

В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2024

№ 88

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimatov, Aleksey M. Bubenchikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shragер, Ernst R. Shragер.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферруется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36
Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>
Контактный тел./факс: (3822) 529-740
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Gamzaev K.M. Numerical method for restoring the initial condition for the wave equation	5
Гермидер О.В., Попов В.Н. Об интегральном подходе при использовании метода коллокации	14
Казакова А.В. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле типа G_2 над полем характеристики 2	26
Ляховец Д.Ю., Осипов А.В. Некоторые свойства топологических ежей	37

МЕХАНИКА

Азаров А.А., Попов А.Л., Челобеев Д.А. О некоторых особенностях спектра продольных колебаний и звукоизлучения стержня	53
Бушланов В.П., Бутов В.Г., Глазунов А.А. Численное исследование полидисперсных двухфазных течений в осесимметричном сопле Лавалья с учетом силы Магнуса, действующей на вращающиеся капли	66
Дмитриев В.С., Миньков Л.Л., Ермаков Д.В., Моховиков А.А., Шпильной В.Ю., Беликов Р.К. Виброактивность электромеханических устройств вследствие наличия технологических погрешностей	79
Заболотский А.В., Дмитриев А.И. Численное исследование направления роста трещины в квазирупном материале в градиентном поле температуры	94
Паньков А.А. Коэффициенты электромагнитных связанныхностей композита «пьезоэлектрик / феррит» с учетом реальной структуры и начальных напряжений	111
Усмонов Б.Ш., Сафаров И.И., Тешаев М.Х. Нелинейный флаттер переходного процесса наследственно-деформируемых систем при сверхзвуковом режиме полета	124
Черемых В.А., Волокитин Г.Г., Гольдин В.Д., Басалаев С.А., Клопотов А.А., Цветков Н.А. О математической модели взаимодействия высокотемпературного потока плазмы с поверхностью древесины	138
Шабловский О.Н. Разрывное конически симметричное течение идеальной несжимаемой жидкости	149
Шваб А.В., Мусин С.В. Моделирование гидродинамики, теплообмена и процесса усреднения гранулированных сред в пневматическом циркуляционном аппарате	164

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

Фомин А.А., Туганбаев А.А., Крылов П.А., Тимошенко Е.А., Царев, А.В. Кайгородов Е.В., Норбосамбуев Ц.Д. Андрей Ростиславович Чехлов (к 65-летию со дня рождения)	179
---	-----

CONTENTS

MATHEMATICS

Gamzaev K.M. Numerical method for restoring the initial condition for the wave equation	5
Germider O.V., Popov V.N. About the integral approach using the collocation method	14
Kazakova A.V. Automorphisms of nil-triangular subrings of Chevalley algebras of type G_2 over the field of characteristic 2	26
Lyakhovets D.Yu., Osipov A.V. Some properties of topological hedgehogs	37

MECHANICS

Azarov A.A., Popov A.L., Chelyubeev D.A. On some features of the spectrum of longitudinal vibrations and sound emission of a rod	53
Bushlanov V.P., Butov V.G., Glazunov A.A. Numerical modeling of polydisperse two-phase flows in an axisymmetric de Laval nozzle with account for the Magnus force acting on rotating droplets	66
Dmitriev V.S., Minkov L.L., Ermakov D.V., Mokhovikov A.A., Shpil'noi V.Yu., Belikov R.K. Vibration activity in electromechanical devices caused by technological errors	79
Zabolotskiy A.V., Dmitriev A.I. Numerical study of the crack growth direction within a quasi-brittle material in a gradient temperature field	94
Pan'kov A.A. Electromagnetic coupling coefficients of "piezoelectric / ferrite" composite accounting for the real structure and initial stresses	111
Usmonov B.Sh., Safarov I.I., Teshaev M.Kh. Nonlinear flutter of the transient process of hereditarily deformable systems in supersonic flight mode	124
Cheremnykh V.A., Volokitin G.G., Goldin V.D., Basalaev S.A., Klopotov A.A., Tsvetkov N.A. On a mathematical model of the interaction of a high-temperature plasma flow with a wood surface	138
Shablovskiy O.N. A discontinuous conically symmetric flow of an ideal incompressible fluid	149
Shvab A.V., Musin S.V. Modeling of hydrodynamics, heat transfer, and averaging of granular media in a pneumatic circulation apparatus	164

MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALIES

Fomin A.A., Tuganbaev A.A., Krylov P.A., Timoshenko E.A., Tsarev A.V., Kaygorodov E.V., Norbosambuev T.D. Andrey Rostislavovich Chekhlov (to the 65th anniversary of his birth)	179
--	-----

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Original article

UDC 519.63

doi: 10.17223/19988621/88/1

MSC: 65M32

**Numerical method for restoring the initial condition
for the wave equation****Khanlar M. Gamzaev***Azerbaijan State Oil and Industry University, Western Caspian University,
Baku, Azerbaijan, xan.h@rambler.ru*

Abstract. The inverse problem of restoring the initial condition for the time derivative for the one-dimensional wave equation is considered. As an additional condition, the solution of the wave equation at a finite time is given. First, the discretization of the derivative with respect to the spatial variable is carried out and the initial problem is reduced to a differential-difference problem with respect to functions depending on the time variable. To solve the resulting differential-difference problem, a special representation is proposed, with the help of which the problem splits into two independent differential-difference problems. As a result, an explicit formula is obtained for determining the approximate value of the desired function for each discrete value of a spatial variable. The finite difference method is used for the numerical solution of the obtained differential-difference problems. The presented results of numerical experiments conducted for model problems demonstrate the effectiveness of the proposed computational algorithm.

Keywords: wave equation, inverse problem, recovery of the initial condition, differential-difference problem

For citation: Gamzaev, K.M. (2024) Numerical method for restoring the initial condition for the wave equation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 5–13. doi: 10.17223/19988621/88/1

Научная статья

**Численный метод восстановления начального условия
для волнового уравнения****Ханлар Мехвали оглу Гамзаев***Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности;
Западно-Каспийский университет, Баку, Азербайджан, xan.h@rambler.ru*

Аннотация. Рассматривается обратная задача восстановления начального условия для производной по времени для одномерного волнового уравнения. В качестве

дополнительного условия задается решение волнового уравнения в конечный момент времени. Сначала проводится дискретизация производной по пространственной переменной, и исходная задача сводится к дифференциально-разностной задаче относительно функций, зависящих от временной переменной. Для решения полученной дифференциально-разностной задачи предлагается специальное представление, с помощью которого задача распадается на две независимые дифференциально-разностные задачи. В результате получена явная формула для определения приближенного значения искомой функции при каждом дискретном значении пространственной переменной. Для численного решения полученных дифференциально-разностных задач используется метод конечных разностей. Представленные результаты численных экспериментов, проведенных для модельных задач, демонстрируют эффективность предложенного вычислительного алгоритма.

Ключевые слова: волновое уравнение, обратная задача, восстановление начального условия, дифференциально-разностная задача

Для цитирования: Гамзаев Х.М. Численный метод восстановления начального условия для волнового уравнения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 5–13. doi: 10.17223/19988621/88/1

Introduction

It is known that inverse problems for wave equations occur in mathematical modeling of many physical processes in geophysics, seismics, electrodynamics, thermophysics, medicine, and many other fields of science and technology [1–5]. In these inverse problems, in addition to solving the wave equation, it is necessary to determine either the right-hand sides, or coefficients, or initial conditions. It should be noted that a large number of publications have been devoted to the study of the correctness, existence, and unambiguous solvability of coefficient inverse problems and inverse problems for determining the right parts of wave equations [6–12]. At the same time, much less work has been devoted to the inverse problem of restoring the initial conditions for wave equations. In a number of papers [13–16], Dirichlet-type problems for the wave equation are presented as an inverse problem of restoring the initial condition and gradient iterative methods are proposed for the numerical solution of such problems.

In this paper, a non-iterative computational algorithm is proposed for the numerical solution of the inverse problem of restoring the initial condition for the time derivative for a one-dimensional wave equation.

1. Problem statement and solution method

Let a one-dimensional wave equation

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

be considered with the initial conditions

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v(x), \quad (3)$$

and boundary conditions

$$u(0, t) = q(t), \quad (4)$$

$$u(1, t) = p(t). \quad (5)$$

It is known that the direct problem for equation (1) consists in determining a function $u(x, t)$ from equation (1) with a given coefficient $k(x)$, the right side $f(x, t)$ and conditions (2)–(5).

Suppose that in addition to the function $u(x, t)$, the function $v(x)$ is also unknown and the restoration of this function is required. In this case, as an additional condition, the solution of equation (1) is given at a finite time

$$u(x, T) = \psi(x), \quad (6)$$

where $\psi(x)$ is the given function.

Thus, the task is to determine the functions $u(x, t)$ and $v(x)$ satisfying equation (1) and conditions (2)–(6). The problem belongs to the class of inverse problems associated with the restoration of initial conditions for partial differential equations.

First, we transform the assigned task to a semi-discrete task. To this end, we introduce a uniform difference grid in the domain $[0 \leq x \leq 1]$ of a variable x

$$\overline{\omega}_x = \{x_i = i\Delta x, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

with a step $\Delta x = \frac{1}{n}$.

The differential expression $\frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x})$ in equation (7) for $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ is approximated by the “central” difference

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}) \right|_{x=x_i} \approx \\ & \approx \frac{1}{\Delta x} \left[k(x_i + \frac{\Delta x}{2}) \frac{u(x_{i+1}, t) - u(x_i, t)}{\Delta x} - k(x_i - \frac{\Delta x}{2}) \frac{u(x_i, t) - u(x_{i-1}, t)}{\Delta x} \right]. \end{aligned}$$

Denoting $u_i(t) \approx u(x_i, t)$, $k_{i\pm 1/2} = k\left(x_i \pm \frac{\Delta x}{2}\right)$, equation (1) and conditions (2)–(5) are written as the following system of ordinary differential equations

$$\frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} = \frac{k_{i+1/2}}{\Delta x^2} u_{i+1}(t) - \frac{2k_i}{\Delta x^2} u_i(t) + \frac{k_{i-1/2}}{\Delta x^2} u_{i-1}(t) + f_i(t), \quad 0 < t \leq T, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (7)$$

$$u_i(0) = \varphi_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad (8)$$

$$\frac{du_i(0)}{dt} = v_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad (9)$$

$$u_0(t) = q(t), \quad (10)$$

$$u_n(t) = p(t), \quad (11)$$

$$u_i(T) = \psi_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad (12)$$

where $k_i = (k_{i+1/2} + k_{i-1/2})/2$, $v_i \approx v(x_i)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $\psi_i = \psi(x_i)$, $f_i(t) = f(x_i, t)$.

In the resulting differential-difference problem, the approximate values of the desired functions $v(x)$ in the nodes of the difference grid $\overline{\omega}_x$, i.e. v_i and the functions $u_i(t)$,

$i = 1, 2, \dots, n-1$, act as unknown. For the decomposition of the differential-difference problem (7)–(12) into mutually independent subtasks, each of which can be solved independently, its solution for each fixed value $i = 0, 1, 2, \dots, n$, is represented as [17, 18]

$$u_i(t) = w_i(t) + v_i \theta_i(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

where $w_i(t)$, $\theta_i(t)$ are unknown functions. Substituting the representation $u_i(t)$ into equation (7), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_i(t)}{dt^2} + v_i \frac{d^2 \theta_i(t)}{dt^2} &= \frac{k_{i+1/2}}{\Delta x^2} w_{i+1}(t) + v_{i+1} \frac{k_{i+1/2}}{\Delta x^2} \theta_{i+1}(t) - \frac{2k_i}{\Delta x^2} w_i(t) - v_i \frac{2k_i}{\Delta x^2} \theta_i(t) + \\ &+ \frac{k_{i-1/2}}{\Delta x^2} w_{i-1}(t) + v_{i-1} \frac{k_{i-1/2}}{\Delta x^2} \theta_{i-1}(t) + f_i(t). \end{aligned}$$

Replacing v_{i-1} and v_{i+1} with v_i , the latter relation is represented as

$$\begin{aligned} &\left[\frac{d^2 w_i(t)}{dt^2} - \frac{k_{i+1/2}}{\Delta x^2} w_{i+1}(t) + \frac{2k_i}{\Delta x^2} w_i(t) - \frac{k_{i-1/2}}{\Delta x^2} w_{i-1}(t) - f_i(t) \right] + \\ &+ v_i \left[\frac{d^2 \theta_i(t)}{dt^2} - \frac{k_{i+1/2}}{\Delta x^2} \theta_{i+1}(t) + \frac{2k_i}{\Delta x^2} \theta_i(t) - \frac{k_{i-1/2}}{\Delta x^2} \theta_{i-1}(t) \right] = 0. \end{aligned}$$

Substitution of representation (13) into (8)–(11) yields

$$\begin{aligned} w_i(0) + v_i \theta_i(0) &= \varphi_i, \\ \frac{dw_i(0)}{dt} + v_i \frac{d\theta_i(0)}{dt} &= v_i, \\ w_0(t) + v_0 \theta_0(t) &= q(t), \\ w_n(t) + v_n \theta_n(t) &= p(t). \end{aligned}$$

From the obtained relations, it is possible to obtain differential-difference problems for determining auxiliary functions $w_i(t)$, $\theta_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$$\frac{d^2 w_i(t)}{dt^2} - \frac{k_{i+1/2}}{\Delta x^2} w_{i+1}(t) + \frac{2k_i}{\Delta x^2} w_i(t) - \frac{k_{i-1/2}}{\Delta x^2} w_{i-1}(t) - f_i(t) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (14)$$

$$w_i(0) = \varphi_i, \quad (15)$$

$$\frac{dw_i(0)}{dt} = 0, \quad (16)$$

$$w_0(t) = q(t), \quad (17)$$

$$w_n(t) = p(t). \quad (18)$$

$$\frac{d^2 \theta_i(t)}{dt^2} - \frac{k_{i+1/2}}{\Delta x^2} \theta_{i+1}(t) + \frac{2k_i}{\Delta x^2} \theta_i(t) - \frac{k_{i-1/2}}{\Delta x^2} \theta_{i-1}(t) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (19)$$

$$\theta_i(0) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{d\theta_i(0)}{dt} = 1, \quad (21)$$

$$\theta_0(t) = 0, \quad (22)$$

$$\theta_n(t) = 0. \quad (23)$$

And substituting representation (13) into (12), we have

$$w_i(T) + v_i \theta_i(T) = \psi_i.$$

From here we get a formula for determining the value of the desired function $v(x)$ for each fixed value $x = x_i$

$$v_i = \frac{\psi_i - w_i(T)}{\theta_i(T)}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (24)$$

Thus, the computational algorithm for the numerical solution of the differential-difference problem (7)–(12), by definition $u_i(t)$, v_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, consists of the following:

– the solutions of two independent differential-difference problems (14)–(18) and (19)–(23) with respect to auxiliary functions $w_i(t)$, $\theta_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, are determined on the segment $[0, T]$;

– according to formula (24), approximate values of the desired function $v(x)$ are determined for $x = x_i$, i.e. v_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$;

– the formula (13) determines the values of the functions $u_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, on the segment $[0, T]$.

It should be noted that the approximate values of the desired function $v(x)$ at the boundary points $x_0 = 0$ and $x_n = 1$ cannot be determined by formula (24) due to the fulfillment of conditions (22) and (23). Therefore, the values of the desired function $v(x)$ at the boundary points can be determined by interpolation.

It should be noted that the applicability of the proposed computational algorithm is associated with the fulfillment of the condition

$$\theta_i(T) \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

For an equation with a constant coefficient, it is possible to find out in advance the fulfillment of this condition. To do this, it is enough to write a differential approximation of the differential-difference problem (19)–(23) for the case $k(x) = k_0 = const$

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = k_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 0.1,$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial t} = a(x) \equiv 1,$$

$$\theta(0, t) = 0, \quad \theta(1, t) = 0.$$

The exact solution of this problem is determined by the explicit formula

$$\theta(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{\pi r \sqrt{k_0}} \left[\int_0^1 a(\xi) \sin \pi r \xi d\xi \right] \sin \pi r \sqrt{k_0} t \sin \pi r x.$$

It follows that when $T \neq 1/\sqrt{k_0}$ the condition $\theta_i(T) \neq 0$, $i = \overline{1, n-1}$ is satisfied. However, for an equation with variable coefficients, due to the complexity of constructing an analytical solution, the condition $\theta_i(T) \neq 0$, $i = \overline{1, n-1}$ can be fulfilled using a numerical experiment.

For the numerical solution of problems (14)–(18) and (19)–(23), the finite difference method can be used. We introduce a uniform difference grid with a step Δt on the segment $[0, T]$ in the variable t

$$\bar{\omega}_i = \{t_j = j\Delta t, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad \Delta t = T / m\}.$$

The discrete analogs of problems (14)–(18) and (19)–(23) on the grid $\bar{\omega}_i$ are represented as

$$\frac{w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1}}{\Delta t^2} - \frac{k_{i+1/2}}{\Delta x^2} w_{i+1}^{j+1} + \frac{2k_i}{\Delta x^2} w_i^{j+1} - \frac{k_{i-1/2}}{\Delta x^2} w_{i-1}^{j+1} - f_i^{j+1} = 0, \quad (25)$$

$$w_i^0 = \varphi_i, \quad (26)$$

$$\frac{w_i^1 - w_i^0}{\Delta t} = 0, \quad (27)$$

$$w_0^{j+1} = q^{j+1}, \quad (28)$$

$$w_n^{j+1} = p^{j+1}, \quad (29)$$

$$\frac{\theta_i^{j+1} - 2\theta_i^j + \theta_i^{j-1}}{\Delta t^2} - \frac{k_{i+1/2}}{\Delta x^2} \theta_{i+1}^{j+1} + \frac{2k_i}{\Delta x^2} \theta_i^{j+1} - \frac{k_{i-1/2}}{\Delta x^2} \theta_{i-1}^{j+1} = 0, \quad (30)$$

$$\theta_i^0 = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\theta_i^1 - \theta_i^0}{\Delta t} = 1, \quad (32)$$

$$\theta_0^{j+1} = 0, \quad (33)$$

$$\theta_n^{j+1} = 0, \quad (34)$$

where $w_i^j \approx w_i(t_j)$, $\theta_i^j \approx \theta_i(t_j)$, $f_i^{j+1} = f_i(t_{j+1})$.

The obtained difference problems (25)–(29) and (30)–(34) for each fixed value $j = 1, 2, \dots, m-1$ are systems of linear algebraic equations with a tridiagonal matrix, the solutions of which can be found by the Thomas method [17].

2. Numerical examples

To find out the effectiveness of the proposed computational algorithm, numerical experiments were carried out for model problems. Calculations were carried out on a space-time difference grid with steps $\Delta x = 0.05$, $\Delta t = 0.0001$.

Example 1.

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{8\pi^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + e^{0.5t} (1.5 + 3 \cos 2\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 0.,$$

$$u(x, 0) = 2(3 + 2 \cos 2\pi x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v(x),$$

$$u(0, t) = 10e^{0.5t}, \quad u(1, t) = 10e^{0.5t},$$

$$u(x, 0.1) = 2e^{0.05} (3 + 2 \cos 2\pi x).$$

This problem has an exact solution

$$u(x, t) = 2e^{0.5t} (3 + 2 \cos 2\pi x), \quad v(x) = 3 + 2 \cos 2\pi x.$$

Example 2.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0.025 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + e^{0.5t} (10x - 10x^2 + 2), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 0.1,$$

$$u(x,0) = 40x - 40x^2, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v(x),$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0,$$

$$u(x,0.1) = e^{0.05} (40x - 40x^2).$$

The exact solution to this problem has the form

$$u(x,t) = e^{0.5t} (40x - 40x^2), \quad v(x) = 20x - 20x^2.$$

Example 3.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (x e^{0.2x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}) + \sin 3t (1 - 45e^{-0.2x}), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 0.1,$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v(x),$$

$$u(0,t) = 5 \sin 3t, \quad u(1,t) = 5e^{-0.2} \sin 3t,$$

$$u(x,0.1) = 5e^{-0.2x} \sin 0.3.$$

The exact solution of the problem has the form

$$u(x,t) = 5e^{-0.2x} \sin 3t, \quad v(x) = 15e^{-0.2x}.$$

The results of numerical experiments to determine the approximate values of the desired function $v(x)$ at $x = x_i, i = 1, 2, \dots, n-1$, for the examples given are presented in the table. The data in the 2nd and 3rd columns refer to the first example; the data in the 4th and 5th columns, to the second example; and data in the 6th and 7th columns, to the third example.

Numerical results on the determination of the function $v(x)$

x_i	$v(x) = 3 + 2\cos 2\pi x$		$v(x) = 20x - 20x^2$		$v(x) = 15e^{-0.2x}$	
	Exact	Calculated	Exact	Calculated	Exact	Calculated
0.05	4.902	4.899	0.950	0.952	14.851	14.844
0.10	4.618	4.616	1.800	1.799	14.703	14.699
0.15	4.176	4.174	2.550	2.548	14.557	14.552
0.20	3.618	3.617	3.200	3.198	14.412	14.407
0.25	3.000	3.000	3.750	3.748	14.268	14.264
0.30	2.382	2.383	4.200	4.198	14.126	14.122
0.35	1.824	1.826	4.550	4.548	13.986	13.982
0.40	1.382	1.384	4.800	4.798	13.847	13.842
0.45	1.098	1.100	4.950	4.948	13.709	13.705
0.50	1.000	1.003	5.000	4.998	13.573	13.568
0.55	1.098	1.100	4.950	4.948	13.438	13.433
0.60	1.382	1.384	4.800	4.798	13.304	13.299
0.65	1.824	1.826	4.550	4.548	13.171	13.167
0.70	2.382	2.383	4.200	4.198	13.040	13.036
0.75	3.000	3.000	3.750	3.748	12.911	12.906
0.80	3.618	3.617	3.200	3.198	12.782	12.778
0.85	4.176	4.174	2.550	2.548	12.655	12.655
0.90	4.618	4.616	1.800	1.799	12.529	12.535
0.95	4.902	4.899	0.950	0.952	12.404	12.411

The results of numerical experiments indicate that the values of the desired functions $u(x, t)$ and $v(x)$ are determined with a sufficiently high accuracy. At the same time, the maximum relative error in determining the desired function $v(x)$ in the first example does not exceed 0.08%; in the second example, 0.3%; and in the third example, 0.06%. Analysis of results of the numerical experiments shows that to increase the accuracy of solutions, it is sufficient to use small steps of the difference grid.

Conclusion

The problem of determining the initial condition for the time derivative for a one-dimensional wave equation, according to an additionally specified condition at a finite time, is considered. The proposed computational algorithm, based on the discretization of the problem by a spatial variable and the use of a special representation to solve the resulting differential-difference problem, allows us to find by an explicit formula the approximate value of the desired function for each discrete value of the spatial variable. The proposed computational algorithm can also be used to restore the initial condition in time for the one-dimensional wave equation.

References

1. Kabanikhin S.I. (2011) *Inverse and Ill-Posed Problems*. Berlin: Walter de Gruyter.
2. Isakov V. (2017) *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Berlin: Springer.
3. Alifanov O.M., Artioukhine E.A., Rumyantsev S.V. (1995) *Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems*. Danbury: Begell House.
4. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. (2000) *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. New York: Marcel Dekker.
5. Hasanov A.H., Romanov V.G. (2021) *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*. Springer.
6. Borukhov V.T., Zayats G.M. (2015) Identification of a time-dependent source term in nonlinear hyperbolic or parabolic heat equation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 91. pp. 1106–1113.
7. Vabishchevich P.N. (2019) Computational identification of the time dependence of the right-hand side of a hyperbolic equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 59(9). pp. 1475–1483.
8. Denisov A.M. (2015) Problems of determining the unknown source in parabolic and hyperbolic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 55(5). pp. 829–833.
9. Ismailov M.I., Tekin, I. (2016) Inverse coefficient problems for a first order hyperbolic system. *Applied Numerical Mathematics*. 106. pp. 98–115.
10. Liao W. (2011) A computational method to estimate the unknown coefficient in a wave equation using boundary measurements. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 19(6). pp. 855–877.
11. Jiang D., Liu Y., Yamamoto M. (2017) Inverse source problem for the hyperbolic equation with a time-dependent principal part. *Journal of Differential Equations*. 262. pp. 653–681.
12. Safiullova R.R. (2013) Obratnaya zadacha dlya giperbolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka s neizvestnym koeffitsiyentom, zavisyashchim ot vremeni [Inverse problem for the second order hyperbolic equation with an unknown time-dependent coefficient]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematicheskoye modelirovaniye i programirovaniye – Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 6(4). pp. 73–86.

13. Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Nurseitov D.B., Alimova A.N. (2011) Resheniye zadachi Dirikhle dlya dvumernogo volnovogo uravneniya metodom iteratsiy Landvebera [Solving the Dirichlet problem for a two-dimensional wave equation by the Landweber iteration method]. *Vestnik Kazakhskogo natsional'nogo universiteta Seriya Matematika, Mekhanika, Informatika. – Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*. 69(2). pp. 102–110.
14. Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Nurseitov D.B., Krivorotko O.I., Alimova A.N. (2012) An optimization method in the Dirichlet problem for the wave equation. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 20(2). pp. 193–211.
15. Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I. (2013) A numerical method for solving the Dirichlet problem for the wave equation. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 7(2). pp. 187–198.
16. Vasilev V.I., Kardashevsky A.M., Popov V.V. (2017) Iteratsionnyy metod resheniya zadachi Dirikhle i yeye modifikatsiy [Iterative method for solving the Dirichlet problem and its modifications]. *Matematicheskiye zametki SVFU*. 24(3). pp. 38–51.
17. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. (2008) *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*. Berlin: Walter de Gruyter.
18. Gamzaev Kh.M., Huseynzade S.O., Gasimov G.A. (2018). Numerical method to solve identification problem for the lower coefficient and the source in the convection-reaction equation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 54(6). pp. 971–976.

Information about the author:

Gamzaev Khanlar M. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of General and Applied Mathematics, Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan; Research Associate, Research and Innovation Center, Western Caspian University, Baku, Azerbaijan). ORCID: 0000-0002-1228-7892. E-mail: xan.h@rambler.ru

Сведения об авторе:

Гамзаев Ханлар Мехвали оглу – доктор технических наук, профессор кафедры «Общая и прикладная математика» Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, Баку, Азербайджан; научный сотрудник Научно-координационного центра Западно-Каспийского университета, Баку, Азербайджан. ORCID: 0000-0002-1228-7892. E-mail: xan.h@rambler.ru

The article was submitted 04.06.2023; accepted for publication 10.04.2024

Статья поступила в редакцию 04.06.2023; принята к публикации 10.04.2024

Научная статья

УДК 517.927.4

doi: 10.17223/19988621/88/2

MSC: 65Q10, 76M20, 41A50

Об интегральном подходе при использовании метода коллокации

Оксана Владимировна Гермидер¹, Василий Николаевич Попов²

^{1,2} Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,

Архангельск, Россия

¹ o.germider@narfu.ru

² v.popov@narfu.ru

Аннотация. Предложен матричный вариант реализации метода коллокации с использованием интегрального подхода для построения решения неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка. Метод основан на полиномиальной аппроксимации Чебышева производной четвертого порядка искомой функции. В качестве базисных функций использованы многочлены Чебышева первого рода. Проведен анализ сходимости решений, полученных методом коллокации с применением интегрального подхода с использованием в качестве узлов точек экстремумов и нулей многочленов Чебышева первого рода. Представлены результаты сравнения с аналогичными результатами, представленными в открытой печати.

Ключевые слова: метод коллокации, многочлены Чебышева первого рода, неоднородные дифференциальные уравнения

Благодарности: Исследование поддержано грантом РФФ № 24-21-00381 «Развитие методов полиномиальной аппроксимации Чебышева для решения нелинейных задач математической физики».

Для цитирования: Гермидер О.В., Попов В.Н. Об интегральном подходе при использовании метода коллокации // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 14–25. doi: 10.17223/19988621/88/2

Original article

About the integral approach using the collocation method

Oksana V. Germider¹, Vasilii N. Popov²

^{1,2} Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,

Arkhangelsk, Russian Federation

¹ o.germider@narfu.ru

² v.popov@narfu.ru

Abstract. The article describes a matrix method of polynomial Chebyshev approximation using an integral approach to construct a solution to a nonhomogeneous fourth-order differential equation

with mixed boundary conditions of the first kind. The proposed method is based on the expansion of the fourth-order derivative of the desired function into a series in terms of Chebyshev polynomials of the first kind and the representation of the partial sum of this series as a product of matrices whose elements are, respectively, the Chebyshev polynomials and the coefficients in this expansion. In this paper, using analytical formulas for calculating integrals of Chebyshev polynomials, we obtain a representation of the desired function in terms of the product of the matrices defined above. The use of points of extrema and zeros of Chebyshev polynomials of the first kind as nodes, as well as the properties of the sums of products of Chebyshev polynomials at these points, made it possible to reduce the boundary value problem by the collocation method to a system of inhomogeneous linear algebraic equations with a sparse matrix of this system. It is shown that the solution constructed in this way satisfies the differential equation at all nodes, including the boundary ones, in contrast to the approximate solution obtained by approximating the exact solution in the form of a finite sum of the Chebyshev series. The effectiveness of the proposed method is demonstrated by considering a boundary value problem with a known analytical solution. The convergence analysis of the constructed solution is carried out.

Keywords: collocation method, Chebyshev polynomials of the first kind, inhomogeneous differential equations

Acknowledgments: The research was supported by the Russian Academy of Sciences grant No. 24-21-00381 “Development of Chebyshev polynomial approximation methods for solving nonlinear problems of mathematical physics”.

For citation: Germider, O.V., Popov, V.N. (2024) About the integral approach using the collocation method. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 14–25. doi: 10.17223/19988621/88/2

Введение

Хорошо известно, что численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого и более высокого порядка, встречающихся в различных разделах гидродинамики, в области биотехнологий, геологии, конструирования авиационно-космической техники и т.д. [1–5], вызывает ряд трудностей. Это связано с наличием в уравнениях производных высокого порядка, оказывающих существенное влияние на обусловленность исходной краевой задачи. В связи с этим значительное внимание уделяется разработке высокоточных численных методов.

В представленной работе предлагается реализация метода полиномиальной аппроксимации Чебышева в матричной форме с применением интегрального подхода для решения неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка со смешанными граничными условиями. Производная четвертого порядка искомой функции записывается в виде усеченного ряда по многочленам Чебышева первого рода в матричной нотации. Для восстановления самой функции используются точные формулы для вычисления интегралов от многочленов Чебышева. Далее для нахождения коэффициентов полученного разложения производной поставленная задача сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений. В данной работе происходит развитие спектрального метода коллокации, описанного в [6, 7]. В отличие от этих публикаций производная третьего и более низкого порядка искомой функции, как и сама функция, записывается с использованием произведения матриц, введенного для представления производной четвертого порядка в виде усеченного ряда по многочленам Чебышева

первого рода; проводится анализ сходимости полученных решений при использовании как точек экстремумов, так и нулей многочленов Чебышева при выборе их в качестве узлов интерполирования. Здесь необходимо заметить, что скорость сходимости спектральных методов ограничена только регулярностью интерполируемой функции в отличие от методов конечных разностей и конечных элементов [8], а в случае использования полиномов Чебышева в качестве базисных функций и выбора точек коллокации в нулях или точках экстремумов этих полиномов наблюдается устойчивость к ошибкам округления [9].

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$u_x^{(4)} + f_1(x, u, u_x^{(1)}, u_x^{(2)}, u_x^{(3)}) = f_2(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u((-1)^i) = g_{i1}, \quad u^{(1)}((-1)^i) = g_{i2}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Предполагаем, что функция f_1 имеет в области определения непрерывные ограниченные частные производные по переменным x , u , $u_x^{(1)}$, $u_x^{(2)}$ и $u_x^{(3)}$, функция f_2 тождественно не равна нулю и имеет непрерывную ограниченную производную по x , а сама краевая задача (1), (2) имеет на отрезке $[-1; 1]$ единственное решение.

Метод решения краевой задачи

Представляем функцию $u_x^{(4)}$ в виде частичной суммы ряда полиномов Чебышева первого рода $\{T_j(x) = \cos(j \arccos x), (j = \overline{0, n})\}$ [10]:

$$u_x^{(4)}(x) = \sum_{j=0}^n a_j T_j(x) = \mathbf{T}(x) \circ \mathbf{I}_s \mathbf{A}, \quad (3)$$

где $\mathbf{T}(x)$ – матрица-строка размером $1 \times n'$ ($n' = n + 5$):

$$\mathbf{T}(x) = (T_0(x), T_1(x), \dots, T_{n+3}(x), T_{n+4}(x)),$$

знаком \circ обозначено произведение Адамара двух матриц [11], \mathbf{I}_s – матрица-строка размером $1 \times n'$ с ненулевыми элементами $I_{s,0,i} = 1$ ($i = \overline{0, n}$). Здесь и ниже нумерация строк и столбцов начинается с нуля. Матрица-столбец \mathbf{A} имеет размер $n' \times 1$, ее элементами являются коэффициенты a_j ($j = \overline{0, n}$) в разложении (3) и c_0, c_1, c_2, c_3 :

$$\mathbf{A} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, c_0, c_1, c_2, c_3)^T.$$

Выберем в качестве узлов интерполяции в (1) точки экстремума многочлена $T_n(x)$ [10]:

$$x_k = \cos \frac{\pi(n-k)}{n}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (4)$$

При таком выборе узлов интерполяции происходит медленный рост константы Лебега Λ_n на отрезке $[-1; 1]$, и при фиксированном числе узлов она стремится к своему минимальному значению, уменьшая погрешность алгебраического ин-

терполирования и обеспечивая меньшую чувствительность решения по отношению к ошибкам округления [12]. В случае, когда n – нечетное число, точное значение Λ_n можно определить по формуле [13]

$$\Lambda_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{(2k-1)\pi}{4n}. \quad (5)$$

Вблизи границ области $x_0 = -1$ и $x_n = 1$ происходит сгущение узловых точек (4), расположение которых симметрично относительно нуля. Узлы x_0 и x_n принимают значения -1 и 1 соответственно, что хорошо согласуется с постановкой краевой задачи (1) и (2). И последнее, при увеличении числа интерполяционных узлов (4) в два раза полученные значения функций в точках экстремума до удвоения сохраняются.

Из равенства $T_j(x) = \cos(j \arccos x)$ при подстановке в него узлов (4) получаем

$$T_j(x_k) = \cos \frac{\pi j(n-k)}{n}, \quad j, k = \overline{0, n}. \quad (6)$$

Интегрируя (3) по переменной x , получаем

$$u_x^{(3)}(x) = \sum_{j=0}^n a_j \int T_j(x) dx + c_0. \quad (7)$$

Для нахождения интегралов от многочленов Чебышева первого рода в (7) учитывая, что $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = x$ [10], имеем с точностью до константы

$$\int T_0(x) dx = x, \quad \int T_1(x) dx = \frac{x^2}{2}, \quad (8)$$

для четных $j \geq 2$ согласно [10] получаем

$$2 \int T_j(x) dx = \frac{T_{j+1}(x)}{j+1} - \frac{T_{j-1}(x)}{j-1}, \quad (9)$$

для нечетных $j \geq 3$

$$2 \int T_j(x) dx = \frac{T_{j+1}(x)}{j+1} - \frac{T_{j-1}(x)}{j-1} - \frac{2j(-1)^{(j+1)/2}}{j^2-1}. \quad (10)$$

Постоянная в (10) получена с использованием представления [12]:

$$T_j(x) = \sum_{k=0}^{[j/2]} \zeta_k x^{j-2k}, \quad \zeta_k = \frac{(-1)^k 2^{j-2k-1} j(j-k-1)!}{(j-2k)! k!}, \quad (11)$$

где $[j/2]$ – целая часть числа $j/2$.

В случае нечетных $j \geq 3$ из (11) находим эту постоянную:

$$\frac{\zeta_{(j+1)/2}}{j+1} - \frac{\zeta_{(j-1)/2}}{j-1} = \frac{2j(-1)^{(j+1)/2}}{j^2-1}. \quad (12)$$

Далее, пользуясь (8)–(10), запишем (7) в виде:

$$u_x^{(3)}(x) = (\mathbf{T}(x)(\mathbf{G} \circ \mathbf{I}) + \mathbf{P}_1(x))\mathbf{A}, \quad (13)$$

где \mathbf{G} – квадратная матрица размером $n \times n$, в которой последний столбец нулевой, ненулевые элементы первой строки

$$G_{0,1} = \frac{1}{4}, \quad G_{0,2j+1} = (-1)^j \frac{2j+1}{(2j+1)^2 - 1}, \quad j = \overline{1, [(n'-1)/2]-1}, \quad (14)$$

ненулевые элементы второй строки $G_{1,0} = 1, G_{1,2} = -1/2$, одиночные ненулевые элементы предпоследней и последней строк $G_{n'-2, n'-3} = 1/(2n'-4), G_{n'-1, n'-2} = 1/(2n'-2)$, парные ненулевые элементы остальных строк

$$G_{j, j+(-1)^j} = \frac{(-1)^{j+1}}{2j}, \quad j = 2, n'-3, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

где \mathbf{I} – квадратная матрица размером $n' \times n'$ со сроками \mathbf{I}_s , $\mathbf{P}_1(x)$ – матрица-строка размером $1 \times n'$, в которой один ненулевой элемент $P_{1,0,n+1} = 1$.

Например, при $n = 5$ квадратная матрица \mathbf{G} имеет вид:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{24} & 0 & -\frac{7}{48} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{14} & 0 & -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & 0 \end{pmatrix}.$$

Последовательно интегрируя (13) по переменной x , получаем $u_x^{(2)}, u_x^{(1)}$ и u :

$$u_x^{(2)}(x) = \sum_{j=0}^n a_j \iint T_j(x) d^2 x + c_0 x + c_1 = (\mathbf{T}(x)(\mathbf{G}^2 \circ \mathbf{I}) + \mathbf{P}_2(x)) \mathbf{A}, \quad (16)$$

$$u_x^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^n a_j \iiint T_j(x) d^3 x + c_0 \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 = (\mathbf{T}(x)(\mathbf{G}^3 \circ \mathbf{I}) + \mathbf{P}_3(x)) \mathbf{A}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{j=0}^n a_j \iiint T_j(x) d^4 x + c_0 \frac{x^3}{6} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 = \\ &= (\mathbf{T}(x)(\mathbf{G}^4 \circ \mathbf{I}) + \mathbf{P}_4(x)) \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (18)$$

$\mathbf{P}_1(x)$ – матрица-строка размером $1 \times n'$, в которой ненулевые элементы

$$P_{i,0,n+i} = 1, \quad P_{i,0,n+j} = \frac{x^{i-j}}{(i-j)!}, \quad j = \overline{1, i-1}, \quad i = \overline{2, 4}.$$

Подставляя (3), (4), (6), (13), (16)–(18) в (1) и используя (2), приходим к системе линейных n' -уравнений в матричной форме:

$$\mathbf{V}\mathbf{A} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{V}_i, \quad (19)$$

где \mathbf{V}_i ($i = \overline{1, 3}$) – квадратные матрицы размером $n' \times n'$, первые две из них получены из уравнения (1) в узлах (4), последние четыре строки \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 нулевые, k -я ненулевая строка матрицы \mathbf{V}_1 определяется с использованием (3): $u_x^{(4)}(x_k) = (\mathbf{V}_1)_k \mathbf{A}$, т.е. $(\mathbf{V}_1)_k = \mathbf{T}(x_k) \circ \mathbf{I}_s$ ($k = \overline{0, n}$), строка \mathbf{V}_2 с таким же индексом восстанавливается на основе (16)–(18): $f_1(x_k, u(x_k), u_x^{(1)}(x_k), u_x^{(2)}(x_k), u_x^{(3)}(x_k)) = (\mathbf{V}_2)_k \mathbf{A}$; матрица \mathbf{V}_3 строится из граничных условий (4), ее ненулевые строки – последние четыре:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_3)_{n+l} &= \mathbf{T}((-1)^l) (\mathbf{G}^4 \circ \mathbf{I}) + \mathbf{P}_4((-1)^l), \\ (\mathbf{V}_3)_{n+2+l} &= \mathbf{T}((-1)^l) (\mathbf{G}^3 \circ \mathbf{I}) + \mathbf{P}_3((-1)^l), \quad l = 1, 2. \\ \mathbf{F}_{n' \times 1} &= (f_2(x_0), f_2(x_1), \dots, f_2(x_n), g_{11}, g_{21}, g_{12}, g_{22})^T. \end{aligned}$$

Для приведения матрицы \mathbf{V} в (19) к разреженной матрице можно воспользоваться свойствами конечных сумм многочленов Чебышева в выбранных узлах интерполяции (4). Левые и правые части уравнения (19) умножаем на матрицу \mathbf{S} размером $n' \times n'$, в которой $S_{kk} = 2n^{-1} (\mathbf{B}_1^T)_{kk}$ ($k = \overline{0, n}$), $S_{n+j, n+j} = 1$ ($j = \overline{1, 4}$). Здесь верхний индекс T у \mathbf{V}_1 обозначает операцию транспонирования, а штрихом обозначено деление строк и столбцов с индексами 0 и n на 2. В частности, в результате умножения имеем $\mathbf{V}_1 = \mathbf{S}\mathbf{B}_1$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{S}\mathbf{J}$, где \mathbf{J} и \mathbf{V}_i ($i = 1, 2$) – квадратные матрицы размером $n' \times n'$, для \mathbf{J} k -й ненулевой строкой является $\mathbf{T}(x_k)$ ($k = \overline{0, n}$). У матрицы \mathbf{V}_1 на главной диагонали $n+1$ элемент равен 1: $V_{1,k,k} = 1$ ($k = \overline{0, n}$), а остальные равны нулю, что следует из свойств конечных сумм полиномов Чебышева, вычисленных в точках экстремума $T_n(x)$ [10, 14]. У матрицы \mathbf{V}_2 те же элементы равны 1 и дополнительно к ним элементы $V_{2,n-i, n+i} = 1$ ($i = 1, 4$). Обозначая через \mathbf{Q} матрицу размером $n' \times n'$, в которой первые k строк равны соответственно $\mathbf{P}_4(x_k)$ ($k = \overline{0, n}$), а остальные четыре строки нулевые, в результате умножения $\mathbf{S}\mathbf{Q}$ имеем матрицу \mathbf{V}_3 , в которой отличны от нуля шесть элементов: $V_{3,2, n+1} = 1/24$, $V_{3,1, n+1} = 1/8$, $V_{3,0, n+2} = V_{3,2, n+2} = 1/4$, $V_{3,0, n+4} = V_{3,1, n+3} = 1$. Матрица \mathbf{V}_3 , построенная из граничных условий (2), при умножении на \mathbf{S} слева сохраняет свой вид: $\mathbf{S}\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_3$. Таким образом, уравнение (19) приводим к виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\mathbf{A} &= \mathbf{S}\mathbf{F}, \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{Q}\mathbf{B}_2 + \mathbf{V}_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение уравнения (20) находим *LU*-методом в системе компьютерной алгебры Maple [15] с числом значащих цифр 22. Число обусловленности матрицы \mathbf{V} системы (20) определяем согласно [16, 17]:

$$\nu(\mathbf{V}) = \|\mathbf{V}\| \cdot \|\mathbf{V}^{-1}\|,$$

где норму матрицы \mathbf{V} находим как $\|\mathbf{V}\| = \max_{0 \leq i \leq n+4} \sum_{j=0}^{n+4} |V_{ij}|$ [16].

Функцию $u(x)$ получаем, используя (18) и найденные значения элементов матрицы \mathbf{A} .

Аналогично коэффициенты в (18) могут быть найдены, если в качестве узлов в уравнении (1) для переменной x выбрать нули многочлена $T_{n+1}(x)$ [10]:

$$x_k^* = \cos \frac{\pi(2n - 2k + 1)}{2(n + 1)}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (21)$$

Результаты вычислений и их анализ

Рассмотрим уравнение [7]

$$u_y^{(4)} + u_y^{(2)} = \pi^4 \sin(\pi y) - \pi^2 \sin(\pi y), \quad -\frac{2}{3} \leq y \leq \frac{2}{3}, \quad (22)$$

с граничными условиями

$$u\left((-1)^i \frac{2}{3}\right) = (-1)^i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad u_y^{(i)}\left((-1)^i \frac{2}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

Аналитическое решение задачи (22) и (23) имеет вид: $u_e(y) = \sin(\pi y)$ [7].

