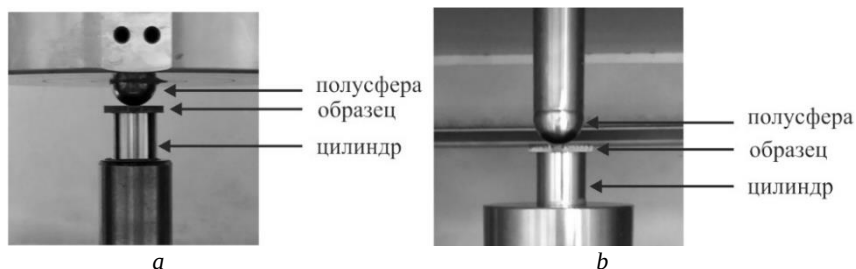


Рис. 1. Испытания на изгиб на кольцевой опоре:
a – статические испытания; *b* – низкоскоростной удар

Fig. 1. Bending tests on an annular support:
(*a*) static tests and (*b*) low-velocity impact tests

Испытания на изгиб на кольцевой опоре при низкоскоростном ударе проводили на вертикальном башенном копре INSTRON CEAST 9350 по аналогии со статическим нагружением (см. рис. 1, *b*). В испытаниях использовали ударник INSTRON 7529.841 со сферическим наконечником диаметрами 10 и 20 мм, масса ударника – 2.045 кг. Испытания проводили при трех различных скоростях ударника – 2.4 м/с (энергия 6 Дж), 1.93 м/с (энергия 4 Дж), 1.4 м/с (энергия 2 Дж) для каждого диаметра наконечника.

Результаты и обсуждение.

Статические испытания на изгиб на кольцевой опоре

На рис. 2 представлены диаграммы «нагрузка–перемещение» образцов без фелтинга и с плотностью фелтинга 10 см⁻². В таблице 1 приведены результаты статических испытаний.

При испытаниях с полусферой диаметром 10 мм (см. рис. 2, *a*) средняя нагрузка при перемещении 1.56 мм для образцов без фелтинга равна 2.87 кН. Для образцов с фелтингом – 2.44 кН, коэффициенты вариации меньше 2%. При использовании фелтинга средняя нагрузка падает на 15%.

Для полусферы диаметром 20 мм (см. рис. 2, *b*) средняя нагрузка при перемещении 1.88 мм для образцов без фелтинга равна 4.23 кН, для образцов с фелтингом – 3.86 кН, коэффициенты вариации 1 и 5%. В этом случае при применении фелтинга нагрузка падает на 9%.

На рис. 3 приведены примеры картин повреждений образцов после испытаний. Данные картины были получены после обработки фотографий в проходящем свете (так как стеклопластик частично прозрачен). Светлые зоны на рис. 3 связаны с образованием трещин расслоения и разрыва волокон.

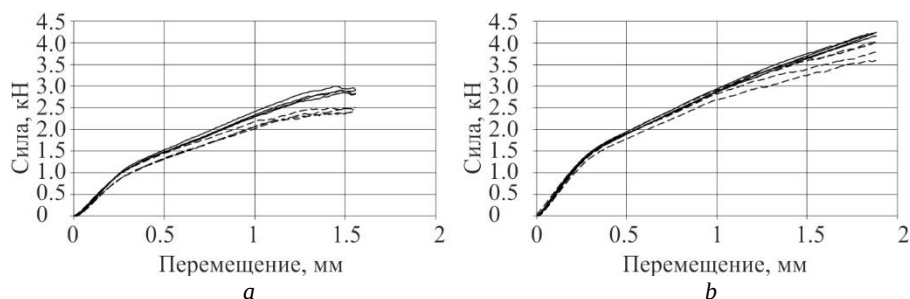


Рис. 2. Результаты статических испытаний с полусферой диаметром 10 мм (а) и 20 мм (b): диаграммы «нагрузка–перемещение» для образцов без фелтинга (сплошные линии) и с плотностью фелтинга 10 см^{-2}

Fig. 2. Results of static tests with a hemisphere diameter of (a) 10 and (b) 20 mm: load–displacement diagrams for the specimens without felting (solid lines) and with a felting density of 10 cm^{-2} (dotted lines)

Таблица 1

Результаты статических испытаний

Полусфера 10 мм			
Плотность фелтинга, см ⁻²	Перемещение, мм	Сила, кН	Средняя сила, кН
0	1.56	2.90	2.87 ± 0.05 (CV = 1.7%)
0	1.56	2.82	
0	1.56	2.84	
0	1.56	2.92	
10	1.56	2.43	2.44 ± 0.04 (CV = 1.6%)
10	1.56	2.50	
10	1.56	2.43	
10	1.56	2.41	
Полусфера 20 мм			
Плотность фелтинга, см ⁻²	Перемещение, мм	Сила, кН	Средняя сила, кН
0	1,88	4.25	4.23 ± 0.04 (CV = 0.9%)
0	1,84	4.22	
0	1,89	4.26	
0	1,90	4.17	
10	1,88	3.60	3.86 ± 0.20 (CV = 5.2%)
10	1,88	3.79	
10	1,88	4.00	
10	1.88	4.04	

Как видно из рис. 3, видимая площадь дефектов образцов с фелтингом уменьшается по сравнению с образцом без фелтинга. В испытаниях с полусферой диаметром 10 мм площадь дефекта образца без фелтинга составила 119.0 мм^2 , а для образца с фелтингом – 95.3 мм^2 . Уменьшение видимой площади дефектов составило 19,9%. При испытаниях с полусферой диаметром 20 мм площадь дефекта образца без фелтинга составила 241.7 мм^2 , для образца с фелтингом – 194.8 мм^2 . Уменьшение видимой площади дефектов составило 19.4%.

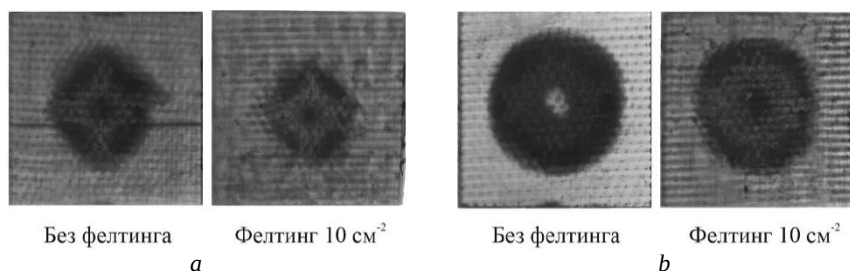


Рис. 3. Результаты статических испытаний: оптическая плотность образцов без фелтинга и с плотностью фелтинга 10 см^{-2} : диаметр полусферы 10 мм (a) и 20 мм (b). Образцы были разгружены после достижения перемещения 1.56 мм (a) и 1.88 мм (b)

Fig. 3. Results of static tests for optical density of the specimens without felting (on the left) and with a felting density of 10 cm^{-2} (on the right) at a hemisphere diameter of: (a) 10 and (b) 20 mm. The specimens were unloaded after a displacement of (a) 1.56 and (b) 1.88 mm is reached

Испытания на вертикальном башенном копре

В табл. 2–3 приведены результаты испытаний на изгиб на кольцевой опоре при низкоскоростном ударе. На рис. 4 показаны типичные зависимости нагрузки на инденторе от времени для образцов с фелтингом 10 см^{-2} и без фелтинга для трех скоростей ударника.

При диаметре ударника 10 мм (см. рис. 4, a) изменение максимальной силы на инденторе в процессе контакта меньше 1% у образцов с фелтингом и без фелтинга. При диаметре ударника 20 мм (см. рис. 4, b) для образцов с фелтингом максимальная сила на инденторе в процессе контакта увеличивается не более чем на 5% по сравнению с образцами без фелтинга.

Таблица 2

Результаты испытаний при низкоскоростном ударе – диаметр полусферы 10 мм

Плотность фелтинга, см^{-2}	Скорость, м/с	Площадь дефектов, мм^2	Средняя площадь дефектов, мм^2	Максимальная сила, кН	Средняя сила, кН
0	1.4	56.4	52.2 ± 3.7	2.83	2.92 ± 0.09
0	1.4	50.9		3.00	
0	1.4	49.3		2.94	
0	1.93	95.9	98.6 ± 10.3	3.63	3.72 ± 0.08
0	1.93	109.9		3.79	
0	1.93	89.9		3.73	
0	2.4	163.0	166.0 ± 4.2	4.66	4.49 ± 0.17
0	2.4	170.8		4.33	
0	2.4	164.3		4.47	
10	1.4	54.7	52.1 ± 4.8	2.92	2.90 ± 0.02
10	1.4	55.0		2.91	
10	1.4	46.5		2.88	
10	1.93	94.2	89.4 ± 4.4	3.67	3.71 ± 0.06
10	1.93	85.6		3.68	
10	1.93	88.3		3.79	
10	2.4	137.3	140.5 ± 13.0	4.51	4.46 ± 0.12
10	2.4	129.0		4.55	
10	2.4	154.7		4.33	

Таблица 3

Результаты испытаний при низкоскоростном ударе – диаметр полусферы 20 мм

Плотность фелтинга, см ⁻²	Скорость, м/с	Площадь дефектов, мм ²	Средняя площадь дефектов, мм ²	Максимальная сила, кН	Средняя сила, кН
0	1.4	47.2	46.7 ± 2.1	3.34	3.31 ± 0.03
0	1.4	48.4		3.30	
0	1.4	44.4		3.29	
0	1.98	108.5	115.1 ± 6.5	4.02	4.08 ± 0.09
0	1.98	115.4		4.05	
0	1.98	121.4		4.18	
0	2.42	189.3	194.4 ± 4.7	4.66	4.69 ± 0.07
0	2.42	195.5		4.65	
0	2.42	198.5		4.77	
10	1.4	32.9	41.3 ± 6.7	3.51	3.41 ± 0.16
10	1.4	46.3		3.22	
10	1.4	39.4		3.49	
10	1.98	74.6	89.4 ± 5.8	4.26	4.39 ± 0.39
10	1.98	86.1		4.09	
10	1.98	81.9		4.82	
10	2.42	135.1	128.9 ± 8.7	4.76	5.23 ± 0.64
10	2.42	122.8		4.97	

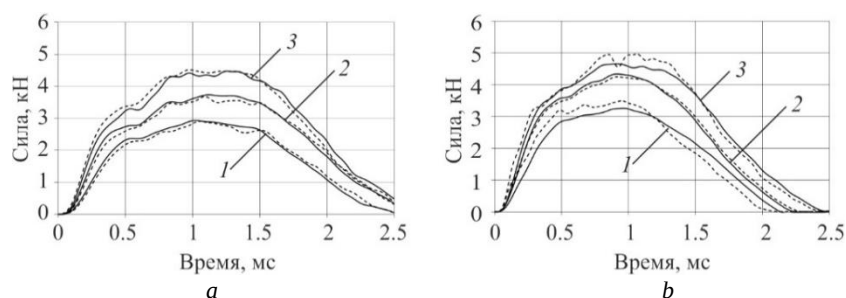


Рис. 4. Результаты испытаний при низкоскоростном ударе: зависимость силы от времени для образцов без фелтинга (сплошные линии) и с плотностью фелтинга 10 см⁻² (пунктирные линии): диаметр полусферы 10 мм (а) и 20 мм (б); 1 – скорость 1.4 м/с; 2 – 1.93 м/с; 3 – 2.4 м/с

Fig. 4. Results of low-velocity impact tests: time dependence of the force for the specimens without felting (solid lines) and with a felting density of 10 cm⁻² (dotted lines) at a hemisphere diameter of (a) 10 and (b) 20 mm for a velocity of (1) 1.4, (2) 1.93, and (3) 2.4 m/s

На рис. 5 приведены зависимости нагрузки на инденторе от перемещения для образцов без фелтинга и с плотностью фелтинга 10 см⁻² для трех скоростей ударника.