Произведем замену переменных в уравнении (22) и граничных условиях (23):

$$y = \frac{2x}{3}, \quad x \in [-1; 1]. \quad (24)$$

В результате приходим к уравнению

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 u_x^{(4)} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 u_x^{(2)} = \pi^4 \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) - \pi^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (25)$$

с граничными условиями

$$u\left((-1)^i\right) = (-1)^i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad u_x^{(i)}\left((-1)^i\right) = -\frac{\pi}{3}, \quad i = 1, 2. \quad (26)$$

Явный вид приближенного аналитического решения, полученного методом коллокации с использованием интегрального подхода, для задачи (22), (23) при $n = 5$ в случае узловых точек (4) записывается следующим образом:

$$u(y) = 0.06826y^9 - 0.5892y^7 + 2.548y^5 - 5.168y^3 + 3.142y,$$

а в случае узловых точек (21):

$$u(y) = 0.07013y^9 - 0.5922y^7 + 2.549y^5 - 5.168y^3 + 3.142y.$$

В таблице представлены результаты вычислений с использованием интегрального подхода (IA) на основе (3), (7)–(18) для случая узловых точек, которые являются точками экстремума многочлена Чебышева степени n (4) и нулями $T_{n+1}(x)$ (21), где для расчета среднеквадратичного отклонения полученных значе-

ний в контрольных точках построенного решения от соответствующих значений точного u_e , вычисленных в этих же точках, как и в [18, 19], применено 100 равномерно распределенных контрольных точек на $(-2/3; 2/3)$ ($i = \overline{1; 100}$). В этом случае во внутренних точках отрезка $y_i \in [-2/3; 2/3]$ отклонение определяем согласно [6]:

$$N_{e,n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_e} (u_e(y_i) - u(y_i))^2}{\sum_{i=1}^{n_e} u_e^2(y_i)}},$$

где n_e – число внутренних точек отрезка $[-2/3; 2/3]$. Число обусловленности матрицы системы (20) при $n = 5$ составляет 46.0 для узловых точек (4) и (21), при $n = 11$ равно 50.8, при $n = 15$ равно 52.9.

Порядок сходимости находим, как и работах [18–20]:

$$r_{e,n} = \frac{N_{e,n}}{N_{e,2n+1}}.$$

Значения отклонения $N_{e,n}$ и порядка сходимости $r_{e,n}$

n	$N_{e,n}$				
	$IA, (4)$	$ChP, (4)$	$IA, (21)$	$ChP, (21)$	[7]
4	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$	$7.3 \cdot 10^{-4}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-1}$
5	$3.4 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	–
6	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-6}$	$7.6 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$
7	$3.0 \cdot 10^{-7}$	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-8}$	$5.7 \cdot 10^{-4}$	–
8	$8.4 \cdot 10^{-8}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-8}$	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$
9	$6.7 \cdot 10^{-10}$	$3.7 \cdot 10^{-6}$	$2.0 \cdot 10^{-10}$	$1.0 \cdot 10^{-5}$	–
10	$2.6 \cdot 10^{-10}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$7.8 \cdot 10^{-11}$	$4.8 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$
11	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$3.2 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	–
12	$7.8 \cdot 10^{-13}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$	$2.7 \cdot 10^{-13}$	$5.3 \cdot 10^{-8}$	$4.9 \cdot 10^{-10}$
13	$2.7 \cdot 10^{-15}$	$2.0 \cdot 10^{-10}$	$9.3 \cdot 10^{-16}$	$8.8 \cdot 10^{-10}$	–
n	$r_{e,n}$				
4	$3.0 \cdot 10^5$	$2.0 \cdot 10^4$	$3.7 \cdot 10^6$	$7.3 \cdot 10^3$	–
5	$2.6 \cdot 10^7$	$4.4 \cdot 10^5$	$4.1 \cdot 10^7$	$1.3 \cdot 10^5$	–
6	$8.5 \cdot 10^9$	$2.0 \cdot 10^7$	$4.9 \cdot 10^9$	$8.6 \cdot 10^6$	–

В таблице приведены значения $N_{e,n}$ для численного решения краевой задачи (25) и (26), представленного в виде усеченного ряда по многочленам Чебышева первого рода. Результаты, полученные в этом случае без использования интегрального подхода, в таблице имеют аббревиатуру ChP . Здесь приходим к системе $n + 1$ линейных уравнений, полученных при использовании точек экстремума многочлена Чебышева степени n (4) и нулей $T_{n+1}(x)$ (21) в методе коллокации для (25), и осуществляем замену уравнений согласно граничным условиям (26) в точках, для которых $x = x_0$ и $x = x_n$, соответственно на уравнения

$$u((-1)^i) = (-1)^i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (27)$$

а в точках $x = x_1$ и $x = x_{n-1}$ – на уравнения

$$u_x^{(1)}((-1)^i) = -\frac{\pi}{3}, \quad i = 1, 2. \quad (28)$$

Из таблицы видно, что высокая точность полученного решения на основе интегрального подхода (IA) достигается при сравнительно малых значениях n как при использовании точек экстремумов многочленов Чебышева в качестве узлов интерполирования, так и нулей этих полиномов; наблюдается быстрая сходимость. Используя (5), получаем, что для всех значений n , указанных в таблице, отношение $\Lambda_n / \Lambda_{2n+1}$ не превышает 2 для узлов (4). В частности, при $n = 5$ значение константы Лебега составляет $\Lambda_5 = 1.98854$, а при $n = 11$ оно равно $\Lambda_{11} = 2.900825$. Учитывая, что для нечетного n имеет место равенство $\Lambda_n = \Lambda_{n-1}^*$ [12], где Λ_{n-1}^* – значение константы Лебега для узлов (21), получаем, что $\Lambda_4^* = 1.988854$ и $\Lambda_{10}^* = 2.900825$. Таким образом, медленный рост константы Лебега уменьшает погрешность алгебраического интерполирования.

Заключение

В работе предложен матричный метод полиномиальной аппроксимации Чебышева с использованием интегрального подхода построения решения неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка со смешанными граничными условиями. Построена матрица, позволяющая получить значения интегралов от полиномов Чебышева при умножении на нее слева матрицы, составленной из этих полиномов. Краевая задача при использовании точек экстремумов и нулей многочленов Чебышева сведена к системе неоднородных линейных уравнений с разреженной матрицей этой системы. Показано, что полученное таким образом решение при интегральном подходе сходится с повышенным порядком при использовании как точек экстремумов, так и нулей многочленов Чебышева в качестве точек коллокации.

Список источников

1. Tac V., Rausch M.K., Costabal F.S., Tepole A.B. Data-driven anisotropic finite viscoelasticity using neural ordinary differential equations // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2023. V. 411. Art. 116046. doi: 10.1016/j.cma.2023.116046
2. Nanshan M., Zhang N., Xun X., Cao J. Dynamical modeling for non-Gaussian data with high-dimensional sparse ordinary differential equations // *Computational Statistics & Data Analysis*. 2022. V. 173. Art. 107483. doi: 10.1016/j.csda.2022.107483
3. Khader M.M., Mahdy A.M.S., Shehata M.M. An Integral Collocation Approach Based on Legendre Polynomials for Solving Riccati, Logistic and Delay Differential Equations // *Applied Mathematics*. 2014. V. 5. P. 2360–2369. doi: 10.4236/am.2014.515228
4. Gimeno J., Jorba A., Jorba-Cusco M., Miguel N., Zou M. Numerical integration of high-order variational equations of ODEs // *Applied Mathematics and Computation*. 2023. V. 442. Art. 127743. doi: j.amc.2022.127743
5. Лун-Фу А.В., Бубенчиков М.А., Жамбаа С., Цыдыпов С.Г. Определение частот поперечных колебаний переходников и тупиковых ответвлений газопроводов // *Вестник Томского*

- государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 95–105. doi: 10.17223/19988621/68/9
6. *Mai-Duy N., Tanner R.I.* A spectral collocation method based on integrated Chebyshev polynomials for two-dimensional biharmonic boundary-value problems // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2007. V. 201. P. 30–47. doi: 10.1016/j.cam.2006.01.030
 7. *Mai-Duy N., See H., Tran-Cong T.* A spectral collocation technique based on integrated Chebyshev polynomials for biharmonic problems in irregular domains // *Appl. Math. Model.* 2009. V. 33 (1). P. 284–299. doi: 10.1016/j.apm.2007.11.002
 8. *Shao W., Wu X.* An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations // *Appl. Math. Model.* 2015. V. 39 (9). P. 2554–2569. doi: 10.1016/j.apm.2014.10.048
 9. *Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E.* A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions // *Applied Mathematics and Computation*. 2018. V. 322. P. 55–65. doi: 10.1016/j.amc.2017.11.048
 10. *Mason J., Handscomb D.* Chebyshev polynomials. Florida : CRC Press, 2003.
 11. *Liu S., Trenkler G.* Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products // *International Journal of Information and Systems Sciences*. 2008. V. 4 (1). P. 160–177. Corpus ID: 36767622
 12. *Ibrahimoglu B.A.* Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation // *Journal of Inequalities and Applications*. 2016. V. 93. P. 1–15. doi: 10.1186/s13660-016-1030-3
 13. *McCabe J.H., Phillips G.M.* On a certain class of Lebesgue constants // *BIT*. 1973. Vol. 13. P. 434–442. doi: 10.1007/BF01933407
 14. *Гермидер О.В., Попов В.Н.* О решении модельного кинетического уравнения ES // *Чебышевский сборник*. 2022. Т. 23, № 3. С. 37–49. doi: 10.22405/2226-8383-2022-23-3-37-49
 15. *Corless R.M., Jeffrey D.J.* The Turing factorization of a rectangular matrix // *ACM SIGSAM Bulletin*. 1997. V. 31 (3). P. 20–30. doi: 10.1145/271130.271135
 16. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М. : Наука, 1987. 598 с.
 17. *Антофеев В.С.* Вероятностная оценка числа обусловленности матрицы // *Сибирский журнал чистой и прикладной математики*. 2018. Т. 18, № 1. С. 28–34. doi: 10.17377/РАМ.2018.18.3
 18. *Голушко С.К., Идимешев С.В., Шанеев В.П.* Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // *Вычислительные технологии*. 2013. Т. 18, № 6. С. 31–43.
 19. *Шанеев В.П., Брындин Л.С., Беляев В.А.* hp-Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения бигармонического уравнения // *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки*. 2022. Т. 26, № 3. С. 556–572. doi: 10.14498/vsgtu1936
 20. *Chen G., Li Zh., Lin P.* A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow // *Adv. Comput. Math*. 2008. V. 29. P. 113–133. doi: 10.1007/s10444-007-9043-6

References

1. Tac V., Rausch M.K., Costabal F.S., Tepole A.B. (2023) Data-driven anisotropic finite viscoelasticity using neural ordinary differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 411(116046). DOI: 10.1016/j.cma.2023.116046.
2. Nanshan M., Zhang N., Xun X., Cao J. (2022) Dynamical modeling for non-Gaussian data with high-dimensional sparse ordinary differential equations. *Computational Statistics & Data Analysis*. 173(107483). DOI: 10.1016/j.csda.2022.107483.

3. Khader M.M., Mahdy A.M.S., Shehata M.M. (2014) An integral collocation approach based on Legendre polynomials for solving Riccati, logistic and delay differential equations. *Applied Mathematics*. 5. pp. 2360–2369. DOI: 10.4236/am.2014.515228.
4. Gimeno J., Jorba A., Jorba-Cusco M., Miguel N., Zou M. (2023) Numerical integration of high-order variational equations of ODEs. *Applied Mathematics and Computation*. 442 (127743). DOI: j.amc.2022.127743.
5. Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A., Zhambaa S., Tsydypov S.G. (2020) Opredeleniye chastot poperechnykh kolebaniy perekhodnikov i tupikovykh otvetvleniy gazoprovodov [Determining of transverse vibration frequencies for crossovers and dead ends of gas pipelines]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 95–105. DOI: 10.17223/19988621/68/9.
6. Mai-Duy N., Tanner R.I. (2007) A spectral collocation method based on integrated Chebyshev polynomials for two-dimensional biharmonic boundary-value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 201. pp. 30–47. DOI: 10.1016/j.cam.2006.01.030.
7. Mai-Duy N., See H., Tran-Cong T. (2009) A spectral collocation technique based on integrated Chebyshev polynomials for biharmonic problems in irregular domains. *Applied Mathematical Modelling*. 33(1). pp. 284–299. DOI: 10.1016/j.apm.2007.11.002.
8. Shao W., Wu X. (2015) An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations. *Applied Mathematical Modelling*. 39(9). pp. 2554–2569. DOI: 10.1016/j.apm.2014.10.048.
9. Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E. (2018) A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions. *Applied Mathematics and Computation*. 322. pp. 55–65. DOI: 10.1016/j.amc.2017.11.048.
10. Mason J., Handscomb D. (2003) *Chebyshev Polynomials*. Boca Raton: CRC Press. 2003.
11. Liu S., Trenkler G. (2008) Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products. *International Journal of Information and Systems Sciences*. 4(1). pp. 160–177.
12. Ibrahimoglu B.A. (2016) Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation. *Journal of Inequalities and Applications*. 93. pp. 1–15. DOI: 10.1186/s13660-016-1030-3.
13. McCabe J.H., Phillips G.M. (1973) On a certain class of Lebesgue constants *BIT Numerical Mathematics*. 13. pp. 434–442. DOI: 10.1007/BF01933407.
14. Germider O.V., Popov V.N. (2022) O reshenii model'nogo kineticheskogo uravneniya ES [On the solution of the model kinetic equation ES]. *Chebyshevskii Sbornik*. 23(3). pp. 37–49. DOI: 10.22405/2226-8383-2022-23-3-37-49.
15. Corless R.M., Jeffrey D.J. (1997) The Turing factorization of a rectangular matrix. *ACM SIGSAM Bulletin*. 31(3). pp. 20–30. DOI:10.1145/271130.271135.
16. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. (1987) *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Nauka.
17. Antyufeev V. S. (2018) Probabilistic estimation of matrix condition number. *Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 18(1). pp. 28–34. DOI:10.17377/PAM.2018.18.3.
18. Golushko S.K., Idimeshev S.V., Shapeev V.P. (2013) Metod kollokatsiy i naimen'shikh nevyazok v prilozhenii k zadacham mekhaniki izotropnykh plastin [Application of collocations and least residuals method to problems of the isotropic plates theory] *Vychislitel'nyye Tekhnologii. – Computational Technologies*. 18(6). pp. 31–43.
19. Shapeyev V.P., Bryndin L.S., Belyayev V.A. (2022) hp-variant metoda kollokatsii i naimen'shikh kvadratov s integral'nymi kollokatsiyami resheniya bigarmonicheskogo uravneniya [The hp-version of the least-squares collocation method with integral collocation for solving a biharmonic equation]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskiye nauki — Journal of Samara State Technical University, Seriya Physical and Mathematical Sciences*. 26(3). pp. 556–572. DOI: 10.14498/vsgtu1936.

20. Chen G., Li Zh., Lin P. (2008) A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow. *Advances in Computational Mathematics*. 29. pp. 113–133. DOI: 10.1007/s10444-007-9043-6.

Сведения об авторах:

Гермидер Оксана Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия. E-mail: o.germider@narfu.ru
Попов Василий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей и прикладной математики Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия. E-mail: v.popov@narfu.ru

Information about the authors:

Germider Oksana V. (Candidate of Physics and Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russian Federation). E-mail: o.germider@narfu.ru
Popov Vasilii N. (Doctor of Physics and Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russian Federation). E-mail: v.popov@narfu.ru

Статья поступила в редакцию 26.04.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 26.04.2023; accepted for publication 10.04.2024

Научная статья

УДК 512.554

doi: 10.17223/19988621/88/3

MSC: 17D99

Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле типа G_2 над полем характеристики 2

Алёна Викторовна Казакова

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия, alvkazakova@gmail.com

Аннотация. Пусть $N\Phi(K)$ – нильтреугольная подалгебра алгебры Шевалле ассоциативно-коммутативного кольца K с единицей, ассоциированная с системой корней Φ (базис $N\Phi(K)$ составляют все элементы $e_r \in \Phi^+$ базиса Шевалле). Мы описываем автоморфизмы нильтреугольного кольца Ли типа G_2 над полем K при ограничении $2K = 0$. Для исследования автоморфизмов существенно используются верхние и нижние центральные ряды, описываемые в данной работе.

Ключевые слова: алгебра Шевалле, нильтреугольная подалгебра, кольцо, стандартные автоморфизмы, гиперцентральный автоморфизм

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (соглашение 075-02-2024-1429).

Для цитирования: Казакова А.В. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле типа G_2 над полем характеристики 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 26–36. doi: 10.17223/19988621/88/3

Original article

Automorphisms of nil-triangular subrings of Chevalley algebras of type G_2 over the field of characteristic 2

Alyona V. Kazakova

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation, alvkazakova@gmail.com

Abstract. Let $N\Phi(K)$ be the nil-triangular subalgebra of the Chevalley algebra over an associative commutative ring K with the identity associated with a root system Φ (The basis of $N\Phi(K)$ consists of all elements $e_r \in \Phi^+$ of the Chevalley basis). This paper studies the well-known problem of describing automorphisms of Lie algebras and rings $N\Phi(K)$. Automorphisms of the Lie algebra $N\Phi(K)$ under restrictions $K = 2K = 3K$ on ring K are described by Y. Cao, D. Jiang, J. Wang (Intern. J. Algebra and Computation, 2007). When passing from algebras to Lie rings, the group of automorphisms expands. Thus, the subgroup of central automorphisms is extended, i.e. acting modulo the center, ring automorphisms induced by automorphisms of the main ring are added. For the type A_n , a description of automorphisms of Lie rings $N\Phi(K)$ over K was obtained by V.M. Levchuk

(Siberian Mathematical Journal, 1983). Automorphisms of the Lie ring $N\Phi(K)$ are described by V.M. Levchuk (Algebra and Logic, 1990) for type D_4 over K , and for other types by A.V. Litavrin (Thesis for: Cand. Sc. (Physics and Mathematics) – 01.01.06. Siberian Federal University, 2017), excluding types G_2 and F_4 . The author (2022) obtained a description of automorphisms of Lie rings $N\Phi(K)$ of type G_2 when K is an integrity domain and $K = 2K = 3K$ or $3K = 0$. In this paper we describe automorphisms of a nil-triangular Lie ring of type G_2 over a field K under restriction $2K = 0$. To study automorphisms, the upper and lower central series described in this work are essentially used. A new non-standard automorphism was found, called an S -automorphism.

Keywords: Chevalley algebra, nil-triangular subalgebra, ring, automorphism, hypercentral automorphism

Acknowledgments: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2024-1429).

For citation: Kazakova, A.V. (2024) Automorphisms of nil-triangular subrings of Chevalley algebras of type G_2 over the field of characteristic 2. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 26–36. doi: 10.17223/19988621/88/3

Введение

Алгебру Шевалле над полем K характеризуют системой корней Φ евклидова пространства и базисом Шевалле, который составляют подходящий базис подалгебры Картана и векторы e_r , $r \in \Phi$. Подалгебру с базисом $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ для системы Φ^+ положительных корней, как и в [1], обозначим через $N\Phi(K)$ и назовем нильтреугольной.

Далее K – ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Автоморфизмы алгебры Ли $N\Phi(K)$ при ограничениях $K = 2K = 3K$ на кольцо K описаны в 2007 г. в [2].

Аutomorphisms алгебры $N\Phi(K)$ являются и автоморфизмами множества $N\Phi(K)$, рассматриваемого как кольцо. При переходе от алгебр к кольцам Ли группа автоморфизмов расширяется, поскольку в кольце не обязательно сохраняется умножение на скаляр. Так, расширяется подгруппа центральных автоморфизмов, т.е. действующих тождественно по модулю центра, добавляются кольцевые автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами основного кольца.

Для типа A_n описание автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ над K получил в 1983 г. В.М. Левчук [1]; в основном существование нестандартных автоморфизмов здесь зависит от аннулятора в кольце K элемента 2.

Аutomorphisms кольца Ли $N\Phi(K)$ выявлены в [3] также для типа D_4 ; в [4–6] их описание редуцировано к исключительным типам G_2 и F_4 .

В [7] получено описание автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 , когда K есть область целостности и $K = 2K = 3K$ или $3K = 0$.

В статье описываются автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 , когда K есть поле характеристики 2 – теорема 3.1. В доказательстве теоремы 3.1 существенно используется структура центральных рядов кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 , полученная в лемме 1.1. Также найден новый нестандартный автоморфизм, называемый S -автоморфизмом.

1. Центральные ряды и гиперцентральные автоморфизмы

Для описания автоморфизмов колец нам потребуются определенные характеристические идеалы. Аннулятором множества M в произвольном кольце R называем множество $\text{Ann}_R(M) = \{\alpha \in R \mid M\alpha = \alpha M = 0\}$.

В произвольном кольце Ли $R = (R, +, *)$ аналогично группам вводят *гиперцентральный* или *верхний* центральный ряд

$$0 = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \dots \subseteq Z_i \subseteq Z_{i+1} \subseteq \dots, \\ Z_{i+1} := \{g \in R \mid g * R \subseteq Z_i\} \quad (i \geq 0),$$

и *нижний* центральный ряд

$$R = \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \dots \supseteq \Gamma_n \supseteq \dots, \quad \Gamma_{n+1} := \Gamma_n * R \quad (n \geq 1).$$

Аutomорфизм, действующий тождественно по модулю центра Z_1 , называют *центральным*. В 1990 г. в [3] введено обобщение центральных автоморфизмов – гиперцентральные автоморфизмы.

Аutomорфизм группы или кольца Ли L , единичный по модулю m -го гиперцентра и неединичный по модулю $(m-1)$ -го гиперцентра, называют *гиперцентральной высоты m* (кратко – *гиперцентральной*, когда L не совпадает с m -м гиперцентром).

Пусть Φ^+ – множество положительных корней системы Φ , а $\Pi = \{r_1, \dots, r_l\}$ – ее фундаментальная система простых корней из Φ . Для любого $r \in \Phi$ через $ht(r)$ обозначим высоту корня r . По определению при $r = a_1 r_1 + \dots + a_l r_l$ полагаем $ht(r) = a_1 + \dots + a_l$. Согласно теореме о базисе алгебры Шевалле [8. Теорема 4.2.1], для произвольных корней $r, s \in \Phi^+$ имеем $e_r * e_s = 0$ при $r + s \notin \Phi$ и

$$e_r * e_s = N_{r,s} e_{r+s}, \quad N_{s,r} = -N_{r,s} \quad (r + s \in \Phi),$$

где структурные константы $N_{r,s} = \pm 1, \pm 2$ или ± 3 , причем равенство $N_{r,s} = \pm 3$ возможно только для Φ типа G_2 . Выбор знаков $N_{r,s}$ далее зафиксируем в соответствии с [8. С. 211].

В [8] введен *стандартный* центральный ряд алгебры Ли $N\Phi(K)$, где

$$L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_{h-1} \supset L_h = 0, \\ L_i := \langle Ke_r \mid r \in \Phi^+, ht(r) \geq i \rangle \quad (1 \leq i \leq h-1).$$

Когда верхний и нижний центральные ряды в $N\Phi(K)$ стандартны, имеем

$$L_i = \Gamma_i = Z_{h-i} \quad (1 \leq i \leq h).$$

Описание верхних и нижних центральных рядов завершено в [5, 6] для классических типов и требуется лишь для типа F_4 (см.: [9]). Приведем их для типа G_2 . Пусть a, b – простые корни для Φ типа G_2 , корень a – короткий, и $|a| < |b|$. Тогда $\Phi^+ = \{a, b, a + b, 2a + b, 3a + b, 3a + 2b\}$.

Аннулятор элемента t в кольце K обозначаем через Δ_t .

Лемма 1.1. [9] Пусть K – произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо с 1. Для кольца Ли $NG_2(K) = L_1$ верны равенства

$$\Gamma_2 = Ke_{a+b} + 2Ke_{2a+b} + 3Ke_{3a+b} + Ke_{3a+2b}, \\ \Gamma_3 = 2Ke_{2a+b} + 6Ke_{3a+b} + 3Ke_{3a+2b}, \\ \Gamma_i = 6L_i, \quad i = 4, 5, 6, \\ Z_1 = \Delta_2 \Delta_3 e_{a+b} + \Delta_3 e_{2a+b} + L_5,$$

$$Z_2 = \Delta_2 \Delta_3 e_a + \Delta_2 \Delta_3 e_b + (\Delta_2 + \Delta_3) e_{a+b} + \Delta_3 e_{2a+b} + L_4,$$

$$Z_i = (\Delta_2 + \Delta_3) L_1 + L_{6-i}, \quad i = 3, 4.$$

Замечание 1.2. Очевидно, для произвольного элемента $t \in K$, $t \neq 0$, не являющегося делителем нуля в кольце K , любой $\Delta_t = 0$. Поэтому для поля K получаем $\Delta_2 \Delta_3 = 0$, и формулы в лемме 1.1 для Z_1 и Z_2 упрощаются.

Следствие 1.3. Верхний или нижний центральный ряд кольца Ли $NG_2(K)$ при $2K \neq K$ не является стандартным.

2. Некоторые автоморфизмы кольца Ли $NG_2(K)$

Кольцо Ли $N\Phi(K)$ порождает множества Ke_r ($r \in \Phi^+$), а при $p(\Phi)!K = K$, где $p(\Phi) = \max \{(r,r)/(s,s) \mid r, s \in \Phi\} = 1, 2$ или 3 , даже Ke_r ($r \in \Pi$). К основным соотношениям относятся также и соотношения в кольце коэффициентов.

Для автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ полезна (и очевидна)

Лемма 2.1. Автоморфизм Φ аддитивной группы кольца Ли $N\Phi(K)$ есть его автоморфизм тогда и только тогда, когда Φ сохраняет соотношения

$$xe_r + ye_r = (x + y)e_r \quad (r \in \Phi^+, x, y \in K),$$

$$xe_r * ye_s = xyN_{r,s}e_{r+s} \quad (r, s, r+s \in \Phi^+),$$

$$xe_r * ye_s = 0 \quad (r, s \in \Phi^+, r+s \notin \Phi^+).$$

В алгебре Шевалле типа Φ над K подалгебра $N\Phi(K)$ характеристична относительно каждого *корневого* автоморфизма $x_r(t)$ ($r \in \Phi$, $t \in K$) [8. § 4.3]. Его ограничение дает автоморфизм подалгебры $N\Phi(K)$, называемый *внутренним*. Действием на базе он определяется по правилу

$$x_r(t) : e_r \rightarrow e_r, \quad e_s \rightarrow \sum_{i=0}^q M_{r,s,i} t^i e_{ir+1} \quad (s \in \Phi^+ \setminus \{r\}),$$

$$M_{r,s,0} := 1, \quad M_{r,s,i} := (1/i!) N_{r,s} N_{r,r+s} \dots N_{r,(i-1)r+s}.$$

Все корневые автоморфизмы $x_r(t)$ порождают подгруппу J *внутренних* автоморфизмов алгебры Ли $N\Phi(K)$. Известно, что она изоморфна фактор-группе унитарной группы $U = U\Phi(K)$ по центру.

Диагональный автоморфизм $h(\chi) : e_r \rightarrow \chi(r)e_r$ ($r \in \Phi^+$) алгебры Ли $N\Phi(K)$ сопоставляет любому K -характеру χ решетки корней, т.е. гомоморфизму подгруппы $\langle \Phi \rangle^+$ аддитивной группы V^+ в мультипликативную группу K^* обратимых элементов кольца K [8. § 7.1]. Хорошо известно, что χ определяется однозначно значениями на простых корнях.

Кольцевые автоморфизмы алгебры Ли $N\Phi(K)$ выделяем по аналогии с [8].

Произведения внутренних, диагональных, кольцевых и центральных автоморфизмов называют *стандартными* автоморфизмами.

Один нестандартный автоморфизм, известный для Φ типа A_n с 1950-х гг., определен Гиббсом [10] для всех $k \in K$, а для Φ типа G_2 – по правилу ($r \in \Phi^+$)

$$\xi(k) : e_a \rightarrow e_a, e_b \rightarrow e_b + ke_{3a+b}, e_r \rightarrow e_r. \quad (1)$$

В соответствии с [2] и [11] его называют автоморфизмом Гиббса. Ясно, что при $k \neq 0$ он является гиперцентральный автоморфизмом высоты 2.

Далее мы выделим нестандартные автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 при $t \in K$ следующих четырех типов:

$$\begin{aligned} \xi_1(t) : e_{2a+b} &\rightarrow e_{2a+b} + te_{a+b}, \\ e_r &\rightarrow e_r \text{ для остальных } r \in \Phi^+, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \xi_2(t) : e_{2a+b} &\rightarrow e_{2a+b} + te_b, \quad e_{3a+b} \rightarrow e_{3a+b} + te_{a+b}, \\ e_r &\rightarrow e_r \text{ для остальных } r \in \Phi^+, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \xi_3(t) : e_b &\rightarrow e_b + te_{2a+b}, \quad e_{a+b} \rightarrow e_{a+b} + te_{3a+b}, \\ e_r &\rightarrow e_r \text{ для остальных } r \in \Phi^+, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \xi_4(t) : e_b &\rightarrow e_{2a+b}, \quad e_{a+b} \rightarrow e_{3a+b}, \quad e_{2a+b} \rightarrow e_b, \quad e_{3a+b} \rightarrow e_{a+b}, \\ e_r &\rightarrow e_r \text{ для остальных } r \in \Phi^+. \end{aligned} \quad (5)$$

Автоморфизм $\xi_4(t)$ назовем *S-автоморфизмом*, так как он связан с подстановками положительных корней.

Лемма 2.2. Отображения ξ_i ($i = 1, 2, 3$) при $2K = 0$ и ξ_4 при $4K = 0$ являются автоморфизмами кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 над кольцом K .

Доказательство. Нетрудно проверить, что отображения ξ_i – автоморфизмы K -модуля $N\Phi(K)$ типа G_2 . Из того, что в кольце $N\Phi(K)$ выполняются обычные свойства линейности $(\alpha x + \beta y)^\phi = \alpha(x)^\phi + \beta(y)^\phi$, следует, что ϕ – линейное преобразование, под действием которого сохраняется умножение на скаляр.

Проверим соотношения из леммы 2.1 при $t \in K$.

$$\begin{aligned} \xi_1(xe_{2a+b} * e_a) &= \xi_1(N_{2a+b,a}e_{3a+b}) = N_{2a+b,a}\xi_1(e_{3a+b}) = N_{2a+b,a}e_{3a+b}, \\ \xi_1(e_{2a+b}) * \xi_1(e_a) &= (e_{2a+b} + te_{a+b}) * e_a = N_{2a+b,a}e_{3a+b} + N_{a+b,a}te_{2a+b}. \end{aligned}$$

Инвариантность этих соотношений следует сейчас из равенства $N_{a+b,a}t = 0$, откуда $2t = 0$.

$$\begin{aligned} \xi_1(xe_{2a+b} * e_{a+b}) &= \xi_1(N_{2a+b,a+b}e_{3a+2b}) = N_{2a+b,a+b}e_{3a+2b}, \\ \xi_1(e_{2a+b}) * \xi_1(e_{a+b}) &= (e_{2a+b} + te_{a+b}) * e_{a+b} = N_{2a+b,a+b}e_{3a+2b}. \\ \xi_1(xe_{2a+b} * e_{2a+b}) &= \xi_1(0) = 0, \\ \xi_1(e_{2a+b}) * \xi_1(e_{2a+b}) &= (e_{2a+b} + te_{a+b}) * (e_{2a+b} + te_{a+b}) = 0. \end{aligned}$$

Инвариантны и остальные соотношения. Поэтому ξ_1 – автоморфизм. Далее.

$$\begin{aligned} \xi_2(e_a * e_{2a+b}) &= \xi_2(N_{a,2a+b}e_{3a+b}) = N_{a,2a+b}\xi_2(e_{3a+b}) = N_{a,2a+b}(e_{3a+b} + te_{a+b}), \\ \xi_2(e_a) * \xi_2(e_{2a+b}) &= e_a * (e_{2a+b} + te_b) = N_{a,2a+b}e_{3a+b} + N_{a,b}te_{a+b}, \end{aligned}$$

инвариантность этого соотношения, очевидно, равносильна условию $(N_{a,b} - N_{a,2a+b})t = 0$, где $N_{a,b} = -1$, $N_{a,2a+b} = 3$. Поэтому $4t = 0$.

$$\xi_2(e_{2a+b} * e_{3a+b}) = 0,$$

$$\xi_2(e_{2a+b}) * \xi_2(e_{3a+b}) = (e_{2a+b} + te_b) * (e_{3a+b} + te_{a+b}) = tN_{2a+b,a+b}e_{3a+2b} + tN_{b,3a+b}e_{3a+2b}.$$

Инвариантность этого соотношения, очевидно, равносильна условию $(N_{2a+b,a+b} + N_{b,3a+b})t = 0$. Так как $N_{2a+b,a+b} = -3$, $N_{b,3a+b} = 1$, то $2t = 0$.

$$\xi_2(e_{2a+b} * e_{a+b}) = N_{2a+b,a+b}e_{3a+2b},$$

$$\xi_2(e_{2a+b}) * \xi_2(e_{a+b}) = (e_{2a+b} + te_b) * e_{a+b} = N_{2a+b,a+b}e_{3a+2b}.$$

$$\xi_2(e_{3a+b} * e_b) = N_{3a+b,b}e_{3a+2b},$$

$$\xi_2(e_{3a+b}) * \xi_2(e_b) = (e_{3a+b} + te_{a+b}) * e_b = N_{3a+b,b}e_{3a+2b}.$$

$$\xi_2(e_{3a+b} * e_a) = 0,$$

$$\xi_2(e_{3a+b}) * \xi_2(e_a) = (e_{3a+b} + te_{a+b}) * e_a = N_{a+b,a} e_{2a+b},$$

инвариантность этого соотношения следует сейчас из равенств $N_{a+b,a}t = 0$, откуда $2t = 0$. Инвариантны и остальные соотношения. Поэтому ξ_2 – автоморфизм. Далее.

$$\xi_3(e_b * e_a) = \xi_3(N_{b,a} e_{a+b}) = N_{b,a} \xi_3(e_{a+b}) = N_{b,a} (e_{a+b} + te_{3a+b}),$$

$$\xi_3(e_b) * \xi_3(e_a) = (e_b + te_{2a+b}) * e_a = N_{b,a} e_{a+b} + N_{2a+b,a} te_{3a+b}.$$

Инвариантность этого соотношения следует сейчас из равенства $(N_{b,a} - N_{2a+b,a})t = 0$. Поскольку $N_{2a+b,a} = -3$, $N_{b,a} = 1$, то $4t = 0$.

$$\xi_3(e_b * e_{a+b}) = 0,$$

$$\xi_3(e_b) * \xi_3(e_{a+b}) = (e_{2a+b} + te_b) * (e_{3a+b} + te_{a+b}) = N_{2a+b,a+b} te_{3a+2b} + N_{b,3a+b} te_{3a+2b}.$$

Инвариантность этого соотношения следует сейчас из равенства $(N_{2a+b,a+b} + N_{b,3a+b})t = 0$. Так как $N_{2a+b,a+b} = -3$, $N_{b,3a+b} = 1$, то $2t = 0$.

$$\xi_3(e_{a+b} * e_a) = N_{a+b,a} e_{2a+b},$$

$$\xi_3(e_{a+b}) * \xi_3(e_a) = (e_{a+b} + te_{3a+b}) * e_a = N_{a+b,a} e_{2a+b}.$$

$$\xi_3(e_{a+b} * e_b) = 0,$$

$$\xi_3(e_{a+b}) * \xi_3(e_b) = (e_{a+b} + te_{3a+b}) * (e_b + te_{2a+b}) = N_{a+b,2a+b} te_{3a+2b} + N_{3a+b,b} te_{3a+2b}.$$

Поскольку $N_{a+b,2a+b} = 3$, $N_{3a+b,b} = -1$, то $2t = 0$.

$$\xi_3(e_{a+b} * e_{2a+b}) = N_{a+b,2a+b} e_{3a+2b},$$

$$\xi_3(e_{a+b}) * \xi_3(e_{2a+b}) = (e_{a+b} + te_{3a+b}) * e_{2a+b} = N_{a+b,2a+b} e_{3a+2b}.$$

Инвариантны и остальные соотношения. Поэтому ξ_3 – автоморфизм. Далее.

$$\xi_4(te_b * e_a) = \xi_4(N_{b,a} te_{a+b}) = N_{b,a} te_{3a+b},$$

$$\xi_4(te_b) * \xi_4(e_a) = te_{2a+b} * e_a = N_{2a+b,a} te_{3a+b}.$$

Инвариантность этого соотношения следует сейчас из равенства $(N_{b,a} - N_{2a+b,a})t = 0$. Так как $N_{2a+b,a} = -3$, $N_{b,a} = 1$, то $4t = 0$.

$$\xi_4(te_b * e_{3a+b}) = \xi_4(N_{b,3a+b} te_{3a+2b}) = N_{b,3a+b} te_{3a+2b},$$

$$\xi_4(te_b) * \xi_4(e_{3a+b}) = te_{2a+b} * e_{a+b} = N_{2a+b,a+b} te_{3a+2b}.$$

Инвариантность этого соотношения следует сейчас из равенства $(N_{b,3a+b} - N_{2a+b,a+b})t = 0$. Из того, что $N_{b,3a+b} = 1$, $N_{2a+b,a+b} = -3$ следует равенство $4t = 0$.

$$\xi_4(te_{a+b} * e_{2a+b}) = \xi_4(N_{a+b,2a+b} te_{3a+2b}) = N_{a+b,2a+b} te_{3a+2b},$$

$$\xi_4(te_{a+b}) * \xi_4(e_{2a+b}) = te_{3a+b} * e_b = N_{3a+b,b} te_{3a+2b}.$$

Инвариантность этого соотношения следует сейчас из равенства $(N_{a+b,2a+b} - N_{3a+b,b})t = 0$. Из серии равенств $N_{a+b,2a+b} = 3$, $N_{3a+b,b} = -1$ следует, что $4t = 0$. Инвариантны и остальные соотношения. Поэтому ξ_4 – автоморфизм.

3. Автоморфизмы кольца $NG_2(K)$ при $2K = 0$

Исследуем описание автоморфизмов кольца Ли $NG_2(K)$ или $N\Phi(K)$ типа G_2 над полем K при $2K = 0$.

Теорема 3.1. Пусть R – кольцо Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 над полем K при $2K = 0$. Тогда справедливы два случая.

1. Автоморфизм ϕ кольца R есть произведение стандартного автоморфизма, автоморфизмов вида (3) и (4), а также гиперцентральных автоморфизмов высоты 2 вида (1), (2);

2. Автоморфизм ϕ кольца R есть произведение S -автоморфизма вида (5), стандартного автоморфизма, автоморфизмов вида (3) и (4), а также гиперцентральных автоморфизмов высоты 2 вида (1), (2).

Доказательство. Исследуем произвольный автоморфизм $\phi \in \text{Aut } R$. Кольцо R порождается аддитивными подгруппами Ke_a , Ke_b и Ke_{2a+b} . Поэтому действие на них характеризует автоморфизм ϕ . Вначале исследуем действие по модулю $R^2 = Ke_{a+b} + Ke_{3a+b} + Ke_{3a+2b}$. Находим аннуляторы кольца R и его степени R^2 :

$$\text{Ann } R = Ke_{3a+2b}, \quad \text{Ann } R^2 = Ke_a + Ke_{a+b} + Ke_{3a+b} + Ke_{3a+2b}.$$

Учитывая характеристичность членов верхнего и нижнего центральных рядов кольца R и характеристичность идеалов $\text{Ann } R^2$ при $x, y, z \in K$, получаем

$$\begin{aligned} (xe_a)^\phi &= x^\sigma e_a \pmod{R^2}, \\ (ye_b)^\phi &= y^{\lambda'} e_a + y^\lambda e_b + y^{\lambda''} e_{2a+b} \pmod{R^2}, \\ (ze_{2a+b})^\phi &= z^{\mu'} e_a + z^{\mu''} e_b + z^{\mu'''} e_{2a+b} \pmod{R^2} \end{aligned} \quad (6)$$

для подходящих эндоморфизмов $\sigma, \lambda, \lambda', \lambda'', \mu, \mu', \mu''$ аддитивной группы K^+ поля K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R). Рассмотрим два случая.

1. Одновременно $x^\lambda, y^\mu \neq 0$ при $x, y \neq 0, x, y \in K$. Учитывая, что K – поле, умножив ϕ последовательно на автоморфизм вида (3) при $t = c = z^{\mu''}(z^\mu)^{-1}$ и автоморфизм вида (4) при $t = (y^\lambda + y^{\lambda'}c)^{-1}y^{\mu'}$, получаем

$$\begin{aligned} (xe_a)^\phi &= x^\sigma e_a \pmod{R^2}, \\ (ye_b)^\phi &= y^{\lambda'} e_a + (y^\lambda + y^{\lambda'} z^{\mu''}(z^\mu)^{-1}) e_b \pmod{R^2}, \\ (ze_{2a+b})^\phi &= z^{\mu'} e_a + z^{\mu''} e_{2a+b} \pmod{R^2}. \end{aligned}$$

Образование $\psi: y^\psi = (y^\lambda + y^{\lambda'} z^{\mu''}(z^\mu)^{-1})$ будет эндоморфизмом аддитивной группы поля K , так как

$$(x + y)^\psi = (x + y)^\lambda + (x + y)^{\lambda'} z^{\mu''} (z^\mu)^{-1} = x^\lambda + y^\lambda + ((x^{\lambda'} + y^{\lambda'}) z^{\mu''} (z^\mu)^{-1}) = x^\psi + y^\psi.$$

Учитывая, что ϕ – автоморфизм, получаем, что $\psi \neq 0$. Отсюда получаем, что λ' и μ' равны 0, используя равенства

$$0 = (ye_b)^\phi * (ze_{2a+b})^\phi = (y^\lambda + y^{\lambda'} z^{\mu''} (z^\mu)^{-1}) z^{\mu'} e_{a+b} + y^{\lambda'} z^{\mu''} e_{3a+b} \pmod{\text{Ann } R}.$$

Исследуем $\sigma \in \text{End } K^+$. Учитывая характеристичность идеалов $\text{Ann } R^2, R^2$ и серию равенств

$$Ke_a + R^2 = \text{Ann } R^2 = (\text{Ann } R^2)^\phi = (Ke_a)^\phi + (R^2)^\phi = K^\sigma e_a + R^2,$$

из равенства $K^\sigma = K$ получаем сюръективность σ .

Докажем инъективность σ . Пусть $x, y \in K$ и $x \neq y$, тогда

$$\begin{aligned} (xe_a)^\phi &= x^\sigma e_a \pmod{R^2}, \\ (ye_a)^\phi &= y^\sigma e_a \pmod{R^2}. \end{aligned}$$

Предположим, что $x^\sigma = y^\sigma = c$, тогда

$$\begin{aligned} (xe_a)^\phi &= ce_a + Y_1, Y_1 \in R^2, \\ (ye_a)^\phi &= ce_a + Y_2, Y_2 \in R^2. \end{aligned}$$

Пусть $Y_1 - Y_2 = Y \in R^2$ и $A = ce_a + Y_1, B = ce_a + Y_2$, откуда

$$1) (A - B)^{\phi^{-1}} = A^{\phi^{-1}} - B^{\phi^{-1}} = (x - y)e_a,$$

$$2) (A - B)^{\phi^{-1}} = Y^{\phi^{-1}} \in R^2.$$

Учитывая характеристичность R^2 и 1), из 2) получаем, что $Y^{\phi^{-1}} = 0$, откуда $x = y$. Инъективность σ доказана. Отсюда вытекает включение $\sigma \in \text{Aut } K^+$. По модулю $\text{Ann } R$ имеем

$$Ke_{a+b} + Ke_{3a+b} = (Ke_b * e_a)^\phi + (Ke_{2a+b} * e_a)^\phi = K^\psi 1^\sigma e_{a+b} + K^\mu 1^\sigma e_{3a+b},$$

откуда $K^\psi 1^\sigma = K, K^\mu 1^\sigma = K$ и аналогично $1^\psi K^\sigma = K, 1^\mu K^\sigma = K$. Отсюда и из того, что K – поле, вытекают равенства $K^\psi = K = K^\mu$, т.е. сюръективность $\psi, \mu \in \text{Aut } K^+$.

Докажем инъективность μ . Пусть $x, y \in K$ и $x \neq y$, тогда

$$(xe_{3a+b})^\phi = x^\mu e_{3a+b} \pmod{R^2},$$

$$(ye_{3a+b})^\phi = y^\mu e_{3a+b} \pmod{R^2}.$$

Предположим, что $x^\mu = y^\mu = c$, тогда

$$(xe_{3a+b})^\phi = ce_{3a+b} + Y_1, Y_1 \in R^2,$$

$$(ye_{3a+b})^\phi = ce_{3a+b} + Y_2, Y_2 \in R^2.$$

Пусть $Y_1 - Y_2 = Y \in R_2$ и $A = ce_{3a+b} + Y_1, B = ce_{3a+b} + Y_2$, откуда

$$1) (A - B)^{\phi^{-1}} = A^{\phi^{-1}} - B^{\phi^{-1}} = (x - y)e_{3a+b},$$

$$2) (A - B)^{\phi^{-1}} = Y^{\phi^{-1}} \in R^2.$$

Учитывая характеристичность R_2 и 1), из 2) получаем, что $Y^{\phi^{-1}} = 0$, откуда $x = y$. Инъективность μ доказана. Аналогичное доказательство для $\psi \in \text{End } K^+$. Отсюда получаем, что $\psi, \mu \in \text{Aut } K^+$.

С точностью до умножения ϕ на диагональный автоморфизм мы получим $1^\sigma = 1^\psi = 1^\mu = 1$.

Далее, ϕ -инвариантность основных соотношений кольца R дает (по модулю $\text{Ann } R$)

$$(xe_b * e_a)^\phi = (xe_b)^\phi * e_a^\phi = x^\psi 1^\sigma e_{a+b},$$

$$(xe_b * e_a)^\phi = e_b^\phi * (xe_a)^\phi = 1^\psi x^\sigma e_{a+b},$$

$$(xe_{2a+b} * e_a)^\phi = (xe_{2a+b})^\phi * e_a^\phi = x^\mu 1^\sigma e_{3a+b},$$

$$(xe_{2a+b} * e_a)^\phi = e_{2a+b}^\phi * (xe_a)^\phi = 1^\mu x^\sigma e_{3a+b}.$$

Поэтому $x^\psi = x^\sigma = x^\mu$ для любого $x \in K$, т.е. $\psi = \sigma = \mu$. Кроме того, для любых $x, y \in K, \sigma \in \text{Aut } K$ в силу равенств (по модулю $\text{Ann } R$)

$$x^\sigma y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_b) * (y^\sigma e_a) = (xe_b)^\phi * (ye_a)^\phi = (xye_b * e_a)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

С точностью до умножения ϕ на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$ мы получим, что $\sigma = 1$, откуда $(x \in K)$

$$(xe_r)^\phi = xe_r \pmod{Q(r)} \quad (r \in \Phi^+ \setminus \{2a+b\}), (xe_{2a+b})^\phi = xe_{2a+b} \pmod{R^2},$$

где $Q(r) := \sum_{s>r} Ke_s$. Считаем, что $s > r$, если коэффициенты разложения $s - r$ по

базе $\Pi(\Phi^+)$ положительны.

Умножаем ϕ последовательно на внутренние автоморфизмы вида $\chi_b(u)$, $\chi_{2a+b}(u)$, $\chi_a(u)$, $\chi_{a+b}(u)$, $\chi_{3a+b}(u)$, автоморфизмы вида (1), (2) и на аннуляторные автоморфизмы из леммы [12], получим

$$(xe_a)^\phi = xe_a,$$

$$(ye_b)^\phi = ye_b,$$

$$(ze_{2a+b})^\phi = ze_{2a+b} + ce_{3a+b} \quad (x, y, z, c \in K).$$

Так как $0 = (e_b * ze_{2a+b})^\phi = ce_{3a+b}$, получаем, что $c = 0$. Значит

$$(xe_a)^\phi = xe_a, (ye_b)^\phi = ye_b, (ze_{3a+b})^\phi = ze_{3a+b}.$$

2. Хотя бы один из x^λ, y^μ равен 0 при $x, y \neq 0, x, y \in K$.

Лемма 3.2. В (6) для $NG_2(K)$ над любым ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей характеристики 2, если хотя бы один из x_1^λ, y_1^μ равен 0 для некоторых $x_1, y_1 \neq 0, x_1, y_1 \in K$, то одновременно $x^\lambda, y^\mu \neq 0$ для любых $x, y \neq 0, x, y \in K$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $x \in K, x^\lambda = 0$. Откуда $(xe_b)^\phi = x^\lambda e_a + x^\lambda e_{2a+b} \pmod{R^2}$. Проверим, что $y^\mu \neq 0$ для любого $y \neq 0, y \in K$. Пусть существует такой $(y_1 \neq 0) \in K$ такой, что $y_1^\mu = 0$, тогда

$$(y_1 e_{3a+b})^\phi = (e_a * y_1 e_{2a+b})^\phi = (e_a)^\phi * (e_{2a+b})^\phi = 1^\sigma y_1^\mu e_{3a+b} \pmod{\text{Ann } R},$$

$$(y_1 e_{3a+2b})^\phi = (y_1 e_{3a+b} * e_b)^\phi = (y_1 e_{3a+b})^\phi * (y_1 e_b)^\phi = 0,$$

т.е. получаем противоречие, так как ϕ – автоморфизм и идеал $\text{Ann } R$ характеристичен. Отсюда $y^\mu \neq 0$ для любого $(y \neq 0) \in K$.

Проверим, что $x^\lambda \neq 0$ для любого $x \neq 0, x \in K$. Пусть существует такой $(x_1 \neq 0) \in K$ такой, что $x_1^\lambda = 0$, тогда

$$(x_1 e_{a+b})^\phi = (e_a * x_1 e_b)^\phi = (e_a)^\phi * (x_1 e_b)^\phi = 0,$$

т.е. получаем противоречие, так как ϕ – автоморфизм.

Для случая $y^\mu = 0$ для некоторого $(y \neq 0) \in K$ доказывается аналогично предыдущему случаю $x^\lambda = 0$ для некоторого $(x \neq 0) \in K$. Лемма доказана.

Умножая ϕ на автоморфизм (5), переходим к случаю 1. Теорема доказана.

Список источников

1. Левчук В.М. Связи унитарной группы с некоторыми кольцами. Ч. 2. Группы автоморфизмов // Сибирский математический журнал. 1983. Т. 24, № 4. С. 64–80.
2. Cao Y., Jiang D., Wang J. Automorphisms of certain nilpotent Lie algebras over commutative rings // Intern. J. Algebra and Computation. 2007. V. 17 (3). P. 527–555.
3. Левчук В.М. Автоморфизмы унитарных подгрупп Шевалле // Алгебра и Логика. 1990. Т. 29, № 3. С. 315–338.
4. Литаврин А.В. Автоморфизмы нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле симплектического типа // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2015. Т. 13, № 3. С. 41–55.
5. Левчук В.М., Литаврин А.В. Гиперцентральные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 467–477. doi: 10.17377/semi.2016.13.040. URL: <http://semr.math.nsc.ru/v13/p467-477.pdf>
6. Литаврин А.В. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле классических типов : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2017.
7. Казакова А.В. Автоморфизмы нильтреугольного подкольца алгебры Шевалле типа G_2 // Сборник статей Всерос. молодежной науч. конф. «Все грани математики», Томск, 2022. Томск : Красное знамя, 2022. С. 28.

8. Carter R. Simple Groups of Lie Type. New York : Wiley and Sons, 1972. 331 p.
9. Казакова А.В., Кириллова Е.А. Автоморфизмы и центральные ряды nil-треугольных подколец алгебр Шевалле // Мальцевские чтения : тезисы докладов междунар. конф., Новосибирск, 2020. Новосибирск : Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН. С. 191.
10. Gibbs J.A. Automorphisms of certain unipotent groups // J. Algebra. 1970. V. 14 (2). P. 203–208. doi: 10.1006/jabr.2001.886
11. Левчук В.М., Литаврин А.В. Автоморфизмы nil-треугольных подколец алгебр Шевалле ортогональных типов // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. 2016. Т. 17, № 2. С. 324–327.
12. Kuzucuoglu F., Levchuk V.M. The automorphism group of certain radical rings // Journal of Algebra. 2001. V. 243. P. 473–485.

References

1. Levchuk V.M. (1983) Connections between a unitriangular group and certain rings. Chapter 2: Groups of automorphisms. *Siberian Mathematical Journal*. 24. pp. 543–557. DOI: 10.1007/BF00969552.
2. Cao Y., Jiang D., Wang J. (2007) Automorphisms of certain nilpotent Lie algebras over commutative rings. *International Journal of Algebra and Computation*. 17(3). pp. 527–555.
3. Levchuk V.M. (1990) Automorphisms of unipotent subgroups of Chevalley groups. *Algebra and Logic*. 29. pp. 211–224. DOI: 10.1007/BF01979936.
4. Litavrin A.V. (2015) Avtomorfizmy nil'potentnoy podalgebry $N\Phi(K)$ algebry Shevalle simplekticheskogo tipa [Automorphisms of the nilpotent subalgebra $N\Phi(K)$ of the Chevalley algebra of symplectic type]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika – The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*. 13(3). pp. 41–55.
5. Levchuk V.M., Litavrin A.V. (2016) Gipercentral'nye avtomorfizmy nil'treugol'nyh podalgebr algebr Shevalle [Hypercentral automorphisms of nil-triangular subalgebras in Chevalley algebras]. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 13. pp. 467–477. URL: <http://semr.math.nsc.ru/v13/p467-477.pdf>.
6. Litavrin A.V. (2017) Avtomorfizmy nil'treugol'nykh podkolets algebr Shevalle klassicheskikh tipov [Automorphisms of nil-triangular subrings of Chevalley algebras of classic types]. Dissertation. Siberian Federal University.
7. Kazakova A.V. (2022) Avtomorfizmy nil'treugol'nogo podkol'tsa algebry Shevalle tipa G_2 [Automorphisms of the nil-triangular subring of the Chevalley algebra of type G_2]. *Collection of papers of the All-Russia Young Researchers' Scientific Conference "All Faces of Mathematics," Tomsk, 2022. Tomsk: Krasnoye Znamya*. p. 28.
8. Carter R. (1972) *Simple Groups of Lie Type*. New York: Wiley and Sons.
9. Kazakova A.V., Kirillova E.A. (2020) Avtomorfizmy i central'nyye ryady nil'treugol'nyh podkolets algebr Shevalle [Automorphisms and central series of niltriangular subrings of Chevalley algebras]. *Collection of Abstracts of the International Conference "Mal'tsev Meeting," Novosibirsk, 2020. Novosibirsk: Novosibirsk State University*. p. 191.
10. Gibbs J.A. (1970) Automorphisms of certain unipotent groups. *Journal of Algebra*. 14(2). pp. 203–228. DOI: 10.1006/jabr.2001.886.
11. Levchuk V.M., Litavrin A.V. (2016) Avtomorfizmy nil'treugol'nykh podkolets algebr Shevalle ortogonal'nykh tipov [Automorphisms of nil-triangular subrings of Chevalley algebras of orthogonal types]. *Vestnik sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta imeni Akademika M.F. Reshetneva – Siberian Aerospace Journal*. 17(2). pp. 324–327.
12. Kuzucuoglu F., Levchuk V.M. (2001) The automorphism group of certain radical rings. *Journal of Algebra*. 243. pp. 473–485. DOI: 10.1006/jabr.2001.886.

Сведения об авторе:

Казакова Алёна Викторовна – аспирант Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, Красноярск, Россия. E-mail: alvkazakova@gmail.com

Information about the author:

Kazakova Alyona V. (Postgraduate Student at the Institute of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: alvkazakova@gmail.com

Статья поступила в редакцию 26.01.2024; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 26.01.2024; accepted for publication 10.04.2024

Научная статья

УДК 515.122

MSC: 54C25, 54C30, 54D20, 54F65

doi: 10.17223/19988621/88/4

Некоторые свойства топологических ежей

Даниил Юрьевич Ляховец¹, Александр Владимирович Осипов²

^{1, 2} *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН,
Екатеринбург, Россия*

² *Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*

¹ *zoj01111@gmail.com*

² *oab@list.ru*

Аннотация. Рассматриваются топологические пространства «евклидовы ежи», представляющие собой подпространства евклидовых пространств \mathbf{R}^n , обладающие следующим свойством: вместе с каждой своей точкой они содержат весь отрезок, соединяющий данную точку с точкой начала координат.

Доказано, что для каждого $n \geq 2$ существует $2^{2^{\aleph_0}}$ попарно негомеоморфных евклидовых ежей в \mathbf{R}^n . Также доказано, что для каждого счетного евклидова ежа существует гомеоморфный ему плоский ёж.

Также рассматривается два топологических пространства: квазиметрический ёж и фактор-ёж, у которых находятся следующие кардинальные и наследственные инварианты: вес, характер, плотность, спред, экстенс, клеточность, теснота, число открытых множеств и число Линделёфа.

Наконец, рассматриваются секвенциальные ежи, которые топологически вкладываются в функциональные пространства. Приводятся критерии топологического вложения секвенциальных ежей в пространство непрерывных функций и в пространство бэровских функций.

Ключевые слова: евклидовый ёж, кардинальные инварианты, квазиметрика, фактор-топология, прямая Зоргенфрея, метрический ёж, секвенциальный ёж, пространство непрерывных функций, пространство бэровских функций, топологическое вложение

Для цитирования: Ляховец Д.Ю., Осипов А.В. Некоторые свойства топологических ежей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 37–52. doi: 10.17223/19988621/88/4

Original article

Some properties of topological hedgehogs

Daniil Yu. Lyakhovets¹, Alexander V. Osipov²

^{1, 2} *N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch
of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

² *Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation*

Abstract. The topological spaces called Euclidean hedgehogs are considered. These are subspaces of the Euclidean spaces \mathbf{R}^n with the following property: together with each of their points, they contain the entire segment connecting the given point with the point of origin. It is proved that for all $n \geq 2$ there exist pairwise non-homeomorphic Euclidean hedgehogs in \mathbf{R}^n . It is also proved that for every countable Euclidean hedgehog there exists a flat hedgehog homeomorphic to it.

We also consider two topological spaces: the quasimetric hedgehog and the quotient hedgehog, which have the following cardinal and hereditary invariants: weight, character, density, spread, extent, cellularity, tightness, number of open sets, and Lindelöf number. Finally, sequential hedgehogs are considered that are topologically embedded in function spaces. Criteria are given for the topological embedding of sequential hedgehogs in the space of continuous functions and in the space of Baire functions.

Keywords: Euclidean hedgehog, cardinal invariants, quasi-metric, factor topology, Sorgenfrey line, metric hedgehog, sequential hedgehog, space of continuous functions, space of Baire functions, topological embedding

For citation: Lyakhovets, D.Yu., Osipov, A.V. (2024) Some properties of topological hedgehogs. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 37–52. doi: 10.17223/19988621/88/4

1. Евклидовы ежи

Будем называть множество $J \subseteq \mathbf{R}^n$ ежом в \mathbf{R}^n , если для каждой точки $x \in J$ отрезок $[0_n, x]$ содержится в J , где $0_n := (0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$. 0_n будем называть *центральной точкой* и обозначать $o(J)$. Пространство $\langle J, \tau_e \rangle$ с топологией τ_e , наследуемой из евклидова пространства \mathbf{R}^n , будем называть *евклидовым ежом в \mathbf{R}^n* .

Евклидовый ёж в \mathbf{R}^2 будем называть *плоским ежом*.

Множество $A \subseteq J$ называется *иглой ежа J* , если существует точка $x \in J \setminus \{o(J)\}$ такая, что открытый луч с началом в $o(J)$, проходящий через точку x , в пересечении с ежом J дает множество A . Иголку ежа J , проходящую через точку x , будем обозначать $N(x, J)$.

Точку $x \in J$ будем называть *концевой точкой ежа J* , если полуинтервал $(o(J), x]$ является иглой ежа J . Множество всех концевых точек ежа J будем обозначать через $K(J)$.

Концевую точку иглы $N(x, J)$ будем обозначать $k(x, J)$. Точка $x \in J$ *промежуточная*, если x не концевая и не центральная. Множество всех промежуточных точек ежа J будем обозначать $I(J)$. Ёж *считен*, если множество его иглол не более чем счетно. Будем называть ежа *единичным*, если длины всех его иглол равны 1. Ёж *нетривиальный*, если количество его иглол более двух. Ёж *замкнут*, если все его иглолки замкнуты.

Определения, обозначения и терминология взяты из [1–3].

Теорема 1.1. Для каждого $n \geq 2$ существует $2^{2^{n_0}}$ попарно негомеоморфных евклидовых ежей в \mathbf{R}^n .

Доказательство. Покажем, что для любого ежа ежей, гомеоморфных ему, не более, чем $2^{2^{\aleph_0}}$. В самом деле, еж – это подпространство в \mathbf{R}^n , следовательно, в нем существует счетное плотное множество A , и достаточно посмотреть, куда при гомеоморфизме может перейти множество A . При гомеоморфизме плотное множество переходит в плотное множество. У каждой из счетного числа точек множества A всего 2^{\aleph_0} возможных образов, а значит, и всего гомеоморфных ежей $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Теперь заметим, что уже хотя бы единичных ежей столько же, сколько подмножеств S^1 , а их $2^{2^{\aleph_0}}$, так как еж определяется множеством конечных точек. Ежи, гомеоморфные друг другу, делятся на классы, в каждом классе не более чем 2^{\aleph_0} , а всего ежей 2^{\aleph_0} , поэтому классов должно быть $2^{2^{\aleph_0}}$ (о/п пусть различных классов $\tau < 2^{2^{\aleph_0}}$, тогда всего ежей $\leq \tau \cdot 2^{\aleph_0} = \max(\tau, 2^{\aleph_0}) < 2^{2^{\aleph_0}}$ – противоречие). □

Лемма 1.1. Пусть J_1, J_2 – счётные замкнутые нетривиальные евклидовы ежи, и $f : J_1 \rightarrow J_2$ – гомеоморфизм. Тогда

- 1) $f(o(J_1)) = o(J_2)$;
- 2) $f(K(J_1)) = K(J_2)$;
- 3) $f(I(J_1)) = I(J_2)$.

Доказательство. 1) Предположим противное. Пусть центральная точка ежа J_1 не перешла в центральную точку ежа J_2 , значит она перешла в промежуточную или конечную точку. Тогда, если удалить ее образ из ежа J_2 , компонент линейной связности в еже J_2 станет не более двух, но прообраз образа центральной точки – это центральная точка, а значит, при ее удалении компонент линейной связности будет не менее трех – противоречие с тем, что f гомеоморфизм. Пункты 2), 3) доказываются аналогично: при удалении конечной точки, количество компонент линейной связности не меняется; при удалении промежуточной их становится две. □

Лемма 1.2. Пусть J_1, J_2 – счётные замкнутые, нетривиальные единичные ежи. Следующие условия эквивалентны:

- 1) J_1 и J_2 гомеоморфны;
- 2) $K(J_1)$ и $K(J_2)$ гомеоморфны.

Доказательство. Импликация 1) \Rightarrow 2) – прямое следствие леммы 1.1.

Докажем 2) \Rightarrow 1). Пусть f – гомеоморфизм между $K(J_1)$ и $K(J_2)$; продолжим отображение f на $N(x, J_1)$ до гомеоморфизма \bar{f} между J_1 и J_2 . Рассмотрим $x \in K(J_1)$, в точке $t \in N(x, J_1)$ определим \bar{f} равенством $\bar{f}(t) := \|t\| \cdot f(x)$. Положим $\bar{f}(o(J_1)) := o(J_2)$. Построенное продолжение изометрично отображает иглоку $N(x, J_1)$ на иглоку $N(f(x), J_1)$, кроме того, для любой точки $t \in J_1$ имеет место равенство $\|\bar{f}(t)\| = \|t\|$.

Покажем, что \bar{f} – гомеоморфизм. Пусть $x \in J_1$ – предел последовательности точек $x_m \in J_1$. Если $x = o(J_1)$, то $\|x\| = 0$ и $\|x_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, а значит, $\bar{f}(x_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} o(J_2)$.

Пусть $x \neq o(J_1)$. Рассмотрим случай, когда все элементы последовательности x_m лежат на одной иголке, тогда это иголка $N(x, J_1)$, и последовательность $\bar{f}(x_m)$ сходится к $\bar{f}(x)$. Рассмотрим случай, когда $x_m \notin N(x, J_1)$. Так как $x \neq o(J_1)$, то $\|x\| > 0$, и без ограничения общности можно считать, что $\|x_m\| > 0$. Расстояние между концами $k(x)$ и $k(x_m)$ иголок $N(x, J_1)$ и $N(x_m, J_1)$ может быть выражено через расстояние между точками x_m и x с помощью геометрических соображений. Обозначим через α_m угол между иголками $N(x, J_1)$ и $N(x_m, J_1)$. Применив теорему косинусов, получим

$$\|x - x_m\|^2 = \|x\|^2 + \|x_m\|^2 - 2 \cdot \|x\| \cdot \|x_m\| \cdot \cos \alpha_m \text{ и } \|k(x) - k(x_m)\|^2 = 2 - 2 \cdot \cos \alpha_m.$$

Выразим $\cos \alpha_m$ из первого равенства, подставим во второе и получим

$$\|k(x) - k(x_m)\|^2 = 2 - 2 \cdot \frac{\|x\|^2 + \|x_m\|^2 - \|x - x_m\|^2}{2 \cdot \|x\| \cdot \|x_m\|}.$$

Легко видеть, что $\frac{\|x\|^2 + \|x_m\|^2 - \|x - x_m\|^2}{2 \cdot \|x\| \cdot \|x_m\|} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$, следовательно, последователь-

ность $k(x_m)$ сходится к $k(x)$. Тогда последовательность образов $f(k(x_m))$ сходится к образу $f(k(x))$, ведь f – гомеоморфизм (т.е. $\|f(k(x)) - f(k(x_m))\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$). Применив геометрические рассуждения, получим равенство

$$\|\bar{f}(x) - \bar{f}(x_m)\|^2 = \|\bar{f}(x)\|^2 + \|\bar{f}(x_m)\|^2 - \|\bar{f}(x)\| \cdot \|\bar{f}(x_m)\| \cdot \left(2 - \|f(k(x)) - f(k(x_m))\|^2\right),$$

из которого следует сходимость последовательности $\bar{f}(x_m)$ к $\bar{f}(x)$.

Любая сходящаяся к $x \neq o(J_1)$ последовательность элементов J_1 либо является последовательностью одного из двух рассмотренных выше типов (начиная с некоторого номера), либо может быть разбита на две такие подпоследовательности. Следовательно, переходит в сходящуюся последовательность.

Итак, мы доказали, что отображение \bar{f} переводит сходящуюся последовательность в сходящуюся последовательность, следовательно, непрерывно. Непрерывность обратного отображения может быть доказана аналогично. □

Теорема 1.2. Для каждого счетного евклидова ежа существует гомеоморфный ему плоский ёж.

Доказательство. Покажем сначала, что для ежа $J_n \subseteq \mathbf{R}^n$ можно построить гомеоморфный ему ёж $J_n^1 \subseteq \mathbf{R}^n$ такой, что J_n^1 содержится в единичном еже. Рассмотрим гомеоморфизм $\pi: [0, +\infty) \rightarrow [0, 1)$ и построим гомеоморфизм φ пространства \mathbf{R}^n на открытый единичный шар с центром в нуле, положив $\varphi(0_n) := 0_n$ и $\varphi(x) := \pi(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|}$, если x отлично от 0_n .

Положим $J_n^1 := \varphi(J_n)$. Удлиним все иголки ежа J_n^1 до единичной длины и добавим все концевые точки. Получим замкнутый единичный ёж со счетным числом иголок, который содержит J_n^1 , назовем его J_n^2 . Рассмотрим $K(J_n^2)$ – множество концевых точек ежа J_n^2 .

Известно (см., напр.: [2]), что для любого счётного метризуемого топологического пространства X существует подмножество рациональных чисел $Y \subseteq \mathbb{Q}$ такое, что X гомеоморфно Y . Пусть $Y \subseteq \mathbb{Q}$ такое, что $K(J_n^2) \cong Y$. Теперь отметим на окружности единичного радиуса множество, гомеоморфное Y . Это множество (назовем его Z) будет множеством концевых точек единичного ежа в плоскости. Так как $Z \cong Y$, а $K(J_n^2) \cong Y$, то по лемме 2 ёж с концевыми точками из Z гомеоморфен ежу J_n^2 . Но тогда сужение этого гомеоморфизма на подпространство J_n^1 – это гомеоморфизм на подпространство ежа с концевыми точками из Z , а значит, полученный ёж гомеоморфен ежу J_n^1 . \square

2. Ежи Зоргенфрея

Прямая Зоргенфрея (S) – это вещественная прямая \mathbf{R} в топологии, порожденной семейством полуинтервалов $\{[a, b) : a, b \in \mathbf{R}, a < b\}$.

Для следующих определений полезно отметить, что прямая Зоргенфрея гомеоморфна полуинтервалу $[0, 1) \subseteq S$ с топологией, наследуемой из прямой Зоргенфрея. Также полезно отметить, что топология на полуинтервале $[0, 1)$ как подпространстве прямой Зоргенфрея совпадает с топологией, порожденной следующей квазиметрикой:

$$\rho_S(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть κ – кардинал.

Множество J_κ , называемое ёжом колючести κ , определим следующим образом:

$$J_\kappa := \{\langle x, \alpha \rangle : x \in (0, 1), \alpha \in \kappa\} \cup \{\bar{0}\}$$

Если $\alpha \in \kappa$, то будем называть множество $I_\alpha := \{\langle x, \alpha \rangle : x \in (0, 1)\} \cup \{\bar{0}\}$ иголкой ежа J_κ .

Множество J_κ можно представить как κ полуинтервалов (иголок I_α), склеенных по точке $\bar{0}$. Если на каждом из этих полуинтервалов I_α рассмотреть топологию, порожденную прямой Зоргенфрея (при этом каждая иголка I_α ежа J_κ будет гомеоморфна прямой Зоргенфрея), то на множестве J_κ возникает две естественных топологии:

- Фактор-топология $\tau_{f,\kappa}$, т.е. стандартная топология, определяемая операцией склейки топологических пространств (в данном случае κ штук полуинтервалов $[0, 1)$ в топологии Зоргенфрея по точке $\bar{0}$). Из определения фактор-топологии несложно вывести следующую формулу:

$$\tau_{f,\kappa} = \left\{ U \subseteq J_\kappa : \forall \alpha \in \kappa : \text{множество } \{x \in [0, 1) : \langle x, \alpha \rangle \in U \vee (x = 0 \wedge \bar{0} \in U)\} \text{ открыто в } S \right\}.$$

- Топология $\tau_{\rho,\kappa}$, порожденная квазиметрикой ρ_κ на множестве J_κ (аналогичной квазиметрике ρ_S), т.е. топология, порожденная семейством шаров

$$B := \{ B_{\rho_\kappa}(x, \varepsilon) : x \in J_\kappa, \varepsilon \in \mathbf{R}^+ \},$$

где

$$\rho_\kappa(\bar{0}, \bar{0}) := 0;$$

$$\begin{aligned} \rho_\kappa(\bar{0}, \langle y, \beta \rangle) &:= y, \text{ при } y \in (0, 1) \text{ и } \beta \in \kappa; \\ \rho_\kappa(\langle x, \alpha \rangle, \bar{0}) &:= x, \text{ при } x \in (0, 1) \text{ и } \alpha \in \kappa; \\ \rho_\kappa(\langle x, \alpha \rangle, \langle y, \beta \rangle) &:= \begin{cases} y - x, & \text{если } \alpha = \beta \wedge y \geq x \text{ при } x, y \in (0, 1) \text{ и } \alpha, \beta \in \kappa; \\ 1, & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

шар с центром в точке a радиуса ε : $B_{\rho_\kappa}(a, \varepsilon) := \{b \in J_\kappa : \rho_\kappa(a, b) < \varepsilon\}$.

Таким образом, мы будем рассматривать два топологических пространства:

- фактор-ёж $(J_\kappa, \tau_{f,\kappa})$ (будем обозначать FJ_κ);
- квазиметрический ёж $(J_\kappa, \tau_{p,\kappa})$ (будем обозначать QJ_κ).

Заметим, что в обоих пространствах каждая иголка $I_\alpha \in J_\kappa$ (как подпространство) гомеоморфна прямой Зоргенфрея S . Кроме того, отметим, что пространства FJ_κ и QJ_κ различны и даже негомеоморфны за исключением случая, когда κ конечно.

Далее будут рассмотрены следующие кардинальные инварианты пространств $(J_\kappa, \tau_{f,\kappa})$ и $(J_\kappa, \tau_{p,\kappa})$: характер $(\chi(X))$, вес $(w(X))$, количество открытых множеств $(o(X))$, плотность $(d(X))$, спред $(s(X))$, число Линделёфа $(L(X))$, экстен $(e(X))$, клеточность (или число Суслина) $(c(X))$, теснота $(t(X))$ и сетевой вес $(nw(X))$. Затем будут найдены их наследственные кардинальные инварианты. Все кардинальные инварианты будут найдены для двух случаев: Когда иголок ω ; когда их κ , где $\kappa \geq \omega$.

Определения кардинальных инвариантов пространства X , рассматриваемых в работе:

- Вес $\omega(X) := \min\{|B| : B\text{-база в } X\} + \omega$.
- Характер $\chi(X) := \sup\{\chi(p, X) : p \in X\}$, где $\chi(p, X) := \min\{|V| : V\text{-база пространства } X \text{ в точке } p\} + \omega$.
- Количество открытых множеств $o(X) := |\tau|$.
- Плотность $d(X) := \min\{|S| : S \subseteq X, \bar{S} = X\} + \omega$.
- Спред $s(X) := \sup\{|D| : D\text{-дискретное подпространство } X\} + \omega$.
- Число Линделёфа $L(X) := \min\{\kappa : \forall \text{ открытое покрытие } \gamma \text{ пространства } X \text{ содержит подпокрытие } \mu \subseteq \gamma, \text{ т.ч. } |\mu| \leq \kappa\} + \omega$.

- Экстен $e(X) := \sup\{|D| : D\text{-замкнутое дискретное подпространство в } X\} + \omega$.
- Клеточность (или число Суслина) пространства X :

$$c(X) := \sup\{|\gamma| : \gamma \subseteq \tau \text{ и } \gamma \text{ дизъюнктно}\} + \omega$$
.

- Теснота $t(X) := \sup\{t(p, X)\} : p \in X$, где

$$t(p, X) := \min\{\kappa : \forall Y \subseteq X [p \in \bar{Y} \rightarrow \exists A \subseteq Y (|A| \leq \kappa \wedge p \in \bar{A})]\} + \omega.$$

- Сетевой вес пространства X , $nw(X) := \min\{|\gamma| : \gamma\text{-сеть в } X\} + \omega$. (Напомним, что семейство $\gamma \subseteq P(X)$ называется сетью пространства X , если $\tau \subseteq \{\bigcup \mu : \mu \subseteq \gamma\}$.)

Если κ – кардинальный инвариант, то наследственный кардинальный инвариант $h\kappa$, порожденный кардинальным инвариантом κ , определяется следующим образом: $h\kappa(X) := \sup\{\kappa(Y) : Y \in X\}$.

Замечание: $|J_\kappa| = \max\{\kappa, \mathfrak{c}\}$, где \mathfrak{c} – континуум.

Утверждение 2.1. $\chi(QJ_\omega) = \chi(QJ_\kappa) = \omega$.

Доказательство. В силу того, что топология пространства QJ_κ порождена псевдометрикой, семейство шаров радиуса $1/n$ с центром в точке p является базой в точке p , а значит, характер равен ω . \square

Утверждение 2.2. 1. $\omega_1 \leq \chi(FJ_\omega) \leq c$.

2. $\kappa^+ \leq \chi(FJ_\kappa) \leq 2^\kappa$.

Доказательство. 1. Возьмем произвольную точку на иголке, заметим, что она принадлежит прямой Зоргенфрея, а значит, характер в ней равен ω . (Достаточно просто рассмотреть систему полуинтервалов длины $1/n$ с началом в этой точке, которые будут являться базой в этой точке.)

Покажем, что в точке $\bar{0}$ нет счетной базы и построим континуальную базу.

От противного, пусть $\gamma = \{\gamma_n : n \in \omega\}$ – счетная база в точке $\bar{0}$. Построим открытое множество O_γ в FJ_κ , которое не содержит ни один элемент базы γ . Рассмотрим множество $\gamma_n \cap I_n$, при $n \in N$. Данное множество содержит некоторый полуинтервал $\{\bar{0}\} \cup (0, k_n)$. Пусть $O_\gamma := \{\bar{0}\} \cup \bigcup \left\{ \left(0, \frac{k_n}{2}\right) : n \in N \right\}$. Несложно заметить, что O_γ – открытая окрестность точки $\bar{0}$, не содержащая ни один элемент из базы γ , а значит, в точке $\bar{0}$ нет счетной базы.

Осталось показать, что существует база мощности c . Пусть $n = \langle n_k \rangle_{k \in \omega} \in N^N$.

Тогда положим $V_n := \{\bar{0}\} \cup \bigcup \left\{ \left(0, \frac{1}{n_k}\right) \times \{k\} : k \in N \right\}$, несложно заметить, что семейство V_n для всех N^N является базой в точке $\bar{0}$. При этом мощность этой базы равна $\omega^\omega = 2^\omega = c$.

Замечание: получена наилучшая оценка, так как существуют теоретико-множественные модели (например, модели в которых выполняется обобщенная континуум гипотеза), где оба равенства достижимы.

2. Доказательство аналогично предыдущему. \square

Утверждение 2.3. 1. $nw(QJ_\omega) = w(QJ_\omega) = c$.

2. $nw(QJ_\kappa) = w(QJ_\kappa) = \max(c, \kappa)$.

Доказательство. 1. Известно, что вес и сетевой вес прямой Зоргенфрея континуален (см.: [2]). Таким образом, в силу монотонности сетевого веса $c = nw(S) \leq nw(QJ_\omega)$. Кроме того, существует счетная база в нуле (утв. 1), а значит, существует база состоящая из $c \cdot \omega + \omega = c$, следовательно, $w(QJ_\omega) \leq c$. Из того, что $nw(X) \leq w(X)$ следует, что $c \leq nw(QJ_\omega) \leq w(QJ_\omega) \leq c$. Второй пункт доказывается так же, как первый. \square

Утверждение 2.4. 1. $w(FJ_\omega) = c$.

2. $\max(\kappa^+, c) \leq w(FJ_\kappa) \leq \max(2^\kappa, c)$.

Доказательство. 1. Вес и сетевой вес прямой Зоргенфрея континуален, значит в силу монотонности веса $nw(FJ_\omega) \geq c$. Континуальную базу можно построить, взяв с каждой иголки базу прямой Зоргенфрея и в точке ноль континуальную базу, построенную ранее.

2. $\kappa^+ \leq \chi(FJ_\kappa) \leq 2^\kappa$ (утв. 2.2), кроме того, вес прямой Зоргенфрея континуален, значит в силу монотонности веса и неравенства $\chi(X) \leq w(X)$ получается нижняя оценка: $\max(\kappa^+, c) \leq w(FJ_\kappa)$. По построению в утверждении 2.2 характер в нуле не больше 2^κ , а характер в других точках счётен. Таким образом, $w(FJ_\kappa) \leq \max(2^\kappa, \kappa, c) = \max(2^\kappa, c)$. \square

Утверждение 2.5. $nw(FJ_\kappa) = \max(\kappa, c)$.

Доказательство. Как и ранее, $nw(FJ_\kappa) \geq c$, кроме того, $nw(X) \geq c(X)$, следовательно, $nw(FJ_\kappa) \geq \kappa$, так как $nw(X) \leq |X|$, следовательно, $nw(FJ_\kappa) = \max(\kappa, c)$. \square

Утверждение 2.6. 1. $d(FJ_\omega) = d(QJ_\omega) = \omega$.

2. $d(FJ_\kappa) = d(QJ_\kappa) = \kappa$.

Доказательство. 1. Если рассмотреть точки с рациональными координатами на каждой иголке и взять объединение всех этих точек, то полученное множество будет плотным. В силу того, что иголок ω , то точек будет в объединении $\omega \cdot \omega = \omega$.

2. Заметим, что мощность любого плотного подмножества пространства FJ_κ (и QJ_κ) не меньше κ , так как оно пересекается с каждой иголкой. Построение плотного подмножества мощности κ такое же, как при доказательстве пункта 1. \square

Утверждение 2.7. 1. $L(QJ_\omega) = L(FJ_\omega) = \omega$.

2. $L(QJ_\kappa) = L(FJ_\kappa) = \kappa$.

Доказательство. 1. Пусть γ – открытое покрытие рассматриваемого пространства. В силу того, что $L(S) = \omega$ (см.: [2]), из покрытия $\{U \cap I_n : U \in \gamma\}$ иголки I_n , где $n \in \omega$, можно выделить счетное подпокрытие μ_n , где для каждого μ_n существует $\gamma_n \subseteq \gamma$, такое что для любого $U \in \mu_n$ существует $V \in \gamma_n : U \subseteq V$. Тогда объединение γ_n по всем $n \in \omega$ и элемента покрытия γ , содержащего ноль, – это подпокрытие рассматриваемого пространства покрытия γ , мощность которого ω .

2. Аналогично пункту 1. Только для оценки снизу нужно заметить, что если взять в качестве покрытия окрестность нуля радиуса $1/2$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \times \{\alpha\}$ по всем $\alpha \in \kappa$, то в этом покрытии κ элементов, и подпокрытия меньшей мощности в нем не получить. \square

Утверждение 2.8. 1. $c(QJ_\omega) = c(FJ_\omega) = \omega$.

2. $c(QJ_\kappa) = c(FJ_\kappa) = \kappa$.

Доказательство. 1. В силу того, что $c(X) \leq d(X)$ (см.: [2]),

$$c(QJ_\omega) \leq d(QJ_\omega) = \omega \text{ утв.2.6.} \Rightarrow c(QJ_\omega) = \omega,$$

также

$$c(FJ_\omega) \leq d(FJ_\omega) = \omega \text{ утв.2.6} \Rightarrow c(FJ_\omega) = \omega.$$

2. Поскольку можно взять по интервалу на каждой иголке, то $\kappa \leq c(QJ_\kappa)$, $\kappa \leq c(FJ_\kappa)$, а значит

$$\kappa \leq c(QJ_\kappa) \leq d(QJ_\kappa) = \kappa \text{ утв.2.6} \Rightarrow c(QJ_\kappa) = \kappa,$$

$$\kappa \leq c(FJ_\kappa) \leq d(FJ_\kappa) = \kappa \text{ утв.2.6} \Rightarrow c(FJ_\kappa) = \kappa. \square$$

Утверждение 2.9. $s(FJ_\omega) = s(QJ_\omega) = \omega$; $s(FJ_\kappa) = s(QJ_\kappa) = \kappa$.

Доказательство. Известно, что $c(X) \leq s(X) \leq hL(X)$ (см.: [2]), значит

$$\omega = c(QJ_\omega) \leq s(QJ_\omega) \leq hL(QJ_\omega) = \omega \text{ (утв. 2.8, утв. 2.12);}$$

$$\omega = c(FJ_\omega) \leq s(FJ_\omega) \leq hL(FJ_\omega) = \omega;$$

$$\kappa = c(QJ_\kappa) \leq s(QJ_\kappa) \leq hL(QJ_\kappa) = \kappa \text{ (утв. 2.8, утв. 2.12);}$$

$$\kappa = c(FJ_\kappa) \leq s(FJ_\kappa) \leq hL(FJ_\kappa) = \kappa \text{ .}\square$$

Отметим, что, ссылаясь на утв. 1.12, мы не получаем логического круга.

Утверждение 2.10. $e(FJ_\omega) = e(QJ_\omega) = \omega$; $e(FJ_\kappa) = e(QJ_\kappa) = \kappa$.

Доказательство. Заметим, что экстенс не меньше числа иголок (так как можно взять по одной точке из каждой иголки и получить замкнутый дискрет). Кроме того, верно неравенство: $e(X) \leq L(X)$ (см.: [2]), значит $\omega = e(QJ_\omega) \leq L(QJ_\omega) = \omega$; $\omega = e(FJ_\omega) \leq L(FJ_\omega) = \omega$; $\kappa = e(QJ_\kappa) \leq L(QJ_\kappa) = \kappa$; $\kappa = e(FJ_\kappa) \leq L(FJ_\kappa) = \kappa$. \square

Утверждение 2.11. 1. $o(FJ_\omega) = o(QJ_\omega) = c$.

2. $o(FJ_\omega) = o(QJ_\omega) = c^\kappa$.

Доказательство. 1. Доказательство проведем в два этапа: покажем, что число открытых множеств не больше континуума; покажем, что число открытых множеств не меньше континуума.

• Известно, что $o(X) \leq |X|^{hd(X)}$ (см.: [2]), а значит $o(FJ_\omega) \leq |FJ_\omega|^\omega = c$, $o(QJ_\omega) \leq |QJ_\omega|^\omega = c$ (утв. 2.13).

• $w(X) \leq o(X)$, следовательно, $c \leq w(QJ_\omega) \leq o(QJ_\omega)$, $c \leq w(FJ_\omega) \leq o(FJ_\omega)$.

Итак, $o(FJ_\omega) = o(QJ_\omega) = c$.

2. Доказательство аналогично пункту 1., только нижняя оценка получается из того, что на каждой иголке можно взять c различных открытых множеств. \square

Приступим к изучению наследственных кардинальных инвариантов ежей Зоргенфрея.

Несложно показать, что вес, спред и характер являются наследственными кардинальными инвариантами. Кроме того известно, что $hc(X) = he(X) = s(X)$ (см.: [2]). Значит, значения $hw(X)$, $h\chi(X)$, $hs(X)$, $hc(X)$, $he(X)$ нами уже найдены.

Перейдем к менее тривиальным вопросам.

Утверждение 2.12. 1. $hL(QJ_\omega) = hL(FJ_\omega) = \omega$.

2. $hL(QJ_\kappa) = hL(FJ_\kappa) = \kappa$.

Доказательство. 1. Известно, что для прямой Зоргенфрея $hL(S) = \omega$ (см.: [2]). Возьмем произвольное подпространство $Y \subseteq QJ_\omega (Y \subseteq FJ_\omega)$. Пусть γ – открытое покрытие подпространства Y . Рассмотрим $Y_n = I_n \cap Y$ по всем $n \in \omega$, определим $\gamma_n := \{U \cap Y_n : U \in \gamma\}$. Заметим, что γ_n является открытым покрытием подпространства Y_n . В силу того, что Y_n гомеоморфно подпространству S , из покрытия γ_n подпространства Y_n можно выделить счетное подпокрытие μ_n . Рассмотрим $\mu := \bigcup \{\mu_n : n \in \omega\}$ и элемент покрытия γ , содержащего ноль. Для каждого $U \in \mu$ существует $V(U) \in \gamma$, в том числе $U \subseteq V(U)$. Тогда $\gamma' := \{V(U) : U \in \mu\} \subseteq \gamma$ является покрытием подпространства $Y := \bigcup \{Y_n : n \in \omega\}$, и при этом $|\gamma'| : \omega \cdot \sup \{|\mu_n| : n \in \omega\} = \omega$. Второй пункт доказывается аналогично первому. \square

Утверждение 2.13. 1. $hd(QJ_\omega) = hd(FJ_\omega) = \omega$.

2. $hd(QJ_\kappa) = hd(FJ_\kappa) = \kappa$.

Доказательство. 1. Известно, что $hd(S) = \omega$ (см.: [2]). Возьмем произвольное подпространство $Y \subseteq QJ_\omega (Y \subseteq FJ_\omega)$. Рассмотрим $Y_n = I_n \cap Y$ по всем $n \in \omega$. В силу того, что Y_n гомеоморфно подпространству S , плотное множество P_n в Y_n

содержит не более ω точек. В силу того, что $Y = \bigcup \{Y_n : n \in \omega\}$, множество $P := \bigcup \{P_n : n \in \omega\}$ – плотное множество в Y . При этом $|P| \leq \omega$, а значит, $hd(QJ_\omega) = hd(FJ_\omega) = \omega$. Второй пункт доказывается аналогично первому заменой ω на κ . \square

Утверждение 2.14. $ht(FJ_\omega) = ht(FJ_\kappa) = \omega$.

Доказательство. Возьмем произвольное подпространство Y и произвольную точку $p \in \bar{Y}$. Есть два случая: $p \in Y$ и $p \notin Y$. Если $p \in Y$, в качестве $A \subseteq Y$ возьмем множество $\{p\}$.

Если $p \notin Y$, рассмотрим два случая.

Случай 1. $p \neq \bar{0}$. Тогда существует $\alpha \in \kappa$. Рассмотрим систему полуинтервалов $\left[x, \frac{1}{n} \right) \times \{\alpha\}$. В силу того, что $p \in \bar{Y}$, для каждого $n \in \omega$ существует $p_n \in Y : p_n \in \left[x, \frac{1}{n} \right) \times \{\alpha\}$. Тогда в качестве подмножества Y возьмем $A := \{p_n : n \in \omega\}$, $|A| = \omega$.

Случай 2. $p = \bar{0}$. Покажем, что существует $\alpha \in \kappa$, что для всех $n \in \omega$ существует $p_n \in Y : p_n \in \left\{ \bar{0} \right\} \cup \left(0, \frac{1}{n} \right) \times \{\alpha\}$. От противного, пусть для всех $\alpha \in \kappa$ существует $n \in \omega$ такое, что для любого $p_n \in Y : p_n \notin \left\{ \bar{0} \right\} \cup \left(0, \frac{1}{n} \right) \times \{\alpha\}$. Выделим для каждого α такое n и заметим, что мы построили окрестность точки $\bar{0}$, которая не пересекается с Y , а значит, $\bar{0} \notin Y$ – противоречие. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему случаю. \square

Утверждение 2.15. $ht(QJ_\omega) = ht(QJ_\kappa) = \omega$.

Доказательство. Возьмем произвольное подпространство Y . Заметим, что это подпространство будет квазиметрическим, так же как и исходное (достаточно просто рассмотреть следы открытых шаров в данном подпространстве). Из того, что квазиметрические пространства имеют счетный характер, и $t(X) \leq \chi(X)$ следует, что $ht(QJ_\omega) = ht(QJ_\kappa) = \omega$. \square

Очевидным следствием является, что $t(FJ_\omega) = t(QJ_\omega) = t(FJ_\kappa) = t(QJ_\kappa) = \omega$.

Полученные результаты приведены в таблице.