На рис. 6 представлены оптические плотности (видимые площади дефектов) для трех энергий удара и двух диаметров ударника. Можно заметить, что площадь дефектов увеличивается с возрастанием энергии удара. Для диаметра ударника 10 мм (рис. 7) при скорости 1.4 м/с площадь дефекта в образцах с фелтингом практически не изменяется по сравнению с образцом без фелтинга (изменение менее 1%). При скорости 1.93 м/с площадь дефекта уменьшается в среднем на 9%, при скорости 2.4 м/с – на 15%. Площадь дефектов изменяется от скорости удара по линейной зависимости, при этом для образцов без фелтинга при скорости меньше 1 м/с дефекты не появляются. Для образцов с фелтингом пороговая скорость равна 0.9 м/с.

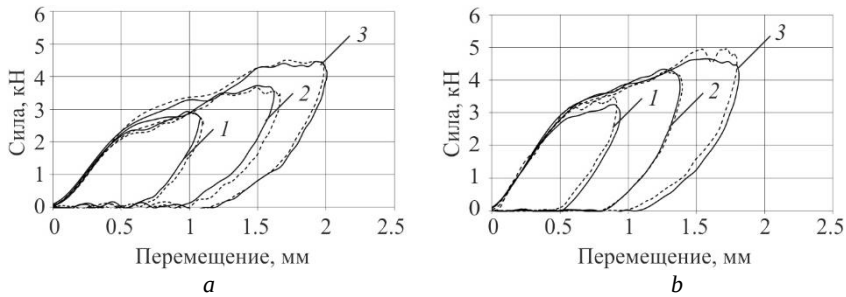


Рис. 5. Результаты испытаний при низкоскоростном ударе: зависимость силы от перемещения для образцов без фелтинга (сплошные линии) и с плотностью фелтинга 10 см^{-2} (пунктирные линии): диаметр полусферы 10 мм (a) и 20 мм (b); 1 – скорость 1.4 м/с; 2 – 1.93 м/с; 3 – 2.4 м/с
Fig. 5. Results of low-velocity impact tests: force as a function of displacement for the specimens without felting (solid lines) and with a felting density of 10 cm^{-2} (dotted lines) at a hemisphere diameter of (a) 10 and (b) 20 mm for a velocity of (1) 1.4, (2) 1.93, and (3) 2.4 m/s

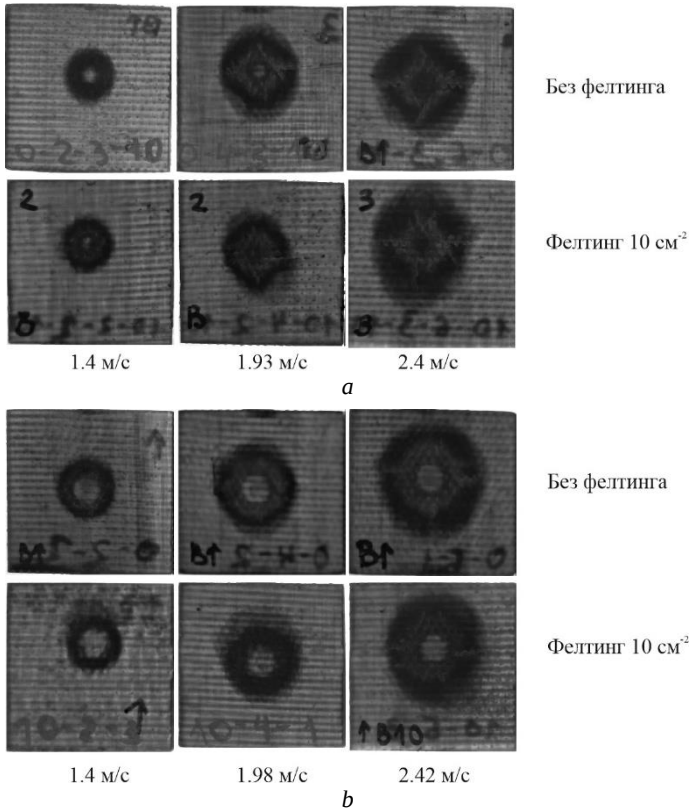


Рис. 6. Результаты испытаний при низкоскоростном ударе: оптическая плотность образцов без фелтинга и с плотностью фелтинга 10 см^{-2} ; a – диаметр полусферы 10 мм, b – диаметр полусферы 20 мм
Fig. 6. Results of low-velocity impact tests for optical density of the specimens without felting (on the top) and with a felting density of 10 cm^{-2} (on the bottom) at a hemisphere diameter of (a) 10 and (b) 20 mm

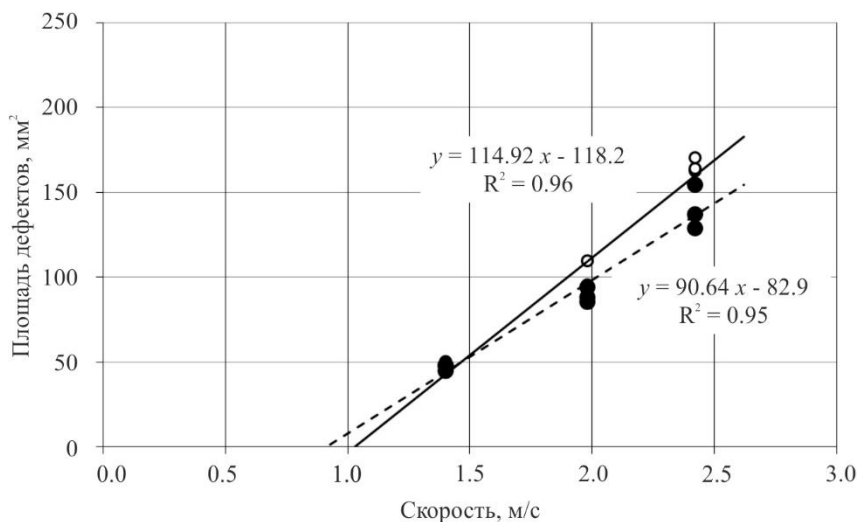


Рис. 7. Зависимость общей площади повреждения от скорости удара с полусферой диаметром 10 мм: ○ – без фелтинга, ● – плотность фелтинга 10 см⁻²

Fig. 7. Dependence of the total damage area on the impact velocity at a hemisphere diameter of 10 mm: ○ – without felting, ● – with a felting density of 10 cm⁻²

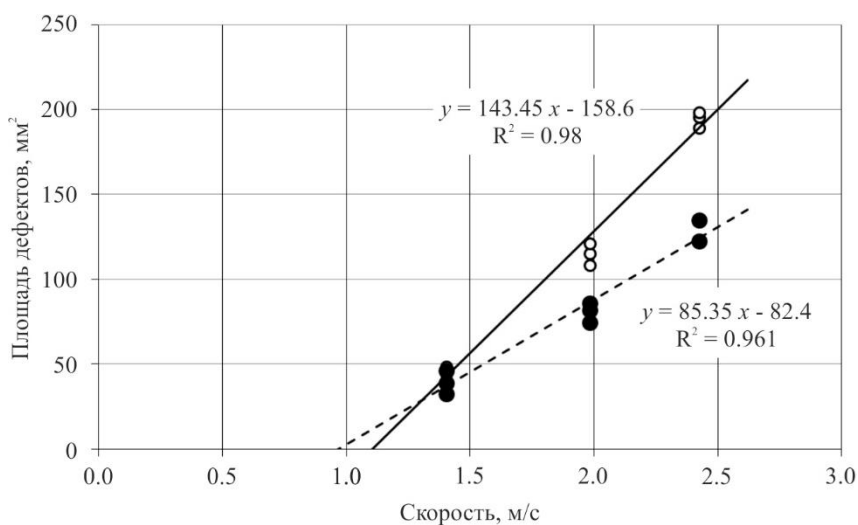


Рис. 8. Зависимость общей площади повреждения от скорости удара с полусферой диаметром 20 мм: ○ – без фелтинга, ● – плотность фелтинга 10 см⁻²

Fig. 8. Dependence of the total damage area on the impact velocity at a hemisphere diameter of 20 mm: ○ – without felting, ● – with a felting density of 10 cm⁻²

Для диаметра ударника 20 мм (рис. 8) при скорости 1.42 м/с площадь дефекта в образцах с фелтингом уменьшается на 11% по сравнению с образцом без фелтинга, при скорости 1.98 м/с – на 22%, при скорости 2.42 м/с – на 34%. Дефекты у образцов без фелтинга не появляются при скорости меньше, чем 1.1 м/с, для образцов с фелтингом – 0.97 м/с.

Заключение

Фелтинг – иглопробивная технология, при которой удары игл с зазубринами частично повреждают сухие нити тканевой преформы и вытягивают их в направлении нормали к поверхности. Это позволяет получить трансверсальное армирование с необходимой плотностью ударов на 1 см^2 в локальной области.

В работе проведены экспериментальные исследования влияния фелтинга на сопротивление изгибу на кольцевой опоре слоистых пластин из стеклопластика при различных скоростях нагружения.

При квазистатических испытаниях максимальное усилие на инденторе ниже для образцов с фелтингом по сравнению с образцами без фелтинга. При диаметре индентора 10 мм уменьшение составляет 15%, а при диаметре 20 мм – 9%. Видимая напросвет площадь дефектов у образцов с фелтингом уменьшается на $\sim 20\%$ по сравнению с образцами без фелтинга независимо от диаметра индентора.

При низкоскоростном ударном локальном нагружении сферическим индентором на копре с вертикально падающим грузом максимальное усилие на инденторе зависит от скорости нагружения и диаметра индентора. При диаметре 10 мм максимальное усилие в процессе контакта при всех трех скоростях и площадь видимых дефектов при скорости 1.4 м/с практически не изменяются (различие меньше 1%). Площадь видимых дефектов при скорости 1.93 м/с уменьшается в среднем на 9% для образцов с фелтингом, при скорости 2.4 м/с – на 15%. При диаметре 20 мм максимальная сила в образцах с фелтингом увеличивается не более чем на 5% по сравнению с образцами без фелтинга. При скорости 1.42 м/с площадь дефекта в образцах с фелтингом уменьшается на 11% по сравнению с образцом без фелтинга, при скорости 1.98 м/с – на 22%, при скорости 2.42 м/с – на 34%.

На основании проведенных экспериментов можно заключить, что фелтинг даже минимальной плотности (10 см^{-2}) существенно (до 34%) снижает площадь расслоения при локальном ударе. Чем выше скорость удара, тем больше положительный эффект фелтинга.