Оценки кардинальных функций

Кардинальные функции	QJ_ω	FJ_ω	QJ_κ	FJ_κ
$ X = h X $	c	c	$\max(c, \kappa)$	$\max(c, \kappa)$
$w(X) = hw(X)$	c	c	$\max(c, \kappa)$	$\begin{cases} \geq \max(\kappa^+, c) \\ \leq \max(2^\kappa, c) \end{cases}$
$\chi(X) = h\chi(X)$	ω	$\geq \omega, \leq c$	ω	$\geq \kappa^+, \leq 2^\kappa$
$o(X) = ho(X)$	c	c	c^κ	c^κ
$L(X)$	ω	ω	κ	κ
$d(X)$	ω	ω	κ	κ
$c(X)$	ω	ω	κ	κ
$e(X)$	ω	ω	κ	κ

Окончание таблицы

Кардинальные функции	QJ_ω	FJ_ω	QJ_κ	FJ_κ
$s(X) = hc(X) =$ $= he(X) = hs(X)$	ω	ω	κ	κ
$t(X)$	ω	ω	ω	ω
$hL(X)$	ω	ω	κ	κ
$hd(X)$	ω	ω	κ	κ
$ht(X)$	ω	ω	ω	ω

3. Топологическое вложение ежей в функциональные пространства

Пространство X называется менгеровским [4], если для любой последовательности $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ открытых покрытий X найдутся конечные подсемейства $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$, такие, что $\bigcup \{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ является покрытием X . Пространство X называется пространством со счетной веерной теснотой [5], если для любой точки $x \in X$ и последовательности множеств $A_n \subset X$ таких, что $x \in \overline{A_n}$ ($n \in \mathbb{N}$), найдутся конечные множества $F_n \subset A_n$ такие, что $x \in \overline{\bigcup \{F_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Пусть $S_\omega = \{\infty\} \cup \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ – секвенциальный ёж колючести ω , в котором все точки вида (n, m) изолированы, и множества вида $N(\varphi) = \{\infty\} \cup \{(n, m) : n \in \mathbb{N}, m \geq \varphi(n)\}$ образуют базу открытых окрестностей точки ∞ , где $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Легко видеть, что S_ω не является пространством со счетной веерной теснотой.

А.В. Архангельский [5] доказал, что любая конечная степень X является менгеровским пространством тогда и только тогда, когда $C_p(X)$ имеет счетную веерную тесноту. Следовательно, если любая конечная степень X является менгеровским пространством, то S_ω не может быть вложено в $C_p(X)$. А.В. Архангельский поставил следующий естественный вопрос [б. проблема П.2.7]: может ли пространство S_ω быть топологически вложенным в $C_p(X)$ для некоторого менгеровского пространства X ?

М. Сакай в предположении континуум-гипотезы доказал, что существует множество Лузина X (а следовательно, и менгеровское) такое, что S_ω может быть вложено в $C_p(X)$ [7].

Обозначим через $C_p(X)$ пространство $C(X)$ непрерывных на тихоновском пространстве X вещественнозначных функций с топологией поточечной сходимости. Пусть $B_0(X) = C(X)$; на пространстве X , наделенном топологией поточечной сходимости, для каждого $\alpha \leq \omega_1$ индуктивно определяются классы Бэра $B_\alpha(X)$ как множества поточечных пределов последовательностей функций из объединения $\bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta(X)$.

Итак, $B(X) = \bigcup_{\beta < \omega_1} B_\beta(X)$ – это множество всех функций Бэра, определенных на тихоновском пространстве X , снабженном топологией поточечной сходимости.

Напомним, что подмножество пространства X , являющееся полным прообразом нуля для некоторой непрерывной на X вещественнозначной функции, называется нуль-множеством. Подмножество $O \subseteq X$ называется конуль-множеством (или функционально открытым) в X , если его дополнение $X \setminus O$ является нуль-множеством в X .

Семейство множеств Бэра пространства X – это наименьшее замкнутое относительно счетных объединений и пересечений семейство множеств, содержащее нуль-множества вещественнозначных непрерывных на X функций. Множества Бэра мультипликативного класса \mathcal{O} , обозначаемые $Z(X)$ – это нуль-множества непрерывных вещественнозначных функций. Множества аддитивного класса \mathcal{O} , обозначаемые $CZ(X)$ – это дополнения множеств из $Z(X)$.

Символ $\mathbf{0}$ будем использовать для обозначения постоянной, равной нулю функции. Открытая базисная окрестность точки $\mathbf{0}$ имеет вид $[F, (-\varepsilon, \varepsilon)] = \{f \in C(X) : f(F) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)\}$, где $F \in [X]^{<\infty}$ – семейство конечных подмножеств X , $\varepsilon > 0$.

Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} – семейства подмножеств бесконечного множества.

- $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ обозначает следующую гипотезу: для любой последовательности $(A_n : n \in \mathbb{N})$ элементов множества \mathcal{A} найдется последовательность $(B_n : n \in \mathbb{N})$ такая, что для всех n выполнены включения $B_n \in A_n$ и $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ – это элемент семейства \mathcal{B} .

- $S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ обозначает следующую гипотезу: для любой последовательности $(A_n : n \in \mathbb{N})$ элементов семейства \mathcal{A} найдется последовательность $(B_n : n \in \mathbb{N})$ конечных наборов множеств такая, что для всех n выполнены включения $B_n \subset A_n$ и $\bigcup \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ – это элемент семейства \mathcal{B} .

Покрытие \mathcal{U} пространства X называется:

- ω -покрытием, если X не принадлежит \mathcal{U} и любое конечное подмножество пространства X содержится в некотором элементе \mathcal{U} . Заметим, что если \mathcal{U} – ω -покрытие множества X , и $X \notin \mathcal{U}$, то любое конечное подмножество X лежит в бесконечном числе элементов покрытия \mathcal{U} ;

- γ -покрытием, если бесконечно и любая точка $x \in X$ принадлежит всем элементам \mathcal{U} за исключением конечного числа. Заметим, что любое γ -покрытие содержит счетное γ -покрытие;

- γ_F -сокращаемым покрытием, если оно является γ -покрытием, состоящим из конуль-множеств и найдется γ -покрытие $\{F(U) : U \in \mathcal{U}\}$, состоящее из нуль-множеств, такое что $F(U) \subset U$ для всех $U \in \mathcal{U}$.

Для топологического пространства X мы обозначим:

- \mathcal{O} – семейство всех открытых покрытий X ;
- Ω – семейство всех открытых ω -покрытий X ;
- Γ – семейство всех открытых γ -покрытий X ;
- Γ_F – семейство всех счетных γ_F -сокращаемых покрытий X ;
- \mathcal{B} – семейство всех счетных бэровских покрытий X ;
- \mathcal{B}_γ – семейство всех счетных бэровских γ -покрытий X ;
- \mathcal{B}_Ω – семейство всех счетных бэровских ω -покрытий X ;
- $S_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ называется свойством Ротбергера;
- $S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ называется свойством Менгера;
- $U_{fin}(\mathcal{O}, \Gamma)$ называется свойством Гуревича.

Пусть X – топологическое пространство, и $x \in X$. Говорят, что подмножество A пространства X сходится к x : $x = \lim A$, если A бесконечно, $x \notin A$, и для любой U окрестности точки x множество $A \setminus U$ конечно.

Обозначим:

- $\Omega_x = \{A \subseteq X : c\}$;
- $\Omega_x^\circ = \{A \subseteq X : |A| = \aleph_0 \text{ и } x \in \bar{A} \setminus A\}$;
- $\Gamma_x = \{A \subseteq X : x = \lim A\}$;
- $\Gamma_x^\circ = \{A \subseteq X : |A| = \aleph_0 \text{ и } x = \lim A\}$.

Нам потребуется следующая теорема:

Теорема 3.1. [7. Theorem 3.2] Следующие условия эквивалентны для пространства X :

- (1) S_ω не вкладывается в $C_p(X)$;
- (2) X обладает свойством $S_{fin}(\Gamma_F, \Omega)$.

Пусть \mathcal{P} – некоторое топологическое свойство. А.В. Архангельский назвал пространство X *проективно \mathcal{P}* , если любой непрерывный образ X , удовлетворяющий второй аксиоме счетности, обладает свойством \mathcal{P} . \square

Из теоремы 3.1 и [8. Теорема 11.1] вытекает следующий результат:

Теорема 3.2. Следующие условия эквивалентны для пространства X :

- (1) S_ω не вкладывается в $C_p(X)$.
- (2) X обладает свойством $S_{fin}(\Gamma_F, \Omega)$.
- (3) $C_p(X)$ обладает свойством $S_{fin}(\Gamma_x^\circ, \Omega_x^\circ)$.
- (4) $C_p(X)$ обладает свойством $S_{fin}(\Gamma_x, \Omega_x)$.

Заметим, что если любая конечная степень пространства X проективно менгеровское пространство, то X проективно $S_{fin}(\Omega, \Omega)$ (Proposition 4.4 из [7]).

Следствие 3.3. Для пространства X , любая конечная степень которого является проективно менгеровским пространством, следующие условия эквивалентны:

- (1) S_ω не вкладывается в $C_p(X)$.
- (2) X обладает свойством $S_{fin}(\Omega, \Omega)$.

Следствие 3.4. [7. Proposition 4.12] Любая конечная степень X является проективно менгеровским пространством в том и только в том случае, когда S_ω не вкладывается в $C_p(X^n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

На следующей диаграмме проиллюстрированы эти импликации (см. также: [8]):

$$\begin{array}{c}
 X \text{ проективно } S_{fin}(\Omega, \Omega) \\
 \Downarrow \\
 X \text{ является } S_{fin}(\Gamma_F, \Omega) \\
 \Updownarrow \\
 S_\omega \not\subseteq C_p(X) \Leftrightarrow X \text{ проективно } S_{fin}(\Gamma, \Omega) \\
 \Downarrow \\
 X \text{ проективно менгеровское}
 \end{array}$$

Лемма 3.5. ([9. Lemma 80]) Пусть $X = \{x\} \cup \{x_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ – хаусдорфово пространство такое, что $x_{n,m} \rightarrow x$ ($m \rightarrow \infty$) для каждого $n \in \mathbb{N}$; и для любого $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $x \notin \overline{\{x_{n,m} : n \in \mathbb{N}, m \leq \varphi(n)\}}$. Тогда S_{ω} вкладывается в X .

Теорема 3.6. Следующие условия эквивалентны для пространства X :

- (1) S_{ω} не вкладывается в $B(X)$.
- (2) X обладает свойством $S_{fin}(\mathcal{B}_{\Gamma}, \mathcal{B}_{\Omega})$.
- (3) X обладает свойством $S_1(\mathcal{B}_{\Gamma}, \mathcal{B}_{\Omega})$.
- (4) $B(X)$ обладает свойством $S_{fin}(\Gamma_x, \Omega_x)$.

Доказательство. (3) \Rightarrow (1). Пусть $S_{\omega} = \{\mathbf{0}\} \cup \{f_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\} \subseteq B(X)$, где $f_{n,k} \rightarrow \mathbf{0}$ ($k \rightarrow \infty$). Для каждого $n, k \in \mathbb{N}$ положим $U_{n,k} = \{x \in X : |f_{n,k}(x)| < \frac{1}{n}\}$. Все $U_{n,k}$ являются бэровскими подмножествами X . Пусть $\mathcal{U}_n = \{U_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$. Если множество $I = \{n \in \mathbb{N} : X \in \mathcal{U}_n\}$ бесконечно, то найдется последовательность $\{f_{n,k_n} : n \in I\}$, равномерно сходящаяся к $\mathbf{0}$. Это противоречие, поэтому, не теряя общности, можно считать, что $U_{n,k} \neq X$ для всех $n, k \in \mathbb{N}$. Нетрудно проверить, что из условия $f_{n,k} \rightarrow \mathbf{0}$ ($k \rightarrow \infty$) следует, что \mathcal{U}_n является бэровским γ -покрытием X . Тогда, по условию (3), найдется $\{U_{n,k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ – ω -покрытие пространства X такое, что $U_{n,k_n} \in \mathcal{U}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathbf{0} \in \overline{\{f_{n,k_n} : n \in \mathbb{N}\}}$; это противоречие.

(1) \Rightarrow (3). Пусть $\mathcal{U}_n = \{U_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$ – последовательность бэровских γ -покрытий пространства X , и для любой $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ семейство $\mathcal{U}_{\varphi} = \{U_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k \leq \varphi(n)\}$ не является ω -покрытием X . Для всех $n, k \in \mathbb{N}$ возьмем бэровскую функцию $f_{n,k} : X \rightarrow [0,1]$ такую, что $f_{n,k}(x) = 0$ в каждой точке $x \in U_{n,k}$ и $f_{n,k} = 1$ для всех $x \in X \setminus U_{n,k}$. Тогда $f_{n,k} \rightarrow \mathbf{0}$ ($k \rightarrow \infty$). Рассмотрим $\varphi \in \mathbb{N}$. Поскольку \mathcal{U}_{φ} не является ω -покрытием X , найдется конечное множество $F \subset X$, не содержащееся ни в каком элементе покрытия \mathcal{U}_{φ} . Тогда можно легко заметить, что

$$\{f \in B(X) : f(F) \subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} \cap \{f_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k \leq \varphi(n)\} = \emptyset.$$

По лемме 3.5 S_{ω} вкладывается в $\{\mathbf{0}\} \cup \{f_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\} \subset B(X)$.

Эквивалентность условий (2) и (3) следует из теоремы 9 [10.]:

$$S_{fin}(\mathcal{B}_{\Gamma}, \mathcal{B}_{\Omega}) = S_1(\mathcal{B}_{\Gamma}, \mathcal{B}_{\Omega}).$$

Эквивалентность условий (3) и (4) следует из теоремы 9 [11]:

$$S_1(\mathcal{B}_{\Gamma}, \mathcal{B}_{\Omega}) = S_{fin}(\Gamma_x, \Omega_x). \quad \square$$

По теореме 6 из [10] имеет место эквивалентность $S_1(\mathcal{B}_{\Gamma}, \mathcal{B}) = S_{fin}(\mathcal{B}_{\Gamma}, \mathcal{B})$. Заметим также, что если все конечные степени X обладают свойством $S_1(\mathcal{B}_{\Gamma}, \mathcal{B})$, то X обладает свойством $S_{fin}(\mathcal{B}_{\Omega}, \mathcal{B}_{\Omega})$ [10. Теорема 20].

Следствие 3.7. Для пространства X , все конечные степени которого обладают свойством $S_1(\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{B})$, следующие условия эквивалентны:

- (1) S_ω не вкладывается в $B(X)$.
- (2) X обладает свойством $S_{fin}(\mathcal{B}_\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$.

Следствие 3.8. Любая конечная степень X обладает свойством $S_1(\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда S_ω не вкладывается в $B(X^n)$ для любого натурального числа n .

Подведем итог в следующей диаграмме:

$$\begin{array}{c}
 X \text{ является } S_{fin}(\mathcal{B}_\Omega, \mathcal{B}_\Omega) \\
 \Downarrow \\
 S_\omega \not\subset B(X) \Leftrightarrow X \text{ является } S_{fin}(\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{B}_\Omega) \\
 \Downarrow \\
 X \text{ является } S_1(\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{B})
 \end{array}$$

Предложение 3.9. Существует пространство X такое, что S_ω вкладывается в $B(X)$, но S_ω не вкладывается в $C_p(X)$.

Доказательство. Пусть X – это действительная прямая \mathbf{R} с естественной топологией. По теореме 2.2 из [12] любое σ -компактное пространство является элементом класса $S_{fin}(\Omega, \Omega)$. Следовательно, X обладает свойством $S_{fin}(\Gamma, \Omega)$. По теореме 3.2 S_ω не вкладывается в $C_p(X)$. Поскольку пространство X не обладает свойством $S_1(\Gamma, \Omega)$, то оно не обладает свойством $S_1(\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{B}_\Omega)$. Следовательно, по теореме 3.6 S_ω вкладывается в $B(X)$.

Список источников

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология: учебник. М.: Мир, 1986. 752 с.
2. Handbook of set-theoretic topology: handbook / К. Kunen, J.E. Vaughan (eds.) Amsterdam ; New York ; Oxford : Elsevier Science Publishers, 1984. 1273 p.
3. *Архангельский А.В., Пономарев В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях : учебник. М.: Наука, 1974. 424 с.
4. *Hurewicz W.* Über eine verallgemeinerung des Borelschen Theorems // *Mathematische Zeitschrift.* 1925. V. 24. S. 401–421.
5. *Arhangel'skii A.V.* Hurewicz spaces, analytic sets and fan tightness of function spaces // *Sov. Math. Dokl.* 1986. V. 33. P. 396–399.
6. *Arhangel'skii A.V.* Projective σ -compactness, ω_1 -caliber, and C_p -spaces // *Topology and its Applications.* 2000. V. 104. P. 13–26.
7. *Sakai M.* The projective Menger property and an embedding of S_ω into function spaces // *Topology and its Applications.* 2017. V. 220. P. 118–130.
8. *Osipov A.V.* Projective versions of the properties in the Scheepers Diagram // *Topology and its Applications.* 2020. V. 278. Art. 107232.
9. *Bonanzinga M., Cammaroto F., Matveev M.* Projective versions of selection principles // *Topology and its Applications.* 2010. V. 157. P. 874–893.
10. *Scheepers M., Tsaban B.* The combinatorics of Borel covers // *Topology and its Applications.* 2002. V. 121. P. 357–382.
11. *Osipov A.V.* Classification of selectors for sequences of dense sets of Baire functions // *Topology and its Applications.* 2019. V. 258. P. 251–267.

12. Just W., Miller A.W., Scheepers M., Szeptycki P.J. The combinatorics of open covers II // *Topology and its Applications*. 1996. V. 73. P. 241–266.

References

1. Engelking R. (1989) *General Topology*. Berlin: Heldermann.
2. Kunen K., Vaughan J.E., Eds. (1984) *Handbook of Set-Theoretic Topology*. Amsterdam: Elsevier.
3. Arkhangel'skiy A.V., Ponomarev V.I. (1974) *Osnovy obshchey topologii v zadachakh i uprazhneniyakh* [Fundamentals of general topology in problems and exercises]. Moscow: Nauka.
4. Hurewicz W. (1926) Über eine verallgemeinerung des Borelschen Theorems. *Mathematische Zeitschrift*. 24. pp. 401–421.
5. Arhangel'skii A.V. (1986) Hurewicz spaces, analytic sets and fan tightness of function spaces. *Soviet Mathematics – Doklady*. 33. pp. 396–399.
6. Arhangel'skii A.V. (2000) Projective σ -compactness, ω_1 -caliber, and C_p -spaces. *Topology and Its Applications*. 104(1–3). pp. 13–26.
7. Sakai M. (2017) The projective Menger property and an embedding of S_ω into function spaces. *Topology and Its Applications*. 220. pp. 118–130.
8. Osipov A.V. (2020) Projective versions of the properties in the Scheepers Diagram. *Topology and Its Applications*. 278. 107232.
9. Bonanzinga M., Cammaroto F., Matveev M. (2010) Projective versions of selection principles. *Topology and Its Applications*. 157. pp. 874–893.
10. Scheepers M., Tsaban B. (2002) The combinatorics of Borel covers. *Topology and Its Applications*. 121. pp. 357–382.
11. Osipov A.V. (2019) Classification of selectors for sequences of dense sets of Baire functions. *Topology and Its Applications*. 258. pp. 251–267.
12. Just W., Miller A.W., Scheepers M., Szeptycki P.J. (1996) The combinatorics of open covers. II. *Topology and Its Applications*. 73. pp. 241–266.

Сведения об авторах:

Ляховец Даниил Юрьевич – аспирант Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия. E-mail: zoy01111@gmail.com

Осипов Александр Владимирович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий сектором топологии Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН; Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия. E-mail: oab@list.ru

Information about the authors:

Lyakhovets Daniil Yu. (N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation). E-mail: zoy01111@gmail.com

Osipov Alexander V. (N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation). E-mail: oab@list.ru

Статья поступила в редакцию 20.03.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 20.03.2023; accepted for publication 10.04.2024

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/88/5

О некоторых особенностях спектра продольных колебаний и звукоизлучения стержня

Артур Александрович Азаров¹, Александр Леонидович Попов²,
Дмитрий Анатольевич Челюбеев³

^{1, 2} *Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*

^{2, 3} *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

¹ *azaartale@mail.ru*

² *popov@ipmnet.ru*

³ *da--ch@yandex.ru*

Аннотация. Работа посвящена согласованию теоретических моделей удара и послесударных продольных колебаний стержня с экспериментальными данными. Получено решение задачи о продольных колебаниях стержня со свободными концами при наличии трения, коэффициент которого определяется по совокупности много-частотных затухающих колебаний стержня после ударного воздействия. Определены и проанализированы амплитудно-частотные зависимости перемещений и скоростей концов стержня, их связь с акустическим давлением, излучаемым торцами при разных соотношениях между массой ударника и стержня. Продемонстрирован эффект сдвига амплитудного максимума акустического давления с частоты основного тона на обертона, зависящий от параметров, определяющих период осцилляции, и отношения масс ударника и стержня.

Ключевые слова: продольный удар, контактная сила, акустическое давление

Для цитирования: Азаров А.А., Попов А.Л., Челюбеев Д.А. О некоторых особенностях спектра продольных колебаний и звукоизлучения стержня // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 53–65. doi: 10.17223/19988621/88/5

Original article

On some features of the spectrum of longitudinal vibrations and sound emission of a rod

Artur A. Azarov¹, Aleksandr L. Popov², Dmitriy A. Chelyubeev³

^{1, 2} *Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation*

^{2, 3} *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

¹ azaartale@mail.ru

² popov@ipmnet.ru

³ da--ch@yandex.ru

Abstract. This study is devoted to the correlation of theoretical models of the impact and post-impact longitudinal vibrations of a rod with the corresponding experimental data. A solution to the problem of longitudinal vibrations of a cylindrical rod is obtained using the Saint-Venant wave model with free ends in the presence of friction. The friction coefficient is determined by a set of multi-frequency damped vibrations of the rod after impact. The amplitude-frequency dependences of the displacements and velocities of the rod ends for free post-shock vibrations are determined and analyzed together with their relationship with the acoustic pressure emitted by the ends at different ratios between the masses of the striker and rod. The shift of the amplitude maximum of acoustic pressure from the frequency of the fundamental tone to the overtone is shown to depend on the parameters determining the oscillation period and the mass ratio of the striker and rod. This is inconsistent with the longitudinal vibration spectrum of the rod, whose maximum corresponds to the frequency of the fundamental tone at any mass ratio of the striking pair. The obtained data are experimentally validated.

Keywords: longitudinal impact, contact force, acoustic pressure

For citation: Azarov, A.A., Popov, A.L., Chelyubeev, D.A. (2024) On some features of the spectrum of longitudinal vibrations and sound emission of a rod. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 53–65. doi: 10.17223/19988621/88/5

Введение

Изучение продольных колебаний стержня имеет обширную теоретическую базу. Достаточно упомянуть классические монографии Рэля [1], Лява [2] и Тимошенко [3]. Наиболее распространенной и простой моделью их описания является волновое уравнение. При его использовании предполагается, что поперечные размеры стержня малы по сравнению с его длиной. Это позволяет при определении продольных смещений стержня пренебречь влиянием поперечных деформаций, сопровождающих деформации расширения-сжатия в процессе продольных колебаний. Задача соударения тел также имеет богатую историю и большое практическое значение. Основы теории удара по стержням заложили Сен-Венан [4], Герц [5], Сирс [6]. Модель продольного удара Сен-Венана предполагает волновое распространение возмущений и отсутствие местных деформаций, что может быть обеспечено для идеально плоских торцов соударяемых тел. Модель удара Герца учитывает местную контактную деформацию соударяемых сферических тел, но не учитывает волновое движение. Модель Сирса объединяет оба подхода, учитывая местную деформацию и деформацию расширения-сжатия в продольной волне. Такая объединенная модель хорошо согласуется с экспериментами [7–9]. Современные направления работ, посвященных продольному удару, определяют время соударения, форму ударного импульса [10], различные эффекты, сопутствующие продольным колебаниям: поперечные колебания, возникающие в условиях параметрического резонанса [11], возможность потери устойчивости прямой формы стержня [12], а также возможности диагностики дефектов в стержне [13–14]. Большое количество современных работ посвящено рассеянию стержнями звуковых волн [15–17].

В настоящей работе рассмотрены удар и послеударные колебания стержня со свободными концами. Для получения спектров колебаний торцов с ограниченными амплитудами в математическую модель колебаний введено внутреннее трение, коэффициент затухания при котором определяется по совокупности многочастотных затухающих колебаний стержня после ударного воздействия. Подобное введение трения в модель Сен-Венана представлено в монографии [8], однако при анализе спектров послеударных колебаний стержня ранее не использовалось, что видно из цитированных работ [8–14]. Введение внешнего трения в модель Сен-Венана представлено в [18]. В части определения ударного импульса также используется волновая теория Сен-Венана, что позволяет получить явное аналитическое решение. Данное допущение оправдано условием свободного выходного конца, малым отношением массы ударника к массе стержня и малой скоростью столкновения соударяющихся тел, что подтверждается экспериментально. В экспериментальной части обнаружены некоторые особенности спектра звукоизлучения стержня, зависящие от соотношения масс ударника и стержня, что показано и в теоретической модели. Авторы также видят актуальность в продвижении подхода оперативности снятия информации о колебаниях стержневых элементов конструкций в сочетании с минимальным вмешательством в процесс колебаний, что обеспечивается бесконтактностью регистрации колебаний и применением современных быстродействующих спектроанализирующих устройств.

Продольный удар телом по стержню со свободными концами

Рассматривается продольный удар по упругому стержню 1 длиной l , массы M с двумя свободными концами (рис. 1). По правому концу в начальный момент времени ударяет со скоростью v_0 шарик или молоток 2 массой m , в результате чего возникает контактное взаимодействие. Ударник, как и в большинстве других работ, считается абсолютно твердым телом.

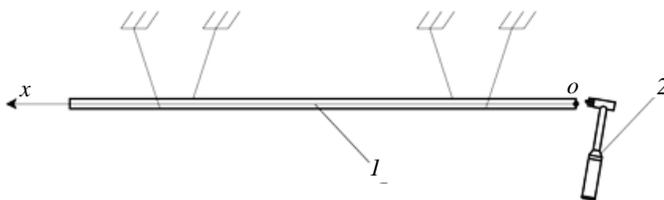


Рис. 1. Удар телом по стержню

Fig. 1. Longitudinal impact of a body on a rod

Колебания стержня по модели Сен-Венана с учетом диссипативных сил описываются одномерным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – функция продольного перемещения точек стержня, c – скорость звука, ρ – плотность стержня, E – модуль упругости, γ – коэффициент, учитывающий трение.

Граничные и начальные условия для функции перемещения запишем в виде:

$$ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -P(t); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0; \quad u_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

где $P(t)$ – контактная сила на конце стержня, S – площадь поперечного сечения, l – длина стержня.

Решение краевой задачи (1), (2) представим в виде ряда по собственным формам колебаний стержня со свободными концами:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l},$$

$$T_n^{(2)}(t) + 2\gamma T_n^{(1)}(t) + \lambda_n^2 c^2 T_n(t) = \frac{2P(t)}{\rho S l}, \quad T_n(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial T_n}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

$$T_n = \frac{2}{\rho S l} \int_0^t P(t_1) e^{-\gamma(t-t_1)} \frac{\sin \omega_n(t-t_1)}{\omega_n} dt_1, \quad \omega_n = \frac{\pi n c}{l}.$$

Для определения ударной силы запишем условие контакта [7, 11]:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1)(t-t_1) dt_1 - \alpha = \int_0^t P(t_1) Y(t-t_1) dt_1, \quad (4)$$

где v_0 – скорость ударника в момент удара по стержню, m – масса ударника, α – упругая деформация в зоне контакта, Y – реакция системы на единичный импульс [19]:

$$Y(t-t_1) = \frac{(t-t_1)}{\rho S l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\rho S l \omega_n} \sin \omega_n(t-t_1).$$

В реакции на импульс первый член соответствует свободному перемещению системы как абсолютно твердого тела. Данная поправка позволяет получить решение интегрального уравнения (4) относительно $P(t)$ в элементарных функциях; эффектом затухания ввиду незначительной продолжительности взаимодействия и для упрощения аналитического решения пренебрегаем.

При определении ударной силы без учета местного смятия ввиду малого отношения масс m/M и свободного края выходного конца стержня условие контакта (4) примет вид:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1)(t-t_1) dt_1 - \frac{1}{\rho S l} \int_0^t P(t_1) \left((t-t_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n(t-t_1)}{\omega_n} \right) dt_1 = 0. \quad (5)$$

Отметим, что ряд в этом выражении сводится к табличному виду 5.4.2.9 [20]. Тогда выражение (5) упростится:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1)(t-t_1) dt_1 - \frac{1}{\rho S c} \int_0^t P(t_1) dt_1 = 0. \quad (6)$$

Дифференцируя дважды каждый интеграл (6) по параметру t , приходим к дифференциальному уравнению относительно функции $P(t)$:

$$\frac{1}{m} P(t) + \frac{1}{\rho S c} \frac{dP(t)}{dt} = 0.$$

Решение этого уравнения представляется в виде:

$$P(t) = c\rho S v_0 e^{-\frac{Mct}{m l}}, \quad M = \rho S l. \quad (7)$$

Видно, что в этом решении учитывается только затухающая часть контактного импульса.

Для получения контактной силы с учетом местного смятия запишем условие контакта [7, 11], в котором местное смятие связано с контактной силой по формуле Герца:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1)(t-t_1) dt_1 - \left(\frac{P(t)}{k} \right)^{\frac{2}{3}} = \int_0^t P(t_1) Y(t-t_1) dt_1, \quad k = \frac{2E\sqrt{R}}{3(1-\nu^2)},$$

где R – радиус кривизны ударника в точке контакта, ν – коэффициент Пуассона.

В таком виде интегральное уравнение допускает только численное решение [11]. В отличие от (7), здесь уже присутствует не только затухающая, но и возрастающая часть ударного импульса.

Возвращаясь к решению краевой задачи (3) с учетом найденного выражения для ударной силы (7), получим, что функция перемещения имеет вид:

$$u(x, t) = \int_0^t P(t_1) Y(t-t_1) dt_1 = \frac{2c v_0}{l} \int_0^t e^{-\frac{Mct_1}{m l}} e^{-\gamma(t-t_1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n(t-t_1)}{\omega_n} \cos \lambda_n x dt_1$$

Фурье-спектр перемещения $u(x, t)$, являющегося сверткой двух функций $P(t)$ и $Y(t)$, с учетом $u(x, t) = 0$ при $t < 0$ является Лапласовым изображением:

$$U(x, \omega) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega t} dt = \frac{2c v_0}{l} \int_0^{+\infty} e^{-i\omega t} \int_0^t e^{-\frac{Mct_1}{m l}} e^{-\gamma(t-t_1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n(t-t_1)}{\omega_n} \cos \lambda_n x dt_1 dt.$$

Согласно теореме свертки двух оригиналов [21], Фурье-спектр перемещений входного и выходного концов имеет вид произведения изображений; таким образом, с учетом преобразований, амплитуда принимает вид:

$$A(\omega) = \frac{2c v_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\left((\omega - \omega_n)^2 + \gamma^2 \right) \left((\omega + \omega_n)^2 + \gamma^2 \right) \left(\omega^2 + \frac{M^2 c^2}{m^2 l^2} \right)}}. \quad (8)$$

На рис. 2 показан фрагмент спектра послепударных колебаний для шести первых собственных частот продольных колебаний стержня при ударе шариком. Параметры соударяющихся пар приводятся в экспериментальной части.

Видно, что общей тенденцией является снижение амплитуд спектра с ростом номера частоты.

В экспериментальной части работы измеряются не перемещения торцов стержня, а акустическое давление, регистрируемое микрофоном, расположенным у торца стержня. Поэтому при согласовании теоретических и экспериментальных результатов необходимо перейти к определению акустического давления в окрестности торца стержня.

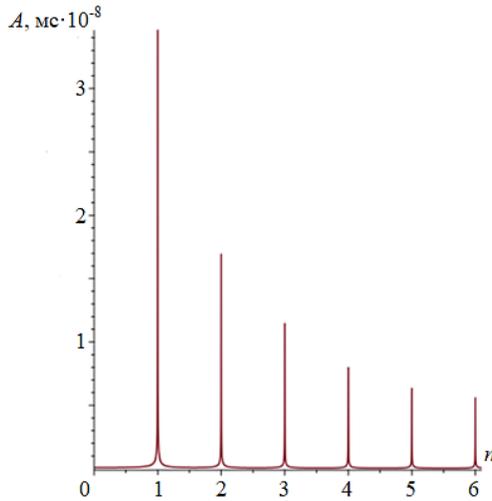


Рис. 2. Изменение амплитуд спектра послешоковых колебаний в зависимости от номера собственной частоты
Fig. 2. Variation in amplitudes of the spectrum of post-shock oscillations depending on the natural frequency number

Для определения акустического давления плоского круглого торца стержня, пульсирующего в обе стороны с амплитудами, зависящими от частот, используется потенциал скоростей, который записывается в виде [22]:

$$\varphi(\omega) = \frac{|V(\omega)|}{2\pi} \iint_S \frac{e^{-i\frac{\omega}{c_1}r}}{r} dS, \quad (9)$$

где c_1 – скорость звука в акустическом пространстве, r – расстояние от элемента излучающей поверхности dS до точки измерения, $|V(\omega)|$ – амплитуда скорости излучающей поверхности.

Для направления вдоль оси стержня интеграл (9) приобретает явный вид. В этом случае амплитуда акустического давления на расстоянии l_0 в зависимости от частоты с учетом связи с потенциалом скоростей $p = i\omega\rho f$ представляется выражением [22]

$$|p(\omega)| = |V(\omega)| \left| \int_0^{r_0} i\omega\rho_1 \frac{e^{-i\frac{\omega}{c_1}\sqrt{l_0^2+r^2}}}{\sqrt{l_0^2+r^2}} r dr \right| = \rho_1 c_1 |V(\omega)| |f(\omega)|, \quad (10)$$

$$|f(\omega)| = 2 \left| \sin \left(\frac{\omega l_0 - \omega \sqrt{l_0^2 + r_0^2}}{2c_1} \right) \right|,$$

где l_0 – расстояние до приемника, r_0 – радиус стержня, ρ_1 – плотность акустической среды.

Формула (10) справедлива тогда, когда плоскость торца поршня продолжается экраном, на котором считается равным нулю потенциал скорости вне поршня. Однако Л.Я. Гутиным показано, что звуковое поле и импеданс осциллирующей

поршневой диафрагмы и пульсирующей поршневой диафрагмы, излучающих без экрана, для направления вдоль оси стержня малоразличимы от случая с экраном [22].

Для определения амплитудно-частотной зависимости скорости из выражения перемещения $u(x, t)$ в форме интеграла Дюамеля найдем функцию скорости $v(x, t)$

$$v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2v_0 mc \left(-Mc\omega_n e^{-\frac{M c}{m l} t} + \left((-Mc\gamma + lm(\gamma^2 + \omega_n^2)) \sin \omega_n t + Mc\omega_n \cos \omega_n t \right) e^{-\gamma t} \right)}{\omega_n \left(M^2 c^2 - 2Mc\gamma lm + l^2 m^2 (\gamma^2 + \omega_n^2) \right)} \cos \lambda_n x.$$

Фурье-спектр скорости $v(x, t)$ входного торца стержня при $x = 0$ с учетом $v(t) = 0$ при $t < 0$ является Лапласовым изображением:

$$V(\omega) = \int_0^{+\infty} v(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{2\omega c v_0 l}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2 + \gamma^2 + 2\gamma\omega i) \left(\omega i + \frac{Mc}{ml} \right)}.$$

Отсюда видно, что амплитуда $|V(\omega)|$ этого выражения получается умножением (8) на частоту ω .

В результате определены амплитудно-частотная зависимость скорости $|V(\omega)|$ и осциллирующая функция $|f(\omega)|$, что позволяет определить акустическое давление вдоль оси колеблющегося стержня на заданном расстоянии от торца стержня.

Экспериментальное изучение спектра продольных колебаний стержня

Измерения проводились на установке, схематически показанной на рис. 3. Колебания цилиндрического стержня (5), подвешенного на двух нитях (6), возбуждались ударом по торцу стержня. Для этого использовался либо стальной шарик с массой, много меньшей массы стержня, либо ударный молоток AU02 (4) с массой 330 г, соединенный с двухканальным спектроанализатором A19-U2 (2).

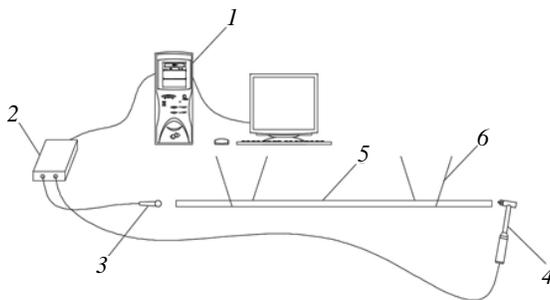


Рис. 3. Схема экспериментальной установки для ударного возбуждения и регистрации продольных колебаний стержня

Fig. 3. Design of the experimental setup for shock excitation and registration of longitudinal vibrations of the rod

Регистрация колебаний осуществлялась с помощью лабораторного микрофона (3), установленного вблизи противоположного (выходного) торца стержня.

Сигнал от микрофона передавался на анализатор спектра А19-У2 и далее на компьютер (1), где обрабатывался с помощью программного комплекса ZETLab. Частота дискретизации данного анализатора спектра составляет 250 кГц. Исходя из теоремы Котельникова–Шеннона, верхней границей различаемого диапазона частот будет 125 кГц. В результате микрофонной записи и работы анализатора спектра производилась одновременная запись амплитудно-временных и амплитудно-частотных зависимостей колебаний торцов стержня.

В качестве образца использовался цилиндрический стержень из алюминиевого сплава длиной $l = 1$ м, диаметром $d = 20$ мм. На рис. 4 показана микрофонная запись многочастотного сигнала звукоизлучения стержня продолжительностью 0.1 с после ударного воздействия в момент времени $t = 0$.

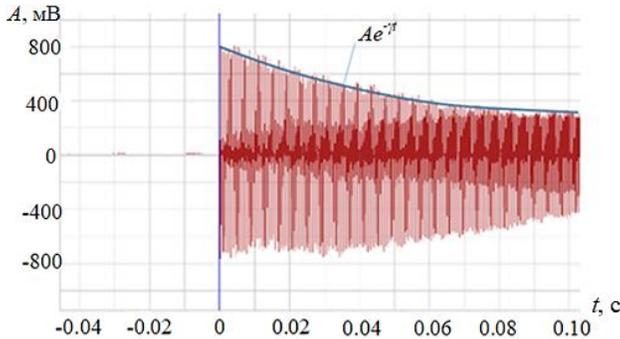


Рис. 4. Амплитудно-временная зависимость затухающих колебаний с экспоненциальной огибающей

Fig. 4. Amplitude–time dependence of damped oscillations with exponential envelope

Среднее значение коэффициента γ , характеризующего скорость затухания колебаний во времени, определялось по огибающей экспериментальной амплитудно-временной зависимости (см. рис. 4) из условия:

$$\gamma = \frac{1}{k\Delta t} \ln \frac{A(t_0)}{A(t_0 + k\Delta t)} = \frac{1}{260 \cdot 0.000384} \ln \frac{800}{250} \cong 12c^{-1},$$

где $t_0 + k\Delta t$ – продолжительность записи колебаний, равная 0.1 с, $A(t)$ – амплитуда колебаний торца стержня в момент времени t . Начальная амплитуда $A(t_0)$ соответствует моменту времени 0.00042 с, амплитуда окончания записи $A(t_0 + k\Delta t)$ соответствует 0.1 с, $k = 260$ – число периодов на интервале записи, $\Delta t = 0.000384$ с – продолжительность периода колебаний.

Проведены серии экспериментов, в которых при разных соотношениях между массами ударника и стержня возбуждались колебания стержня и регистрировалось акустическое давление, излучаемое торцами на заданном расстоянии в условиях, где акустическое сопротивление среды соответствовало сопротивлению воздуха при температуре 20°C. На рис. 5–8 приведены расчетные и экспериментальные спектры акустического давления вблизи выходного конца стержня при максимальном и минимальном соотношениях масс соударяющейся пары $m/M = 0.41$ и 0.014. Амплитуды экспериментальных спектров акустического давления по осям ординат отложены в единицах электрического сигнала, поступающего с микрофона (мВ).

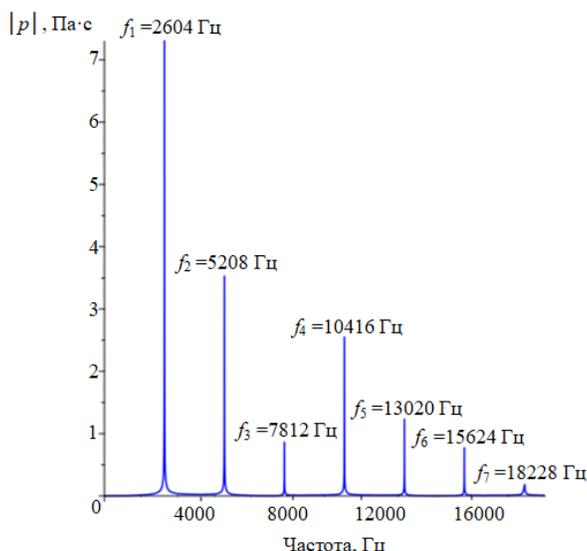


Рис. 5. Теоретический спектр акустического давления в диапазоне частот 0–20 000 Гц при отношении масс $m/M = 0.41$

Fig. 5. Theoretical acoustic pressure spectrum in the frequency range 0–20000 Hz with a mass ratio $m/M = 0.41$

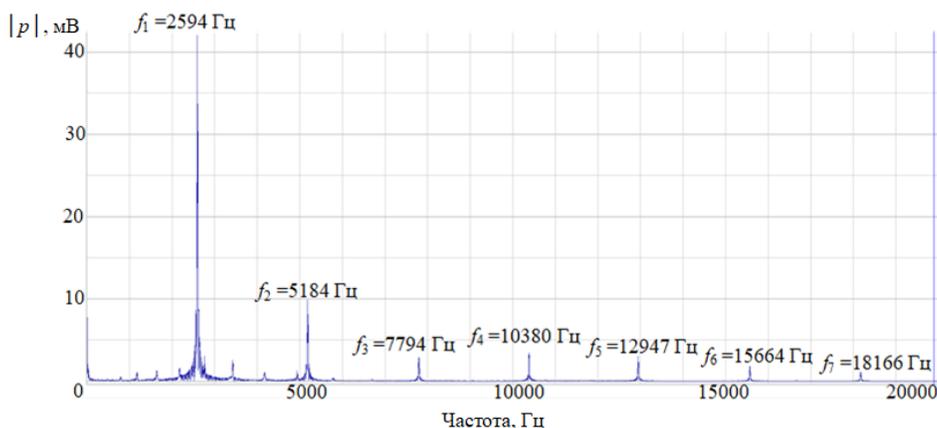


Рис. 6. Экспериментальный спектр акустического давления в диапазоне частот 0–20 000 Гц при отношении масс $m/M = 0.41$

Fig. 6. Experimental acoustic pressure spectrum in the frequency range 0–20000 Hz with a mass ratio $m/M = 0.41$

При расчете использовалась функция $f(\omega)$ с периодом, определенным из эксперимента. В этом случае характер изменения амплитуд спектра частот теоретической модели совпадает с экспериментальными данными.

Приведенные данные показывают хорошее согласование результатов, полученных по теоретической модели, с экспериментальными результатами. По полученным АЧЗ видно, что при наибольшем отношении массы ударника к массе

стержня амплитудный максимум акустического давления выходного конца (см. рис. 6), регистрируемый микрофоном, соответствует частоте основного тона.

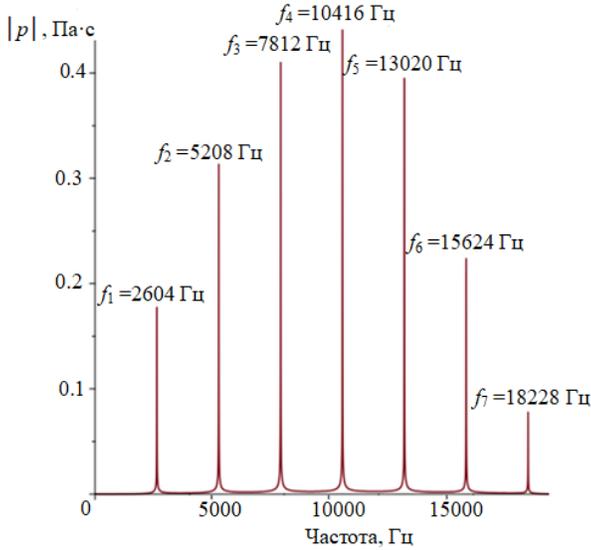


Рис. 7. Теоретический спектр акустического давления в диапазоне частот 0–20 000 Гц при отношении масс $m/M = 0.014$
Fig. 7. Theoretical acoustic pressure spectrum in the frequency range 0–20000 Hz with a mass ratio $m/M = 0.014$

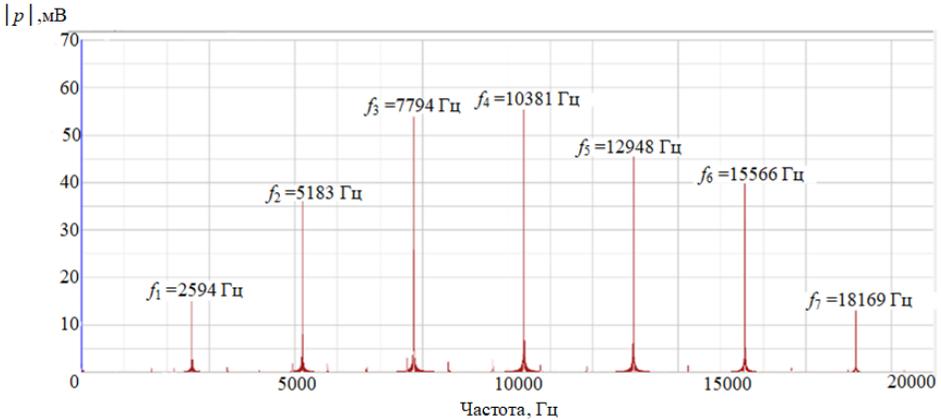


Рис. 8. Экспериментальный спектр акустического давления в диапазоне частот 0–20 000 Гц при отношении масс $m/M = 0.014$
Fig. 8. Experimental acoustic pressure spectrum in the frequency range 0–20000 Hz with a mass ratio $m/M = 0.014$

При уменьшении m/M амплитудный максимум акустического давления выходного конца сдвигается по частоте и в данном случае соответствует 4-му обертому (см. рис. 7, 8). Данное различие объясняется тем, что при ударе по стержню молотком амплитуды скорости выходного конца на разных частотах отличаются

друг от друга значительнее осциллирующего эффекта функции $f(\omega)$; таким образом, максимум акустического давления соответствует частоте основного тона. При стремлении отношения масс к нулю спектр меняется и диктующим максимумом оказывается осциллирующий эффект.