Список источников

1. Saboktakin A. 3D textile preforms and composites for aircraft structures: a review // International Journal of Aviation, Aeronautics, and Aerospace. 2019. V. 6 (1). doi: 10.15394/ijaaa.2019.1299
2. Callister W.D. Jr., Rethwisch D.G. Materials Science and Engineering: An Introduction. 10th ed. New-Jersey : Wiley, 2018.
3. Tong L., Mouritz A.P., Bannister M.K. 3D Fibre Reinforced Polymer Composites. Amsterdam : Elsevier Science, 2002.
4. Wu X., Shan Z., Liu F., Li Z. Research on the Z-Direction Compression Failure Mode of 3D Woven Composites // IOP Conference Series Materials Science and Engineering. 2018. V. 301 (1). Art. 012057. doi: 10.1088/1757-899X/301/1/012057
5. Mouritz A.P., Cox B.N. A mechanistic interpretation of the comparative in-plane mechanical properties of 3D woven, stitched and pinned composites // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. 2010. V. 41 (6). P. 709–728. doi: 10.1016/j.compositesa.2010.02.001
6. Bilisik K. Multiaxis three-dimensional weaving for composites: A review // Textile Research Journal. 2012. V. 82 (7). P. 725–743. doi: 10.1177/0040517511435013
7. Xie J., Liang J., Fang G., Chen Z. Effect of needling parameters on the effective properties of 3D needled C/C-SiC composites // Composites Science and Technology. 2015. V. 117. P. 69–77. doi: 10.1016/j.compscitech.2015.06.003

8. Chen X., Zhao Y., Zhang C., Wang X., Chen L. Robot needle-punching for manufacturing composite performs // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. 2018. V. 50. P. 132–139. doi: 10.1016/j.rcim.2017.09.008
9. Forental G.A., Ignatova A.V., Bezmelnitsyn A.V., Nikonov A.V., Sapozhnikov S.B. The influence of felting on low-velocity impact damage and residual flexural strength of polymer composite material: Experimental study // *AIP Conference Proceedings*. 2023. V. 2697 (1). Art. 030002. doi: 10.1063/5.0118220
10. Тарнопольский Ю.М., Кинцис. Т.Я. Методы статических испытаний армированных пластиков. М. : Химия, 1981.
11. Konev S., Eremyeyev V.A., Sedighi H.M., Igumnov L., Bragov A., Konstantinov A., Kuanyshova A., Sergeichev I. Strain-Rate Dependency of a Unidirectional Filament Wound Composite under Compression // *Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 2023. V. 137 (3). P. 2149–2161. doi: 10.32604/cmescs.2023.028179
12. Vattathurvalappil S.H., Hassan S.F., Haq M. Mechanics of ABS Polymer under Low & Intermediate Strain Rates // *Recent Progress in Materials*. 2023. V. 5 (1). doi: 10.21926/rpm.2301012
13. Fasce L.A., Sanchez L., Frontini P. Effect of loading strain rate on nano-indentation response of an aerospace grade epoxy polymer // *Express Polymer Letters*. 2023. V. 17 (6). P. 647–659. doi: 10.3144/expresspolymlett.2023.47
14. Daniel I.M., Ishai O. Engineering mechanics of composite materials. 2nd edition. New York : Oxford University Press, 2005.
15. Forental G.A., Kheruvimov A.V., Nikonov A.V., Sapozhnikov S.B. Stack fabric felting to get PCM GIIc improvement and LVI tolerance // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2021. V. 1024 (1). Art. 012001. doi: 10.1088/1757-899X/1024/1/012001
16. Эпоксидный компаунд Этал-Инжект-SL для вакуумной инфузии // Эпитал. URL: <https://www.epital.ru/infu/sl.html> (дата обращения: 03.06.2023).

References

1. Saboktakin A. (2019) 3D textile preforms and composites for aircraft structures: A review. *International Journal of Aviation, Aeronautics, and Aerospace*. 6(1). doi: 10.15394/ijaaa.2019.1299
2. Callister W.D.Jr., Rethwisch D.G. (2018) *Materials Science and Engineering: An Introduction. 10th Edition*. New-Jersey: Wiley.
3. Tong L., Mouritz A.P., Bannister M.K. (2002) *3D Fibre Reinforced Polymer Composites*. Amsterdam: Elsevier Science.
4. Wu X., Shan Z., Liu F., Li Z. (2018) Research on the z-direction compression failure mode of 3D woven composites. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 301(1). Article 012057. doi: 10.1088/1757-899X/301/1/012057
5. Mouritz A.P., Cox B.N. (2010) A mechanistic interpretation of the comparative in-plane mechanical properties of 3D woven, stitched and pinned composites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 41(6). pp. 709–728. doi: 10.1016/j.compositesa.2010.02.001
6. Bilisik K. (2012) Multiaxis three-dimensional weaving for composites: A review. *Textile Research Journal*. 82(7). pp. 725–743. doi: 10.1177/0040517511435013
7. Xie J., Liang J., Fang G., Chen Z. (2015) Effect of needling parameters on the effective properties of 3D needled C/C-SiC composites. *Composites Science and Technology*. 117. pp. 69–77. doi: 10.1016/j.compscitech.2015.06.003
8. Chen X., Zhao Y., Zhang C., Wang X., Chen L. (2018) Robot needle-punching for manufacturing composite performs. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. 50. pp. 132–139. doi: 10.1016/j.rcim.2017.09.008
9. Forental G.A., Ignatova A.V., Bezmelnitsyn A.V., Nikonov A.V., Sapozhnikov S.B. (2023) The influence of felting on low-velocity impact damage and residual flexural strength of polymer composite material: Experimental study. *AIP Conference Proceedings*. 2697(1). Article 030002. doi: 10.1063/5.0118220

10. Tarnopol'sky Yu.M., Kintsis T.Ya. (1981) *Metody staticheskikh ispytaniy armirovannykh plastikov* [Methods for static testing of reinforced plastics]. Moscow: Khimiya.
11. Konev S., Eremeyev V.A., Sedighi H.M., Igumnov L., Bragov A., Konstantinov A., Kuanyshova A., Sergeichev I. (2023) Strain-rate dependency of a unidirectional filament wound composite under compression. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 137(3). pp. 2149–2161. doi: 10.32604/cmescs.2023.028179
12. Vattathurvalappil S.H., Hassan S.F., Haq M. (2023) Mechanics of ABS polymer under low & intermediate strain Rates. *Recent Progress in Materials*. 5(1). doi: 10.21926/rpm.2301012
13. Fasce L.A., Sanchez L., Frontini P. (2023) Effect of loading strain rate on nano-indentation response of an aerospace grade epoxy polymer. *Express Polymer Letters*. 17(6). pp. 647–659. doi: 10.3144/expresspolymlett.2023.47
14. Daniel I.M., Ishai O. (2005) *Engineering Mechanics of Composite Materials*. 2nd edition. New York: Oxford University Press.
15. Forental G.A., Kheruvimov A.V., Nikonov A.V., Sapozhnikov S.B. (2021) Stack fabric felting to get PCM GIC improvement and LVI tolerance. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 1024(1). Article 012001. doi: 10.1088/1757-899X/1024/1/012001
16. URL: <https://www.epital.ru/infu/sl.html>.

Сведения об авторах:

Форенталь Галина Анатольевна – инженер-исследователь НПИ «Учебная техника и технологии» Южно-Уральского государственного университета (национального исследовательского университета) (Челябинск, Россия). E-mail: gforental@mail.ru

Сапожников Сергей Борисович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, профессор кафедры «Техническая механика» Южно-Уральского государственного университета (национального исследовательского университета) (Челябинск, Россия). E-mail: sapozhnikovsb@susu.ru

Игнатова Анастасия Валерьевна – кандидат технических наук, доцент кафедры «Техническая механика» Южно-Уральского государственного университета (национального исследовательского университета) (Челябинск, Россия). E-mail: ignatovaav@susu.ru

Буслаева Ольга Станиславовна – кандидат технических наук, доцент кафедры «Цифровая экономика и информационные технологии» Южно-Уральского государственного университета (национального исследовательского университета) (Челябинск, Россия). E-mail: buslaevaos@susu.ru

Херувимов Александр Вячеславович – начальник лаборатории «Композиционные материалы» Южно-Уральского государственного университета (национального исследовательского университета) (Челябинск, Россия). E-mail: kheruvimovav@mail.ru

Information about the authors:

Forental' Galina A. (Researcher, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation). E-mail: gforental@mail.ru

Sapozhnikov Sergey B. (Doctor of Technical Sciences, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation). E-mail: sapozhnikovsb@susu.ru

Ignatova Anastasiya V. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation). E-mail: ignatovaav@susu.ru

Buslaeva Ol'ga S. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation). E-mail: buslaevaos@susu.ru

Kheruvimov Aleksandr V. (Head of the Laboratory of Composite Materials, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation). E-mail: kheruvimovav@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24.07.2023; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 24.07.2023; accepted for publication 03.10.2024

Научная статья

УДК 532.51; 532.59

doi: 10.17223/19988621/91/13

О влиянии неосесимметричных инерционных волн на осредненную циркуляцию жидкости во вращающемся цилиндре

Мария Андреевна Ширяева¹, Станислав Валерьевич Субботин¹

^{1,2} Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь, Россия

¹ shiryaeva_ma@pspu.ru

² subbotin_sv@pspu.ru

Аннотация. Экспериментально исследуется динамика неосесимметричных инерционных волн во вращающейся цилиндрической полости. Для поддержания волнового движения скорость вращения периодически меняется по гармоническому закону (либрации). Обнаружено три различных режима: нерезонансная бегущая волна, резонанс неосесимметричной инерционной моды в виде стоячей волны и резонансный режим бегущей волны. Отражение волн от боковой границы полости приводит к генерации в динамическом пограничном слое осредненного течения, структура которого определяется режимом пульсационного течения.

Ключевые слова: вращение, либрации, инерционные волны, инерционные моды, осредненные течения

Благодарности: Работа выполнена в рамках гос. задания Минпросвещения РФ (проект KPZU-2023-0002).

Для цитирования: Ширяева М.А., Субботин С.В. О влиянии неосесимметричных инерционных волн на осредненную циркуляцию жидкости во вращающемся цилиндре // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 153–167. doi: 10.17223/19988621/91/13

Original article

Effect of non-axisymmetric inertial waves on the steady fluid circulation in a rotating cylinder

Mariya A. Shiryaeva¹, Stanislav V. Subbotin¹

^{1,2} Perm State Humanitarian Pedagogical University, Perm, Russia

¹ shiryaeva_ma@pspu.ru

² subbotin_sv@pspu.ru

Abstract. Non-axisymmetric inertial waves in a rotating cylindrical cavity are studied experimentally. To maintain the wave motion, the cavity rotation rate is periodically changed according to the harmonic law (libration). Three different regimes have been

found: non-resonant traveling wave, inertial mode resonance, and resonant traveling wave. In the first case, the pulsating flow represents a set of individual wave beams emitted from the cavity corners. The reflection of beams from the cavity sidewall induces steady circulation in the dynamic boundary layer, where the direction of the circulation is determined by the direction of wave front propagation. The second regime resembles standing waves in the axial section of the cavity. The fluid oscillations within the cavity also produce a steady flow with a structure specified by the axial wavenumber of the mode. Finally, the third regime is characterized by alternate excitation of two axisymmetric modes or one non-axisymmetric mode with an axisymmetric mode. In this case, the propagation of the wave front in the form of a traveling wave is a result of the interaction of two modes with different wave numbers. At the same time, the steady flow structure becomes more complex: the waves converging (diverging) to each other induce a system of concordantly rotating steady vortices near the sidewall.

Keywords: rotation, libration, inertial waves, inertial modes, steady flows

Acknowledgments: This research was supported by the Ministry of Education of the Russian Federation (project KPZU-2023-0002).

For citation: Shiryayeva, M.A., Subbotin, S.V. (2024) Effect of non-axisymmetric inertial waves on the steady fluid circulation in a rotating cylinder. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 153–167. doi: 10.17223/19988621/91/13

Введение

Быстровращающиеся гидродинамические системы обладают широким спектром инерционных режимов благодаря действию восстанавливающей силы Кориолиса. Так, гармоническое воздействие с малой амплитудой приводит к поддержанию инерционных волн, которые характеризуются необычным дисперсионным соотношением $\Omega_{osc} = 2\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{rot}$ [1, 2]. Здесь Ω_{osc} – частота волны, а Ω_{rot} – скорость вращения системы. В неограниченной жидкости эти волны распространяются от источника возмущений и образуют систему конусообразных сдвиговых слоев с углом $\theta = \pm \arcsin(\Omega_{osc} / 2\Omega_{rot})$ по отношению к оси вращения. В замкнутых полостях волны будут отражаться от стенок, при этом в зависимости от геометрии допускается возбуждение различных резонансных режимов. Примером являются так называемые инерционные моды – глобальные колебания жидкости, напоминающие стоячие волны [1, 3, 4]. Другим примером являются аттракторы инерционных волн, возникающие за счет постепенного сближения волновых лучей после многократного отражения от стенок. Такие режимы возможны только в полостях сложной геометрии, содержащей наклонные относительно оси вращения стенки, например, в полости с трапецидальным сечением [5–7], а также в сферическом слое [8].

Отметим серию работ, посвященных исследованию динамики жидкости в неравномерно вращающемся (либрирующем) кубе [3, 9, 10, 11]. Если ось вращения проходит через две противоположные грани, то наклонные стенки отсутствуют, а основные резонансные режимы представлены инерционными модами [3, 9]. Если ось вращения проходит через две противоположные вершины куба, то все стенки являются наклонными [10]. В данном случае источниками волн являются углы и грани, что обуславливает возникновение сложных пространственно-

волновых паттернов, допускающих фокусировку волн в аттрактор. Наконец, в [11] ось вращения проходила через среднюю точку двух противоположных ребер; отмечена важная роль нелинейных эффектов в динамике волн, которая не прогнозируется в рамках лучевой теории. Таким образом, динамика инерционных волн в неосесимметричных контейнерах представляет большой интерес в контексте изучения механизмов взаимодействия лучей с наклонными границами, а также их временной и пространственной эволюции.

С фундаментальной точки зрения не менее интересной является задача о движении жидкости в либрирующем цилиндре. В этом случае на границах возникает два типа осциллирующих пограничных слоев: на торцевых стенках – слои Экмана, а на боковой поверхности – слои Стокса. В пионерской работе Ванга [12] было показано, что либрации возбуждают осредненное ретроградное азимутальное течение. Позднее случай низкочастотных либраций был теоретически рассмотрен Буссе [13]. В обеих теориях механизм осредненного вращения ассоциировался с нелинейными эффектами в слоях Экмана, при этом слои Стокса на боковой поверхности цилиндра из рассмотрения исключались. Экспериментальное подтверждение существования среднего течения было сделано в [14, 15]. При этом в [15] было обнаружено, что инерционные волны и моды способны генерировать осредненные течения в динамических пограничных слоях Стокса. Незначительное нарушение осевой симметрии торцевых стенок приводит к возбуждению неосесимметричных мод. В этом случае источники волновой энергии неоднородно распределены вдоль азимута, что приводит к усложнению структуры волнового паттерна. Так, в низкочастотной области обнаружена мода $M(1,1,1)$, представляющая собой одновихревое течение, периодически меняющее знак завихренности в течение периода либраций [16]. В отличие от осесимметричного случая осредненное течение в пограничных слоях Стокса имеет вид струй, бьющих вдоль всей боковой стенки полости. Направление движения жидкости в струях меняется на противоположное через азимутальный угол $\sim \pi$. Настоящая работа является продолжением данных исследований, причем основное внимание уделено детальному анализу временной динамики неосесимметричных инерционных мод и возбуждаемого ими осредненного течения в широком диапазоне частот либраций.

1. Экспериментальная установка и методика

На рис. 1 показана схема экспериментальной установки. Кювета 1 представляет собой оргстеклянный параллелепипед с полостью в виде кругового цилиндра радиуса $R = 26.0$ мм. Торцы полости образованы двумя оргстеклянными вставками в виде усеченных цилиндров с углом наклона секущей плоскости $\alpha = 8.5^\circ$. Вставки расположены параллельно друг другу таким образом, что расстояние между торцами $L = 90$ мм. Полость заполнена водным раствором глицерина, кинематическая вязкость которого во всех экспериментах составляет $\nu = 42.9$ сСт. Кювета закреплена при помощи двух металлических вертикальных опор к неподвижному горизонтальному столу. Внутри обеих опор имеются шарикоподшипники, служащие для свободного вращения кюветы. Диаметр одного из подшипников превышает диаметр полости, благодаря чему возможно изучение структуры азимутального течения.

Для вращения используется шаговый двигатель 2 (модель FL86STH118-6004A), вал которого соединен с кюветой при помощи упругой муфты 3. Управление

двигателем осуществляется драйвером 4 (SMD-9.0). Для повышения плавности вращения основной шаг двигателя 1.8° дополнительно делится драйвером до 0.45° . Питание системы осуществляется источником постоянного тока 5 (модель HY5005E) с выходным напряжением 50 В. В качестве генератора сигналов используется ЦАП 6 (модель ZET210), управляемый через USB-порт ПК 7. Специальное программное обеспечение ZETLab позволяет управлять импульсами генератора модуля ЦАП, в том числе модулировать сигнал по времени.

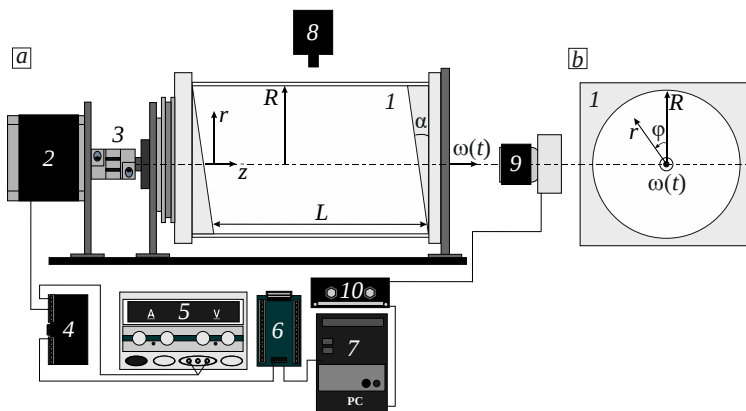


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: а – вид сбоку; б – вдоль оси вращения
Fig. 1. Scheme of an experimental setup: (a) side and (b) end views

В настоящих исследованиях для возбуждения инерционных колебаний жидкости скорость вращения полости модулируется с частотой Ω_{lib} и амплитудой ε :

$$\omega(t) = \Omega_{rot} [1 + \varepsilon \cos(\Omega_{lib} t)]. \quad (1)$$

Здесь Ω_{rot} – средняя скорость вращения, во всех экспериментах поддерживаемая равной 31.4 c^{-1} . В то же время частота либраций меняется в диапазоне $\Omega_{lib} = 9.4 - 62.8 \text{ c}^{-1}$. Амплитуда либраций принимает значение $\varepsilon = \Delta\varphi\sigma = 0.1$, где $\Delta\varphi$ – угловая амплитуда вращательных колебаний, а $\sigma = \Omega_{lib} / \Omega_{rot} = 0.3 - 2.0$ – безразмерная частота. Важный параметр задачи – число Экмана, являющееся отношением вязких сил к силе Кориолиса, $E = \nu / \Omega_{rot} R^2 = 2 \cdot 10^{-3}$. С другой стороны, этот параметр характеризует относительную толщину вязких пограничных слоев Экмана на торцевых стенках, $E \sim \delta_E^2 / R^2$. На боковой стенке цилиндра возникают динамические пограничные слои Стокса толщиной $\delta_{St} = (2\nu / \Omega_{lib})^{1/2}$. Учитывая, что в настоящих экспериментах частоты вращения и либраций одного порядка, пограничные слои $\delta_{St} \sim \delta_E \sim (\nu / \Omega_{rot})^{1/2} \sim 1 \text{ мм}$. Нелинейные эффекты в пограничных слоях играют важную роль в генерации осредненной азимутальной и меридиональной циркуляции, поэтому введем число Рейнольдса, рассчитанное как $Re = \tilde{u} \delta_E / \nu$. Принимая во внимание, что амплитуда пульсационной компоненты скорости $\tilde{u} = \Delta\varphi \Omega_{lib} R$, можно записать $Re = \Delta\varphi \Omega_{lib} R (\nu / \Omega_{rot})^{1/2} / \nu = \varepsilon E^{-1/2} = 2.2$. Оценки показывают, что это значение не превышает критического

числа Рейнольдса, при котором возникает центробежная неустойчивость на внутренней границе осциллирующего цилиндра [14].

Для исследования кинематических характеристик течений применяется PIV-метод (Particle Image Velocimetry). Для этого в жидкость добавляются полиамидные частицы диаметром ~ 60 мкм и средней плотностью ~ 1.04 г/см³. Источником освещения является лазерный нож, создаваемый непрерывным одноваттным лазером 8 (модель KLM-532/h-1000). Толщина лазерного ножа составляет 2 мм. Наблюдение за потоками происходит в лабораторной системе отсчета как со стороны боковой поверхности (см. рис. 1, а), так и со стороны торца (см. рис. 1, б). Положение лазера настраивается под цели наблюдения: так, например, при исследовании азимутального поля скорости световой нож устанавливается в поперечном сечении $z/L = 0.5$. Видеорегистрация движения частиц визуализатора осуществляется видеокамерой 9 (модель CamRecord CL600x2). Данные с камеры записываются на видеорегистратор 10 (модель DVR Express Core). Частота съемки составляет 20 кадров/с, а разрешение – 800×800 пикселей.

Поскольку внешняя граница полости имеет форму параллелограмма, для исследования течения со стороны боковой поверхности выбираются только те кадры, время между которыми кратно периоду вращения $T_{rot} = 2\pi / \Omega_{rot}$. Как показывают эксперименты, скорость азимутального течения мала, при этом через один период T_{rot} частицы визуализатора остаются в плоскости светового ножа, а их положение может быть зарегистрировано камерой. Для расчета пульсационной скорости используется разность периодов вращения и либраций $\Delta\tau_p = |NT_{rot} - MT_{lib}|$, где N и M – целые числа, которые выбираются из условия $\Delta\tau_p / T_{lib} < 0.2$. Кросс-корреляционная обработка последовательности изображений осуществляется в программе PIVlab [17]. Более подробно методика изучения течения в неравномерно вращающемся цилиндре описана в работе [18]. Для описания движения жидкости выбрана цилиндрическая система координат (r, φ, z) с началом отсчета оси z от торцевой стенки.

2. Резонансные режимы пульсационного течения

В диапазоне частот либраций $\sigma \in (0; 2)$ в полости поддерживаются инерционные волны. Первоначально обсудим, как зависит полный динамический отклик жидкости от частоты σ в линейном режиме, т.е. в области малых амплитуд ε . Для этого в качестве характеристики интенсивности пульсационного течения будем использовать среднюю по пространству скорость

$$u = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{u_r^2 + u_z^2}, \quad (2)$$

где u_r и u_z – проекции мгновенной скорости на оси r и z в осевом сечении полости; количество элементов N определяется пространственным разрешением PIV-метода. Далее полученное значение скорости дополнительно осредняется по периоду либраций и нормируется на амплитуду колебаний скорости жидкости вблизи боковой границы:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{\Delta\varphi\Omega_{lib}R} \frac{1}{T_{lib}} \int_{T_{lib}} u dt, \quad (3)$$

Диаграмма отклика жидкости на либрационное воздействие показана на рис. 2. Зависимость имеет немонотонный вид и характеризуется наличием ярко выраженных экстремумов. Каждому пику соответствует резонансный режим, характеризующийся определенным пространственным распределением кинетической энергии. Вне резонансных областей структура пульсационного течения представляет собой систему отдельных волновых лучей, исходящих из мест соединения боковой и торцевых стенок (см. рис. 3, а, б). Направление групповой скорости волн (белые стрелки на рис. 3) полностью определяется безразмерной частотой либраций $\theta = \pm \arcsin(\sigma/2)$ [1].