Заключение

В работе решалась задача продольного удара и последующих колебаний цилиндрического стержня по волновой модели Сен-Венана. Получена амплитудно-временная зависимость ударной нагрузки. В части определения амплитуд продольных колебаний вблизи резонансных частот рассматривалась линейная постановка задачи. При таком подходе совместно с полученной амплитудно-временной зависимостью ударной нагрузки определены амплитудно-частотные зависимости для свободных послеударных колебаний. Определен спектр акустического давления по оси колебаний стержня, создаваемый послеударными колебаниями стержня. Продемонстрирован эффект сдвига амплитудного максимума акустического давления по частоте. Показано, что величина этого сдвига зависит от параметров, определяющих период осцилляции и отношения масс ударника и стержня, в отличие от спектра продольных колебаний на выходном торце стержня, максимум которого соответствует частоте основного тона при любом отношении масс соударяющейся пары. Проведена экспериментальная верификация полученных результатов.

Список источников

1. Стрэтт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. М. : ГИТТЛ, 1955. Т. 1. 504 с.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. Л. : ОНТИ, 1935. 674 с.
3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М. : Наука, 1967. 444 с.
4. Saint-Venant A. Sur le choc longitudinal de deux barres 'elastiques // J. de Math. (Liouville). Ser. 2. 1867. V. 12. P. 237–376.
5. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper // Za. f. Math. (Crelle). 1881. Bd. 92. P. 156–171.
6. Sears J.E. On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1908. V. 14. P. 49–106.
7. Бидерман В.Л. Теория удара. - М. : Машгиз, 1952. 76 с.
8. Гольдсмит В. Удар. Теория и динамические свойства соударяемых тел. М. : Стройиздат, 1965. 448 с.
9. Al-Mousawi M.M. On experimental studies of longitudinal and flexural wave propagations: An annotated bibliography // Applied Mechanics Reviews. 1986. V. 39. P. 853–864.
10. Hu B., Schiehlen W., Eberhard P. Comparison of Analytical and Experimental Results for Longitudinal Impacts on Elastic Rods // Journal of Vibration and Control. 2003. V. 9. P. 157–174. doi: 10.1177/107754603030745
11. Морозов Н.Ф., Беляев А.К., Товстик П.Е. Колебания стержня, вызванные продольным ударом тела // Доклады Академии наук. 2018. Т. 480, № 2. С. 164–169. doi: 10.7868/S0869565218140074
12. Беляев А.К., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Тонкий стержень при продольном динамическом сжатии // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2017. № 4. С. 19–34.
13. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Влияние дефекта массы на частоты и формы продольных колебаний стержня // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2014. № 1. С. 135–144.

14. Shifrin E.I., Popov A.L., Lebedev I.M., Chelyubeev D.A., Kozintsev V.M. Numerical and experimental verification of a method of identification of localized damages in a rod by natural frequencies of longitudinal vibration // *Acta Mechanica*. 2021. V. 232, is. 5. P. 1797–1808. doi: 10.1007/s00707-020-02919-w
15. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Рассеяние звука неоднородным упругим эллиптическим цилиндром в акустическом полупространстве // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2018. № 7. С. 183–200.
16. Tolokonnikov L.A., Larin N.V. Scattering by a cylinder with an inhomogeneous coating of sound waves emitted by a linear source in a plane waveguide // *Math. Models Comput. Simul.* 2022. V. 14, is. 2. P. 250–260. doi: 10.1134/S2070048222020156
17. Пешков Н.Ю., Скобельцын С.А. Рассеяние звука упругим цилиндром с кусочно-непрерывным неоднородным покрытием // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2020. № 10. С. 214–226.
18. Стойчев В.Б., Можяев И.В. Прогнозирование параметров процесса погружения свай-труб пневматическими ударными машинами // *Известия вузов. Строительство*. 2004. № 3. С. 81–85.
19. Зегжда С.А. Соударение упругих тел. СПб. : Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1997. 316 с.
20. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М. : Наука, 1981. Т. 1: Элементарные функции. 623 с.
21. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М. : Физматлит, 1985. Т. 2. 560 с.
22. Ржевкин С.Н. Курс лекций по теории звука. М. : МГУ, 1960. 336 с.

References

1. Strutt J.V. (Lord Rayleigh) (1926) *The Theory of Sound*. London: Macmillan and Company.
2. Love A. (1927) *Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: Cambridge University Press.
3. Timoshenko S.P. (1955) *Vibration Problems in Engineering*. Toronto – New York – London: Van Nostrand Company.
4. Saint-Venant A. (1867) Sur le choc longitudinal de deux barres 'elastiques. *Journal de Mathématiques pures et appliquées de Liouville*. Ser.2.12. pp. 237–376.
5. Hertz H. (1881) Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte. Mathematik*. 92. pp. 156–171.
6. Sears J.E. (1908) On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 14. pp. 49–106.
7. Biderman V.L. (1952) *Teoriya udara* [Theory of impact]. Moscow: Mashgiz.
8. Goldsmith W. (1960) *Impact: The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids*. London: Arnold.
9. Al-Mousawi M.M. (1986) On experimental studies of longitudinal and flexural wave propagations: An annotated bibliography. *Applied Mechanics Reviews*. 39. pp. 853–864. doi: 10.1115/1.3149516
10. Hu B., Schiehlen W., Eberhard P. (2003) Comparison of analytical and experimental results for longitudinal impacts on elastic rods. *Journal of Vibration and Control*. 9. pp. 157–174. doi: 10.1177/107754603030745
11. Morozov N.F., Belyaev A.K., Tovstik P.E. (2018) Kolebaniya sterzhnya, vyzvannye prodol'nym udarom tela [Rod vibrations caused by axial impact]. *Doklady akademii nauk – Doklady Physics*. 480(2). pp. 164–169. doi: 10.7868/S0869565218140074
12. Belyaev A.K., Tovstik T.P., Tovstik P.E. (2017) Thin rod under longitudinal dynamic compression. *Mechanics of Solids*. 52(4). pp. 364–377. doi: 10.3103/S0025654417040021
13. Akulenko L.D., Nesterov S.V. (2014) Mass defect influence on the longitudinal vibration frequencies and mode shapes of a beam. *Mechanics of Solids*. 49(1). pp. 104–111. doi: 10.3103/S0025654414010129
14. Shifrin E.I., Popov A.L., Lebedev I.M., Chelyubeev D.A., Kozintsev V.M. (2021) Numerical and experimental verification of a method of identification of localized damages in a rod by

- natural frequencies of longitudinal vibration. *Acta Mechanica*. 232(5). pp. 1797–1808. doi: 10.1007/s00707-020-02919-w
15. Skobel'tsyn S.A., Peshkov N.Yu. (2018) Rasseyaniye zvuka neodnorodnym uprugim ellipticheskim tsilindrom v akusticheskom poluprostranstve [Scattering of sound by an inhomogeneous elastic elliptic cylinder in an acoustic half-space]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya Tula State University. Technical Sciences*. 7. pp. 183–200.
 16. Tolokonnikov L.A., Larin N.V. (2022) Scattering by a cylinder with an inhomogeneous coating of sound waves emitted by a linear source in a plane waveguide. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 14(2). pp. 250–260. doi: 10.1134/S2070048222020156
 17. Peshkov N.Yu., Skobel'tsyn S.A. (2020) Rasseyaniye zvuka uprugim tsilindrom s kusochno-neprevrynym neodnorodnym pokrytiem [Sound scattering by an elastic cylinder with a piecewise inhomogeneous coating]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya Tula State University. Technical Sciences*. 10. pp. 214–226.
 18. Stoychev V.B., Mozhaev I.V. (2004) Prognozirovaniye parametrov protsessa pogruzheniya svay-trub pnevmaticheskimi udarnymi mashinami [Prediction of parameters of the pile-tube driving by pneumatic impact machines]. *Izvestiya vuzov stroitel'stvo – News of Higher Educational Institutions. Construction*. 3. pp. 81–85.
 19. Zegzhda S. A. (1997) *Soudarenie uprugikh tel* [Collision of elastic bodies]. Saint Petersburg: Saint Petersburg University Press.
 20. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. (1986) *Integrals and Series. Elementary Functions*. Volume 1. New York: Gordon and Breach.
 21. Piskunov N. (1987) *Differential and Integral Calculus*. Volume 2. Moscow: Mir.
 22. Rschevkin S.N. (1963) *A Course of Lectures on the Theory of Sound*. Oxford: Pergamon Press.

Сведения об авторах:

Азаров Артур Александрович – аспирант кафедры сопротивления материалов Московского государственного строительного университета, Москва, Россия. E-mail: azaartale@mail.ru

Попов Александр Леонидович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН; профессор кафедры сопротивления материалов Московского государственного строительного университета, Москва, Россия. E-mail: popov@ipmnet.ru

Челюбеев Дмитрий Анатольевич – ведущий инженер лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия. E-mail: da--ch@yandex.ru

Information about the authors:

Azarov Artur A. (Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation). E-mail: azaartale@mail.ru

Popov Aleksandr L. (Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation). E-mail: popov@ipmnet.ru

Chelyubeev Dmitriy A. (Leading Engineer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: da--ch@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 26.11.2022; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 26.11.2022; accepted for publication 10.04.2024

Научная статья

УДК 532.529, 519.63

doi: 10.17223/19988621/88/6

Численное исследование полидисперсных двухфазных течений в осесимметричном сопле Лавалья с учетом силы Магнуса, действующей на вращающиеся капли

Владимир Петрович Бушланов¹, Владимир Григорьевич Бутов²,
Анатолий Алексеевич Глазунов³

¹ Государственный морской университет им. Ф.Ф. Ушакова, Новороссийск, Россия

^{2,3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ bushlanovvp@yandex.ru

² bvg@niipmm.tsu.ru

³ gla@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Выполнено численное исследование двухфазного течения в осесимметричном сопле Лавалья с учетом процессов коагуляции, вращения, дробления капель и силы Магнуса, действующей на них. Показано, что учет силы Магнуса приводит к отклонению предельных линий (траекторий) фракций капель к контуру сопла, смещению мест выпадения капель к минимальному сечению сопла и увеличению угла их столкновения со стенкой сопла.

Ключевые слова: двухфазное течение, коагуляция, вращение и дробление капель, сила Магнуса, математическая модель

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет – 2030) и Государственного морского университета им. Ф.Ф. Ушакова в г. Новороссийске.

Для цитирования: Бушланов В.П., Бутов В.Г., Глазунов А.А. Численное исследование полидисперсных двухфазных течений в осесимметричном сопле Лавалья с учетом силы Магнуса, действующей на вращающиеся капли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 66–78. doi: 10.17223/19988621/88/6

Original article

Numerical modeling of polydisperse two-phase flows in an axisymmetric de Laval nozzle with account for the Magnus force acting on rotating droplets

Vladimir P. Bushlanov¹, Vladimir G. Butov², Anatoliy A. Glazunov³

¹ Admiral Ushakov Maritime State University, Novorossiysk, Russian Federation

^{2,3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ bushlanovvp@yandex.ru

² bvg@niipmm.tsu.ru

³ gla@niipmm.tsu.ru

Abstract. The available papers on two-phase flows in de Laval nozzles are focused on the effect of various initial conditions, models of coagulation, fragmentation, and rotation of droplets on their local and integral characteristics. Some papers note that due to the difference in the velocities of the gas and droplets along the nozzle axis, the Magnus force acts on the rotating droplets perpendicular to the specified difference and deflects the trajectories of the droplets toward the nozzle wall.

In an earlier paper, the authors proposed a mathematical model of a two-phase flow in an axisymmetric de Laval nozzle that accounts for the Magnus force on the basis of the kinetic equation. The present article is devoted to a numerical study of a polydisperse two-phase flow in a de Laval nozzle with account for the coagulation, fragmentation, and rotation of droplets and the Magnus force. This study is based on the “monodisperse” model of fragments developed by I.M. Vasenin and A.A. Shreiber, the method of labeled drops (the Lagrange method), and the finite-difference schemes of second order accuracy.

The calculations are carried out for a test nozzle configuration with condensate formation on the nozzle wall both with and without the Magnus force accounted. The calculated results show that the Magnus force has different impacts on the trajectories of droplets of various sizes. It should be noted that the limiting trajectories of the droplets approach the nozzle wall due to the Magnus force, resulting in the earlier dropout on the wall. Therefore, when designing the divergent section of the nozzle, it is necessary to consider the revealed approach of the location of the dropout, which is associated with the Magnus force, to the nozzle throat.

Keywords: two-phase flow, coagulation, rotation, and fragmentation of droplets, the Magnus force, mathematical model

Acknowledgments: This study was supported by the Tomsk State University Development Programme (Priority 2030) and by the Admiral Ushakov Maritime State University in Novorossiysk.

For citation: Bushlanov, V.P., Butov, V.G., Glazunov, A.A. (2024) Numerical modeling of polydisperse two-phase flows in an axisymmetric de Laval nozzle with account for the Magnus force acting on rotating droplets. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 66–78. doi: 10.17223/19988621/88/6

Исследования полидисперсных двухфазных течений в осесимметричном сопле Лавалья с учетом процессов столкновения капель конденсата друг с другом и взаимодействия капель с газом актуальны для ракетно-космической и теплоэнергетической техники.

К настоящему времени опубликован ряд статей [1–8], посвященных различным аспектам этой тематики. Первой работой по исследованию осесимметричного течения в сопле Лавалья в рамках модели полной коагуляции частиц и их аэродинамического дробления является работа [1]. В последующих исследованиях [2–5] проанализированы особенности двухфазных течений с учетом коагуляции и дробления частиц при столкновениях. В работах [6–8] предложено учитывать еще и вращение частиц, возникающее из-за нецентральных столкновений капель.

В [6–8] показано, что в результате многочисленных столкновений собственные моменты импульсов капель могут возрастать и достигать критических величин, что приводит к их разрушению центробежными силами.

Можно отметить ряд обобщающих монографий по данному направлению [9–15]. В них выполнен анализ моделей двухфазных течений различной степени сложности, приведены соответствующие системы уравнений, описывающие эти модели, методы их реализации и результаты численных и экспериментальных исследований особенностей течений в соплах Лавала.

В работе [16] нами предложена модель двухфазного течения с учетом силы Магнуса, действующей на вращающиеся капли. Представленное далее исследование является численной реализацией работы [16]. Результаты расчетов позволили получить новые данные по локальным характеристикам двухфазного течения, в частности по траекториям предельных линий тока вращающихся капель.

Рассмотренная в [16] модель описывает неравновесное двухфазное течение смеси газа и полидисперсных жидких капель конденсата в осесимметричном сопле Лавала. Учитываются процессы коагуляции, дробления, вращения капель и силы Магнуса, действующие на вращающиеся капли в потоке.

При моделировании двухфазного течения использовались следующие допущения [16]:

1. Течение описывается многожидкостной моделью сплошной среды, предложенной Х.А. Рахматулиным и развитой в работах Р.И. Нигматулина, А.Н. Крайко, Л.Е. Стернина, И.М. Васенина, А.А. Шрайбера. Согласно этой модели, двухфазное течение заменяется «взаимопроникающими» течениями нескольких сплошных сред: средой газа и «сплошных сред» капель. В каждой точке течения состояние сред характеризуется своими скоростями, температурами, внутренними энергиями. Состояние газа определяется скоростями (u, v) , давлением p , плотностью ρ и полной энтальпией H , а параметры среды фракций капель – скоростями (u_i, v_i) , массой капель m_i , условной плотностью «газа» капель ρ_i , квадратами моментов вращения M_i^2 , радиальной составляющей момента вращения M_{2i} , моментом второго порядка радиальной скорости $\langle v_1 v_1 \rangle_i$ и моментом второго порядка компоненты силы Магнуса в радиальной плоскости $\langle v_1 L_2 \rangle_i$, количеством капель в единице объема n_i .

2. Все капли разбиты на K_p фракций. Капли имеют сферическую форму и одинаковый радиус r_i (индекс i – номер фракции). Объемом, занимаемым каплями, пренебрегаем.

3. Течение стационарное.

4. Газ совершенный, химически не реагирующий.

5. Влияние капель на течение газа не учитывается.

6. Процессы коагуляции, вращения и дробления капель при столкновениях учитывались по «монодисперсной» модели осколков И.М. Васенина [9] и А.А. Шрайбера [10].

7. Сила Магнуса учтена в математической модели, предложенной нами в [16].

Система уравнений, описывающая двухфазное осесимметричное течение с учетом сделанных допущений, состоит из системы уравнений для газа и K_p систем уравнения для фракций капель и имеет следующий вид (обозначения такие же, как в [16]):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x}(y\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho v) = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho uv) + \frac{\partial}{\partial x}(y\rho p) = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho p) - p = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y\rho Hu) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho Hv) = 0, \\
 & p = \rho(\gamma - 1)/\gamma \cdot [H - (u^2 + v^2)/2], \quad p = \rho RT, \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y\rho_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho_i v_i) = y[n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \Phi_{ij} \rho_j - \rho_i \sum_{j=1}^{K_p} K_{ij} \Phi_{ij} n_j], \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y n_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(y n_i v_i) = -y n_i \sum_{j=1}^{K_p} K_{ij} \Phi_{ij} n_j, \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y \rho_i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y \rho_i u_i v_i) = \\
 & = y \left[\rho_i \Phi_{Ri} (u - u_i) + n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \rho_j (u_j - u_i) + \rho_i \sum_{j=1}^{K_p} K_{ij} n_j (1 - \Phi_{ij}) (u_j - u_i) - \right. \\
 & \quad \left. - u_i \left(\rho_i \sum_{j=i}^{K_p} K_{ij} \Phi_{ij} n_j - n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \Phi_{ij} \rho_j \right) \right], \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y \rho_i v_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(y \rho_i v_i^2) = \\
 & = y \left[\rho_i \Phi_{Ri} (v - v_i) + n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \rho_j (v_j - v_i) + \rho_i \sum_{j=1}^{K_p} K_{ij} n_j (1 - \Phi_{ij}) (v_j - v_i) - \right. \\
 & \quad \left. - v_i \left(\rho_i \sum_{j=i}^{K_p} K_{ij} \Phi_{ij} n_j - n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \Phi_{ij} \rho_j \right) \right], \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y \rho_i T_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(y \rho_i T_i v_i) = \\
 & = y \left[\rho_i \Phi_{ai} (c_p / c_s) (T - T_i) + n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \rho_j (E_j - E_i) + \rho_i \sum_{j=1}^{K_p} K_{ij} \rho_j (1 - \Phi_{ij}) (E_j - E_i) - \right. \\
 & \quad \left. - T_i \left(\rho_i \sum_{j=i}^{K_p} K_{ij} \Phi_{ij} n_j - n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \Phi_{ij} \rho_j \right) \right], \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y n_i M_i^2 u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(y n_i M_i^2 v_i) + \frac{\partial}{\partial y}(y n_i L_i^2 v_i) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -y \left[2 \varphi_{Mi} M_{2i}^2 + \sum_{j=1}^i K_{ij} \Phi_{ij} n_j n_i (0,5 M_{oij}^2 + M_{2j}^2) - n_i K_{ij} \Phi_{ij} n_j M_i^2 \right], \\
 &\quad \frac{\partial}{\partial x} (y n_i M_{2i} u_i) + \frac{\partial}{\partial y} (y n_i M_{2i} v_i) + \frac{\partial}{\partial y} (y n_i \langle v_1 L_2 \rangle) = \\
 &= y \left[2 \varphi_{Mi} M_{2i} + \sum_{j=1}^i K_{ij} \Phi_{ij} n_j n_i (M_{2i} + M_{2j}) - n_i \sum_{j=i}^{K_p} K_{ij} \Phi_{ij} n_j M_{2i} \right], \\
 &\quad \frac{\partial}{\partial x} (y n_i u_i [\langle v_1 L_2 \rangle_i + v_i M_{2i}]) + \frac{\partial}{\partial y} (y n_i [2 v_i \langle v_1 L_2 \rangle_i + M_{2i} \langle v_1 v_1 \rangle_i + v_i^2 M_{2i}]) + \\
 &\quad \quad + y n_i [(\varphi_{Ri} + \varphi_{Mi} / 2) (\langle v_1 L_2 \rangle_i + v_i M_{2i})] = \\
 &\quad \quad y \left\{ \Delta (v M_{2i})_i + n_i [\varphi_{Ri} M_{2i} v - \varphi_{Mi} \Delta u_i (M_i^2 + M_{2i}^2) / 2] \right\}, \\
 &\quad \frac{\partial}{\partial x} (y \rho_i u_i [v_i^2 + \langle v_1 v_1 \rangle_i]) + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ y \rho_i v_i [v_j^2 + 3 \langle v_1 v_1 \rangle_i] \right\} + y \rho_i \varphi_{Ri} [v_i^2 + \langle v_1 v_1 \rangle_i] = \\
 &\quad \quad y \left\{ \Delta (m v^2)_i + \rho_i [2 \varphi_{Ri} v_i v - 2 \varphi_{Mi} \Delta u_i (M_{2i} v_i + \langle v_1 L_2 \rangle_i)] \right\}, \\
 &\quad \quad K_{ij} = \pi (r_i + r_j)^2 |U_i - U_j| \mathcal{E}_{ij},
 \end{aligned}$$

где: γ – показатель адиабаты для газа, M_{oij}^2 – квадрат момента относительного движения капелек i и j , Φ_{ij} – коэффициент эффективности столкновений, \mathcal{E}_{ij} – коэффициент захвата, K_{ij} – коэффициент коагуляции, умноженный на коэффициент захвата, $\varphi_{Ri}, \varphi_{Mi}, \varphi_{ai}$ – параметры динамического, вращательного и теплового взаимодействия капли с газом, c_p – теплоемкость газа при постоянном давлении, c_B – теплоемкость вещества капли.

Как и в [15], выражения для коэффициентов имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{ij} &= \left[1 + \frac{0.75 \ln(4Stk_{ij})}{2Stk_{ij} - 1.214} \right]^{-2}, \quad Stk_{ij} = \frac{|U_i - U_j| r_i^2 \rho_B}{9 r_j \eta}, \quad r_i < r_j, \\
 \Phi_{ij} &= 1 - 0.247 Re_{Bij}^{0.434} \Gamma^{0.133} \left(\frac{r_i}{r_j} \right)^{0.273}, \quad r_j > r_i, \quad Re_{Bij} = \frac{2|u_i - u_j| \rho_B r_i}{\eta_B}, \quad \Gamma = \frac{\eta_B^2}{2r_j \sigma_B \rho_B}, \\
 \varphi_{Ri} &= \frac{9 f_D \eta}{2 \rho_B r_i^2}, \quad f_D = \frac{C_{Di} Re_{ri}}{24}, \quad \varphi_{Mi} = \frac{15 \eta}{\rho_B r_i^2}, \quad \varphi_{ai} = \frac{3 \eta Nu_i}{2 \rho_B r_i^2 Pr},
 \end{aligned}$$

$C_{Di}, Re_{ri}, Nu_i, Pr$ – соответственно коэффициент аэродинамического сопротивления, относительное число Рейнольдса, число Нуссельта и число Прандтля, Stk_{ij} – число Стокса.

$$E_j - E_i = c_B (T_j - T_i) + 0.5 \cdot (u_j - u_i)^2,$$

где первые четыре уравнения – это законы сохранения массы, количества движения и энергии газа. Следующие два соотношения – это выражение для энтальпии газа H и уравнение состояния. Далее записаны уравнения для частиц соответ-

ственно: сохранения массы, изменения числа частиц i -й фракции, количества движения вдоль оси сопла и в поперечном направлении, энергии частиц, квадрата момента вращения M_i^2 , радиальной составляющей момента вращения M_{2i} , суммы произведения радиальной скорости и радиальной составляющей момента вращения M_{2i} и момента второго порядка – компоненты силы Магнуса в радиальной плоскости $\langle v_1 L_2 \rangle_i$, и последнее – суммы квадрата радиальной скорости и момента второго порядка радиальной скорости $\langle v_1 v_1 \rangle_i$.

Область интегрирования Gg для газовой фазы ограничивалась входным сечением сопла $x = x_n$ и его срезом $x = x_a$, контуром сопла $y = Y(x)$ и осью симметрии: $Gg\{x_n \leq x \leq x_a, 0 \leq y \leq Y(x)\}$. Области интегрирования каплей i -й фракции отличаются от области Gg только верхними границами $y = Y_i(x)$ ($i = 1, \dots, Kp$), где $Y_i(x)$ – предельная линия (траектория) каплей i -й фракции. Для расчета параметров газа используется метод работы [17]. Вся область расчета разбивается на две подобласти: до-трансзвуковую и сверхзвуковую. В качестве правой границы первой подобласти выбирается сечение $x = x_{ss}$, в котором реализуется сверхзвуковое истечение, а вторая подобласть – от $x = x_{ss}$ и до среза сопла. Расчет параметров газа в первой подобласти осуществлялся на основе метода установления. При этом во входном сечении сопла задавались три граничных условия: энтальпия торможения, энтропия и направления вектора скорости. На контуре – условие непротекания, а на оси сопла – условия симметрии потока. Рассчитанные установившиеся значения для параметров течения газа в сечении $x = x_{ss}$ задавались в качестве начальных условий при расчете во второй подобласти. Уравнения для параметров фракций каплей являются x -гиперболическими во всей области течения при $u_i > 0$, поэтому они интегрировались в стационарной постановке во всей расчетной области. Во входном сечении сопла полагалось, что течение «равновесное» [15], и задавалось девять начальных условий:

$$\begin{aligned} u_i(x_n, y) = u(x_n, y), \quad u_i(x_n, y) = u(x_n, y), \quad T_i(x_n, y) = T(x_n, y), \quad M_i^2(x_n, y) = 0, \\ \rho_i(x_n, y) = \rho(x_n, y) \cdot g_i z / (1 - z), \quad n_i(x_n, y) = \rho_i(x_n, y) / m_i, \quad M_{2i}(x_n, y) = 0, \\ \langle v_1 L_2 \rangle_i(x_n, y) = 0, \quad \langle v_1 v_1 \rangle(x_n, y) = 0, \end{aligned}$$

где: g_i – нормированная функция распределения по расходам фракций, которая задавалась нормально-логарифмическим законом распределения каплей по радиусам [15], z – весовая доля каплей. Положение предельных линий тока каплей всех фракций на входе сопла полагалось равным значению ординаты контура сопла: $Y_i(x_n) = Y(x_n)$. В дальнейшем расчет предельных линий каплей определялся следующим образом: $Y_i(x + \Delta x) = Y_i(x) + v_i(x, Y_i) / u_i(x, Y_i) \Delta x$. Если $Y_i(x + \Delta x) > Y(x + \Delta x)$, то полагается $Y_i(x + \Delta x) = Y(x + \Delta x)$ (место выпадения каплей i -й фракции на стенку сопла).

Для численного решения каждой из подсистем газа и фракций каплей области интегрирования преобразовывались в прямоугольные с помощью следующей замены независимых переменных: $\zeta = x, \eta = y / Y(x), \eta_i = y / Y_i(x)$. Уравнения интегрировались в безразмерных переменных.

Для определения двухфазных параметров течения во всей расчетной области сопла Лавалия использовался приближенный метод работы [18]. На первом этапе

выполнялся расчет «равновесного» течения газа во всей расчетной области. На втором этапе осуществлялась маршевая прогонка вдоль сопла уравнений подсистем фракций капель по рассчитанному полю параметров газа. Численная реализация уравнений для газа основана на использовании явной разностной схемы второго порядка точности Мак-Кормака [17].

Подсистемы уравнений для фракций капель являются «жесткими» [15], и для их интегрирования применялась устойчивая явно- неявная разностная схема, также второго порядка точности [9, 11, 20]. Члены уравнений, отвечающие за силовое, вращательное и тепловое взаимодействия между газом и каплями, учитывались неявно, а коагуляционные члены – явно.

Расчеты двухфазных течений проводились для сопла, контур которого в до-транзвуковой области задавался функцией на основе косинуса [8], а в сверхзвуковой области – полиномом третьей степени. $x_n = -1.8$, $y_n = 1.8$, $x_{min} = 0$, $x_a = 10.8$ (все линейные размеры отнесены к радиусу минимального сечения r_{min}). Параметры продуктов сгорания задавались для модельного «равновесного» состава и были взяты из [2].

На рис. 1, 2 показаны предельные линии траекторий капель с учетом силы Магнуса и без учета силы Магнуса. В скобках за номером фракции указан радиус капель в микронах. Верхняя линия – контур сопла. Правая вертикальная линия к оси сопла – срез сопла. Видно, что учет силы Магнуса приводит к более раннему выпадению капель на контур сопла.

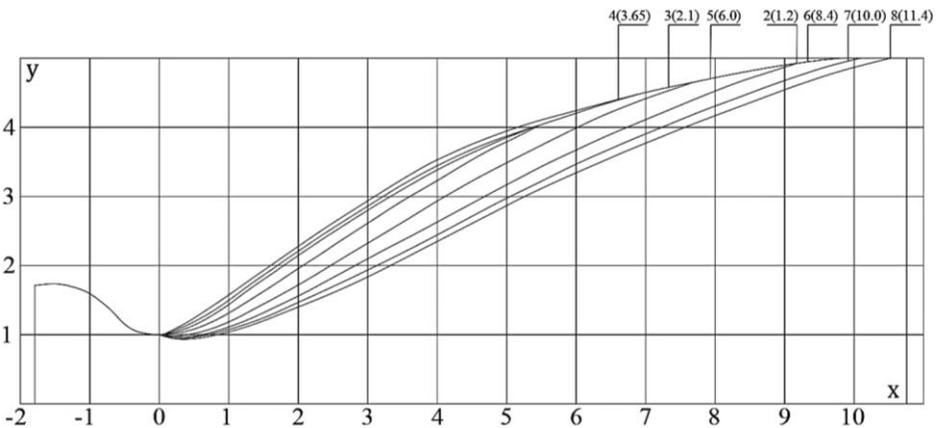


Рис. 1. Предельные линии траекторий капель с учетом силы Магнуса.

В скобках указан радиус частиц в микронах

Fig. 1. Limiting lines of droplet trajectories with account for the Magnus force. The radius of the particles (in microns) is indicated in parentheses

На рис. 3 приведена зависимость безразмерного модуля момента количества движения (номер фракции капель опущен, σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости в капле)

$$\Omega_n = \left\{ \frac{M^2}{\rho\sigma} \left[\frac{4\pi\rho}{3m} \right]^{7/3} \right\}^{1/2}$$

от радиуса капль фракций в точке области сопла с координатами $x = 0.6, y = 0$. Увеличение безразмерного модуля момента количества движения с увеличением радиуса капли приводит к большему влиянию силы Магнуса на крупные капли, чем на мелкие (рис. 4, 5). Здесь указаны линии траекторий капль соответственно радиусов 3.6 и 6 мкм. Верхние – с учетом силы Магнуса, нижние – без учета силы Магнуса.

На рис. 6 представлена зависимость координат выпадения капль на контур сопла от их радиусов. Сплошная линия – с учетом силы Магнуса, штриховая – без учета силы Магнуса.

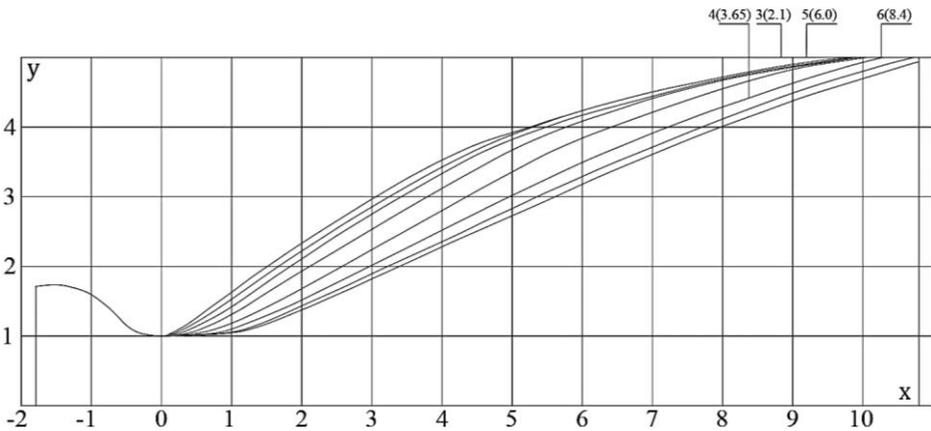


Рис. 2. Предельные линии траекторий капль без учета силы Магнуса.

В скобках указан радиус капль в микронах

Fig. 2. Limiting lines of droplet trajectories with no account for the Magnus force.

The radius of the droplets (in microns) is indicated in parentheses

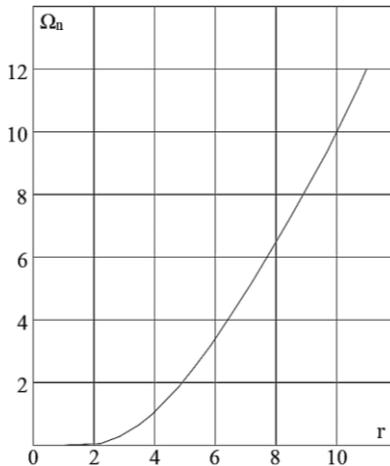


Рис. 3. Зависимость безразмерного модуля момента количества движения от радиуса капль в точке $x = 0.6, y = 0$

Fig. 3. Dimensionless modulus of the angular momentum as a function of the radius of droplets at the point $x = 0.6, y = 0$

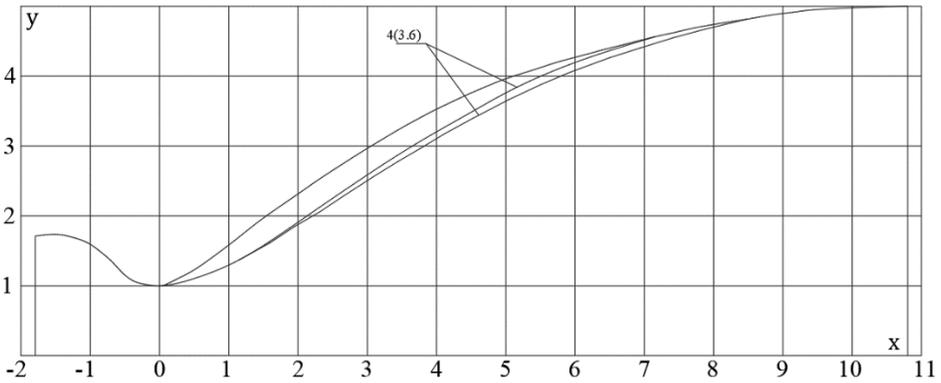


Рис. 4. Линии траекторий капель радиуса 3.6 мкм. Верхняя линия с учетом силы Магнуса, нижняя – без учета силы Магнуса

Fig. 4. Trajectory lines of droplets with a radius of 3.6 microns. The upper and lower lines correspond to the cases with or with no account for the Magnus force, respectively

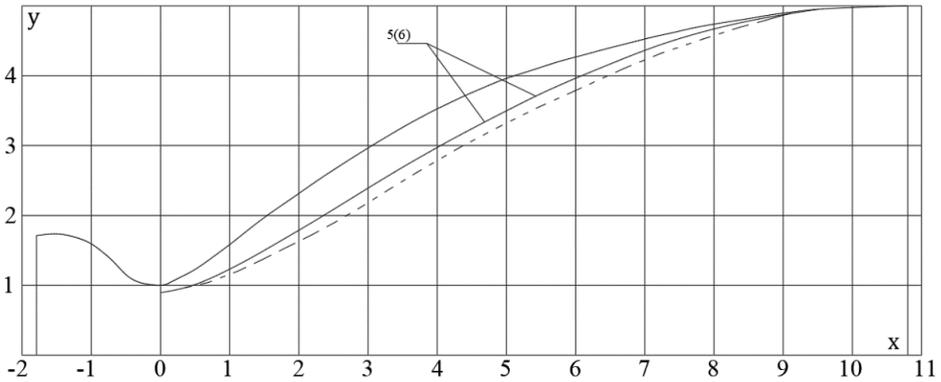


Рис. 5. Линии траекторий капель радиуса 6 мкм. Сплошная линия с учетом силы Магнуса, штриховая – без учета силы Магнуса

Fig. 5. Trajectory lines of droplets with a radius of 6 microns. The solid and dashed lines correspond to the cases with or with no account for the Magnus force, respectively

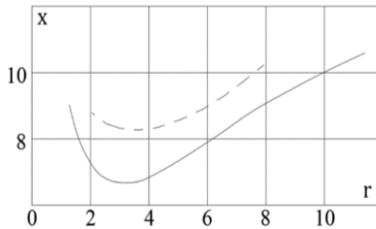


Рис. 6. Зависимость места выпадения от радиуса капель (мкм). Сплошная линия с учетом силы Магнуса, штриховая – без учета силы Магнуса

Fig. 6. Dropout location as a function of the droplet radius (in microns). The solid and dashed lines correspond to the cases with or with no account for the Magnus force, respectively

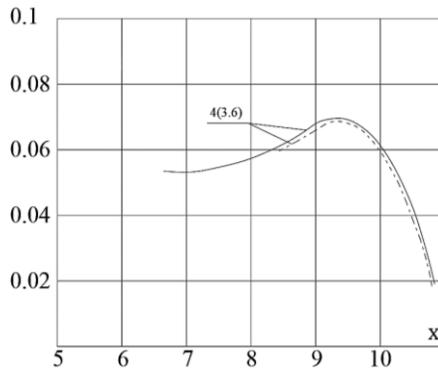


Рис. 7. Зависимость угла встречи (в радианах) со стенкой сопла каплей радиуса 3.6 мкм от абсциссы сопла

Fig. 7. Impact angle (in radians) for the nozzle wall and droplets with a radius of 3.6 microns as a function of the nozzle abscissa

На рис. 7 показана зависимость угла встречи (в радианах) со стенкой сопла каплей радиуса 3.6 мкм от абсциссы сопла. Сплошная линия – с учетом силы Магнуса, штриховая – без учета силы Магнуса. Из рис. 7 наглядно видно, что учет силы Магнуса приводит к более раннему (порядка радиуса минимального сечения) выпадению каплей в сверхзвуковой области сопла и увеличению угла их встречи со стенкой по сравнению с течением без учета силы Магнуса.

Таким образом, результаты расчетов показывают влияние диффузии вращающихся каплей под действием силы Магнуса на места их выпадения на стенку сопла и на углы встречи с контуром сопла. При построении контура сверхзвуковой области сопла следует учитывать указанную диффузию, так как выпадение каплей конденсата может привести к эрозии сопла (вплоть до его разрушения). Дальнейшее уточнение влияния силы Магнуса на интегральные и локальные параметры полидисперсных газок капельных течений связаны с учетом влияния конденсированной фазы на параметры газовой фазы и использованием более общей полидисперсной модели осколков дробления. Для этого требуется уточнение ряда экспериментальных зависимостей по взаимодействию вращающихся каплей разных размеров; в частности, необходимо определить коэффициент эффективности их взаимодействия, число осколков дробления и их угловые скорости.

Список источников

1. Кисаров Ю.Ф., Липанов А.М. Расчет параметров двухфазного течения в осесимметричном сопле Лаваля с учетом коагуляции и дробления частиц // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1975. № 4. С. 161–165.
2. Рычков А.Д. Численное исследование двухфазных течений в осесимметричных соплах Лаваля с учетом процессов коагуляции и дробления частиц конденсата // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1980. № 1. С. 82–90.
3. Бутков В.Г., Васенин И.М., Дьяченко Н.Н. Модель движения полидисперсного конденсата с учетом случайных пульсаций скорости и температуры коагулирующихся частиц // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 3. С. 33–39.
4. Маслов Б.Н., Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Численное исследование особенностей двухфазного течения с коагуляцией и дроблением частиц в осесимметричных соплах Лаваля // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. № 3. С. 145–153.

5. Рычков А.Д., Шрайбер А.А. Осесимметричное полидисперсное двухфазное течение с коагуляцией и дроблением частиц при произвольном распределении осколков по массам и скоростям // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1985. № 3. С. 73–79.
6. Васенин И.М., Архипов В.А., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф. Исследование полидисперсных течений в соплах с учетом вращения частиц // Инженерно-физический сборник статей. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1985. С. 31–35.
7. Глазунов А.А., Васенина Т.В., Еремин И.В., Кувшинов Н.Е. Исследование неравновесных пространственных двухфазных течений в эллиптических соплах с учетом коагуляции, дробления и вращения частиц и полидисперсной модели осколков // Известия вузов. Физика. 2004. № 10. С. 31–36.
8. Glazunov A.A., Vasenin I.M., Ivanov V.A., Kuvshinov N.E., Narimanov R.K. Two-phase flow in the nozzles of solid rocket motors // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11 (4). P. 583–592. doi: 10.2514/3.23884
9. Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1986. 262 с.
10. Шрайбер А.А. Многофазные полидисперсные течения с переменным фракционным составом дискретных включений // Итоги науки и техн. Комплексные и специальные разделы механики. М. : Изд-во ВИНТИ, 1988. Т. 3. С. 3–80.
11. Рычков А.Д. Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. Новосибирск : Наука, 1988. 222 с.
12. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1980. 172 с.
13. Крайко А.Н., Нигматулин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Е. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Гидромеханика. М. : ВИНТИ, 1972. № 6. С. 93–174.
14. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1994. 320 с.
15. Стернин Л.Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М. : Машиностроение, 1974. 212 с.
16. Бушланов В.П., Бутов В.Г., Глазунов А.А. К построению математической модели двухфазного течения в осесимметричном сопле Лаваля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 93–108. doi: 10.17223/19988621/84/8
17. Глазунов А.А., Рычков А.Д. Исследование неравновесных двухфазных течений в осесимметрических соплах Лаваля // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1977. № 5. С. 86–91.
18. Камзолов В.Н., Маслов Б.Н., Пирумов У.Г. Исследование траекторий частиц в соплах Лаваля // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1971. № 5. С. 136–143.
19. MacCormack R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // Journal of Spacecraft and Rockets. 2003. V. 40 (5). С. 757–763. doi: 10.2514/2.6901
20. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течение газа с частицами. М. : Физматлит, 2008. 600 с.

References

1. Kisarov Y.F., Lipanov, A.M. (1975) Calculation of the parameters of two-phase flow in an axisymmetrical laval nozzle allowing for the coagulation and atomization of the particles. *Fluid Dynamics*. 10. pp. 675–679. doi: 10.1007/BF01026718
2. Rychkov A.D. (1980) Numerical investigation of two-phase flows in axisymmetric Laval nozzles with allowance for processes of coagulation and division of condensed particles. *Fluid Dynamics*. 15. pp. 67–74. doi: 10.1007/BF01089815
3. Butov V.G., Vasenin I.M., D'yachenko N.N. (1981) Model of the motion of a polydisperse condensate with allowance for random pulsations of the velocity and temperature of coagulating particles. *Fluid Dynamics*. 16. pp. 350–355. doi: 10.1007/BF01092366

4. Maslov B.N., Sternin L.E., Shraiber A.A. (1982) Numerical investigation of two-phase flow with coagulation and fragmentation of particles in axisymmetric Laval nozzles. *Fluid Dynamics*. 17. pp. 445–451. doi: 10.1007/BF01091284
5. Rychkov A.D. Shraiber A.A. (1985) Axisymmetric polydisperse two-phase flow with particle coagulation and fragmentation for an arbitrary distribution of the fragments by masses and velocities. *Fluid Dynamics*. 20. pp. 398–404. doi: 10.1007/BF01049992
6. Vasenin I.M., Arkhipov V.A., Butov V.G., Glazunov A.A., Trofimov V.F. (1985) Issledovanie polidispersnykh techeniy v soplakh s uchyotom vrashcheniya chastits [Study of polydisperse flows in nozzles taking into account rotation of particles]. *Inzhenerno-fizicheskiy sbornik statey*. Tomsk: Izdatel'stvo TGU. pp. 31–35.
7. Glazunov A.A., Vasenina T.V., Eryomin I.V., Kuvshinov N.E. (2004) Issledovanie neravnovesnykh prostranstvennykh dvukhfaznykh techeniy v ellipticheskikh soplakh s uchyotom koagulyatsii, drobleniya i vrashcheniya chastits i polidispersnoy modeli oskolokov [Study of nonequilibrium spatial two-phase flows in elliptical nozzles taking into account coagulation, fragmentation, and rotation of particles and the polydisperse model of fragments]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 10. pp. 31–36.
8. Glazunov A.A., Vasenin I.M., Ivanov V.A., Kuvshinov N.E., Narimanov R.K. (1995) Two-phase flow in the nozzles of solid rocket motors. *Journal of Propulsion and Power*. 11(4). pp. 583–592. doi: 10.2514/3.23884
9. Vasenin I.M., Arkhipov V.A., Butov V.G., Glazunov A.A., Trofimov V.F. (1986) *Gazovaya dinamika dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Tomsk: Izdatel'stvo TGU.
10. Shrayber A.A. (1988) *Mnogofaznye polidispersnye techeniya s peremennym fraktsionnym sostavom diskretnykh vkluycheniy* [Multiphase polydisperse flows with variable fractional composition of discrete inclusions]. Volume 3. Moscow: VINITI. pp. 3–80.
11. Rychkov A.D. (1986) *Matematicheskoe modelirovaniye gazodinamicheskikh protsessov v kanalakh i soplakh* [Mathematical modeling of gas-dynamic processes in channels and nozzles]. Novosibirsk: Nauka.
12. Sternin L.E., Maslov B.N., Shrayber A.A., Podvysotskiy A.M. (1980). *Dvukhfaznye mono- i polidispersnye techeniya gaza s chastitsami* [Two-phase mono- and polydisperse gas flows with particles]. Moscow: Mashinostroenie.
13. Krayko A.N., Nigmatulin R.I., Starkov V.K., Sternin L.E. (1972) *Mekhanika mnogofaznykh sred* [Mechanics of multiphase media]. *Itogi nauki i tekhniki. Gidromekhanika*. Volume 6. Moscow: VINITI. pp. 93–174.
14. Sternin L.E., Shrayber A.A. (1994) *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase gas flows with particles]. Moscow: Mashinostroenie.
15. Sternin L.E. (1974) *Osnovy gazodinamiki dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Fundamentals of gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Moscow: Mashinostroenie.
16. Bushlanov V.P., Butov V.G., Glazunov A.A. (2023) K postroeniyu matematicheskoy modeli dvukhfaznogo techeniya v osesimmetrichnom sope Lavalya [On the development of a mathematical model of a two-phase flow in an axisymmetric de Laval nozzle]. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 93–108. doi: 10.17223/19988621/84/8
17. Glazunov A.A., Rychkov A.D. (1977) Investigation of nonequilibrium two-phase flows in axisymmetric Laval nozzles. *Fluid Dynamics*. 12. pp. 887–892. doi: 10.1007/BF01090324
18. Kamsolov B.N., Maslov B.N., Pirumov Y.G. (1971) Investigation of particle trajectories in Laval nozzles. *Fluid Dynamics*. 6. pp. 849–856. doi: 10.1007/BF01013868
19. Mac Cormack R.W. (2003) The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 40(5). pp. 757–763. doi: 10.2514/2.6901
20. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2008) *Techenie gaza s chastitsami* [Gas flow with particles]. Moscow: Fizmatlit.

Сведения об авторах:

Бушланов Владимир Петрович – доктор физико-математических наук, профессор Государственного морского университета им. Ф.Ф. Ушакова, Новороссийск, Россия. E-mail: bushlanovvp@yandex.ru

Бутов Владимир Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

Глазунов Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Bushlanov Vladimir P. (Doctor of Physics and Mathematics, Admiral Ushakov Maritime State University, Novorossiysk, Russian Federation). E-mail: bvp@

Butov Vladimir G. (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

Glazunov Anatoliy A. (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 04.03.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 04.03.2023; accepted for publication 10.04.2024

Научная статья

УДК 534.647

doi: 10.17223/19988621/88/7

Виброактивность электромеханических устройств вследствие наличия технологических погрешностей

Виктор Степанович Дмитриев¹, Леонид Леонидович Миньков²,
Дмитрий Владимирович Ермаков³,
Алексей Александрович Моховиков⁴, Виктор Юрьевич Шпильной⁵,
Ростислав Константинович Беликов⁶

² Томский государственный университет, Томск, Россия

^{3, 4, 5, 6} Томский политехнический университет, Томск, Россия

¹ dmitriev@tpu.ru

² lminkov@ff.tsu.ru

³ dvermakov@tpu.ru

⁴ mohovikov@tpu.ru

⁵ vshpilnoy@list.ru

⁶ rkb3@tpu.ru

Аннотация. Рассматривается теоретическое обоснование наличия вибрации в рабочих режимах электромеханических устройств из-за технологических погрешностей, имеющих место при механической обработке деталей и сборке изделий. Показано обоснование наличия плотного спектра вибрации от технологических погрешностей элементов конструкции шарикоподшипников (наружного и внутреннего колец, шариков и сепаратора). В аналитическом виде показана зависимость амплитуды вибрации от величины технологических погрешностей.

Ключевые слова: вибрация, шарикоподшипник, демпфирование, ряд Фурье

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSMN-2020-0028 (теоретические исследования), гранта РНФ № 23-79-10107 (лабораторное оборудование, результаты исследования демпфирующих свойств материалов), гранта РНФ № 23-79-01199 (обработка данных).

Для цитирования: Дмитриев В.С., Миньков Л.Л., Ермаков Д.В., Моховиков А.А., Шпильной В.Ю., Беликов Р.К. Виброактивность электромеханических устройств вследствие наличия технологических погрешностей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 79–93. doi: 10.17223/19988621/88/7

Vibration activity in electromechanical devices caused by technological errors

Viktor S. Dmitriev¹, Leonid L. Minkov², Dmitry V. Ermakov³,
Aleksy A. Mokhovikov⁴, Viktor Yu. Shpil'noi⁵, Rostislav K. Belikov⁶

² Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

^{3, 4, 5, 6} Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

¹ dmitriev@tpu.ru

² lminkov@ff.tsu.ru

³ dvermakov@tpu.ru

⁴ mohovikov@tpu.ru

⁵ vshpilnoy@list.ru

⁶ rkb3@tpu.ru

Abstract. This article discusses a theoretical justification for the presence of vibration in operating modes of electromechanical devices due to technological errors occurring during the machining of parts and assembly of products. The reason for the presence of a dense spectrum of vibration caused by technological errors in the structural elements of ball bearings (outer and inner rings, balls, and cage) is also denoted. The analytical dependence of the vibration amplitude on the magnitude of technological errors is shown.

It follows from the results of the analysis that for the most effective minimization of the vibration activity of an electromechanical device, it is necessary to use broadband damping, which is liquid–viscous in most cases.

In addition to the above, it is advisable to apply damping in the cascade version. When solving the system of vibration equations for an electromechanical device, replacing ball bearings with sliding bearings eliminates the first four terms, which characterize a wide and dense vibration spectrum of the ball bearings in the operating mode of the electromechanical device.

Keywords: vibration, ball bearing, damping, Fourier series

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project no. FSMN-2020-0028 (theoretical research), grants from the Russian Science Foundation, project nos. 23-79-10107 (laboratory equipment, research methodology on the basis of damping characteristics of materials) and 23-79- 01199 (data processing techniques).

For citation: Dmitriev, V.S., Minkov, L.L., Ermakov, D.V., Mokhovikov, A.A., Shpil'noi V.Yu., Belikov, R.K. (2024) Vibration activity in electromechanical devices caused by technological errors. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 79–93. doi: 10.17223/19988621/88/7

Введение

Вопрос минимизации уровня механических вибраций в рабочем режиме механизмов – постоянно актуальная научно-техническая проблема. Механические колебания – весьма распространенный и технически важный вид движения в при-

роде. Механические колебания – это частный случай колебаний, существующих в оптике, электричестве, акустике теории атома и т.п. [1–6].

Физическая сущность механических колебательных систем и их назначение могут быть совершенно различными, однако между колебательными процессами в таких системах есть много общего, так как законы, управляющие этими процессами, одни и те же. Такая универсальность законов позволяет анализировать колебания с единой физико-математической точки зрения. Это значит, что механические колебания можно исследовать через аналогии и сравнения при помощи механической обобщенной модели.

Во всех инженерных задачах, если правильно понята физика колебательного процесса, математика – очень хороший инструмент исследования. Логично составленные математическая модель и алгоритм решения, обоснованно подобранные вычислительные средства – гарантия положительного результата в решении исследуемой научно-технической проблемы.

Следует отметить, что в эффективности решения минимизации виброактивности в рабочих режимах механизмов большое значение играют определение взаимосвязи параметров, определяющих уровень вибрации, и тип демпфирования.

Механизмы с шарикоподшипниковыми опорами продолжают использоваться и еще долго будут применяться в силу их технических достоинств: малых габаритов и веса, простоты и дешевизны, достаточно высоких точности и надежности, малого момента трения, высокой жесткости, способности выдерживать многочисленные запуски и остановки изделий.

В то же время подшипник является неисчерпаемым объектом исследований в качестве источника вибрации, что детально представлено в работе В.Ф. Журавлева и В.Б. Бальмонта [7]. Здесь только отметим, что основной источник вибрации заложен в неидеальности шарикоподшипника: движение сепаратора, переменная жесткость при действии радиальной нагрузки, взаимодействие микронеровностей шероховатых поверхностей, прорывающих масляную пленку в местах контакта шариков с поверхностью дорожек качения, гранность и волнистость рабочих поверхностей колец и шариков.

Проведенные теоретические и экспериментальные исследования [7] показывают, что доминирующими факторами неидеальности являются гранность шариков и волнистость дорожек качения; при исследовании в первом приближении остальные причины считаются несущественными. Такое ограничение позволяет более просто и наглядно решать задачу минимизации параметров вибрационного процесса.

В электромеханических устройствах (ЭМУ) вибрация обусловлена наличием возбуждающих воздействий различной физической природы – механической, электромагнитной, аэродинамической. Их причиной являются различные физические процессы. Например, совпадение частотных гармоник различного порядка с собственной частотой элементов конструкции, дисбаланс вращающихся частей электродвигателя, шумы электромагнитного происхождения от взаимодействия во времени и пространстве магнитных полей, индукции в воздушном зазоре, наличие пазов.

В данной статье причины вибрационного рабочего режима в ЭМУ рассматриваются в логической связи с предлагаемыми техническими решениями по их минимизации.

Цель настоящей статьи – рассмотрение теоретических основ проявления виброактивности в рабочих режимах ЭМУ из-за наличия технологических погрешностей изготовления функциональных узлов.

Причины возникновения вибрации

ЭМУ – это большой класс исполнительных механизмов (от исполнительного органа космических аппаратов до дрели), в которых движителем является электрический двигатель любого типа с установленным на его валу функциональным узлом, определяющим назначение ЭМУ.

Рабочий режим ЭМУ характеризуется генерируемой электродвигателем вибрацией, которая негативно сказывается не только на его надежности и долговечности, но также и на качестве функциональной работы целевой аппаратуры, находящейся в одной с ним технической системе.

Электрический двигатель, являющийся генератором этих вибраций, содержит десяток источников механических колебаний различной физической природы: дисбаланс, электромагнитные явления в электродвигателе, погрешность шарикоподшипников, технологические погрешности конструкции.

Существующие упругие и инерционные силы вызывают одно за другим сжатие и разряжение окружающей среды (колебания), и эти колебания воспринимаются как звук.

Теоретический анализ математической модели ЭМУ проводился с использованием классического математического аппарата теории колебаний. На рис. 1 показано ЭМУ массой M , состоящее из электродвигателя 1, который крепится к неподвижному основанию 2 посредством пружин 3 с жесткостью $k/2$ каждая, и демпфера 4 с коэффициентом демпфирования K_D .

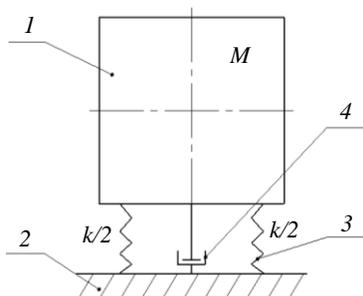


Рис. 1. Расчетная схема
Fig. 1. Design scheme

Любой механизм, являющийся физическим телом и обладающий упругостью конструкции, при действии на него периодических воздействий от неуравновешенных сил инерции находится в колебательном режиме. Соударения рабочих поверхностей деталей подшипников, изготовленных с технологическими погрешностями, электромагнитные явления и тому подобное будут являться причинами наличия вибрационного режима.

В реальных механизмах ЭМУ, содержащих вращающиеся детали в шарикоподшипниковых опорах, как показывают прикладные исследования, в рабочих

режимах существует плотный спектр вибрации с частотой от десятков до десятков тысяч герц.

Для снижения виброактивности ЭМУ на этапе разработки применяются как аналитические методы и способы, так и технические решения, снижающие амплитуду колебаний.

Полностью устранить виброактивность в рабочем режиме не представляется возможным [8, 9], ее можно только минимизировать до приемлемого уровня.

Существующие три способа минимизации виброактивности – уменьшение возбуждающих воздействий, повышение степени демпфирования и «разведение» собственных частот элементов конструкции и частот возбуждающих воздействий – как правило, позволяют получить необходимый минимальный уровень виброактивности в рабочем режиме устройства.

При всех действующих возмущающих воздействиях в механизмах технологические погрешности шарикоподшипников играют доминирующую роль в генерировании вышеуказанного спектра. Отсюда следует, что в проектируемых устройствах должны быть демпфирующие элементы конструкции с широким спектром частотного демпфирования.

Теоретические исследования

Примем следующие обозначения: T – кинетическая энергия системы, Дж; t – время, с; X, Y, Z – оси декартовой системы координат; τ – угол контакта подшипника; ω – угловая скорость вращающегося кольца подшипника, рад/с; ω_c – угловая скорость сепаратора, рад/с; $\omega_{ш}$ – угловая скорость шарика, рад/с; $\omega^1, \omega^3, \omega^5$ – угловая скорость центра шарика относительно не вращающегося кольца подшипника, рад/с; $\omega^2, \omega^4, \omega^6$ – угловая скорость центра шарика относительно вращающегося кольца подшипника, рад/с; ω^7 – угловая скорость шарика вокруг собственной оси, рад/с; U – силовая функция системы; p^1-p^8 – геометрические характеристики неидеального шарикоподшипника, мм; $\mu_k^{\lambda-1}$ – символ Кронекера; ω_p – частота резонансная; ω^S – угловая скорость шарика относительно колец; a_0, a_n, b_n – коэффициенты разложения в ряд Фурье; ξ_λ – коэффициент; $K_{эм}, K$ – коэффициенты жесткости; ψ_λ^S – фаза гармоники; a_λ^S – амплитуда гармоники; S – коэффициент, определяющий деталь шарикоподшипника.

Вышеизложенные причины возникновения вибрации математически корректно описываются применением научных положений теории колебаний. Например, для составления уравнений малых колебаний ЭМУ использован II метод Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial T}{\partial X} &= \frac{\partial U}{\partial X}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial Y} &= \frac{\partial U}{\partial Y}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial Z} &= \frac{\partial U}{\partial Z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Кинетическая энергия механической системы (кинетическая энергия вращающихся частей ЭМУ):

$$2T_B = J\Omega^2 + J_\alpha\alpha + J_\beta\beta. \quad (2)$$

Кинетическая энергия поступательного движения:

$$2T_{II} = M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2). \quad (3)$$

Анализ показывает, что из-за отсутствия маховика на валу ротора кинетическая энергия пренебрежительно мала, поэтому, учитывая силовую функцию от линейного движения всего объекта (3), в результате получаем уравнение малых колебаний объекта в виде:

$$M \frac{d}{dt}(\dot{X}_X + \dot{Y}_Y + \dot{Z}_Z) = XM(X', D_X) + YM(Y', D_Y) + ZM(Z', D_Z). \quad (4)$$

Ввиду независимости движения по каждой оси X, Y, Z уравнение (4) запишется в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} M \frac{d}{dt} \dot{X} &= XM(X', D_X), \\ M \frac{d}{dt} \dot{Y} &= YM(Y', D_Y), \\ M \frac{d}{dt} \dot{Z} &= ZM(Z', D_Z), \end{aligned} \quad (5)$$

где M – масса объекта, X', Y', Z' – скалярные величины координат при воздействии силовых функций [7]; D_X, D_Y, D_Z – скалярные величины воздействия силовых функций [7]; X, Y, Z – координаты по осям воздействия.

Проведя дифференцирование левой части уравнения (5) и подставив возмущающие воздействия в виде силовых функций, действующих на объект по осям X, Y, Z , получим системы уравнений (6)

$$\begin{aligned} M\ddot{X} + C_X \dot{X} + K_X X &= \\ &= me\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + F_{ЭМ} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + (X'_{1-6} D'_{X_{1-6}}) + (X'_7 D'_{X_7}) + f_X(t), \\ M\ddot{Y} + C_Y \dot{Y} + K_Y Y &= \\ &= me\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + F_{ЭМ} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + (Y'_{1-6} D'_{Y_{1-6}}) + (Y'_7 D'_{Y_7}) + f_Y(t), \\ M\ddot{Z} + C_Z \dot{Z} + K_Z Z &= \Sigma(F_{деб} + F_{ЭМ}) \sin \varphi + (Z'_{1-6} D'_{Z_{1-6}}) + (Z'_7 D'_{Z_7}) + f_Z(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_X t + b_n \sin n\omega_X t), \\ f_Y(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_Y t + b_n \sin n\omega_Y t), \\ f_Z(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_Z t + b_n \sin n\omega_Z t). \end{aligned}$$

Правые части (6) после знака равенства представляют возмущающие воздействия, пояснение по которым будет приведено далее по мере рассмотрения математической сущности возбуждающих воздействий в рабочем режиме ЭМУ.

В работе [7] профессоров В.Ф. Журавлева и В.Б. Бальмонта для расчета динамики устройств с шарикоподшипниковыми опорами предложено ввести специальный вид криволинейных координат.

Для понимания физической сути проводимых в дальнейших математических операций тезисно представим описанную в [7] техническую суть этих координат (рис. 2):

– наружное кольцо:

$$\begin{aligned} p^1 &= p^1(\tau, \theta), p^3 = p^3(\tau, \theta), \\ p^5 &= p^5(\tau, \theta); \end{aligned} \quad (7.1)$$

– внутреннее кольцо:

$$\begin{aligned} p^2 &= p^2(\tau, \theta), p^4 = p^4(\tau, \theta), \\ p^6 &= p^6(\tau, \theta); \end{aligned} \quad (7.2)$$

где p^1, p^2 – радиусы кривизны сечения в текущей точке; p^3, p^4 – соответственно максимальное и минимальное расстояние от окружности, проведенной радиусом кривизны из центра кривизны до оси Z ; p^5, p^6 – координаты вдоль оси Z центра кривизны (рис. 2).

Рабочие поверхности колец шарикоподшипников описываются во введенных криволинейных координатах, а шариков – в сферических координатах, отнесенных к центру шариков. Отрезок на поверхности шарика, отсекающий от прямой, проходящей через центр шариков, назван текущим диаметром шарика и обозначается p^7 .

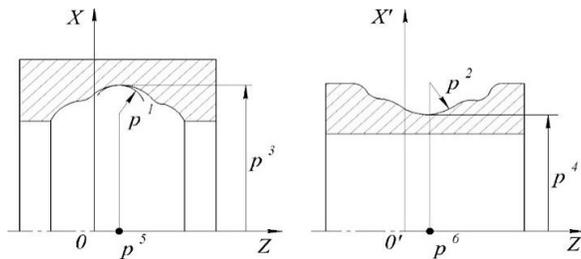


Рис. 2. Описание геометрии дорожек качения неидеального подшипника
Fig. 2. Description of the geometry of non-ideal bearing raceways

Если подшипник идеален, то функции p^i являются константами и принимают следующие значения (8):

$$p^1 = r_1; p^3 = R_1; p^5 = 0; p^2 = r_2; p^4 = R_2; p^6 = 0. \quad (8)$$

Принято, что дефекты поверхности колец и шариков малы, и поэтому шарик имеет две точки контакта с шариками.

Поверхность качения представляется в форме рядов Фурье, полагая, что след проката шарика в первом приближении считается плоской кривой (рис. 3).

С учетом графических интерпретаций (рис. 2–4) угол контакта τ считается постоянным, а по углу θ раскладывается в ряды Фурье через введенные геометрические характеристики.

$$p^s(\theta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}^s \sin(\lambda\theta_s + \varphi_{\lambda}^s), s = 1, \dots, 6. \quad (9)$$

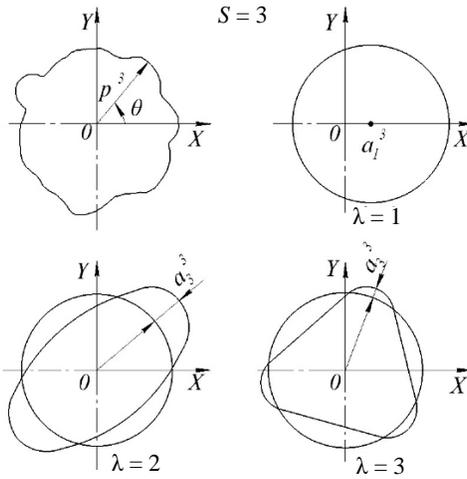


Рис. 3. Графическая интерпретация разложения в ряд Фурье продольного профиля дорожки качения наружного кольца подшипника

Fig. 3. Graphical interpretation of the Fourier expansion for a longitudinal profile of the outer ring raceway of the bearing

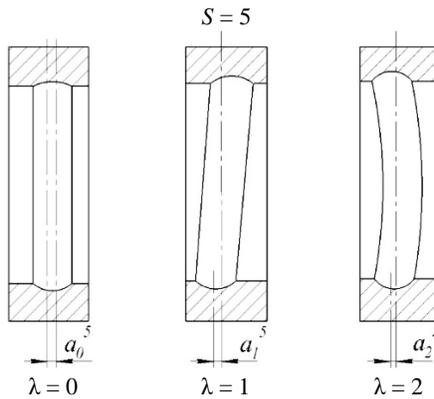


Рис. 4. Графическая интерпретация разложения в ряд Фурье бокового биения дорожки качения наружного кольца подшипника

Fig. 4. Graphical interpretation of the Fourier expansion for a lateral runout of the outer ring raceway of the bearing

Так как угол θ определяется выражением

$$\theta_{si} = k_s \gamma - (-1)^s \frac{2\pi}{n} (i-1), \quad (10)$$

то получается следующее представление погрешности (11)–(14).

$$\Delta p_i^s = p^s(\theta_{si}) - a_{\lambda=0}^s = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda}^s \sin \left[\lambda k_s \gamma - (-1)^s \frac{2\pi\lambda}{n} (i-1) + \phi_{\lambda}^s \right]. \quad (11)$$

Для дефектов шариков принято $s = 7$. Так же, как и в случае колец, траектория точки контакта на шарике в первом приближении считается плоской кривой.

Диаметр шарика p^7 в плоскости этой кривой является периодической функцией угла θ_7 с периодом, равным π . Поэтому можно записать

$$p_i^7(\theta_7) = D_{ш} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda i}^7 \sin(2\lambda\theta_7 + \varphi_{\lambda i}^7), \quad (12)$$

где: $D_{ш}$ – среднее для всех шариков значение диаметра.

Угол поворота шарика относительно линии контакта кинематически связан с углом поворота внутреннего кольца относительно наружного:

$$\theta_7 = k_7\gamma, \quad (13)$$

что позволяет (12) представлять в следующем виде:

$$\Delta p_i^7 = p_i^7 - D_{ш} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda i}^7 \sin(2\lambda k_7\gamma + \varphi_{\lambda i}^7). \quad (14)$$

Возмущающие силы в уравнении вибрации представляются скалярными произведениями векторов $(X', D'_X), (Y', D'_Y), (Z', D'_Z)$. Векторы D_X, D_Y, D_Z определены выражениями

$$D_X^s = \sum_{i=1}^n \Delta p_i^s \cos \varphi_i, \quad D_Y^s = \sum_{i=1}^n \Delta p_i^s \sin \varphi_i, \quad D_Z^s = \sum_{i=1}^n \Delta p_i^s. \quad (15)$$

Входящие сюда переменные Δp_i , характеризующие отклонения размеров неидеального подшипника от размеров среднего идеального подшипника, определяются выражениями (11) и (12), где:

$$\Delta p_i^s = \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda}^s \sin \left[\lambda k^s \gamma_3 - (-T)^s \frac{2\pi\lambda}{n} (i-1) + \varphi_{\lambda}^s \right], & s = 1, 2, \dots, 6; \\ \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda i}^7 \sin(2\lambda k^7 \gamma_3 + \varphi_{\lambda i}^7), & s = 7; \\ \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda 1}^8 \sin \left[\lambda k^1 \gamma_3 + 2 \frac{\pi\lambda}{n} (i-1) + \varphi_{\lambda 1}^8 \right] + \\ + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda 2}^8 \sin \left[\lambda k^2 \gamma_3 - \frac{2\pi\lambda}{n} (i-1) + \varphi_{\lambda 2}^8 \right] + \\ + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda i}^8 (2\lambda k^7 \gamma_3 + \varphi_{\lambda i}^8), & s = 8. \end{cases} \quad (16)$$

В результате векторы D_X, D_Y, D_Z определяются выражениями

$$\begin{aligned} D_X^s &= \frac{n}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \alpha_{\lambda}^s \left\{ \mu_{kn}^{\lambda-1} \sin \left[(\lambda\omega^s + (-1)^s \omega^1) t + \psi_{\lambda}^s \right] + \mu_{kn}^{\lambda+1} \sin \left[(\lambda\omega^s - (-1)^s \omega^1) t + \psi_{\lambda}^s \right] \right\}; \\ D_Y^s &= -\frac{n}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \alpha_{\lambda}^s \left\{ \mu_{kn}^{\lambda-1} \cos \left[(\lambda\omega^s + (-1)^s \omega^1) t + \psi_{\lambda}^s \right] + \right. \\ &\quad \left. + \mu_{kn}^{\lambda+1} \cos \left[(\lambda\omega^s - (-1)^s \omega^1) t + \psi_{\lambda}^s \right] \right\}; \\ D_Z^s &= n \sum_{\lambda/n=1}^{\infty} \alpha_{\lambda}^s \sin(\lambda\omega^s t + \psi_{\lambda}^s). \end{aligned} \quad (17)$$

Векторы X', Y', Z' определяются в соответствии с [7]:

$$X' = \frac{2K_X}{nM} \left\{ \sec \tau_0' - 1, \sec \tau_0' - 1, 1, -1, \operatorname{tg} \tau_0', -\operatorname{tg} \tau_0', -\sec \tau_0', -\frac{3}{2} \operatorname{tg} \tau_0' \right\};$$

$$Y' = \left[(p_0^2 + p_0^4) \operatorname{tg} \tau_0' + l' \right] \frac{M}{A} X'; \quad (18)$$

$$Z' = X' \operatorname{tg} \tau_0'.$$

Осевая жесткость системы:

$$K_X' = \frac{3}{4} n (K_I^{cp'} \sqrt{\delta' \sin \tau_0' \cos^2 \tau_0'} + K_I^{cp''} \sqrt{\delta'' \sin \tau_0'' \cos^2 \tau_0''}).$$

Уравнения вибрации ЭМУ от всех источников возбуждающих воздействий с учетом введенных пояснений имеют вид:

$$\ddot{X} + 2\xi\dot{X} + X = (X' D_X) + m\omega_X^2 + F_{эм}\omega_X^2 + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_X t + b_n \sin n\omega_X t,$$

$$\ddot{Y} + 2\xi\dot{Y} + Y = (Y' D_Y) + m\omega_Y^2 + F_{эм}\omega_Y^2 + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_Y t + b_n \sin n\omega_Y t, \quad (19)$$

$$\ddot{Z} + 2\xi\dot{Z} + Z = (Z' D_Z) + \sum (F_{о\epsilon\delta} + F_{эм}) \sin \varphi + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_Z t + b_n \sin n\omega_Z t,$$

где: $(X' D_X)$, $(Y' D_Y)$, $(Z' D_Z)$ – силовые функции, построенные скалярными произведениями векторов X' , Y' , Z' , зависящие от радиальной жесткости подшипника, угла контакта числа шариков и векторов D_X' , D_Y' , D_Z' ; $m\omega^2$ – возбуждающее воздействие от частотной несбалансированности; $F_{эм}\omega^2$ – возбуждающее воздействие электромагнитного типа. Последний член правой части уравнений (19) определяет периодическое воздействие.

Решение уравнений (19) с учетом всех возмущающих воздействий (8)–(17) имеет вид [4–8]:

$$X_{\Sigma} = \sum_{s=1}^6 \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda}^s X^s \left\{ \frac{\mu_{kn}^{\lambda-1} \sin [(\lambda\omega^s + (-1)^s \omega^1) t + \psi_{\lambda}^s]}{\omega_p^2 - [\lambda\omega^s + (-1)^s \omega^1]^2} + \frac{\mu_{kn}^{\lambda+1} \sin [(\lambda\omega^s - (-1)^s \omega^1) t + \psi_{\lambda}^s]}{\omega_p^2 - [\lambda\omega^s - (-1)^s \omega^1]^2} + \frac{\xi_{\lambda}^y \sin [(2\lambda\omega^7 - \omega^1)t + \chi_{\lambda}^x]}{\omega_p^2 - [\lambda\omega^s + (-1)^s \omega^1]^2} + \frac{n_{\lambda}^x \sin [(2\lambda\omega^7 + \omega^1)t + \rho_{\lambda}^{\lambda}]}{\omega_p^2 - [\lambda\omega^s - (-1)^s \omega^1]^2} \right\} +$$

$$+ \frac{m\omega_X^2}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} +$$

$$+ \frac{F_{эм}\omega_X^2}{K_{эм}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n\omega_X t + b_n \sin n\omega_X t}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}};$$

$$\begin{aligned}
 Y_{\Sigma} = & -\sum_{S=1}^6 \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda}^S X^S n \left\{ \frac{\mu_{kn}^{\lambda-1} \cos[(\lambda\omega^S + (-1)^S \omega^1] t + \psi_{\lambda}^S}{\omega_p^2 - [\lambda\omega^S + (-1)^S \omega^1]^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\mu_{kn}^{\lambda+1} \cos[(\lambda\omega^S - (-1)^S \omega^1] t + \psi_{\lambda}^S}{\omega_p^2 - [\lambda\omega^S - (-1)^S \omega^1]^2} + \right. \\
 & \left. + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\xi_{\lambda}^Y \sin[(2\lambda\omega^7 - \omega^1)t + \chi_{\lambda}^Y]}{\omega_p^2 - [\lambda\omega^S + (-1)^S \omega^1]^2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{n_{\lambda}^Y \sin[(2\lambda\omega^7 + \omega^1)t + \rho_{\lambda}^Y]}{\omega_p^2 - [\lambda\omega^S - (-1)^S \omega^1]^2} \right\} + \\
 & + \frac{m\omega_Y^2}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} + \\
 & + \frac{F_{\text{ЭМ}}\omega_Y^2}{K_{\text{ЭМ}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n\omega_Y t + b_n \sin n\omega_Y t}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}; \quad (20) \\
 Z_{\Sigma} = & \sum_{S=1}^6 \sum_{\lambda/n=1}^{\infty} Z^S n \left\{ \frac{a_{\lambda}^S \sin(\lambda\omega^S t + \psi_{\lambda}^S)}{\omega_0^2 - (\lambda\omega^S)^2} \right\} + \\
 & + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\xi \lambda^Z \sin(2\lambda\omega^7 + \chi_{\lambda}^Z)}{\omega_0^2 - (\lambda\omega^S)^2} + \sum (F_{\text{дсб}} + F_{\text{эм}}) \sin \varphi + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n\omega_Z t + b_n \sin n\omega_Z t}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}.
 \end{aligned}$$

Система уравнений (20) описывает виброактивность в рабочем режиме ЭМУ во всем спектре возмущающих воздействий, т.е. описывает динамику вибрации по всему плотному спектру. Уравнения (20) являются несвязанными, а система X, Y, Z декартовая.

При установке демпферов в ЭМУ [8] в уравнениях по осям X и Y в первом, пятом и шестом членах будет введено эффективное демпфирование, и динамика виброактивности ЭМУ качественно изменится в части уменьшения амплитуды вибраций [9–12].

Наиболее радикальный способ качественно сократить спектр частот – это замена подшипников качения на подшипники скольжения, тогда исчезают первые четыре члена в уравнении, которые показывают наличие генерации вышеуказанного плотного спектра частот.

Используя принцип суперпозиции, на рис. 5 показан пример решения в графическом виде для каждого члена системы уравнений (20) с учетом оптимизации.

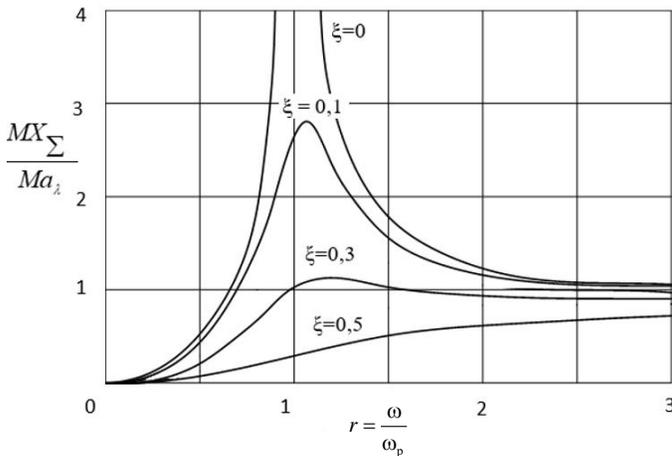


Рис. 5. Графическое решение системы уравнений (20)
Fig. 5. Graphical solution to the system of equations (20)

Первый член правой части уравнений X_{Σ}, Y_{Σ} (20) определяет воздействие на систему, создаваемое волнистостью наружного кольца шарикоподшипника, второй член – волнистостью рабочей поверхности внутреннего кольца.

Первый член уравнения Z_{Σ} определяет механическое воздействие от волнистости внутреннего и наружного колец. Третий и четвертый члены уравнений X_{Σ} определяют механическое воздействие на систему волнистости шариков, а в уравнении Z_{Σ} такое воздействие определяет второй член. Пятый член в уравнениях X_{Σ}, Y_{Σ} определяет воздействие на систему дисбаланса, а шестой – электромагнитное воздействие. Периодическое воздействие определяет последний член правых частей уравнений $X_{\Sigma}, Y_{\Sigma}, Z_{\Sigma}$ представляющий это воздействие в виде разложений на гармонические составляющие при помощи ряда Фурье.

Заключение

Наличие технологических погрешностей в функциональных узлах является определяющим для уровня виброактивности.

Система уравнений динамики ЭМУ с электродвигателем показывает, что в них из-за технологических погрешностей режим вибрационных возмущений является неотъемлемой частью рабочего режима.

Общая система дифференциальных уравнений динамики представляет довольно большую математическую модель рабочего режима вибрации ЭМУ, в правой части которой содержатся практически все возмущающие воздействия, значительную долю которых генерируют шарикоподшипниковые опоры.

Замена шарикоподшипников на опоры скольжения позволит в системе уравнений (20) избавиться от первых четырех членов, которые характеризуют широкий и плотный спектр вибрации шарикоподшипников в рабочем режиме ЭМУ.

Из представленного материала следует, что для наиболее эффективной минимизации виброактивности ЭМУ необходимо использовать широкополосное

демпфирование, а также целесообразно применять демпфирование в каскадном варианте.

Важным результатом НИР по шарикоподшипниковым опорам является то обстоятельство, что влияние на уровень вибраций оказывают только номера гармоник, кратные числу шариков. Все другие гармоники волнистости колец хотя и вызывают возмущающие воздействия, но амплитуда этих возмущений на порядок меньше. В отличие от колец любая четная гармоника волнистости шариков приводит к появлению вибрационных возмущений уже в первом приближении.

Для снижения виброактивности ЭМУ наиболее целесообразно в его конструкцию встраивать жидкостные демпферы, имеющие широкий спектр виброгашения.

Список источников

1. *Qu Y., Su J., Hua H., Meng G.* Structural vibration and acoustic radiation of coupled propeller-shafting and submarine hull system due to propeller forces // *Journal of Sound and Vibration*. 2017. V. 401. P. 76–93. doi: 10.1016/j.jsv.2017.03.034
2. *Korovin G., Gavrilin A., Petrushin S., Odnokopylov G., Ermakov D.* Improving the Surface of Titanium Alloys with Wave Cutters // *Recent Developments in the Field of Non-Destructive Testing, Safety and Materials Science. ICMTNT 2021. Studies in Systems, Decision and Control / E. Lysenko, A. Rogachev, O. Starý (eds.)*. Cham : Springer, 2023. V. 433. doi: 10.1007/978-3-030-99060-2_7
3. *Попов И.П.* Реактансы и сассептансы механических систем // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 70. С. 64–75. doi: 10.17223/19988621/70/6.
4. *Попов И.П.* Символическое представление вынужденных колебаний разветвленных механических систем // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 72. С. 118–130. doi: 10.17223/19988621/72/10
5. *Алифов А.А., Фарзалиев М.Г.* О расчете методом линеаризации взаимодействия параметрических и автоколебаний при запаздывании и ограниченном возбуждении // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 68. С. 41–52. doi: 10.17223/19988621/68/4
6. *Антонов Е.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Влияние нелинейной жесткости упругих элементов на динамику двухмассового микромеханического гироскопа L-L-типа в режиме вынужденных колебаний // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 57. С. 53–61. doi: 10.17223/19988621/57/4
7. *Журавлев В.Ф., Бальмонт В.Б.* *Механика шарикоподшипников гироскопов / под ред. Д.М. Климова*. М. : Машиностроение, 1985.
8. *Дмитриев В.С., Миньков Л.Я., Костюченко Т.Г., Дердященко В.В., Панфилов Д.С., Ермаков Д.В.* Минимизация виброактивности малощумных вентиляторов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 76. С. 101–117. doi: 10.17223/19988621/76/8
9. *Ermakov D., Dmitriev V.* Solid State Damper Based on Foam Aluminum to Reduce Vibration Activity of Electromechanical Devices // *Recent Developments in the Field of Non-Destructive Testing, Safety and Materials Science. ICMTNT 2021. Studies in Systems, Decision and Control / E. Lysenko, A. Rogachev, O. Starý (eds.)*. Cham : Springer, 2023. V. 433. doi: 10.1007/978-3-030-99060-2_8.
10. *Zaccardo V.M., Buckner G.D.* Active magnetic dampers for controlling lateral rotor vibration in high-speed rotating shafts // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021. V. 152. Art. 107445. doi: 10.1016/j.ymsp.2020.107445

11. Yang D., Zhu Y., Xie X., Zhang Z. Active vibration suppression at bearing pedestals in an elastically supported shafting system via non-contact electromagnetic actuators // *Journal of Vibration and Control*. 2022. V. 29 (19-20). doi: 10.1177/10775463221122119
12. Liu N., Li C., Yin C., Dong X., Hua H. Application of a dynamic antiresonant vibration isolator to minimize the vibration transmission in underwater vehicles // *Journal of Vibration and Control*. 2018. V. 24 (17). P. 3819–3829. doi: 10.1177/1077546317711538

References

1. Qu Y., Su J., Hua H., Meng G. (2017) Structural vibration and acoustic radiation of coupled propeller-shafting and submarine hull system due to propeller forces. *Journal of Sound and Vibration*. 401. pp. 76–93. doi: 10.1016/j.jsv.2017.03.034
2. Korovin G., Gavrilin A., Petrushin S., Odnokopylov G., Ermakov D. (2023) Improving the Surface of Titanium Alloys with Wave Cutters. In: *Recent Developments in the Field of Non-Destructive Testing, Safety and Materials Science. ICMTNT 2021. Studies in Systems, Decision and Control*. Springer. 433. doi: 10.1007/978-3-030-99060-2_7
3. Popov I.P. (2021) Reaktansy i sasseptansy mekhanicheskikh sistem [Reactances and susceptances of mechanical systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 70. pp. 64–75. doi: 10.17223/19988621/70/6
4. Popov I.P. (2021) Simvolicheskoe predstavlenie vyzhdennykh kolebaniy razvetvlyennykh mekhanicheskikh sistem [Symbolic representation of forced oscillations of branched mechanical systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 72. pp. 118–130. doi: 10.17223/19988621/72/10
5. Alifov A.A., Farzaliev M.G. (2020) O raschete metodom linearizatsii vzaimodeystviya parametricheskikh i avtokolebaniy pri zapazdyvanii i ogranichenom vozvuzhdenii [On the calculation by the method of linearization of the interaction of parametric and self-oscillations at delay and limited excitation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 41–52. doi: 10.17223/19988621/68/4
6. Antonov E.A., Merkur'ev I.V., Podalkov V.V. (2019) Vliyaniye nelineynoy zhestkosti uprugikh elementov na dinamiku dvukhmassovogo mikromekhanicheskogo giroskopa L-L-tipa v rezhime vyzhdennykh kolebaniy [Influence of nonlinear rigidity of elastic elements on the L–L type two-mass micromechanical gyroscope dynamics in a forced-oscillation regime]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 54–62. doi: 10.17223/19988621/57/4
7. Zhuravlyov V.F., Bal'mont V.B. (1985) *Mekhanika sharikopodshipnikov giroskopov* [Mechanics of ball bearings in gyroscopes]. Moscow: Mashinostroyeniye.
8. Dmitriev V.S., Minkov L.L., Kostyuchenko T.G., Derdiyashchenko V.V., Panfilov D.S., Ermakov D.V. (2022) Minimizatsiya vibroaktivnosti maloshumnykh ventilyatorov [Minimizing vibration of low-noise fans]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 101–117. doi: 10.17223/19988621/76/8
9. Ermakov D., Dmitriev V. (2023) Solid State Damper Based on Foam Aluminum to Reduce Vibration Activity of Electromechanical Devices. In: *Recent Developments in the Field of Non-Destructive Testing, Safety and Materials Science. ICMTNT 2021. Studies in Systems, Decision and Control*. Springer. 433. doi: 10.1007/978-3-030-99060-2_8
10. Zaccardo V.M., Buckner G.D. (2021) Active magnetic dampers for controlling lateral rotor vibration in high-speed rotating shafts. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 152. Article 107445. doi: 10.1016/j.ymssp.2020.107445

11. Yang D., Zhu Y., Xie X., Zhang Z. (2022) Active vibration suppression at bearing pedestals in an elastically supported shafting system via non-contact electromagnetic actuators. *Journal of Vibration and Control*. 29(19–20). doi: 10.1177/10775463221122119
12. Liu N., Li C., Yin C., Dong X., Hua H. (2018) Application of a dynamic antiresonant vibration isolator to minimize the vibration transmission in underwater vehicles. *Journal of Vibration and Control*. 24(17). pp. 3819–3829. doi: 10.1177/1077546317711538

Сведения об авторах:

Дмитриев Виктор Степанович – доктор технических наук, профессор, Томск, Россия. E-mail: dmitriev@tpu.ru

Миньков Леонид Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической физики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Ермаков Дмитрий Владимирович – кандидат технических наук, ассистент отделения машиностроения Инженерной школы новых производственных технологий Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: dvermakov@tpu.ru

Моховиков Алексей Александрович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой – руководитель отделения машиностроения на правах кафедры Инженерной школы новых производственных технологий Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: mohovikov@tpu.ru

Шпильной Виктор Юрьевич – кандидат технических наук, научный сотрудник Лаборатории лазерной вибродиагностики материалов Центра промышленной томографии Инженерной школы неразрушающего контроля и безопасности Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: vshpilnoy@list.ru

Беликов Ростислав Константинович – аспирант, инженер Лаборатории лазерной вибродиагностики материалов Центра промышленной томографии Инженерной школы неразрушающего контроля и безопасности Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: rkb3@tpu.ru

Information about the authors:

Dmitriev Viktor S. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dmitriev@tpu.ru

Minkov Leonid L. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Ermakov Dmitry V. (Candidate of Technical Sciences, Assistant, Engineering School of New Production Technologies of the Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dvermakov@tpu.ru

Mokhovikov Aleksey A. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department, Engineering School of New Production Technologies of the Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mohovikov@tpu.ru

Shpil'noi Viktor Yu. (Candidate of Technical Sciences, researcher at the laboratory “Laser Vibrodiagnostics of materials” Center of industrial tomography School of Nondestructive Testing & Security of Tomsk Polytechnic University). E-mail: vshpilnoy@list.ru

Belikov Rostislav K. (PhD student, engineer at the laboratory “Laser Vibrodiagnostics of materials” Center of industrial tomography School of Nondestructive Testing & Security of Tomsk Polytechnic University). E-mail: rkb3@tpu.ru

Статья поступила в редакцию 20.11.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 20.11.2023; accepted for publication 10.04.2024

Научная статья

УДК 539.422.53

doi: 10.17223/19988621/88/8

Численное исследование направления роста трещины в квазихрупком материале в градиентном поле температуры

Андрей Васильевич Заболотский¹, Андрей Иванович Дмитриев²

¹ ООО «Группа «Магнезит»», Сатка, Россия

^{1,2} Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН, Томск, Россия

² Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ zabolotsky@bk.ru

² dmitr@ispms.ru

Аннотация. Исследуется процесс роста трещины эллиптической формы в квазихрупком материале, находящемся в градиентном поле температуры. Предполагается, что упругие свойства материала имеют температурную зависимость, что характерно для материалов, находящихся вблизи температуры плавления. Показано, что в зависимости от ориентации оси трещины относительно направления температурного градиента возможны торможение, изменение направления роста трещины либо возникновение вторичных трещин в окрестности вершины основной трещины. Полученные расчетные результаты были успешно валидированы экспериментом по термическому разрушению блоков пресноводного льда.