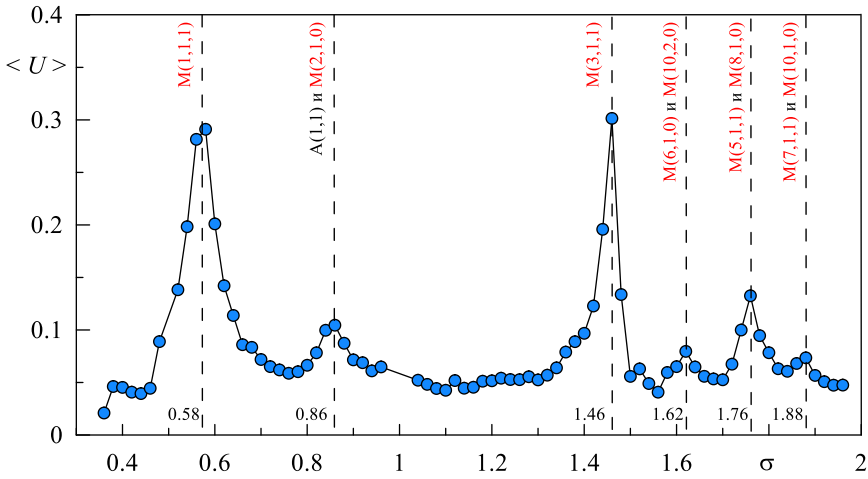


Рис. 2. Зависимость безразмерной скорости пульсационного течения в осевом сечении от частоты либраций

Fig. 2. Dimensionless velocity of a pulsating flow in the axial section as a function of libration frequency σ

Основной тип резонанса связан с возбуждением так называемых инерционных мод, отмеченных на рис. 2 как $M(n, m, k)$, где буквы в скобках соответственно означают осевое, радиальное и азимутальное волновое число. Собственные значения невязки инерционных мод могут быть получены следующим образом [1]:

$$\sigma^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{\pi^2 n^2 + \xi_{nmk}^2 / a^2}, \quad (4)$$

где ξ_{nmk} характеризует m -е положительное решение трансцендентного уравнения

$$\xi \frac{d}{d\xi} J_{|k|}(\xi) + k \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{n^2 \pi^2 a^2}} J_{|k|}(\xi) = 0. \quad (5)$$

Здесь $J_{|k|}(\xi)$ – функция Бесселя первого рода порядка $|k|$. Рассчитанные значения осесимметричных ($k = 0$) и неосесимметричных ($k = 1$) мод σ_{theory} для цилиндра с аспектным соотношением $a = R/L = 0.29$ представлены в таблице. Соответствующие значения резонансных пиков, наблюдаемые в эксперименте, представлены в колонке σ_{exp} .

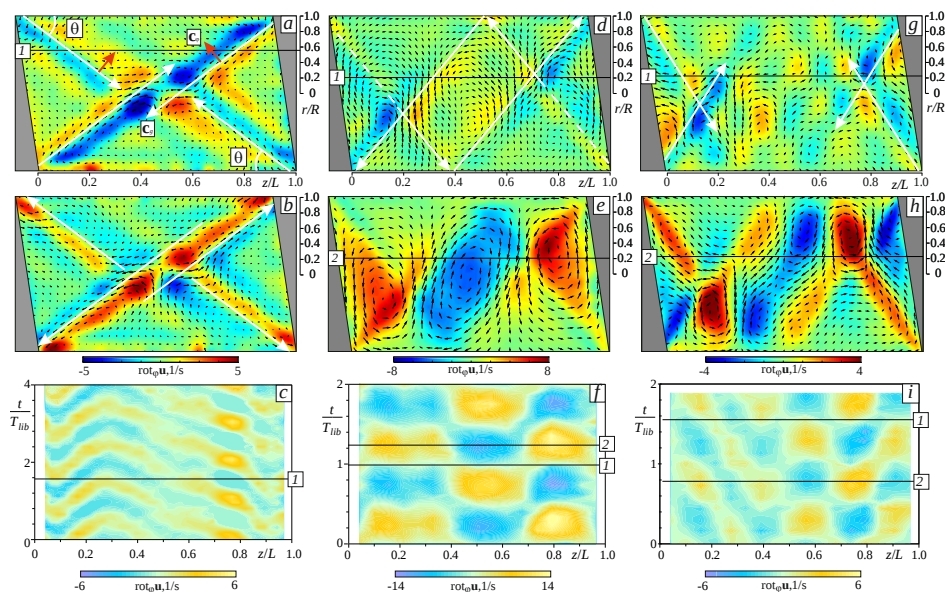


Рис. 3. Мгновенное поле завихренности в осевом сечении полости при частотах либраций $\sigma = 1.08$ (a, b), $\sigma = 1.46$ (d, e) и $\sigma = 1.62$ (g, h); белыми стрелками показано направление групповой скорости инерционных волн $\mathbf{c}_g$, красными стрелками – фазовой $\mathbf{c}_\phi$. В нижнем ряду (c, f, i) представлены соответствующие временные диаграммы завихренности вдоль направлений, обозначенных горизонтальными черными линиями на верхних фрагментах в моменты времени 1 и 2

Fig. 3. Snapshots of the vorticity field in the axial section of the cavity at a frequency $\sigma =$ (a, b) 1.08; (d, e) 1.46; and (g, h) 1.62; white arrows show the direction of the group velocity of inertial waves $\mathbf{c}_g$, red arrows show phase velocity $\mathbf{c}_\phi$; hereinafter, positive vorticity is counterclockwise. The bottom row (c, f, i) represents the corresponding vorticity time diagrams along the directions indicated by black horizontal lines on the top fragments at time instants 1 and 2

**Значения собственных частот инерционных мод
в цилиндре с аспектным соотношением $a = 0.29$**

n	m	k	σ_{theory}	σ_{exp}
1	1	1	0.575	0.58
2	1	0	0.857	0.86, A(1,1)
2	1	1	1.123	–
3	1	1	1.461	1.46
4	1	0	1.376	–
4	1	1	1.650	–
5	1	1	1.758	1.76
6	1	0	1.636	1.62
6	1	1	1.825	–
7	1	1	1.868	1.88
8	1	0	1.769	1.76
8	1	1	1.897	–
9	1	1	1.918	–
10	1	0	1.843	1.88
10	2	0	1.582	1.62

Благодаря наклону торцевых стенок в полости возбуждаются неосесимметричные моды с нечетным осевым волновым числом n . Тем не менее, поскольку либрационное воздействие симметрично, а угол наклона α достаточно мал, на близких частотах возможно появление осесимметричных мод с четными значениями n . При этом неосесимметричные моды с четными n не проявляются никогда. За счет вязкости две соседние моды могут объединяться в один комбинационный режим, в котором четные и нечетные моды проявляются попеременно. В целом результаты визуализации мгновенного поля скорости PIV-методом хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями собственных частот.

Типичные мгновенные поля скорости для мод $M(3,1,1)$ и $M(6,1,0)$ в фазе $\Omega_{lib}t = \pi/2$ показаны на рис. 3, e , h соответственно; для комбинационного режима с модами $M(5,1,1)$ и $M(8,1,0)$ при частоте $\sigma = 1.76$ и фазах $\Omega_{lib}t = \pi/2$ и 0 – на рис. 4, a , b соответственно.

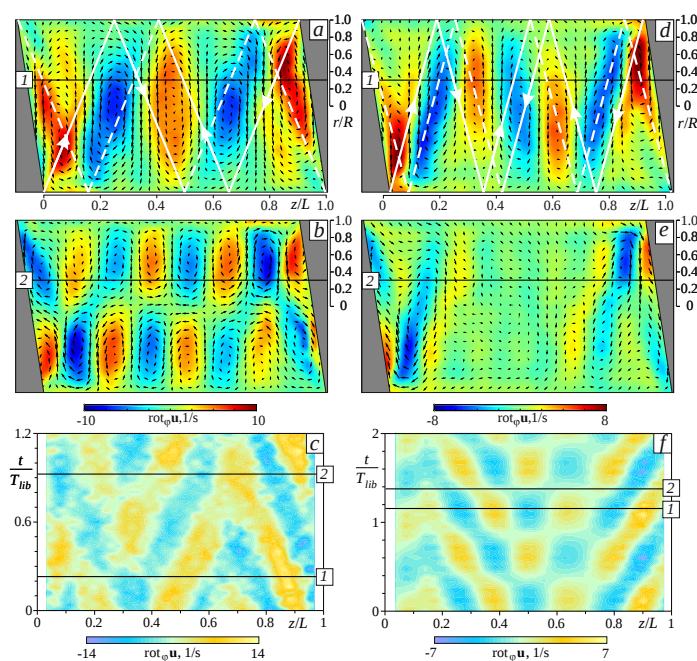


Рис. 4. Мгновенное поле завихренности при частотах либраций $\sigma = 1.76$ (a , b) и $\sigma = 1.88$ (d , e). В нижнем ряду (c , f) представлены соответствующие временные диаграммы завихренности вдоль направлений 1 и 2

Fig. 4. Snapshots of the vorticity field at a frequency $\sigma = 1$ (a , b) 1.76 and (d , e) 1.88. The bottom row (c , f) represents the corresponding vorticity time diagrams along the directions 1 and 2

Стоит отметить, что аналогичная комбинационная волновая картина наблюдается при частоте $\sigma = 0.86$, когда на одной частоте проявляются инерционная мода $M(2,1,0)$ и фокусировка волновых лучей в аттрактор $A(1,1)$ [18]. Вязкость гасит моды высокого порядка (т.е. с высоким значением n и m), поэтому инерционный отклик на либрации сильнее всего проявляется для мод низкого порядка.

3. Временная динамика волн

Рассмотрим временную динамику инерционных волн в различных режимах. Поскольку инерционные волны являются поперечными, частицы жидкости совершают антициклоническое круговое движение с частотой σ в плоскостях, лежащих под углами $\pm\theta$ относительно оси вращения. При этом завихренность $\text{rot}_{\phi}\mathbf{u}$, касательная к волновым лучам, определяет фазу волны. За пределами области пространственного резонанса фаза волны распространяется перпендикулярно волновым лучам со скоростью c_{ϕ} и направлена к боковой стенке полости (см. рис. 3, *a-c*). Временная диаграмма фазы (см. рис. 3, *c*) получена вдоль среза 1 (см. рис. 3, *a*) и является асимметричной по отношению к торцевым стенкам. Это означает, что волновые лучи со стороны двух противоположных тупых углов полости работают синфазно, а создаваемые ими завихренности складываются. Поэтому при перемещении фазы к боковой стенке полости завихренность со стороны острых углов гасится быстрее. Динамика распространения фазы сильно зависит от значения угла θ , а следовательно, и от частоты либраций. Здесь следует заметить, что движение жидкости относительно правого и левого торца является симметричным, поэтому для обработки данных можно рассматривать как верхнюю, так и нижнюю часть кюветы относительно оси вращения.

Резонансный режим с одной пространственной структурой $M(3,1,1)$ напоминает стоячую волну (см. рис. 3, *d-f*). Если в фазе либраций $\Omega_{lib}t = 0$ хорошо различимы отдельные волновые лучи, исходящие из углов полости, то при $\Omega_{lib}t = \pi$ возбуждается инерционная мода с осевым волновым числом $n = 3$ (см. рис. 3, *e*). В течение периода либраций закрутка жидкости в вихрях меняется на противоположную, при этом максимумы завихренностей сохраняют свое положение (см. рис. 3, *f*). Стоит отметить, что контуры вихревых структур могут быть описаны волновыми лучами, испущенными из любых двух противоположных углов полости. Похожие режимы стоячих волн, но с четными значениями n , наблюдались в либрирующем цилиндре с прямыми торцами [19], а также либрирующем кубе [3].