Ключевые слова: хрупкое разрушение, температура плавления, расчет траектории трещин, предплавление

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта № 22-19-00688, <https://rscf.ru/project/22-19-00688>).

Для цитирования: Заболотский А.В., Дмитриев А.И. Численное исследование направления роста трещины в квазихрупком материале в градиентном поле температуры // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 94–110. doi: 10.17223/19988621/88/8

Original article

Numerical study of the crack growth direction within a quasi-brittle material in a gradient temperature field

Andrey V. Zabolotskiy¹, Andrey I. Dmitriev²

¹ Magnezit Group, Satka, Russian Federation

^{1,2} Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation

² Tomsk State University, Томск, Россия

¹ zabolotsky@bk.ru

² dmitr@ispms.ru

Abstract. The elliptical crack growth in a quasi-brittle material located in a gradient field of temperature next to the melting temperature for the thermodynamic phases of the material is studied. The elastic properties of the material are assumed to have an obvious dependence on temperature. This is typical for materials located close to the melting point. To determine the direction of crack growth, a gradient strain criterion is introduced, which assumes crack growth from the point of maximum elastic strain of the material toward its minimum. Depending on the orientation of the crack axis relative to the direction of the temperature gradient, the crack retardation, the change of the crack growth direction, or the appearance of secondary lateral cracks in the vicinity of the main crack tip are possible. The calculated results and the admissibility of applying the introduced criterion have been successfully validated by an experiment with thermal fracture of freshwater ice blocks. As a result, the phenomena predicted by finite element calculations have also been discovered experimentally.

Keywords: brittle fracture, melting temperature, crack trajectory calculation, premelting

Acknowledgments: This work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 22-19-00688).

For citation: Zabolotskiy, A.V., Dmitriev, A.I. (2024) Numerical study of the crack growth direction within a quasi-brittle material in a gradient temperature field. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 94–110. doi: 10.17223/19988621/88/8

Введение

Плавление поликристаллических материалов происходит в некотором интервале температур, зависящем в том числе от размеров зерен, составляющих материал [1], причем нижняя граница интервала находится ниже температуры плавления монокристалла данного вещества. Причина этого – поверхностные эффекты плавления, приводящие к появлению жидкой фазы на границах зерен при температурах существенно ниже точки плавления [2], что может стать причиной проскальзывания и вращения зерен или их агрегатов относительно друг друга. В результате изменяются интегральные упругие характеристики массивного материала, он проявляет особые механические свойства вблизи температуры плавления – так называемый «эффект предплавления», или ползучесть [3–5].

Изменение упругих свойств материала также влияет на эволюцию трещин, что может выражаться в изменении не только скорости их роста, но и направления. Учет этого фактора важен, например, для анализа термического разрушения материалов такого класса, как огнеупоры, которые применяются в качестве ограждения для осуществления высокотемпературных процессов в промышленности, часто протекающих при температуре более 1 500°С.

Огнеупоры представляют собой квазихрупкие при обычных условиях керамические материалы. Однако при температуре эксплуатации, близкой к температуре плавления материала или его отдельных компонентов, огнеупорные материалы за счет эффекта предплавления проявляют пластические свойства [5–7]. При

этом распространенной является ситуация, когда вблизи рабочей (горячей) поверхности имеет место пластическая деформация, а на противоположной стороне наблюдается хрупкое растрескивание [8].

Непосредственное наблюдение разрушения огнеупорных футеровок при эксплуатации невозможно вследствие высокой температуры. Для исследования динамики разрушения огнеупоров наиболее эффективным представляется использование методов компьютерного моделирования [9–11]. Эффективность численной модели будет определяться тем, насколько точно результаты моделирования согласуются с данными эксперимента. Поскольку рабочие условия огнеупорных футеровок являются экстремальными, экспериментальная валидация численной модели может быть проведена на материалах, которые проявляют подобные эффекты предплавления, но при более низких температурах. К таким материалам относится, например, пресноводный лед в интервале температур от -5 до 0°C [12–15].

Цель работы – изучение характера напряженно-деформированного состояния (НДС) в окрестности вершины трещины, а также влияния ориентации трещины по отношению к градиенту температурного поля на особенности ее роста. Исследования выполнены с использованием метода конечных элементов с экспериментальной валидацией численной модели на примере анализа характера разрушения пресноводного льда.

Описание численной модели

Рассматривался трехмерный образец квазихрупкого материала ортогональной формы конечных размеров, находящийся в температурном поле, обладающем выраженным градиентом. Одна часть образца находилась в условиях относительно низкой температуры («холодная» часть), а противоположная – вблизи температуры плавления («горячая» часть). Модуль упругости и коэффициент Пуассона моделируемого материала в условиях его приближения к температуре плавления описывали линейными зависимостями, что является распространенной практикой для моделирования НДС при переменных температурах [16–19]:

$$\begin{cases} E = -k_1(T - T_0) + C_1 \\ \nu = k_2(T - T_0) + C_2 \end{cases} \quad (1)$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, k_1 и k_2 – положительные коэффициенты (знак «минус» показывает обратно пропорциональную зависимость), T_0 – температура нижней границы интервала предплавления, C_1 и C_2 – константы, численно равные показателям свойств материала в «холодном» состоянии (при температуре ниже проявления эффектов предплавления).

Характеристики огнеупорного материала на основе оксида магния – одного из основных огнеупорных материалов, применяемых при производстве сталей, для которого изменение упругих характеристик в результате предплавления происходит в интервале температур $1\ 350$ – $1\ 450^{\circ}\text{C}$, – приведены в табл. 1. Считалось, что характеристики материала в температурном интервале меняются линейно.

В качестве геометрической модели рассматривалась эллиптическая трещина конечных размеров, представляющая собой сектор эллипсоида вращения, в сплошном твердом теле, находящаяся под действием сжимающей нагрузки интенсивностью $P = 30$ МПа, направленной параллельно длинной оси трещины. Противоположная грань образца с трещиной была закреплена, причем допускалась

деформация материала в плоскости закрепления (рис. 1). Перемещения перпендикулярно плоскости закрепления (обозначена стрелками снизу) были запрещены.

Таблица 1

Характеристики периклазового огнеупора вблизи температуры эксплуатации

Свойства	Значения	
	При температуре менее 1 350°C	При температуре более 1 450°C
Модуль упругости, Па	10^{11}	10^{10}
Коэффициент теплового расширения $1/^\circ\text{C}$	10^{-5}	
Коэффициент Пуассона	0.15	0.45
Плотность, кг/м^3	3 000	

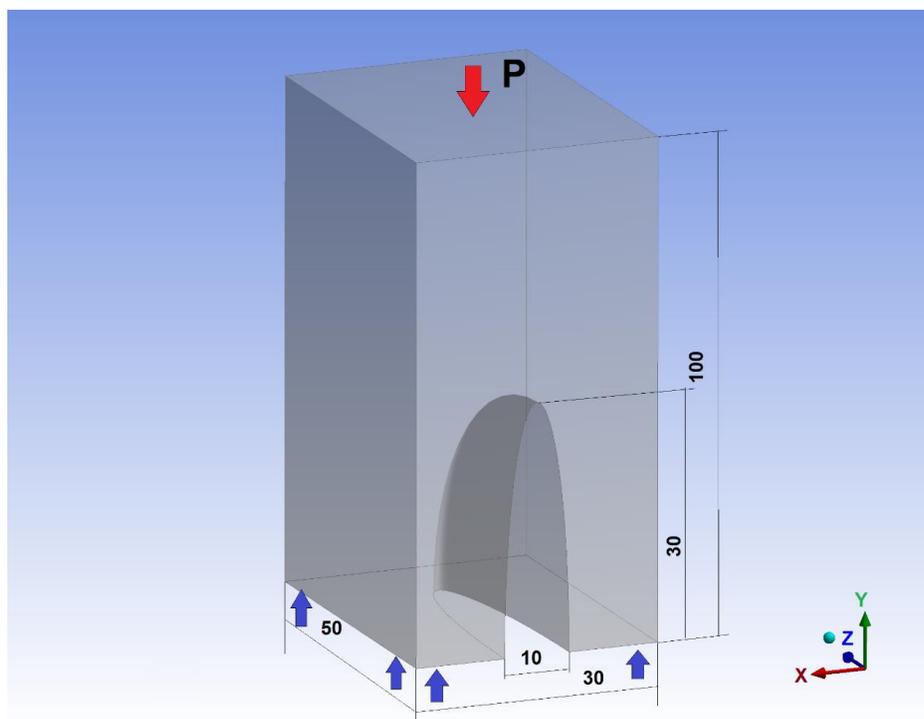


Рис. 1. Схема модельного образца с эллиптической трещиной

Fig. 1. Design of a sample with an elliptical crack

Рассматривали два предельных случая положения оси трещины: параллельно и перпендикулярно градиенту температурного поля. Соответствующие температурные поля приведены на рис. 2. Температурное поле определяли путем решения уравнения теплопроводности с граничными условиями первого и третьего рода. НДС возникало за счет собственного теплового расширения материала. Материал считали хрупким, поэтому рост трещин рассматривали как результат нормального отрыва. Критерием начала роста трещины было превышение одним

из главных напряжений критического значения. Для численного анализа направления роста трещины использовался градиентный деформационный критерий, суть которого заключается в следующем: направление развития трещины при наличии градиента поля упругих деформаций происходит в направлении от их максимума к минимуму [20]:

$$a\vec{c} = -grad(\epsilon), \quad (2)$$

где a – параметр, связывающий приращение длины трещины с уровнем упругой деформации в окрестности ее вершины, \vec{c} – вектор, определяющий направление роста, ϵ – максимальные нормальные упругие деформации материала, являющиеся основной причиной разрушения для хрупкого тела.

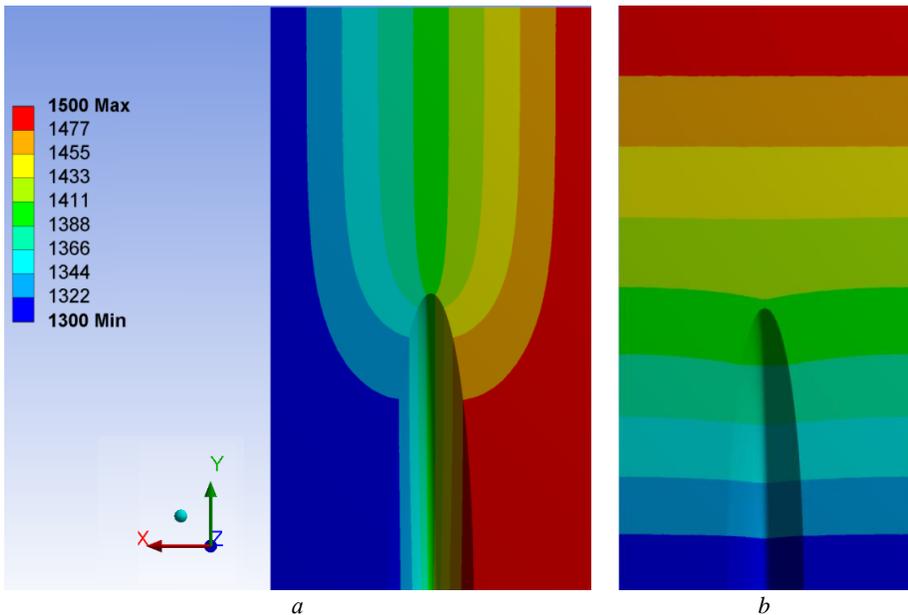


Рис. 2. Распределение температуры ($^{\circ}\text{C}$) в образце, когда ось трещины была перпендикулярна (a) и параллельна (b) градиенту температуры.

Здесь и далее представлен вид сбоку в плоскости XZ

Fig. 2. Temperature ($^{\circ}\text{C}$) distribution within a sample with a crack axis (a) perpendicular and (b) parallel to the temperature gradient. Hereinafter, a side view in XZ -plane is presented

Ранее подобный критерий был использован [21] для определения момента времени и локализации области разрушения для силикатных стекол при интенсивном теплообмене при низких температурах, но не использовался для определения направления распространения трещин.

Все расчеты были выполнены методом конечных элементов в среде программного комплекса Ansys Mechanical R15.0. Расчетная сетка состояла из тетраэдрических элементов, а их количество – 1,1 млн – выбиралось из условия сходимости численного решения. Расчеты, выполненные на сетках с содержанием от 0,2 до 2,2 млн конечных элементов, показали, что увеличение числа элементов сверх 1 млн не приводит к изменению значений параметров НДС в контрольных точках

более чем на 2%. В работе были использованы стандартные процедуры построения сеток, предусмотренные программным комплексом.

Результаты численного моделирования

Нагружение сжатием хрупких материалов в направлении оси трещины при отсутствии дополнительных термических напряжений (градиента температуры) вызывает ее рост вдоль оси приложения нагрузки [22, 23]. При этом ось трещины является осью симметрии для эпюры характеристик НДС (например, упругих деформаций) в окрестности вершины трещины.

На рис. 3 приведено поле упругих деформаций в окрестности вершины трещины для материала с постоянными значениями упругих свойств (контрольный случай) в рассмотренном поле температур. При этом задача решалась в стационарной постановке, когда температурное поле объекта в процессе счета оставалось неизменным. За счет температурных деформаций тела (горячая сторона расширяется сильнее) нарушается симметрия поля упругих деформаций в случае, представленном на рис. 3, *a*. Согласно выбранному градиентному деформационному критерию, следует ожидать отклонения направления роста трещины от первоначального в сторону менее растянутой области материала, т.е. в сторону меньшей температуры. В случае если трещина растет вдоль направления градиента температуры, изменения траектории ее роста не наблюдается (рис. 3, *b*).

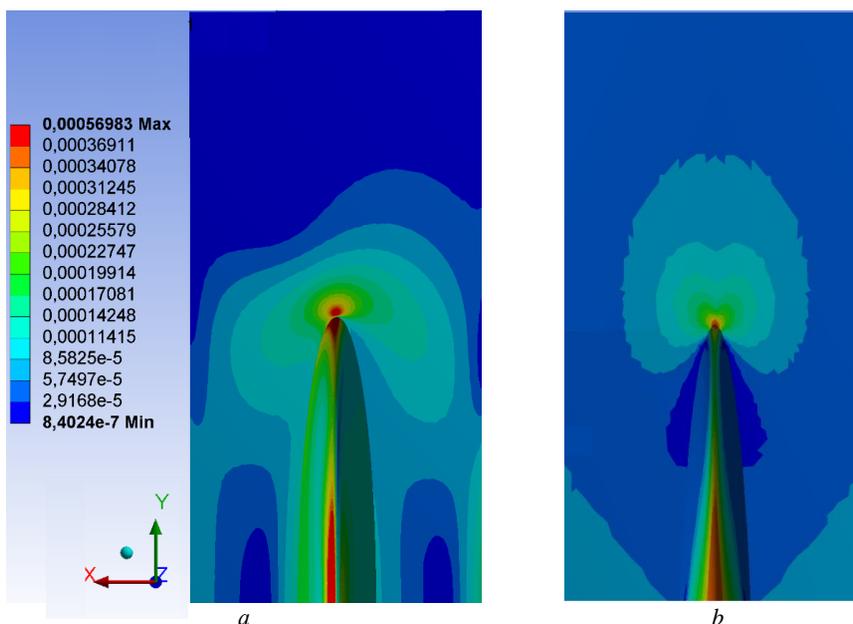


Рис. 3. Распределение упругих деформаций в окрестности вершины трещины в образце для случая, когда ось трещины была перпендикулярна (*a*) и параллельна (*b*) градиенту температурного поля. Упругие характеристики материала не зависят от температуры

Fig. 3. Distribution of elastic strains near the crack tip within a sample with a crack axis (*a*) perpendicular and (*b*) parallel to the temperature gradient. The elastic characteristics of the material do not depend on temperature

При развитии трещины в материале, обладающем упругими свойствами, зависящими от температуры, при наличии ее градиента (см. рис. 2) картина упругих деформаций будет существенно отличаться от приведенной на рис. 3. На рис. 4 представлены эпюры упругих деформаций материала, свойства которого приведены в табл. 1, а граничные условия сформулированы выше.

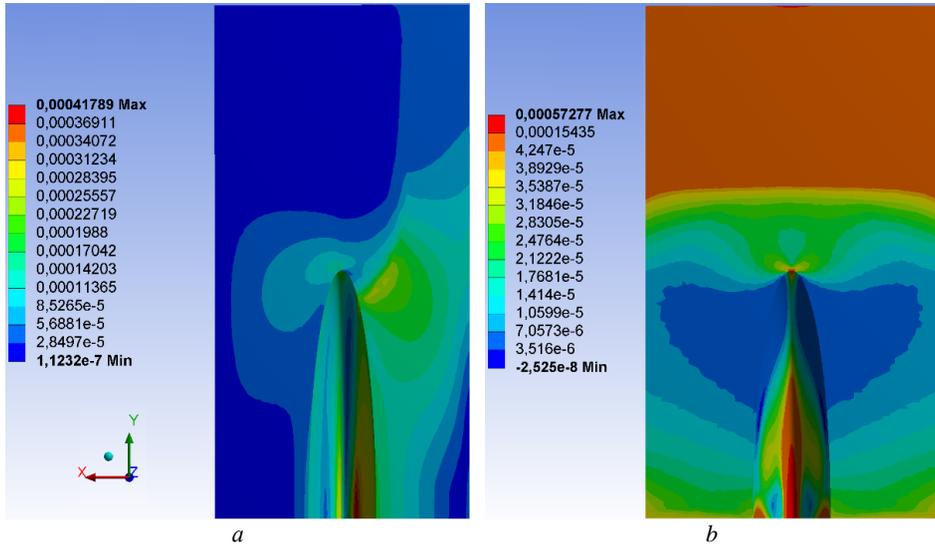


Рис. 4. Упругие деформации в окрестности вершины трещины в материале, обладающем температурной зависимостью упругих свойств, в случае, когда ось трещины была перпендикулярна (а) и параллельна (б) градиенту температурного поля

Fig. 4. Elastic strains near the crack tip in a material with temperature-dependent elastic properties in the case when the crack axis is (a) perpendicular and (b) parallel to the temperature gradient

При росте трещины вдоль градиента температуры (рис. 4, б) перед и позади вершины трещины, в окрестности которой растяжения максимальны, формируются зоны умеренных растяжений, при этом максимальные градиенты упругой деформации направлены противоположно направлению роста трещины в зону малых растяжений и сжатия, расположенную позади вершины. Это может приводить к торможению роста трещины в рассмотренных условиях.

Особенностью роста трещины перпендикулярно градиенту температуры (см. рис. 2, а) в материале со свойствами, зависящими от температуры, является появление локальной зоны растяжения в окрестности вершины трещины позади нее (область на рис. 4, а справа ниже вершины трещины). Градиент упругих деформаций в самой вершине трещины направлен вдоль ее оси таким образом, что отклонение траектории роста трещины от прямолинейной, согласно выбранным критериям, не прогнозируется. Дополнительная напряженная зона при рассмотрении ее в сечении, параллельном плоскости XZ на рис. 4 (перпендикулярно плоскости изображения), позволяет выявить максимальный градиент упругих деформаций и направления развития дополнительных трещин в этой окрестности. Такая эпюра приведена на рис. 5, а (линией показано направление максимального градиента упругой деформации в этой области, совпадающее с прогно-

зируемым направлением роста дополнительной боковой трещины). На рис. 5, *b* приведена эпюра температурного поля в этом сечении. Соответственно, следует ожидать роста вторичных трещин в окрестности вершины основной трещины в направлении горячей стороны образца – в область более пластичных характеристик материала. В случае объединения основной и вторичных трещин возникает картина ветвления основной трещины.

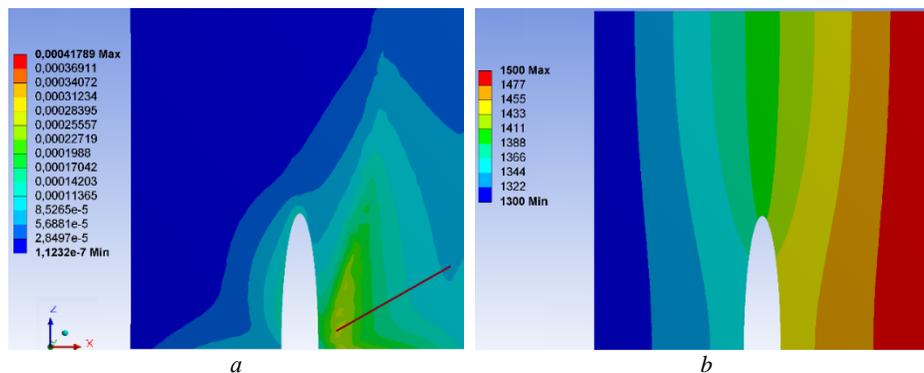


Рис. 5. Упругие деформации (*a*) и температура, °C (*b*) в сечении локального максимума деформаций в окрестности вершины трещины в материале с температурно-зависимыми упругими свойствами в градиентном поле температуры

Fig. 5. (*a*) Elastic strains and (*b*) temperature (°C) in the section with the local maximum of strains near the crack tip in a material with temperature-dependent elastic properties in a gradient temperature field

Расчетом НДС окрестности вершины трещины в квазихрупком материале при температуре, близкой к температуре плавления, в том числе при наличии температурного градиента, показано, что в зависимости от взаимной ориентации оси эллиптической трещины и градиента температуры возможны различные сценарии роста трещины в этих условиях. Для проверки полученных результатов был проведен эксперимент по термическому разрушению блоков пресноводного льда, который обладает соответствующим свойством – изменяет свои упругие характеристики аналогично огнеупорным материалам с хрупких на пластичные в узком интервале температур, близком к температуре плавления.

Экспериментальная валидация модели и обсуждение результатов

Для экспериментальной валидации численной модели анализировались закономерности разрушения образцов пресноводного льда, находящегося в условиях неравномерного нагрева. Льду, как и огнеупорным керамикам, свойственно проявление эффекта «предплавления» при более низких температурах (от -5 до 0°C). При этом упругие характеристики льда имеют выраженную температурную зависимость вблизи температуры плавления. Так, в работе [8] приводятся данные о двукратном снижении значений модуля упругости льда при повышении температуры от -20 до -5°C , а по данным [12–14] изменения модуля упругости могут достигать порядка величины. Соответственно, при нагревании льда до температур, близких к температуре плавления, следует ожидать возникновения в материале

але областей, для которых не характерен хрупкий характер трещинообразования. Кроме того, лед оптически прозрачен, что позволяет исследовать направление и структуру трещин визуально. Свойства льда, использованные в дальнейших расчетах [24–30], приведены в табл. 2. Для приготовления льда использовалась водопроводная вода стандартного качества для Санкт-Петербурга, свойства которой по данным ежемесячного контроля ГУП «Водоканал Санкт-Петербурга» приведены в [31]. Видимые трещины в блоках на момент начала опытов отсутствовали.

Таблица 2

Характеристики льда вблизи температуры плавления

Свойства	Значение	
	При температуре -20°C	При температуре $-5 \dots 0^{\circ}\text{C}$
Модуль упругости, Па	$7 \cdot 10^9$	$7 \cdot 10^8$
Коэффициент теплового расширения $1/^{\circ}\text{C}$	$5,1 \cdot 10^{-5}$	
Коэффициент Пуассона	0.3	0.45
Плотность, $\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$	920	
Теплопроводность, $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$	2.4	
Теплоемкость, $\text{кДж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$	1.9	

Схема теплового нагружения ледяного образца показана на рис. 6. Нагрев участков 2 и 4, ширина которых соизмерима с высотой блока, считали «точечным» нагревом. Нагрев области 3 – «локальным» нагревом. Нагрев всей стороны (участок 1) – односторонним нагревом. Область 5, приведенная на фото, является областью роста трещин.

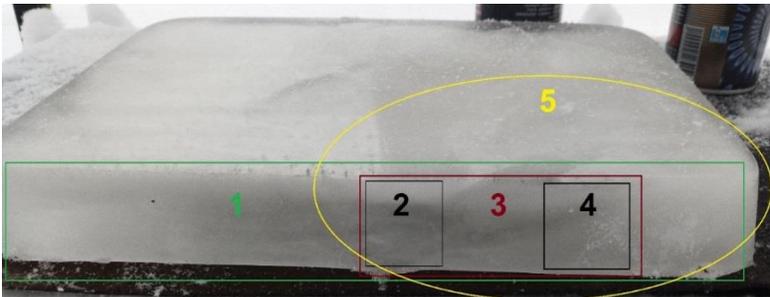


Рис. 6. Схема теплового нагружения образца льда. Пояснения приведены в тексте
Fig. 6. Scheme of thermal loading of an ice sample. Explanations are given in the article

В ходе эксперимента нагрев одной грани ледяного образца или ее небольшого участка проводился следующим образом. На нагреваемую площадку устанавливали металлическую прокладку, которую в дальнейшем нагревали пламенем газовой горелки. Температурное поле в объеме блока и поля параметров НДС определяли расчетным путем методом конечных элементов в среде ANSYS Mechanical R15.0 в нестационарной постановке. При этом на нагреваемой поверхности использовали температурное условие третьего рода, а для имитации стесненных условий – условие непересечения для одной или нескольких граней блока. Анализ возможных направлений роста трещин проводился в момент достижения

расчетными значениями напряжений критической величины (предела прочности льда при растяжении). Тепловая и механическая задачи решались следующим образом. Первоначально для определенных моментов времени выполнялся расчет температурного поля, после чего для этих же моментов времени определялись упругие термические деформации блоков. Таким образом, рассчитанное температурное поле являлось одним из исходных данных для решения механической задачи.

Блок во время эксперимента опирался на неподвижное металлическое основание, которое не препятствовало его расширению в других направлениях. Также проводили эксперименты в стесненных условиях, например при боковом и тыльном зажатии блока.

Разрушение (трещинообразование) происходило в течение 5–20 с от начала нагрева, при этом плавление льда было локальным и незначительным: изменение толщины блока за счет плавления как при нагреве всей грани, так и при точечном не превышало нескольких миллиметров. Результат разрушения фотографировали и проводили численное моделирование НДС для условий эксперимента.

В условиях эксперимента наблюдали остановку трещин вблизи нагретой поверхности, которая была предсказана расчетами (см. рис. 3, 4). Фотография трещины, остановившейся у нагретой поверхности, приведена на рис. 7 (горизонтальными стрелками обозначены вершины остановившихся трещин, а вертикальными – граница зоны нагрева; плоскость изображения на рис. 7 совпадает с плоскостью максимального размера на рис. 6). Локальный нагрев проводился на участке 3, обозначенном на рис. 6.



Рис. 7. Пример остановки трещин у нагретой поверхности
Fig. 7. An example of the arrest of cracks near the heated surface

Кроме того, наблюдалось ветвление (образование вторичных) трещин вблизи нагретой поверхности, согласно результатам расчета, приведенным на рис. 4, *a* и 5, *a*, предсказывающим возможность возникновения вторичных боковых трещин в окрестности вершины основной трещины. На рис. 8 представлена эпюра упругих деформаций для определения направления роста основной трещины в блоке льда при его несимметричном точечном нагреве на площадке 2 (см. рис. 6). Рассмотрено пять альтернативных направлений роста трещин, для которых определены величины градиента деформации. При этом момент времени определялся на основе экспериментальных данных [32, 33], согласно которым предел упругости льда достигается при деформациях 0.05–0.1%. Градиент упругих деформаций определялся в нескольких равномерно распределенных точках предполагаемой

траектории роста трещины, после чего вычислялось среднее значение по каждому из направлений. Средние и фактически измеренные значения градиента упругих деформаций для рассмотренных направлений приведены в табл. 3.

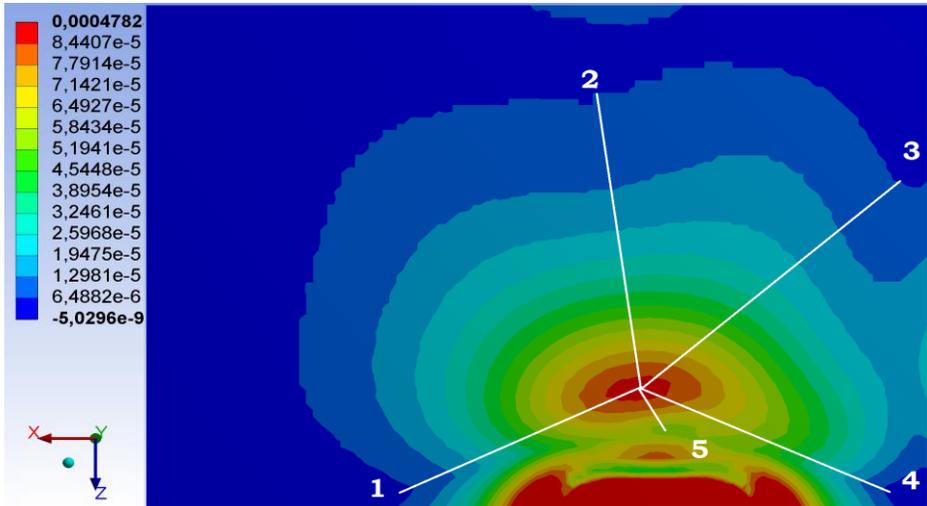


Рис. 8. Упругие деформации блока льда при несимметричном точечном нагреве. Сечение, параллельное плоскости XZ (см. рис. 7). Белыми цифрами и линиями обозначены возможные направления роста трещин

Fig. 8. Elastic strains of the ice block exposed to the asymmetric spot heating. The section is parallel to XZ-plane (Fig. 7). White numbers and lines indicate possible directions of the crack growth

Таблица 3

Градиенты упругих деформаций для альтернативных направлений роста трещин, мм/мм²

Измерение	Номер направления				
	1	2	3	4	5
1	0.00078	0.00136	0.00105	0.00094	0.00157
2	0.00059	0.00042	0.00039	0.00099	0.00158
3	0.00042	0.00084	0.00078	0.00093	0.00105
4	0.00041	0.00019	0.00021	0.00081	0.00099
Среднее	0.00055	0.00070	0.00061	0.00092	0.00130

Максимальное значение градиента определено для направления 5, однако в этом направлении наблюдается немонотонное изменение характера деформаций (снижение растягивающей нагрузки изменяется на ее возрастание); кроме того, данное направление роста трещины совпадает с градиентом температуры (соответственно, упругие характеристики материала в данном направлении изменяются в сторону повышения его пластичности).

Вид фактически образовавшихся трещин при несимметричном точечном нагреве блока льда, расчет НДС которого приведен на рис. 8, показан на рис. 9. Сплошными стрелками, направленными вниз, обозначена основная трещина, направление роста которой совпадает с расчетными результатами в случае при-

менения деформационного градиентного критерия для определения траектории разрушения (направление 4 на рис. 8). Горизонтальными сплошными стрелками обозначены вторичные трещины (боковые ответвления основной трещины) за счет роста из локальных максимумов упругих деформаций в окрестности вершины основной трещины (рис. 4, а и 5, а). Сплошными стрелками, направленными вверх обозначены границы области локального нагрева материала. Направление осмотра на рис. 9 вверху совпадает с осью Y на рис. 6, а на рис. 9 внизу – с осью Z на рис. 8.

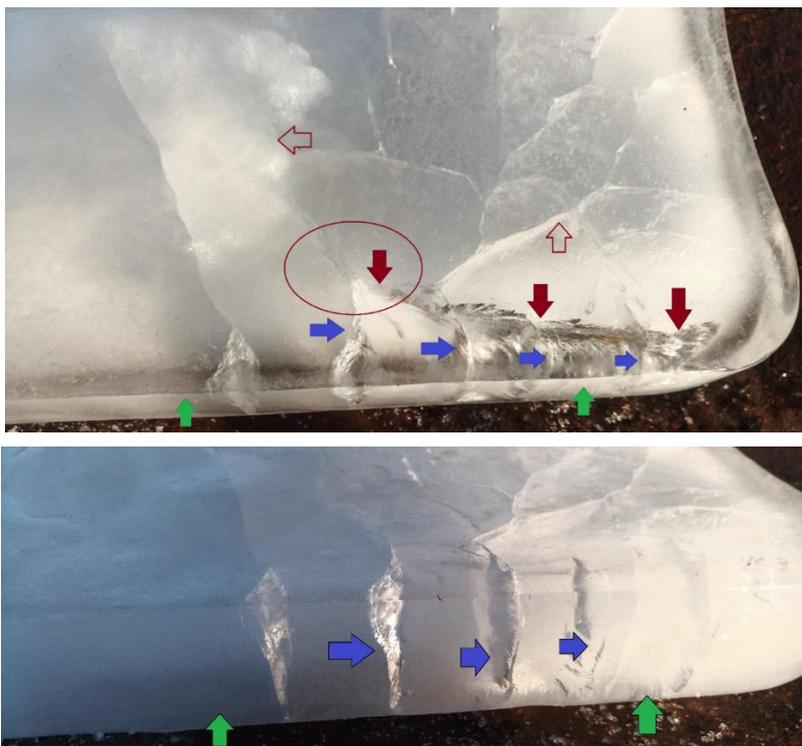


Рис. 9. Вид трещин, образовавшихся при несимметричном точечном нагреве блока пресноводного льда. Описание в тексте

Fig. 9. Type of cracks arising during the asymmetric spot heating of a freshwater ice block. Description is presented in the article

Отметим, что на рис. 9 вверху видны также трещины, идущие в направлениях 2 и 3 (см. рис.8), обозначенные контурами стрелок. Овалом на рисунке выделена область локального максимума растяжений.

Таким образом, экспериментальные результаты на примере блоков пресноводного льда продемонстрировали соответствие фактического расположения трещин ранее сформулированным предположениям (на основе численного моделирования) о совпадении направления роста термических трещин с максимальным градиентом упругой деформации материала. Расчетным путем обоснованы возможность и механизм возникновения вторичных боковых трещин в окрестности вершины основной трещины, направленных в сторону увеличения пластичности материала

(в сторону нагретой поверхности). Кроме того, экспериментально показано, что при температуре материала, близкой к температуре плавления, возможны ветвление вследствие образования вторичных трещин и остановка роста трещины в области материала, где наблюдается эффект предплавления с изменением упругих свойств материала.

Заключение

Методами численного моделирования исследованы особенности роста трещин в квазихрупких материалах при температурах, близких к температуре фазового перехода (плавления), который сопровождается изменением упругих характеристик материала и формированием градиентного распределения свойств. Показано, что в этом случае в зависимости от направления градиента температуры и упругих свойств возможно либо торможение роста трещины, либо появление боковых ответвлений (вторичных трещин) в окрестности вершины основной трещины, направленных в сторону более пластичной (нагретой) области материала. При отсутствии градиента свойств предсказано изменение траектории роста трещины в противоположную сторону – к «холодной» грани образца. На блоках пресноводного льда, проявляющего изменение упругих характеристик вблизи точки плавления, успешно проведена валидация полученных результатов моделирования.

Список источников

1. *Соболев Р.Н.* Температурный интервал плавления кристаллического вещества // Доклады Академии наук. 2017. Т. 473, № 3. С. 351–354.
2. *Гусаров В.В., Суворов С.А.* Температура плавления локально-равновесных поверхностных фаз в поликристаллических системах на основе одной объемной фазы // Журнал прикладной химии. 1990. Т. 63, № 8. С. 1689–1694.
3. *Ролов Б.Н., Юркевич В.Э.* Физика размытых фазовых переходов. Ростов н/Д : РГУ, 1983.
4. *Уббелоде А.* Плавление и кристаллическая структура. М. : Мир, 1969.
5. *Stueckelschweiger M., Gruber D., Jin S., Harmuth H.* Creep testing of carbon containing refractories under reducing conditions // *Ceramics International*. 2019. V. 45 (8). P. 9776–9781. doi: 10.1016/j.ceramint.2019.02.013
6. *Бакунов В.С., Лукин Е.С., Сысоев Э.П.* Длительная прочность плотной поликристаллической оксидной керамики до 1 600°C // Новые огнеупоры. 2015. № 7. С. 34–41.
7. *Заболотский А.В.* Математическое моделирование термостойкости оксида магния // Новые огнеупоры. 2011. № 6. С. 90–98.
8. *Zabolotskiy A.V., Turchin M.Y., Khadyev V.T., Migashkin A.O.* Numerical investigation of refractory stress-strain condition under transient thermal load // *AIP Conference Proceedings*. 2020. V. 2310. Art. 020355. doi: 10.1063/5.0034479
9. *Dmitriev A.I., Nikonov A.Yu., Österle W.* Molecular dynamics sliding simulations of amorphous Ni, Ni–P and nanocrystalline Ni films // *Computational Materials Science*. 2017. V. 129. P. 231–238. doi: 10.1016/j.commatsci.2016.12.039
10. *Dmitriev A.I., Nikonov A.Y., Shugurov A.R., Panin A.V.* Numerical study of atomic scale deformation mechanisms of Ti grains with different crystallographic orientation subjected to scratch testing // *Applied Surface Science*. 2019. V. 471. P. 318–327. doi: 10.1016/j.apsusc.2018.12.021

11. *Shugurov A.R., Panin A.V., Dmitriev A.I.* Multiscale Fracture of Ti-Al-N Coatings under Uniaxial Tension // *Physical Mesomechanics*. 2021. V. 24. P. 185–195. doi: 10.1134/S102995921020089
12. *Марченко А.В., Карулин Е.Б., Чистяков П.В.* Экспериментальное определение упругих характеристик морского ледяного покрова // *Вести газовой науки : научно-технический сборник*. 2020. Т. 45, № 3. С. 129–140.
13. *Войнов Г.Н.* Приливные явления и методология их исследований в шельфовой зоне арктических морей (на примере Карского и северо-восточной части Баренцева морей) : автореф. дис. ... д-ра геогр. наук. СПб., 2003.
14. *Зубакин Г.К., Дмитриев Н.Е., Войнов Г.Н., Нестеров А.В., Виноградов Р.А.* Динамика вод и льдов Печорского моря по экспериментальным данным // *Труды РАО-03, Санкт-Петербург, 16–19 сентября 2003*. С. 300–303.
15. *Степанов И.В., Кубышкин Н.В.* Результаты многолетних экспедиционных исследований физико-механических свойств льдов Печорского моря // *Труды РАО-03, Санкт-Петербург, 16–19 сентября 2003*. С. 194–197.
16. *Артемов М.А., Барановский Е.С., Бердзенишвили Г.Г., Семка Э.И., Фатхудинов Д.Б.* О нейтральном нагружении диска при тепловом и силовом воздействиях // *Инженерный вестник Дона*. 2018. № 2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/o-neytralnom-nagruzhenii-diska-pri-teplovom-i-silovom-vozdeystviyah/viewer>
17. *Коноплин Н.А.* Температурная зависимость параметров упругости железа // *Природообустройство*. 2009. № 4. С. 99–101.
18. *Ершова А.Ю., Мартиросов М.И.* Экспериментально-теоретические исследования дисперсно-упрочненных композитов применительно к задачам аэрокосмической промышленности. // *Труды МАИ*. 2016. № 89. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/eksperimentalno-teoreticheskie-issledovaniya-dispersno-uprochnennyh-kompozitov-primenitelno-k-zadacham-aerokosmicheskoy>
19. *Токий Н.В., Токий В.В., Пилипенко А.Н., Письменова Н.Е.* Температурная зависимость модулей упругости субмикроструктурной меди // *Физика твердого тела*. 2014. № 5. С. 966–969.
20. *Григорьев А.С., Данильченко С.В., Заболотский А.В., Мигашкин А.О., Турчин М.Ю., Хадыев В.Т.* Особенности разрушения футеровок в оборудовании разного размера // *Новые огнеупоры*. 2022. № 12. С. 3–11.
21. *Kuliev V.D., Morozov E.M.* The gradient deformation criterion for brittle fracture // *Doklady Physics*. 2016. V. 61. P. 502–504. doi: 10.1134/S1028335816100062
22. *Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М.* Модель хрупкого разрушения пористых материалов при сжатии // *Математическое моделирование систем и процессов*. 2009. № 17. С. 47–58.
23. *Заболотский А.В., Мигашкин А.О., Григорьев А.С., Дмитриев А.И., Турчин М.Ю., Хадыев В.Т., Шилько Е.В.* Моделирование зарождения трещин в материалах с регулярно расположенными сферическими пораами в условиях многоосного нагружения // *Новые огнеупоры*. 2023. № 3. С. 13–20.
24. *Войтковский К.Ф.* Механические свойства льда. М. : Изд-во АН СССР, 1960.
25. *Близняк Е.В.* Инженерная гидрология. М. : Речиздат, 1939.
26. *Сериков М.И.* Определение модуля упругости льда резонансным методом // *Проблемы Арктики*. 1959. № 6. С. 81–87.
27. *Богородский В.В., Гаврило В.П., Гусев А.В.* О нелинейных эффектах при разрушении льда в жидкости. М. : Транспечать, 1970. (Труды ААНИИ).
28. *Иванов Б.Д.* Тепловое расширение гексагонального льда // *Вестник Якутского государственного университета*. 2009. Т. 6, № 4. С. 35–39.
29. *Чубик И.А., Маслов А.М.* Справочник по теплофизическим характеристикам пищевых продуктов и полуфабрикатов. М. : Пищевая промышленность, 1970.
30. *Волков А.И., Жарский И.М.* Большой химический справочник. М. : Сов. школа, 2005.

31. Данные текущего контроля качества воды ГУП «Водоканал Санкт-Петербурга». URL: https://www.vodokanal.spb.ru/vodosnabzhenie/kachestvo_vody/
32. Li L., Shkhinek K. The ultimate bearing capacity of ice beams // Magazine of Civil Engineering. 2013. V. 1 (36). P. 65–74. doi: 10.5862/MCE.36.8
33. Sodhi D.S. Vertical penetration of floating ice sheets // International Journal of Solid and Structures. 1998. V. 35 (32). P. 4275–4294.

References

1. Sobolev R.N. (2017) The temperature range of melting of crystalline material. *Doklady Earth Sciences*. 473(1). pp. 367–370. doi: 10.1134/S1028334X1703028X
2. Gusarov V.V., Suvorov S.A. (1990) Temperatura plavleniya lokal'no-ravnovesnykh poverkhnostnykh faz v polikristallicheskikh sistemakh na osnove odnoy ob'emnoy fazy [Melting temperature of local-equilibrium surface phases in polycrystalline systems based on one phase]. *Zhurnal prikladnoy khimii – Journal of Applied Chemistry of the USSR*. 63(8). pp. 1689–1694.
3. Rolov B.N., Yurkevich V.E. (1983) *Fizika razmyvnykh perekhodov* [Physics of scouring phase transformations]. Rostov-on-Don: Rostov State University.
4. Ubbelode A. (1965) *Melting and a Crystal Structure*. Oxford: Clarendon Press.
5. Stueckelschweiger M., Gruber D., Jin S., Harmuth H. (2019) Creep testing of carbon containing refractories under reducing conditions. *Ceramics International*. 45(8). pp. 9776–9781. doi: 10.1016/j.ceramint.2019.02.013
6. Bakunov V.S., Lukin E.S., Sysoev É.P. (2015) Stress-rupture strength of polycrystalline oxide ceramic up to 1600°C. *Refractories and Industrial Ceramics*. 56(4). pp. 375–382. doi: 10.1007/s11148-015-9850-0
7. Zabolotskii A.V. (2011) Mathematical simulation of the thermal stability of magnesium oxide. *Refractories and Industrial Ceramics*. 52(3). pp. 170–177. doi: 10.1007/s11148-011-9390-1
8. Zabolotskiy A.V., Turchin M.Y., Khadyev V.T., Migashkin A.O. (2020) Numerical investigation of refractory stress-strain condition under transient thermal load. *AIP Conference Proceedings*. 2310. Article 020355. doi: 10.1063/5.0034479
9. Dmitriev A.I., Nikonov A.Yu., Österle W. (2017) Molecular dynamics sliding simulations of amorphous Ni, Ni-P and nanocrystalline Ni films. *Computational Materials Science*. 129. pp. 231–238. doi: 10.1016/j.commatsci.2016.12.039
10. Dmitriev A.I., Nikonov A.Y., Shugurov A.R., Panin A.V. (2019) Numerical study of atomic scale deformation mechanisms of Ti grains with different crystallographic orientation subjected to scratch testing. *Applied Surface Science*. 471. pp. 318–327. doi: 10.1016/j.apsusc.2018.12.021
11. Shugurov A.R., Panin A.V., Dmitriev A.I. (2021) Multiscale fracture of Ti-Al-N coatings under uniaxial tension. *Physical Mesomechanics*. 24(2). pp. 185–195. doi: 10.1134/S1029959921020089
12. Marchenko A.V., Karulin E.B., Chistyakov P.V. (2020) Eksperimental'noe opredelenie uprugikh kharakteristik morskogo ledyanogo pokrova [Experimental studies of sea ice elastic behavior]. *Vesti gazovoi nauki*. 45(3). pp. 129–140.
13. Voynov G.N. (2003) *Prilivnye yavleniya i metodologiya ikh issledovaniy v shel'fovoy zone arkticheskikh morey (na primere Karskogo i severo-vostochnoy chasti Barentseva morey)* [Tidal phenomena and methodology of their research in a shelf zone of the Arctic seas (using the example of the Kara and northeastern parts of the Barents Seas)]. Dissertation. Arctic and Antarctica Scientific Research Institute, Saint Petersburg.
14. Zubakin G.K., Dmitriev N.E., Voynov G.N., Nesterov A.V., Vinogradov R.A. (2003) Dinamika vody i l'dov Pechorskogo morya po eksperimental'nym dannym [Dynamics of water and ice of the Pechora sea according to experimental data]. *Trudy RAO-03 – Proceedings RAO-03. Saint Petersburg*. pp. 300–303.