Более сложная волновая динамика наблюдается в комбинационных режимах, когда на одной частоте в разные моменты времени возбуждаются инерционные моды с различными волновыми числами. Так, при частоте $\sigma = 1.62$ (см. рис. 3, *g-i*) попеременно возникают две симметричные моды $M(6,1,0)$ и $M(10,2,0)$. Первая, доминантная мода, наиболее ярко проявляется в фазах либраций $\Omega_{lib}t = \pi/2$ и $3\pi/2$. При этом асимметрия кюветы способствует деформации пространственной структуры моды вблизи торцов полости: величина завихренности около тупых углов существенно выше, чем вблизи острых (см. рис. 3, *h*). Это указывает на то, что тупые углы закачивают в систему больше энергии по сравнению с острыми. Вторая мода, более высокого порядка, проявляется слабее и хорошо различима в фазах $\Omega_{lib}t = 0$ и π . Фазовая диаграмма волнового движения показывает, что вблизи тупого угла сохраняется режим стоячих волн, при котором происходит периодическое изменение знака завихренности (см. рис. 3, *i*). Вблизи острого угла, где пространственный резонанс проявляется слабее, преобладает режим бегущих волн.

Случаи попеременного возбуждения осесимметричной и неосесимметричной моды представлены на рис. 4. При частоте $\sigma = 1.76$ наблюдаются моды $M(5,1,1)$ и $M(8,1,0)$, переключение между которыми происходит в режиме бегущих

волн (см. рис. 4, *a–c*). В отличие от предыдущего случая завихренность $\text{rot}_\varphi \mathbf{u}$ более равномерно распределена вдоль координаты z/L . В целом пространственно-волновую картину можно представить как две пары волн, одна из которых сходится вблизи точки $z/L = 0.7$, а вторая расходится из точки $z/L = 0.35$. Наконец, при частоте $\sigma = 1.88$ возбуждаются моды $M(7,1,1)$ и $M(10,1,0)$. В данном случае наибольшей кинетической энергией обладает неосесимметричная мода, в то время как осесимметричная проявляется только вблизи торцов полости и быстро диссипирует с расстоянием вдоль осевой координаты (см. рис. 4, *d–f*). В центральной части полости колебательный режим больше напоминает стоячую волну. Аналогичная волновая динамика характерна для случая $M(3,1,1)$, когда при отсутствии дополнительного возмущения со стороны другой моды положение центров завихренности не менялось со временем (см. рис. 3, *d–f*). В то же время вблизи торцов полости, где обе моды взаимодействуют между собой, наблюдается режим бегущих волн.

4. Осредненная циркуляция, возбуждаемая волнами

Первоначально рассмотрим структуру осредненного течения, когда инерционные волны отсутствуют ($\sigma \geq 2$). В этом случае динамика жидкости определяется осредненными сдвиговыми напряжениями в пограничных слоях, индуцированными периодической экмановской подкачкой [13, 14]. Для удобства осреднения поля скорости в расчетах из всей последовательности кадров выбираются только кратные периоду либраций T_{lib} . При таком подходе частицы визуализатора участвуют только в медленном стационарном движении, а пульсационная компонента скорости не проявляется. Осредненные поля скорости в осевом и поперечном сечении полости при частоте $\sigma = 2$ представлены на рис. 5.

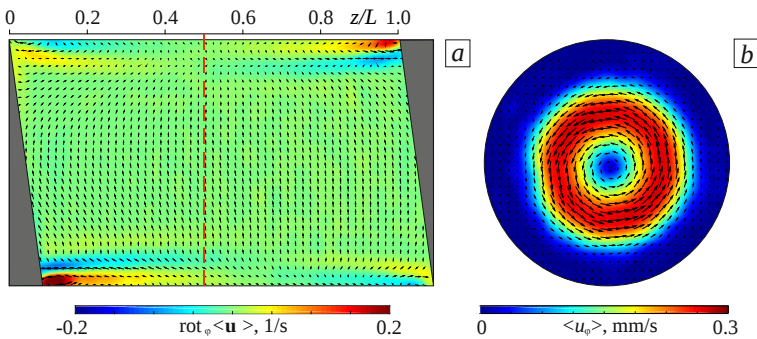


Рис. 5. Осредненные поля скорости в продольном (*a*) и поперечном (*b*) сечении при отсутствии инерционных волн при частоте $\sigma = 2.0$; направление вращения полости на фрагменте (*b*) по часовой стрелке; вертикальной штриховой линией показано положение сечения z/L , в котором получено азимутальное поле скорости

Fig. 5. Steady velocity fields in the (*a*) axial and (*b*) radial cross-sections in the absence of inertial waves at a frequency $\sigma = 2.0$; the cavity rotation is clockwise on the fragment (*b*); the vertical dashed line shows z/L position with the obtained azimuthal velocity field

Вблизи углов полости возникает медленное стационарное вихревое движение, интенсивность которого максимальна вблизи тупых углов и минимальна вблизи

острых. Направление циркуляции в вихрях таково, что жидкость движется от углов вдоль боковой стенки. Подобная структура была впервые обнаружена в либрирующем цилиндре с прямыми торцами [15]. Причем было показано, что осредненное угловое течение существует во всем диапазоне частот либраций, а его скорость квадратично зависит от амплитуды либраций $\sim \varepsilon^2$. Помимо меридиональной циркуляции в объеме полости возникает осредненная ретроградная азимутальная циркуляция, скорость которой также определяется квадратом амплитуды либраций [13, 15, 20].

В диапазоне частот $\sigma \in (0; 2)$ инерционные волны при отражении от боковой стенки цилиндра возбуждают пульсационное движение жидкости в пограничном слое Стокса. На этом фоне возникает стационарная меридиональная циркуляция, структура которой сильно зависит от режима пульсационного течения. На рис. 6 представлены осредненное поле скорости вблизи боковой стенки полости, распределение завихренности и фазовая диаграмма пульсационного течения в трех различных режимах: нерезонансный режим бегущей волны (a–c), резонансный режим стоячей волны (d–f), резонансный режим бегущей волны (g–i).

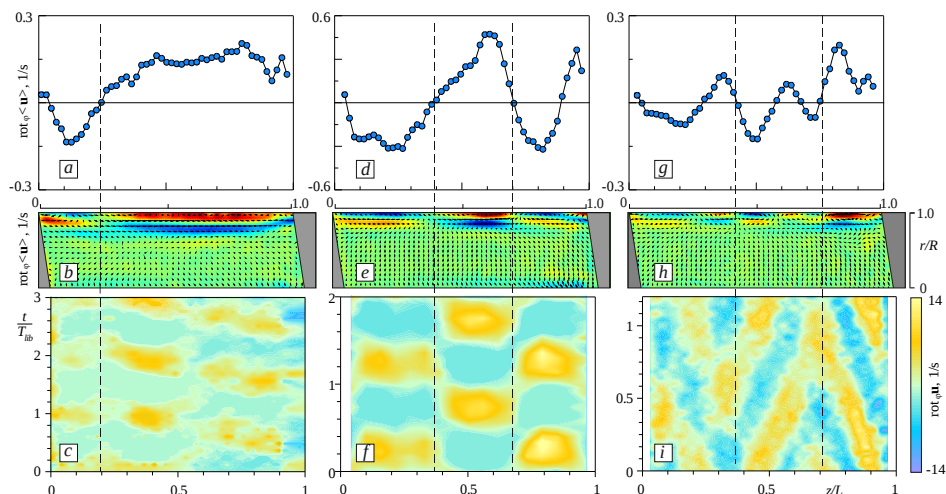


Рис. 6. Распределение осредненной по времени завихренности $\text{rot}_\varphi \langle \mathbf{u} \rangle$ вдоль боковой стенки полости, осредненное по времени поле скорости и временная диаграмма мгновенной завихренности $\text{rot}_\varphi \mathbf{u}$ вдоль направления 1 (см. рис. 4, a, b) при частотах $\sigma = 0.72$ (a–c), $\sigma = 1.46$ (d–f) и $\sigma = 1.76$ (g–i)

Fig. 6. Distribution of steady vorticity $\text{rot}_\varphi \langle \mathbf{u} \rangle$ along the sidewall of the cavity, steady velocity field, and time dependency of instantaneous vorticity $\text{rot}_\varphi \mathbf{u}$ along line 1 (Fig. 4a, b) at a frequency $\sigma =$ (a–c) 0.72, (d–f) 1.46, and (g–i) 1.76

При частоте $\sigma = 0.72$, в нерезонансном режиме, фаза инерционной волны широким фронтом распространяется со стороны тупого угла к острому (см. рис. 6, c). Как видно, это приводит к возникновению осредненного вихревого течения вблизи боковой границы полости, локализованного в пределах $z/L = 0.2 - 1.0$. Направление циркуляции жидкости в вихре является циклоническим, т.е. в непосредственной близости к твердой границе жидкость движется от тупого угла к острому. Важно отметить, что это совпадает с направлением распространения фазы волны.

Продольный размер вихря также совпадает с шириной фронта бегущей волны. При этом его поперечный размер ограничивается несколькими толщинами пограничного слоя Стокса $\delta_{st} = \sqrt{2\nu / \Omega_{lib}}$. Бегущая волна со стороны острого угла возбуждает антициклоническое вихревое течение, локализованное в пределах $z/L = 0.2 - 1.0$. Можно отметить, что в рассматриваемом случае направления осредненной циркуляции, возбуждаемой инерционными волнами и угловыми колебаниями полости (см. рис. 5, *a*) совпадают и усиливают друг друга. В нижней половине полости, которая не показана на рис. 6, *b*, осредненное движение жидкости относительно тупого и острого углов аналогичное. Это означает, что осредненное течение не является осесимметричным.

В резонансном режиме стоячей волны при частоте $\sigma = 1.45$ структура осредненного течения имеет вид системы вихрей, количество и продольный размер которых согласуются с пространственными характеристиками инерционной моды $M(3,1,1)$ (см. рис. 6, *d-f*). В диапазоне $z/L = 0.4 - 0.7$ осредненная завихренность циклоническая, в то время как при $z/L = 0 - 0.4$ и $z/L = 0.7 - 0.9$ антициклоническая. Вблизи мест соединения боковой и торцевых стенок структура осредненного течения, возбуждаемого инерционной модой, осложняется присутствием угловых вихрей. Если вблизи острого угла циркуляция жидкости, возбуждаемая обоими эффектами, согласуется и усиливается, то вблизи тупого угла ситуация противоположная. Судя по тому, что угловой циклонический вихрь деформирован и прижат к торцевой стенке, интенсивность антициклонического вихря от инерционной моды существенно выше. Подобная структура осредненного течения возникает в либрирующем цилиндре с прямыми торцами [19]. В отличие от рассматриваемого случая вихри имели осесимметричную тороидальную форму, а их количество определялось соотношением $n + 2$.

В резонансном режиме бегущей волны структура течения более сложная ($\sigma = 1.76$; см. рис. 6, *g-i*). Две сходящиеся в точку с координатой $z/L = 0.7$ волны индуцируют пару согласованно вращающихся осредненных вихрей. Как и в нерезонансном режиме, направление циркуляции жидкости определяется направлением распространения фазы волны. В точке с координатой $z/L = 0.35$ расходящиеся волны также генерируют пару вихрей, но уже с противоположной закруткой. Важно отметить, что течение вблизи тупого угла усиливается бегущей волной. В то же время интенсивность антициклонического вихревого движения вблизи острого угла ослабляется волной. При частоте $\sigma = 1.88$, когда попеременно возбуждаются моды $M(7,1,1)$ и $M(10,1,0)$, эффект менее выражен из-за вязкой диссипации волнового движения в пограничном слое Стокса. Таким образом, инерционные волны оказывают сильное влияние на структуру осредненного течения. При этом направление осредненной циркуляции в значительной мере зависит от направления распространения фазы волны.

Заключение

Экспериментально исследовано влияние неосесимметричных инерционных волн на осредненную циркуляцию жидкости в неравномерно вращающемся (либрирующем) цилиндре. Для нарушения азимутальной симметрии течения торцы полости наклонены параллельно друг другу на угол $\alpha = 8.5^\circ$ относительно плоскости поперечного сечения. Обнаружено, что в зависимости от частоты либраций $\sigma = \Omega_{lib} / \Omega_{rot}$

в полости поддерживаются различные инерционные режимы: нерезонансный режим бегущей волны, резонанс неосесимметричной инерционной моды, резонансный режим бегущей инерционной волны. Вне области резонанса пульсационное течение представляет собой совокупность волновых лучей, распространяющихся из углов полости вдоль характеристических поверхностей в виде конусов. Детальные исследования временной динамики поля скорости показывают, что мгновенное поле завихренности может быть представлено в виде совокупности бегущих волн. Если частота либраций совпадает с собственной частотой инерционных колебаний жидкости, на долю периода возбуждаются неосесимметричные моды – крупномасштабные осциллирующие структуры. Значения собственных частот в экспериментах хорошо согласуются с предсказаниями для невязких инерционных мод. Поскольку положение вихрей со временем не меняется, режим напоминает стоячие волны, пучностями которых являются центры завихренностей. В области высоких частот либраций $\sigma > 1.5$ возбуждаются комбинационные режимы, для которых характерно попеременное возбуждение инерционных мод (как осесимметричных, так и неосесимметричных) с различными волновыми числами. При возбуждении двух осесимметричных волн вблизи тупого угла полости сохраняется режим стоячих волн, в то время как вблизи острого угла – режим бегущей волны. В случае попеременного возбуждения осесимметричной и неосесимметричной моды пространственно-волновой паттерн можно представить в виде нескольких пар сходящихся и расходящихся бегущих волн.

Обнаружено, что колебания жидкости в объеме полости индуцируют осредненное течение в пограничном слое Стокса. В случае отсутствия волн вблизи мест соединения боковой и торцевых стенок возникает так называемое угловое течение в виде тороидального вихря. При возбуждении неосесимметричной инерционной моды вблизи боковой стенки дополнительно формируется система осредненных вихревых структур, количество которых совпадает с осевым волновым числом моды n . В режиме бегущей волны (нерезонансный случай) осредненное течение представляет собой пару вихревых ячеек, генерируемых двумя волнами, распространяющихся от торцов полости в центр. Причем продольный размер вихрей определяется шириной волнового фронта. В резонансном режиме бегущей волны структура осредненного течения более сложная: взаимодействие мод с различными осевыми волновыми числами приводит к появлению нескольких пар согласованно вращающихся вихрей. Вдоль боковой стенки жидкость движется по направлению к точке схождения волн и, наоборот, жидкость движется по направлению от точки расхождения волн.

Список источников

1. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеониздат, 1975. 304 с.
2. Messio L., Morize C., Rabaud M., Moisy F. Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid // *Experiment. Fluids*. 2008. V. 44. P. 519–528. doi: 10.1007/s00348-007-0410-3
3. Boisson J., Lamriben C., Maas L.R.M., Cortet P.P., Moisy F. Inertial waves and modes excited by the libration of a rotating cube // *Phys. Fluids*. 2012. V. 24 (7). Art. 076602. doi: 10.1063/1.4731802
4. Borgia I.D., Abouzar G.V., Harlander U. Inertial wave mode excitation in a rotating annulus with partially librating boundaries // *Fluid Dyn. Res.* 2014. V. 46. Art. 041423. doi: 10.1088/0169-5983/46/4/041423

5. Maas L.R.M., Benielli D., Sommeria J., Lam F.P.A. Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid // *Nature*. 1997. V. 388. P. 557–561. doi: 10.1038/41509
6. Manders A.M.M., Maas L.R.M. Observations of inertial waves in a rectangular basin with one sloping boundary // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 493. P. 59–88. doi: 10.1017/S0022112003005998
7. Сибгатуллин И.Н., Ерманык Е.В. Аттракторы внутренних и инерционных волн (обзор) // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 2. С. 113–136. doi: 10.15372/PMTF20190210
8. Rieutord M., Georgeot B., Valdettaro L. Inertial waves in a rotating spherical shell: attractors and asymptotic spectrum // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 435. P. 103–144. doi: 10.1017/S0022112001003718
9. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. Librational forcing of a rapidly rotating fluid-filled cube // *J. Fluid Mech.* 2018. V. 842. P. 469–494. doi: 10.1017/jfm.2018.157
10. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. Reflections and focusing of inertial waves in a librating cube with the rotation axis oblique to its faces // *J. Fluid Mech.* 2020. V. 896. Art. A5. doi: 10.1017/jfm.2020.328
11. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. Reflections and focusing of inertial waves in a tilted librating cube // *J. Fluid Mech.* 2022. V. 947. Art. A10. doi: 10.1017/jfm.2022.639
12. Wang C.Y. Cylindrical tank of fluid oscillating about a steady rotation // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 41. P. 581–592. doi: 10.1017/S0022112070000769
13. Busse F.H. Zonal flow induced by longitudinal librations of a rotating cylindrical cavity // *Physica D*. 2011. V. 240 (2). P. 208–211. doi: 10.1016/j.physd.2010.09.010
14. Noir J., Calkins M.A., Lasbleis M., Cantwell J., Aurnou J.M. Experimental study of libration-driven zonal flows in a straight cylinder // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2010. V. 1-2. P. 98–106. doi: 10.1016/j.pepi.2010.06.012
15. Subbotin S.V., Dyakova V.V. Inertial waves and steady flows in a liquid filled librating cylinder // *Microgravity Sci. Technol.* 2018. V. 30 (4). P. 383–392. doi: 10.1007/s12217-018-9621-x
16. Subbotin S. Non-axisymmetric flow excited by fluid oscillations in a rotating cylinder with sloping ends // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. V. 1809. Art. 012015. doi: 10.1088/1742-6596/1809/1/012015
17. Thielicke W., Stamhuis E.J. PIVlab – Time-Resolved Digital Particle Image Velocimetry Tool for MATLAB (version: 2.50).
18. Subbotin S., Shiryayeva M. Steady vortex flow induced by inertial wave attractor in a librating cylinder with sloping ends // *Microgravity Sci. Technol.* 2022. V. 34 (5). Art. 89. doi: 10.1007/s12217-022-10008-x
19. Subbotin S. Steady circulation induced by inertial modes in a librating cylinder // *Phys. Rev. Fluids*. 2020. V. 5 (1). Art. 014804. doi: 10.1103/PhysRevFluids.5.014804
20. Sauret A., Cébron D., Le Bars M., Le Dizès S. Fluid flows in a librating cylinder // *Phys. Fluids*. 2012. V. 24. Art. 026603. doi: 10.1063/1.3680874

References

1. Greenspan H.P. (1968) *The Theory of Rotating Fluids*. London: Cambridge University Press.
2. Messio L., Morize C., Rabaud M., Moisy F. (2008) Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid. *Experiments in Fluids*. 44. pp. 519–528. doi: 10.1007/s00348-007-0410-3
3. Boisson J., Lamriben C., Maas L.R.M., Cortet P.P., Moisy F. (2012) Inertial waves and modes excited by the libration of a rotating cube. *Physics of Fluids*. 24(7). Article 076602. doi: 10.1063/1.4731802
4. Borgia I.D., Abouzar G.V., Harlander U. (2014) Inertial wave mode excitation in a rotating annulus with partially librating boundaries. *Fluid Dynamics Research*. 46. Article 041423. doi: 10.1088/0169-5983/46/4/041423
5. Maas L.R.M., Benielli D., Sommeria J., Lam F.P.A. (1997) Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid. *Nature*. 388. pp. 557–561. doi: 10.1038/41509

6. Manders A.M.M., Maas L.R.M. (2003) Observations of inertial waves in a rectangular basin with one sloping boundary. *Journal of Fluid Mechanics*. 493. pp. 59–88. doi: 10.1017/S0022112003005998
7. Sibgatullin I.N., Ermanyuk E.V. (2019) Internal and inertial wave attractors: A review. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 60(2). pp. 284–302. doi: 10.1134/S002189441902010X
8. Rieutord M., Georgeot B., Valdettaro L. (2001) Inertial waves in a rotating spherical shell: attractors and asymptotic spectrum. *Journal of Fluid Mechanics*. 435. pp. 103–144. doi: 10.1017/S0022112001003718
9. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. (2018) Librational forcing of a rapidly rotating fluid-filled cube. *Journal of Fluid Mechanics*. 842. pp. 469–494. doi: 10.1017/jfm.2018.157
10. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. (2020) Reflections and focusing of inertial waves in a librating cube with the rotation axis oblique to its faces. *Journal of Fluid Mechanics*. 896(A5). doi: 10.1017/jfm.2020.328
11. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. (2022) Reflections and focusing of inertial waves in a tilted librating cube. *Journal of Fluid Mechanics*. 947(A10). doi: 10.1017/jfm.2022.639
12. Wang C.Y. (1970) Cylindrical tank of fluid oscillating about a steady rotation. *Journal of Fluid Mechanics*. 41. pp. 581–592. doi: 10.1017/S0022112070000769
13. Busse F.H. (2011) Zonal flow induced by longitudinal librations of a rotating cylindrical cavity. *Physica D*. 240(2). pp. 208–211. doi: 10.1016/j.physd.2010.09.010
14. Noir J., Calkins M.A., Lasbleis M., Cantwell J., Aurnou J.M. (2010) Experimental study of libration-driven zonal flows in a straight cylinder. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 1–2. pp. 98–106. doi: 10.1016/j.pepi.2010.06.012
15. Subbotin S.V., Dyakova V.V. (2018) Inertial waves and steady flows in a liquid filled librating cylinder. *Microgravity Science and Technology*. 30(4). pp. 383–392. doi: 10.1007/s12217-018-9621-x
16. Subbotin S. (2021) Non-axisymmetric flow excited by fluid oscillations in a rotating cylinder with sloping ends. *Journal of Physics: Conference Series*. 1809. Article 012015. doi: 10.1088/1742-6596/1809/1/012015
17. Thielicke W., Stamhuis E.J. (2014) *PIVlab – Time-Resolved Digital Particle Image Velocimetry Tool for MATLAB*. Version 2.50.
18. Subbotin S., Shiryayeva M. (2022) Steady vortex flow induced by inertial wave attractor in a librating cylinder with sloping ends. *Microgravity Science and Technology*. 34(5). Article 89. doi: 10.1007/s12217-022-10008-x
19. Subbotin S. (2022) Steady circulation induced by inertial modes in a librating cylinder. *Physical Review Fluids*. 5(1). Article 014804. doi: 10.1103/PhysRevFluids.5.014804
20. Sauret A., Cébron D., Le Bars M., Le Dizès S. (2012) Fluid flows in a librating cylinder. *Physics of Fluids*. 24. Article 026603. doi: 10.1063/1.3680874

Сведения об авторах:

Ширяева Мария Андреевна – аспирант кафедры физики и технологии физического факультета Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета (Пермь, Россия). E-mail: shiryayeva_ma@pspu.ru

Субботин Станислав Валерьевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории вибрационной гидромеханики Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета, Пермь, Россия. E-mail: subbotin_sv@pspu.ru

Information about the authors:

Shiryayeva Mariya A. (Perm State Humanitarian Pedagogical University, Perm, Russian Federation). E-mail: shiryayeva_ma@pspu.ru

Subbotin Stanislav V. (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State Humanitarian Pedagogical University, Perm, Russian Federation). E-mail: subbotin_sv@pspu.ru

Статья поступила в редакцию 14.08.2023; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 14.08.2023; accepted for publication 03.10.2024

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ**MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES**

Научная статья

УДК 517.9:622.838.5.001.2

doi: 10.17223/19988621/91/14

**Сергей Васильевич Панько.
К 80-летию со дня рождения**

Сергей Васильевич Панько (02.10.1944–02.11.2021)

Профессор кафедры общей математики, доктор физико-математических наук Сергей Васильевич Панько родился 2 октября 1944 года в г. Киселёвске Кемеровской области. Его родители Василий Евстратович и Татьяна Федосеевна работали на шахтах Киселёвска, а после рождения троих детей мама занималась их воспитанием. Сергей Васильевич был старшим ребенком в семье.