15. Stepanov I.V., Kubyskhin N.V. (2003) Rezul'taty mnogoletnikh ekspeditsionnykh issledovaniy fiziko-mekhanicheskikh svoystv l'dov Pechorskogo morya [Results of long-time expedition exploration of physical and mechanical properties of the Pechora sea ice]. *Trudy RAO-03 – Proceedings RAO-03. Saint Petersburg*. pp. 194–197.
16. Artyomov M.A., Baranovskiy E.S., Berdzenishvili G.G., Semka E.I., Fatkhudinov D.B. (2018) O neutral'nom nagruzhении diska pri teplovom i silovom vozdeystvii [On neutral loading of a disk under thermal and force influences]. *Inzhenernyy Vestnik Dona – Engineering Journal of Don*. 49(2). pp. 1–11.
17. Konoplin N. A. (2009) Temperaturnaya zavisimost' uprugikh parametrov zheleza [Temperature dependence of elasticity parameters of iron]. *Prirodoobustroystvo – Environmental Engineering*. 4. pp. 99–101.
18. Ershova A.Yu., Martirosov M.I. (2016) Eksperimental'no-teoreticheskie issledovaniya dispersionno-uprochnyonykh kompozitov, primenitel'no k zadacham aerokosmicheskoy promyshlennosti [Dispersion-reinforced composites experimental and theoretical studies as applied to the problems of the aerospace industry]. *Trudy MAI*. 89. pp. 1–25.
19. Tokiy N.V., Tokiy V.V., Pilipenko A.N., Pismenova N.E. (2014) Temperature dependence of the elastic modulus of submicrocrystalline copper. *Physics of Solid State*. 56(5). pp. 966–969. doi: 10.1134/S106378341405031X
20. Grigoriev A.S., Daniilchenko S.V., Zabolotsky A.V., Migashkin A.O., Turchin M.Y., Khadyev V.T. (2023) Features of the fracture of refractory linings depending on the equipment size. *Refractories and Industrial Ceramics*. 63(6). pp. 585–592. doi: 10.1007/s11148-023-00773-6
21. Kuliev V.D., Morozov E.M. (2016) *The gradient deformation criterion for brittle fracture. Doklady Physics*. 61. pp. 502–504. doi: 10.1134/S1028335816100062
22. Gol'dsteyn R.V., Osipenko N.M. (2009) Model' khrupkogo razrusheniya poristykh materialov pri szhatii [The model of brittle fracture of porous materials under compression]. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov – PNRPU Mechanics Bulletin*. 17. pp. 47–58.
23. Zabolotsky A.V., Migashkin A.O., Grigor'ev A.S., Dmitriev A.I., Turchin M.Y., Khadyev V.T., Shil'ko E.V. (2023) Simulation of crack nucleation in materials with regularly arranged spherical pores under multiaxial loading conditions. *Refractories and Industrial Ceramics*. 64(2). pp. 119–125. doi: 10.1007/s11148-023-00813-1
24. Voytkovskiy K.F. (1960) *Mekhanicheskie svoystva l'da* [Mechanical properties of ice]. Moscow: Izdatel'stvo AN SSSR.
25. Bliznyak E.V. (1939) *Inzhenernaya gidrologiya* [Engineering hydrology]. Moscow: Rechizdat.
26. Serikov M.I. (1959) Opredelenie modulya uprugosti l'da rezonansnym metodom [Determination of the modulus of elasticity of ice by the resonance method]. *Problemy Arktiki*. 6. pp. 81–87.
27. Bogorodskiy V.V., Gavrilov V.P. Gusev A.V. (1970) *O nelineynykh effektakh pri razrushenii l'da v zhidkosti* [On nonlinear effects during the ice destruction in a fluid]. Moscow: Transprint.
28. Ivanov B.D. (2009) Teplovoe rasshirenie geksagonal'nogo l'da [Thermal expansion of hexagonal ice]. *Vestnik YaGU*. 6(4). pp. 35–39.
29. Chubik I.A., Maslov A.M. (1970) *Spravochnik po teplofizicheskim kharakteristikam pishchevykh produktov i polufabrikatov* [Handbook on the thermophysical characteristics of food products and semi-finished products]. Moscow: Pishchevaya promyshlennost'.
30. Volkov A.I., Zharskiy I.M. (2005) *Bol'shoy khimicheskiy spravochnik* [Great chemical handbook]. Moscow: Sovetskaya shkola.
31. Results of water quality monitoring provided by the State Unitary Enterprise «Vodokanal of Saint Petersburg». URL: https://www.vodokanal.spb.ru/vodosnabzhenie/kachestvo_vody/
32. Li L., Shkhinek K. (2013) The ultimate bearing capacity of ice beams. *Magazine of Civil Engineering*. 36(1). pp. 65–74. doi: 10.5862/MCE.36.8

33. Sodhi D.S. (1998) Vertical penetration of floating ice sheets. *International Journal of Solid and Structures*. 35(32). pp. 4275-4294.

Сведения об авторах:

Заболотский Андрей Васильевич – кандидат технических наук, инженер-технолог отдела инжиниринга Управления инжиниринга, проектов и производства работ ООО «Группа «Магнезит», Сатка, Россия; научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН, Томск, Россия. E-mail: zabolotsky@bk.ru

Дмитриев Андрей Иванович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН, Томск, Россия; профессор кафедры физики металлов Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: dmitr@ispms.ru

Information about the authors:

Zabolotskiy Andrey V. (Candidate of Technical Sciences, Technical Engineer, Magnezit Group, Satka, Russian Federation; Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: zabolotsky@bk.ru

Dmitriev Andrey I. (Doctor of Physics and Mathematics, Main Researcher, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation; Tomsk State University, Tomsk, Russia). E-mail: dmitr@ispms.ru

Статья поступила в редакцию 12.12.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 12.12.2023; accepted for publication 10.04.2024

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/88/9

Коэффициенты электромагнитных связанныхностей композита «пьезоэлектрик / феррит» с учетом реальной структуры и начальных напряжений

Андрей Анатольевич Паньков

*Пермский национальный исследовательский университет,
Пермь, Россия, a_a_pankov@mail.ru*

Аннотация. Получены новые уточненные аналитические решения для тензоров эффективных пьезо-электро-магнито-упругих свойств пьезоактивного композита при наличии начального напряженно-деформированного состояния (как результата начального нагружения) с учетом реального вида двухточечных корреляционных функций нерегулярной квазипериодической случайной структуры. Представлены результаты расчета эффективных коэффициентов электромагнитной и магнито-электрической связанностей трансверсально-изотропного однонаправленного волокнутого композита «PZT-4 / феррит» при осесимметричном тензоре начальной деформации композита. Выявлено увеличение абсолютных значений этих эффективных коэффициентов при отрицательных (сжимающих) значениях компонентов тензора начальной деформации композита.

Ключевые слова: композит, эффективные свойства, начальное напряженное состояние, электромагнитоупругость, пьезоэффект, магнитоstriction, численное моделирование

Благодарности: Результаты получены при выполнении государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на выполнение фундаментальных научных исследований (проект № FSNM-2023-0006).

Для цитирования: Паньков А.А. Коэффициенты электромагнитных связанныхностей композита «пьезоэлектрик / феррит» с учетом реальной структуры и начальных напряжений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 111–123. doi: 10.17223/19988621/88/9

Original article

Electromagnetic coupling coefficients of “piezoelectric / ferrite” composite accounting for the real structure and initial stresses

Andrey A. Pan'kov

*Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation,
a_a_pankov@mail.ru*

Abstract. New improved analytical solutions are obtained for tensors of effective piezo-electro-magneto-elastic properties of a piezoactive composite at initial stress-strain state

(resulting from initial loading) that account for real two-point correlation functions of an irregular quasi-periodic random structure. The calculations of effective coefficients of electromagnetic and magnetoelectric coupling of the transversal isotropic unidirectional fibrous composite "PZT-4/ferrite" with an axisymmetric tensor of initial strain of the composite are presented. An increase in the absolute values of the effective coefficients is observed at negative (compressive) values of the initial strain tensor components of the composite.

Keywords: composite, effective properties, initial stress state, electromagnetic elasticity, piezoeffect, magnetostriction, numerical modeling

Acknowledgments: The results of this study were obtained within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSNM-2023-0006).

For citation: Pan'kov, A.A. (2024) Electromagnetic coupling coefficients of "piezoelectric / ferrite" composite accounting for the real structure and initial stresses. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 111–123. doi: 10.17223/19988621/88/9

Введение

Изучение закономерностей и эффектов влияния начального напряженного состояния элементов структуры материала на особенности его последующего нагружения – одна из современных задач механики композитов [1–7]. Для решения этой задачи успешно апробирован «линеаризованный подход» с использованием линеаризованных уравнений теории упругости [1–4] и магнитоэластичности [5–7]. При этом актуальным остается нахождение уточненных решений связанных краевых задач механики пьезоактивных композитов с комплексным учетом статистического характера взаимного расположения элементов структуры, взаимодействия связанных электрических, магнитных и деформационных полей [8–11] и наличием начального напряженного состояния $\zeta_0 \equiv \{\sigma^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0\}$ в виде начальных напряжений σ^0 , электрической \mathbf{D}^0 и магнитной \mathbf{B}^0 индукций.

Постановка задачи

Рассмотрим представительную область \mathbf{V} композита с нерегулярной «квази-периодической» структурой (рис. 1) при наличии в ней начального равновесного электромагнитоупругого состояния ζ_0 и выполнении известных [5–8] физических соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijmn} \varepsilon_{mn} - e_{nij} E_n - h_{nij} H_n - \beta_{ij} \Theta, \\ D_i &= e_{imn} \varepsilon_{mn} + \lambda_{in} E_n + \pi_i \Theta, \quad B_i = h_{imn} \varepsilon_{mn} + \mu_{in} H_n + \vartheta_i \Theta \end{aligned} \quad (1)$$

для элементов структуры, свойства которых характеризуются совокупностью тензорных величин $\mathbf{A}_f \equiv \{\mathbf{C}_f, \mathbf{e}_f, \mathbf{h}_f, \boldsymbol{\lambda}_f, \boldsymbol{\mu}_f, \boldsymbol{\beta}_f, \boldsymbol{\pi}_f, \boldsymbol{\vartheta}_f\}$ для каждой из фаз, $f = 1, 2$.

При этом на «макроуровне» композита имеем

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= C_{ijmn}^* \langle \varepsilon_{mn} \rangle - e_{(ij)mn}^* \langle E_n \rangle - h_{(ij)mn}^* \langle H_n \rangle - \beta_{ij}^* \Theta, \\ \langle D_i \rangle &= e_{(D)imn}^* \langle \varepsilon_{mn} \rangle + \lambda_{in}^* \langle E_n \rangle + \lambda_{in}^* \langle H_n \rangle + \pi_i^* \Theta, \\ \langle B_i \rangle &= h_{(B)imn}^* \langle \varepsilon_{mn} \rangle + \mu_{in}^* \langle H_n \rangle + \mu_{in}^* \langle E_n \rangle + \vartheta_i^* \Theta \end{aligned} \quad (2)$$

для макроскопических величин тензоров напряжений $\langle \sigma \rangle$, деформаций $\langle \varepsilon \rangle$, векторов индукций и напряженностей электрического $\langle \mathbf{D} \rangle$, $\langle \mathbf{E} \rangle$ и магнитного $\langle \mathbf{H} \rangle$ полей с использованием совокупности эффективных характеристик $\mathbf{A}^* \equiv \{\mathbf{C}^*, \dots, \boldsymbol{\kappa}^*, \boldsymbol{\chi}^*\}$, где $\boldsymbol{\kappa}^*$, $\boldsymbol{\chi}^*$ – искомые тензоры электромагнитной и магнитоэлектрической связанности композита:

$$\|\boldsymbol{\kappa}_{ij}^*\| = \begin{vmatrix} \kappa_{11}^* & \kappa_{12}^* & 0 \\ -\kappa_{12}^* & \kappa_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}^* \end{vmatrix}, \quad \|\boldsymbol{\chi}_{ij}^*\| = \begin{vmatrix} \chi_{11}^* & \chi_{12}^* & 0 \\ -\chi_{12}^* & \chi_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33}^* \end{vmatrix}. \quad (3)$$

При этом в отсутствие начального напряженного состояния выполняется равенство $\chi_{ij}^* = \kappa_{ji}^*$. Здесь Θ – приращение температуры при однородном нагреве, оператор $\langle \dots \rangle = 1/V \int_V \dots d\mathbf{r}$.

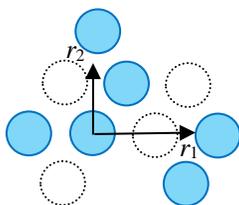


Рис. 1. Квазипериодическая монодисперсная случайная структура
Fig. 1. Quasi-periodic monodisperse random structure

При электромеханическом нагружении композита в области \mathbf{V} возникают дополнительные поля (1) напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и индукций \mathbf{D} , \mathbf{B} , которые удовлетворяют уравнениям равновесия и непрерывности [1–7]

$$(\sigma_{ij} + \sigma_{kj}^0 u_{i,k})_{,j} = 0, \quad (D_j + D_k^0 u_{j,k})_{,j} = 0, \quad (B_j + B_k^0 u_{j,k})_{,j} = 0 \quad (4)$$

с учетом поправок (дополнительных слагаемых), обусловленных наличием заданных начальных полей $\boldsymbol{\sigma}^0$, \mathbf{D}^0 , \mathbf{B}^0 и искомого поля перемещений \mathbf{u} . Первое уравнение в (4) может быть преобразовано к виду $\sigma_{ij,j} + \sigma_{kj}^0 u_{i,kj} = 0$ с учетом выполнения уравнений равновесия $\sigma_{kj,j}^0 = 0$.

Метод корреляционных составляющих

Корреляционный анализ структур

Рассматриваем статистически однородную случайную двухфазную монодисперсную структуру типа «включения / матрица» с квазипериодическим (КП) взаимным расположением включений в виде однонаправленных волокон (см. рис. 1) в представительной области \mathbf{V} композита, которую описываем индикаторной случайной функцией $i_1(\mathbf{r})$ включений (1-й фазы), равной значениям 1 и 0 соответственно с вероятностями v_1 , $1 - v_1$ в любой точке $\mathbf{r} \in \mathbf{V}$. Величина $v_1 = \langle i_1 \rangle$ – одноточечный статистический момент в произвольной точке $\mathbf{r} \in \mathbf{V}$, который равен значению относительного объемного содержания включений v_1 в композите.

Особенности случайного взаимного расположения включений (волокон) в области \mathbf{V} описываем нормированной корреляционной (двухточечной) функцией $k_{11}(\boldsymbol{\rho}) = \langle i_1^i(\mathbf{r})i_1^i(\mathbf{r}_1) \rangle / D_{11}$ с учетом статистической однородности, где дисперсия $D_{11} \equiv \langle i_1^i{}^2 \rangle = v_1(1 - v_1)$, поле пульсаций $i_1^i(\mathbf{r}) = i_1(\mathbf{r}) - v_1$, вектор разности $\boldsymbol{\rho} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$, расстояние $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$ между точками $\mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in \mathbf{V}$, $p_0 = v_1/v_{1\max}$ – вероятность появления волокна в типичной ячейке КП-структуры (см. рис. 1). Предельно допустимое значение $v_{1\max} \approx 0.717$ имеем для рассматриваемого случая значения $\delta/R = 0.25$ минимальной прослойки δ между волокнами, где R – радиус поперечного сечения волокон.

В качестве начального приближения метода корреляционных составляющих [8] используем решение для полидисперсной матричной КП-структуры (рис. 2, *a*), коррелированной с заданной монодисперсной КП-структурой (см. рис. 1). Полидисперсная КП-структура (см. рис. 2, *a*) состоит из однотипных составных ячеек (как и традиционная «некоррелированная» полидисперсная структура [9]), и решение задачи эффективного модуля для этой структуры совпадает с известным решением на одиночной составной ячейке. В корреляционном приближении решение задачи эффективного модуля выражается через специальную нормированную корреляционную функцию включений

$$\tilde{k}_{11}(\boldsymbol{\rho}) = \langle i_1^i(\mathbf{r})i_1^i(\mathbf{r}_1) \rangle / D_{11}, \quad (5)$$

где $i_1^i(\mathbf{r})$ – пульсации индикаторной КП-функции $i_1(\mathbf{r})$ матричной монодисперсной структуры (см. рис. 1), а $i_1^i(\mathbf{r}) \equiv i_1(\mathbf{r}) - i_1^1(\mathbf{r})$ – отклонения ее значений от индикаторной функции $i_1^1(\mathbf{r})$ матричной полидисперсной КП-структуры (см. рис. 2, *a*), $D_{11} = v_1(1 - v_1)$ – дисперсия при одинаковых значениях объемной доли включений v_1 для различных структур (см. рис. 1, 2).

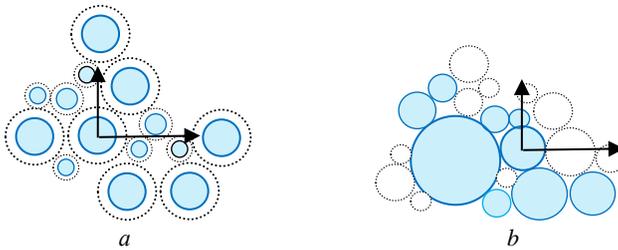


Рис. 2. Вспомогательные полидисперсные «матричная» (*a*) и «кластерная» (*b*) случайные структуры

Fig. 2. Subsidiary polydisperse (*a*) “matrix” and (*b*) “cluster” random structures

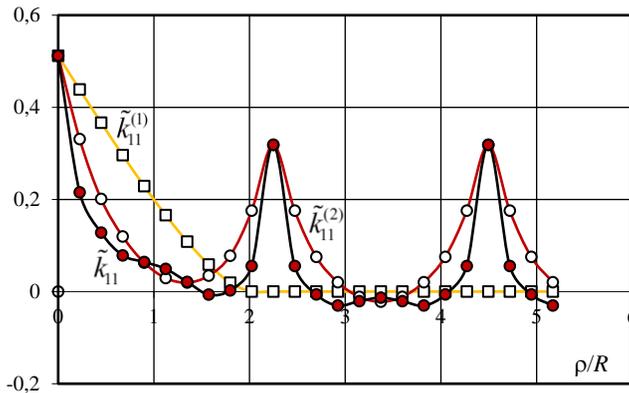
На рис. 3, *a* даны графики действительной корреляционной функции $\tilde{k}_{11}(\boldsymbol{\rho})$ (5) и ее аппроксимаций

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{11}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) &= (1 - p_1)k_{11}^{\text{II}}(\boldsymbol{\rho}), \\ \tilde{k}_{11}^{(2)}(\boldsymbol{\rho}) &= p_{\Delta}k_{11}^{\text{I}}(\boldsymbol{\rho}) + (1 - p_1 - p_{\Delta})k_{11}^{\text{II}}(\boldsymbol{\rho}) \end{aligned} \quad (6)$$

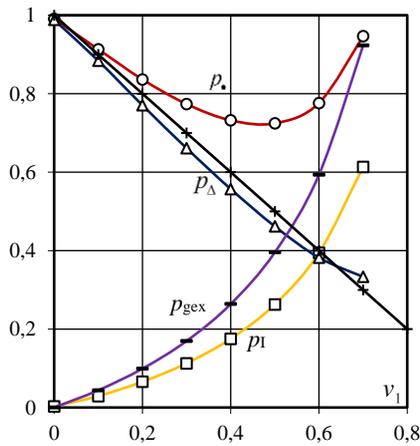
для двух последовательных приближений при значении $\delta = 0.25R$ минимальной толщины гарантированной прослойки матрицы между соседними волокнами

(с радиусом поперечного сечения R) монодисперсной КП-структуры (см. рис. 1), где индексы «I» и «II» указывают на принадлежность к полидисперсным структурам (см. рис. 2, a , b) соответственно. Здесь $p_1 \equiv \langle i_1^i i_1^i \rangle / D_{11}$ – коэффициент корреляции двух структур (см. рис. 1, 2, a), который рассчитывается через корреляционный $\langle i_1^i i_1^i \rangle = v_{11} - v_1^2$ и смешанный начальный $v_{11} \equiv \langle i_1^i i_1^i \rangle = p_1 v_1 v_{1\max}$ одноточечные моменты по формуле

$$p_1 \equiv \frac{v_{11} - v_1^2}{v_1(1 - v_1)} = \frac{p_1 v_{1\max} - v_1}{1 - v_1}. \quad (7)$$



a



b

Рис. 3. Реальная корреляционная функция \tilde{k}_{11} (●) с аппроксимациями $\tilde{k}_{11}^{(1)}$ (□), $\tilde{k}_{11}^{(2)}$ (○) (a), начальный p_1 (□), поправочный p_Δ (Δ) с линейной аппроксимацией (+) и результирующий p_* (○) коэффициенты корреляции (b)

Fig. 3. (a) Real correlation function \tilde{k}_{11} (●) with approximations $\tilde{k}_{11}^{(1)}$ (□), $\tilde{k}_{11}^{(2)}$ (○) and the (b) initial p_1 (□), correction p_Δ (Δ) with linear approximation (+), and resulting p_* (○) correlation coefficients

Значение поправки p_{Δ} в разложении (6) определяется из условия наилучшего приближения аппроксимации $\tilde{k}_{11}^{(2)}(\rho)$ к действительному виду корреляционной функции $\tilde{k}_{11}(\rho)$ (5). На рис. 3,б даны графики зависимостей коэффициента корреляции p_I , поправки p_{Δ} и результирующего коэффициента корреляции

$$p_{\bullet} = p_I + p_{\Delta} \quad (8)$$

от относительного объемного содержания включений v_1 в композите. Для рассматриваемых структур (рис. 1, рис. 2) выявлена практически близкая к линейной зависимость величины поправки $p_{\Delta} \approx 1 - v_1$ от значений v_1 , т.е. имеем приближенное равенство

$$p_{\bullet} \approx 1 - v_1 + p_I = 1 - v_1 + \frac{P_{\circ} v_{1\max} - v_1}{1 - v_1}$$

с учетом формулы (7). На рис. 3,б для сравнения приведен график ранее используемого коэффициента корреляции $P_{\text{гex}}$ как функции от v_1 , найденного при мысленном «наложении» КП-структуры (рис. 1) на идеальную периодическую структуру с гексагональной укладкой волокон. Выявлено, что значения результирующего коэффициента корреляции p_{\bullet} значительно превышают соответствующие значения $P_{\text{гex}}$ при фиксированной величине объемной доли v_1 .

Эффективные свойства композита

Искомые эффективные характеристики $\mathbf{A}^* \equiv \{\mathbf{C}^*, \dots, \mathbf{k}^*, \chi^*, \}$ (2), (3) композита (см. рис. 1) в корреляционном приближении [10, 11] допускают представление в виде:

$$\mathbf{A}^* = \langle \mathbf{A} \rangle + \mathbf{F}\{k_{11}\}, \quad (9)$$

где поправки к осредненным значениям $\langle \mathbf{A} \rangle$ рассчитываются через интегродифференциальные операторы $\mathbf{F} \equiv \{\mathbf{F}^c, \dots, \mathbf{F}^k\}$ [7, 8]. В частности, для первого и второго приближений имеем

$$\mathbf{F}\{\tilde{k}_{11}^{(1)}\} = (1 - p_1)\mathbf{F}\{k_{11}^{\text{II}}\}, \quad \mathbf{F}\{\tilde{k}_{11}^{(2)}\} = (1 - p_{\bullet})\mathbf{F}\{k_{11}^{\text{II}}\} + p_{\Delta}\mathbf{F}\{k_{11}^{\text{I}}\} \quad (10)$$

с учетом вида функций $\tilde{k}_{11}^{(1)}(\rho)$, $\tilde{k}_{11}^{(2)}(\rho)$ (6) и результирующего коэффициента корреляции p_{\bullet} (8). Аналогичные решения $\mathbf{A}^{\text{I}*}$, $\mathbf{A}^{\text{II}*}$ вида (9) имеем для вспомогательных полидисперсных структур (см. рис. 2):

$$\mathbf{A}^{\text{I}*} = \langle \mathbf{A} \rangle + \mathbf{F}\{k_{11}^{\text{I}}\}, \quad \mathbf{A}^{\text{II}*} = \langle \mathbf{A} \rangle + \mathbf{F}\{k_{11}^{\text{II}}\}, \quad (11)$$

при этом ранее установлено [8], что искомые \mathbf{A}^* и вспомогательные $\mathbf{A}^{\text{I}*}$ тензоры связаны соотношением

$$\mathbf{F}\{\tilde{k}_{11}\} = \mathbf{A}^* - \langle \mathbf{A} \rangle - p_1(\mathbf{A}^{\text{I}*} - \langle \mathbf{A} \rangle). \quad (12)$$

Из формул (10) с учетом (11) следуют равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\{\tilde{k}_{11}^{(1)}\} &= (1 - p_1)(\mathbf{A}^{\text{II}*} - \langle \mathbf{A} \rangle), \\ \mathbf{F}\{\tilde{k}_{11}^{(2)}\} &= (1 - p_{\bullet})(\mathbf{A}^{\text{II}*} - \langle \mathbf{A} \rangle) + p_{\Delta}(\mathbf{A}^{\text{I}*} - \langle \mathbf{A} \rangle) \end{aligned} \quad (13)$$

для первого и второго приближений соответственно. В результате, приравняв правые части равенств (12) и (13) в первом и втором приближениях, приходим к искомым решениям для эффективных характеристик $\mathbf{A}^* \equiv \{\mathbf{C}^*, \dots, \mathbf{\kappa}^*, \mathbf{\chi}^*\}$ композита (см. рис. 1) в виде формул

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)*} &= p_1 \mathbf{A}^{I*} + (1 - p_1) \mathbf{A}^{II*}, \\ \mathbf{A}^{(2)*} &= p_2 \mathbf{A}^{I*} + (1 - p_2) \mathbf{A}^{II*}, \end{aligned} \quad (14)$$

где \mathbf{A}^{I*} , \mathbf{A}^{II*} – эффективные характеристики вспомогательных полидисперсных структур (см. рис. 2) – частные случаи обобщенного сингулярного приближения [7] с учетом начального (электрического, магнитного, упругого) напряженного состояния. Точность полученных решений \mathbf{A}^* (14) подтверждена ранее для случая отсутствия начального напряженного состояния в сравнении с известными точными решениями [8].

Численные результаты

Графики зависимостей «начальных», т.е. при $\zeta_0 = 0$, значений компонентов тензора $\mathbf{\kappa}^{(0)*}$ электромагнитной связанности композита «PZT-4 / феррит» с различными структурами (см. рис. 1, 2) от объемной доли ферритовых волокон v_1 при относительной толщине прослойки $\delta/R = 0.25$ с учетом равенства $\kappa_{ij}^{(0)*} = \chi_{ji}^{(0)*}$ представлены на рис. 4.

На рис. 5–9 приведены графики зависимостей относительных значений эффективных коэффициентов электромагнитной $\kappa_{11,12,33}^*$ и магнитоэлектрической $\chi_{11,12,33}^*$ связанностей от значений компонент $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} \neq 0$ или $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$ осесимметричного тензора начальной макродеформации ϵ^{0*} при $\mathbf{E}^{0*} = 0$, $\mathbf{H}^{0*} = 0$ при объемной доле $v_1 = 0.2$. Выполняются равенства $\kappa_{11}^* = \kappa_{22}^*$, $\chi_{11}^* = \chi_{22}^*$, $\kappa_{12}^* = -\kappa_{21}^*$, $\chi_{12}^* = -\chi_{21}^*$, $\kappa_{33}^* = \chi_{33}^*$, при этом имеем $\kappa_{12}^* / \kappa_{12}^{0*} = \kappa_{21}^* / \kappa_{21}^{0*}$, $\chi_{12}^* / \chi_{12}^{0*} = \chi_{21}^* / \chi_{21}^{0*}$ с учетом вида (3).

На рис. 4–9 графики решений для КП-структуры (см. рис. 1) приведены в сравнении с решениями для полидисперсных (I, II) структур (см. рис. 2). Выявлены линейные зависимости относительных значений всех ненулевых компонентов тензоров $\mathbf{\kappa}^*$, $\mathbf{\chi}^*$ от значений $\epsilon_{11,22}^{0*}$, ϵ_{33}^{0*} осесимметричного тензора начальной макродеформации ϵ^{0*} композита (см. рис. 5–9). Выявлено, что для рассматриваемого электромагнитоупругого трансверсально-изотропного композита «пьезоэлектрик / феррит» тензоры электромагнитной связанности $\mathbf{\kappa}^*$, $\mathbf{\chi}^*$ по-прежнему имеют однотипный вид (3), $\chi_{33}^* = \kappa_{33}^*$, но $\chi_{ij}^* \neq \kappa_{ji}^*$ для различных случаев осесимметричного (по оси r_3) начального деформированного состояния: $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} \neq 0$ или $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$ композита.

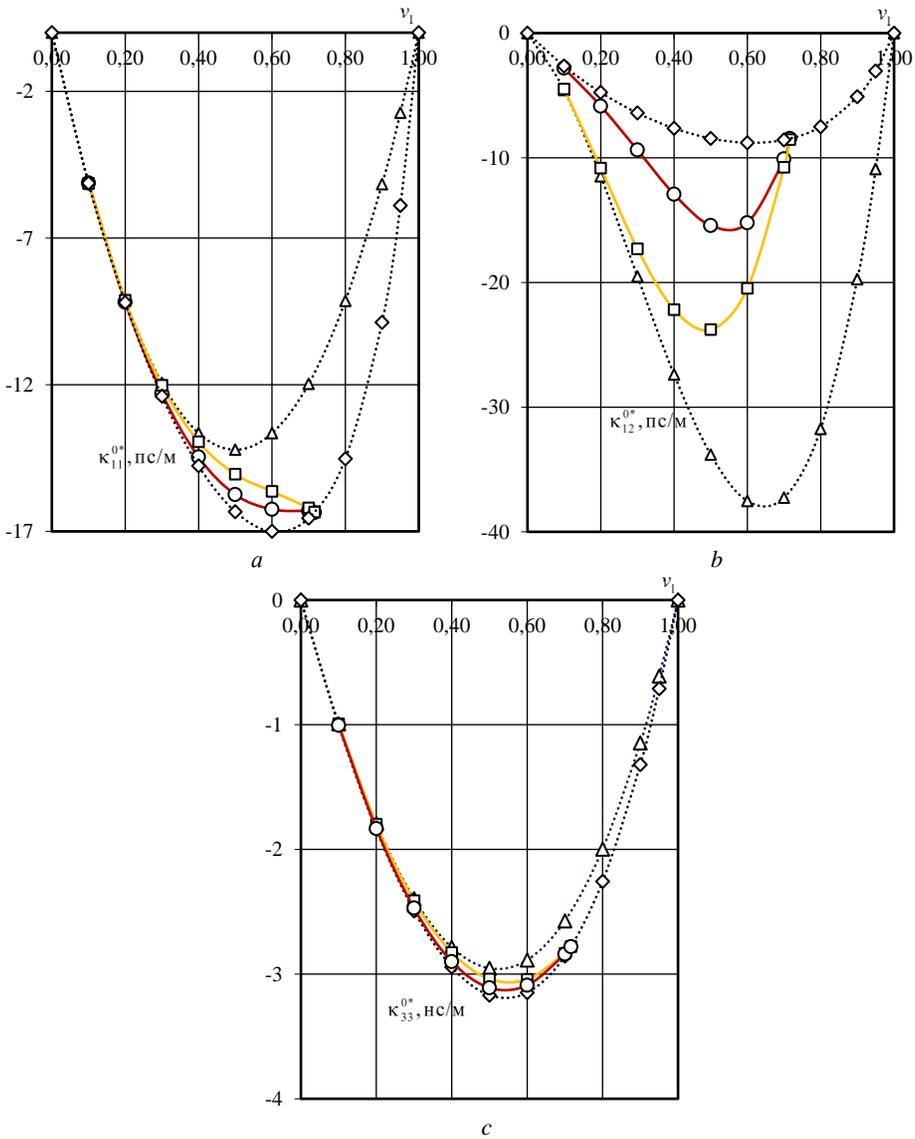


Рис. 4. Начальные ($\zeta_0 = 0$) эффективные коэффициенты $\kappa_{11}^{(0)*} = \chi_{11}^{(0)*}$ (a), $\kappa_{12}^{(0)*} = -\kappa_{21}^{(0)*} = \chi_{21}^{(0)*} = -\chi_{12}^{(0)*}$ (b), $\kappa_{33}^{(0)*} = \chi_{33}^{(0)*}$ (c) композита в зависимости от объемной доли v_1 ферритовых волокон в первом (\square) и втором (\circ) приближениях, для «матричной» (\diamond) и «кластерной» (Δ) полидисперсных структур

Fig. 4. Initial ($\zeta_0 = 0$) effective coefficients of the composite (a) $\kappa_{11}^{(0)*} = \chi_{11}^{(0)*}$, (b) $\kappa_{12}^{(0)*} = -\kappa_{21}^{(0)*} = \chi_{21}^{(0)*} = -\chi_{12}^{(0)*}$, and (c) $\kappa_{33}^{(0)*} = \chi_{33}^{(0)*}$ depending on the volume fraction of ferrite fibers v_1 in the first (\square) and second (\circ) approximations for the “matrix” (\diamond) and “cluster” (Δ) polydisperse structures

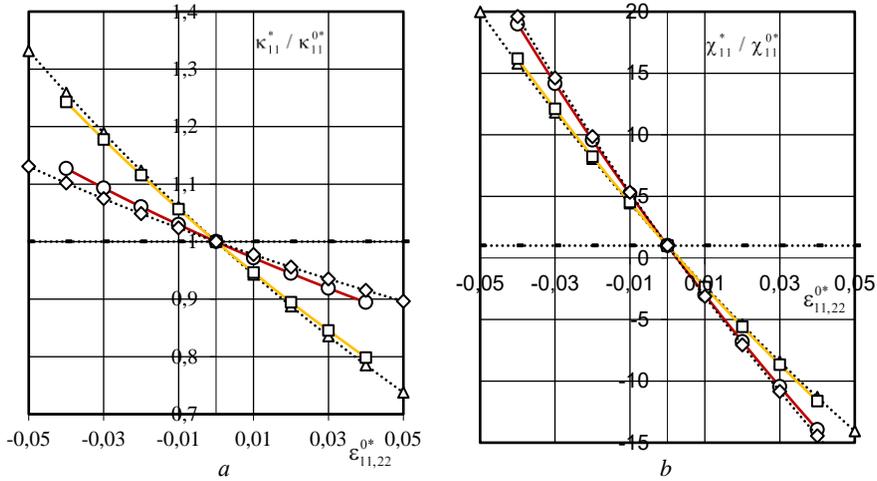


Рис. 5. Эффективные коэффициенты κ_{11}^* (a), χ_{11}^* (b) композита в зависимости от начальной макродеформации $\epsilon_{11,22}^{0*}$ ($\epsilon_{33}^{0*} = 0$) в первом (\square) и втором (\circ) приближениях, для «матричной» (\diamond) и «кластерной» (Δ) полидисперсных структур, без учета начального напряженного состояния (—)

Fig. 5. Effective coefficients (a) κ_{11}^* and (b) χ_{11}^* of the composite depending on the initial macrostrain $\epsilon_{11,22}^{0*}$ ($\epsilon_{33}^{0*} = 0$) in the first (\square) and second (\circ) approximations for the "matrix" (\diamond) and "cluster" (Δ) polydisperse structures leaving out of account the initial stress state (—)

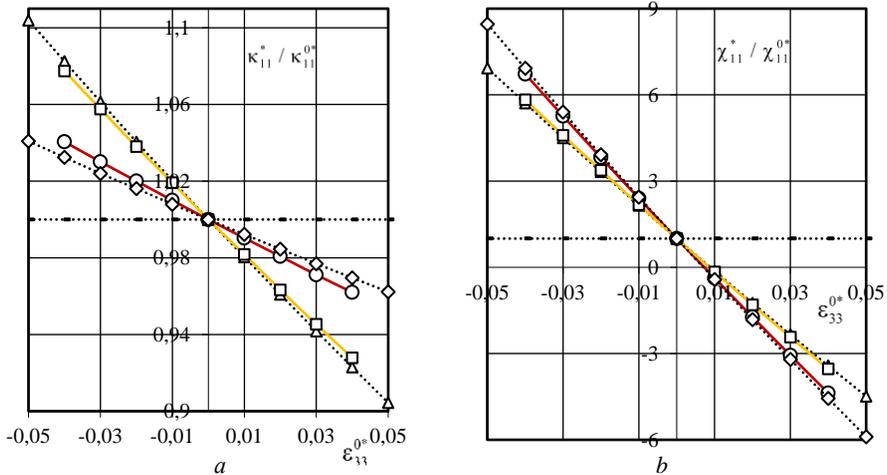


Рис. 6. Эффективные коэффициенты κ_{11}^* (a), χ_{11}^* (b) композита в зависимости от начальной макродеформации ϵ_{33}^{0*} ($\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$) в первом (\square) и втором (\circ) приближениях, для «матричной» (\diamond) и «кластерной» (Δ) полидисперсных структур, без учета начального напряженного состояния (—)

Fig. 6. Effective coefficients (a) κ_{11}^* and (b) χ_{11}^* of the composite depending on the initial macrostrain ϵ_{33}^{0*} ($\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$) in the first (\square) and second (\circ) approximations for the "matrix" (\diamond) and "cluster" (Δ) polydisperse structures leaving out of account the initial stress state (—)

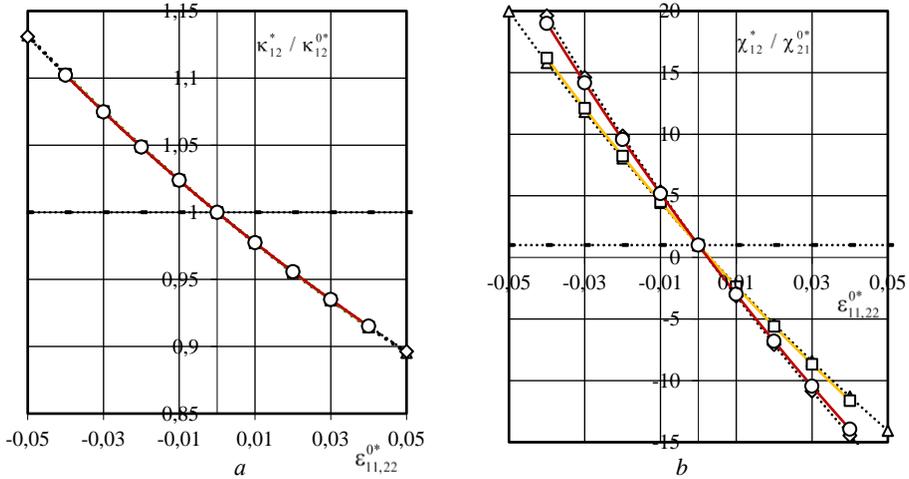


Рис. 7. Эффективные коэффициенты κ_{12}^* (a), χ_{12}^* (b) композита в зависимости от начальной макродеформации $\epsilon_{11,22}^{0*}$ ($\epsilon_{33}^{0*} = 0$) в первом (\square) и втором (\circ) приближениях, для «матричной» (\diamond) и «кластерной» (Δ) полидисперсных структур, без учета начального напряженного состояния (—)

Fig. 7. Effective coefficients (a) κ_{12}^* and (b) χ_{12}^* of the composite depending on the initial macrostrain $\epsilon_{11,22}^{0*}$ ($\epsilon_{33}^{0*} = 0$) in the first (\square) and second (\circ) approximations for the “matrix” (\diamond) and “cluster” (Δ) polydisperse structures leaving out of account the initial stress state (—)

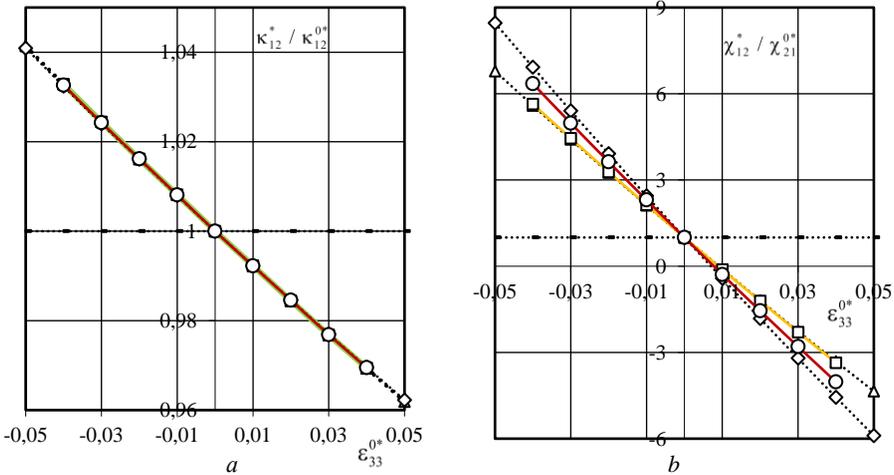


Рис. 8. Эффективные коэффициенты κ_{12}^* (a), χ_{12}^* (b) композита в зависимости от начальной макродеформации ϵ_{33}^{0*} ($\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$) в первом (\square) и втором (\circ) приближениях, для «матричной» (\diamond) и «кластерной» (Δ) полидисперсных структур, без учета начального напряженного состояния (—)

Fig. 8. Effective coefficients (a) κ_{12}^* and (b) χ_{12}^* of the composite depending on the initial macrostrain ϵ_{33}^{0*} ($\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$) in the first (\square) and second (\circ) approximations for the “matrix” (\diamond) and “cluster” (Δ) polydisperse structures leaving out of account the initial stress state (—)

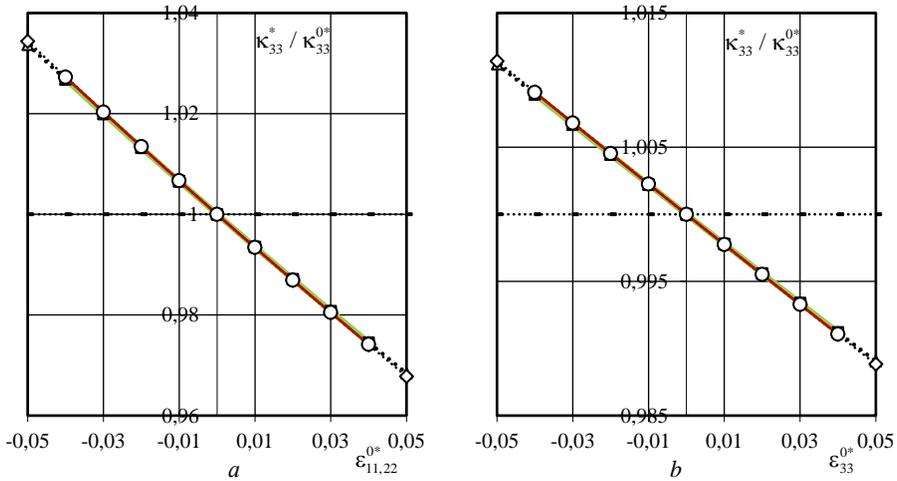


Рис. 9. Эффективный коэффициент $\kappa_{33}^* = \chi_{33}^*$ композита в зависимости от начальной макродеформации $\varepsilon_{11,22}^{0*}$ ($\varepsilon_{33}^{0*} = 0$) (a), ε_{33}^{0*} ($\varepsilon_{11,22}^{0*} = 0$) (b) для случая $\nu_1 = 0.2$ в первом (\square) и втором (\circ) приближениях, для «матричной» (\diamond) и «кластерной» (Δ) полидисперсных структур, без учета начального напряженного состояния (—)

Fig. 9. Effective composite coefficient $\kappa_{33}^* = \chi_{33}^*$ of the composite depending on the initial macrostrain (a) $\varepsilon_{11,22}^{0*}$ ($\varepsilon_{33}^{0*} = 0$) and (b) ε_{33}^{0*} ($\varepsilon_{11,22}^{0*} = 0$) at $\nu_1 = 0.2$ in the first (\square) and second (\circ) approximations for the “matrix” (\diamond) and “cluster” (Δ) polydisperse structures leaving out of account the initial stress state (—)

Заключение

Представлены результаты расчета независимых компонент тензоров эффективных электромагнитной $\mathbf{\kappa}^*$ и магнитоэлектрической $\mathbf{\chi}^*$ связанностей трансверсально-изотропного однонаправлено-волоконистого композита «PZT-4 / феррит» при осесимметричном тензоре начальной макродеформации $\