После окончания средней школы в 1962 г. С.В. Панько поступил на механико-математический факультет Томского университета. В те годы на мехмате работали профессора З.И. Клементьев, П.П. Куфарев, Г.И. Назаров, доцент Е.Д. Томилов, о которых Сергей Васильевич всегда вспоминал как о главных своих учителях. В 1968 г. С.В. Панько защитил дипломную работу «Точечный взрыв в сжимаемой

реагирующей среде: плоский случай» (научный руководитель доцент А.М. Гришин) и получил квалификацию «механик» по специальности «теоретическая механика и гидроаэромеханика». Математические способности Сергея Васильевича проявились еще во время учебы на ММФ; он настолько глубоко освоил теорию функций комплексного переменного, что на момент выпуска из университета уже опубликовал две статьи по аэромеханике в центральной печати. В те времена это случалось чрезвычайно редко и сразу выделило его среди других выпускников факультета. С 1 августа 1968 г. он – младший научный сотрудник НИИ прикладной математики и механики ТГУ. В 1973 г. С.В. Панько поступил в аспирантуру и 29 июня 1975 г. в совете ТГУ защитил диссертацию «О некоторых плоских стационарных задачах фильтрации с предельным градиентом» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (научный руководитель Е.Д. Томилов; официальные оппоненты профессор Г.И. Назаров и кандидат физико-математических наук В.П. Харитонов).



Сергей Васильевич с женой Эдитой Ивановной

В шестидесятые годы в Сибири, и в том числе в Томской области, были открыты и введены в разработку значительные запасы нефти и газа, и научное обоснование этого процесса стало актуальной задачей. Руководивший в те годы Томской областью Е.К. Лигачев провозгласил лозунг: «В каждом институте должно пахнуть нефтью». Это и определило дальнейшее направление деятельности С.В. Панько – математическое моделирование методов повышения нефтеотдачи пластов. И хотя развитие компьютерной техники в шестидесятые-семидесятые годы привело к бурному развитию численных методов и значительному сокращению поля деятельности специалистов по аналитическим методам, Сергей Васильевич успешно продолжил их применять. Этот период его научной деятельности является наиболее плодотворным. С.В. Панько удалось установить тесный контакт с В.М. Ентовым (Институт проблем механики АН СССР (РАН), Москва), известным ученым

в области подземной гидродинамики, и Сергей Васильевич и Владимир Маркович совместно решили ряд задач по моделированию гидроразрыва пластов, а затем сформулировали задачи по определению влияния вязко-пластичных свойств нефти на нефтеотдачу пластов. В.М. Ентов стал научным консультантом С.В. Панько по его докторской диссертации.



Первый ряд: И.М. Васенин, В.М. Ентов, А.Д. Колмаков; второй ряд: С.В. Панько, В.Н. Панков

Следует отметить, что для подземной гидромеханики одной из трудностей является неполнота исходных данных. Поэтому в гидродинамических расчетах, на которые опирается разработка месторождений, важное место занимают упрощенные и четко определенные модели, допускающие полное многовариантное исследование. Именно к таким задачам относятся задачи о целиках остаточной вязко-пластичной нефти в продуктивных пластах, при решении которых в полной мере проявились аналитические способности С.В. Панько. В результате с использованием метода годографа скорости потока (этот метод Сергей Васильевич изящно заимствовал из аэромеханики) сначала удалось решить ряд модельных задач в однородных пластах, а затем распространить эти результаты на пласты со случайной неоднородностью. В итоге была построена полная теория целиков остаточной нефти в пластах различной структуры и уже с помощью численных методов проведено параметрическое исследование основных систем размещения нагнетательных и добывающих скважин.

Главное, что отличало С.В. Панько от многих других ученых-механиков его времени, – это виртуозное владение аналитическими методами решения задач математической физики и соответствующих краевых задач. «Последний из могикан» – так характеризовал его В.М. Ентов. Сергею Васильевичу удавалось получить представления решений систем уравнений в частных производных с переменными коэффициентами независимо от типа уравнений через интегральные операторы в форме Лиувилля или Вейля, позволяющие сводить исходные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных к краевым

задачам для классических уравнений математической физики (Даламбера, Лапласа, Фурье, Гельмгольца). В итоге им были обнаружены интегральные представления решений систем, обобщающие известные представления решения уравнения осесимметричного потенциала. В случае смешанных задач для исходных систем была установлена их редукция к парным интегральным уравнениям с функциями Лежандра нового типа, которые эквивалентны интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Возможность такого сведения обусловлена тем, что найденные интегральные представления есть обобщенные интегральные уравнения Абеля, для которых известна формула обращения. Поскольку в качестве «стартовых» уравнений берутся классические уравнения математической физики, это существенно облегчает построение решения исходных краевых задач. В частности, данное обстоятельство позволяет находить решение для гиперболических или параболических уравнений в случае, если граница движется. Второе направление исследований С.В. Панько – аналитические и приближенно-аналитические подходы к существенно нелинейным задачам как в случае нелинейности исходной системы (уравнения второго порядка), так и в случае, когда исходная система линейна, но условия ставятся на неизвестной границе. Предложенный им метод позволил получить точное решение нелинейных эллиптических уравнений в областях с круговыми границами. Методом граничных интегральных уравнений решены задачи сопряжения на неизвестной границе, которые сводятся к нелинейной системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (СИДУ). В последние годы С.В. Панько занимался приближенно-аналитическим решением задач переноса примеси в атмосфере и прямых задач томографии.

За цикл работ по подземной гидромеханике С.В. Панько заслуженно получил степень доктора физико-математических наук: 25 ноября 1992 г. в совете Казанского государственного университета он защитил диссертацию «Аналитические и асимптотические исследования стационарных задач нелинейной фильтрации» (научный консультант профессор В.М. Ентов; официальные оппоненты профессора Э.А. Бондарев, В.Л. Данилов и Э.В. Скворцов; утв. ВАК 12 февраля 1993 г.).

С.В. Панько был участником многих международных, всесоюзных и республиканских научных конференций, совещаний и симпозиумов, в их числе Всесоюзный семинар-совещание «Краевые задачи теории фильтрации» (Ужгород, 1976; Ровно, 1979; Казань, 1989); V и VI Всесоюзные съезды по теоретической и прикладной механике (Алма-Ата, 1981; Ташкент, 1986); Всесоюзные семинары «Современные проблемы и математические методы теории фильтрации» (Москва, 1984, 1989); Всесоюзные семинары «Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости» (Новосибирск, 1981, 1985; Якутск, 1988); Международный симпозиум «Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы» (Иркутск, 2001) и др.

Сергей Васильевич был членом докторского диссертационного совета (механика деформируемого твердого тела; механика жидкости, газа и плазмы; теплофизика и теоретическая теплотехника; экология) в ТГУ, входил в экспертный совет НИИ прикладной математики и механики ТГУ.

В 1995 г., когда ситуация в стране резко изменилась и ассигнования, в том числе на нефтяную науку, резко сократились, С.В. Панько перешел на педагогическую работу на механико-математический факультет ТГУ. Глубокое знание

основ математики делало этот переход вполне закономерным и естественным и в итоге позволило Сергею Васильевичу в 1999 г. стать заведующим кафедрой общей математики ММФ. В этой должности он прослужил, именно прослужил, почти пятнадцать лет. Очень заботился о кафедре, самоотверженно, не считаясь со временем, боролся за улучшение условий работы преподавателей. Два раза, в 2005 и 2010 гг., по его инициативе кафедра была организатором Всероссийской олимпиады по математике. Читал курсы «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Высшая математика», «Основы теории вероятностей и математическая статистика», осуществлял руководство дипломными работами на механико-математическом факультете ТГУ по направлению «Математика».

Сергей Васильевич был одарен многими способностями, очень быстро читал, обладал феноменальной памятью. Пролистав книгу, мог подробно изложить ее содержание. Любил и знал литературу, помнил наизусть множество стихотворений. Он запомнился коллегам не только необыкновенными способностями, но и своими человеческими качествами. Был очень добрым и чрезвычайно терпеливым человеком, понимал и прощал недостатки коллег, ко всем был неизменно доброжелателен. Очень любил и ценил свою семью.

С.В. Панько скончался 2 ноября 2021 г. и похоронен на Томском городском кладбище (около д. Воронино).

Основные труды С.В. Панько

1. Панько С.В. Об инвариантном преобразовании уравнений Эйлера для плоских установившихся течений идеальной сжимаемой жидкости // Прикладная математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 3.
2. Панько С.В. О некоторых задачах фильтрации с предельным градиентом // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1973. № 4.
3. Ентов В.М., Малахова Т.А., Панков В.Н., Панько С.В. О расчете предельно-равновесных целиков при вытеснении вязкопластичной нефти // Прикладная математика и механика. 1980. Т. 44, вып. 5.
4. Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В. К расчету целиков остаточной вязкопластичной нефти // Прикладная математика и механика. 1980. Т. 44, вып. 5.
5. Ентов В.М., Панько С.В. К вариационной формулировке задач о целиках остаточной нефти // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48, вып. 6.
6. Панько С.В. О нелинейной фильтрации к скважинам от криволинейных контуров питания // Всесоюзный семинар «Современные проблемы и математические методы теории фильтрации», Москва, 14–17 мая 1984 г. : тез. докл. М., 1984.
7. Панько С.В. О точных решениях краевых задач нелинейной фильтрации // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1985. № 3.
8. Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В. О форме целика остаточной вязкопластичной нефти при разработке круговой залежи // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1985. № 4.
9. Панько С.В. О задачах нелинейной фильтрации в областях с криволинейными границами // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 1.
10. Панько С.В. О представлении решения обобщенной системы Коши–Римана и его приложения // Прикладная математика и механика. 1989. Т. 53, вып. 5.
11. Панько С.В. О плоских задачах неізотермической фильтрации вязкопластических жидкостей // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 4.
12. Панько С.В. О представлении решения обобщенного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 2.

13. Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В. Математическая теория целиков остаточной нефти. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1989.
14. Югов Н.Т., Белов Н.Н., Панько С.В. Применение метода конечных элементов к исследованию проблем высокоскоростного взаимодействия деформируемых твердых тел. Томск : Том. гос. ун-т, 2000.
15. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Хабибуллин М.В., Панько С.В., Афанасьева С.А. Математическое моделирование процессов деформирования и разрушения в конструкционных материалах при динамическом нагружении. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2001.
16. Белов Н.Н., Панько С.В., Югов Н.Т. Метод факторизации для решения дифференциальных уравнений высших порядков. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2002.
17. Никитина М.Г., Панько С.В., Старченко А.В. О представлении решения уравнения переноса примеси и его приложения // Оптика атмосферы и океана. 2004. Т. 17. № 01.
18. Зверев В.Г., Назаренко В.А., Панько С.В., Теплоухов А.В. Определение параметров конвективного теплообмена по измерениям температуры материала // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. № 5.
19. Старченко А.В., Седнев М.А., Панько С.В. Приближенное аналитическое решение прямой задачи электроимпедансной томографии в неоднородном круге с учетом сопротивления электродов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74.

В.Н. Панков, Е.Н. Пуяткина, А.В. Старченко

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2024. № 91

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 25.10.2024 г. Формат 70×100¹/₁₆.
Печ. л. 10,9; усл. печ. л. 10,1. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 6068.

Дата выхода в свет 28.10.2024 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru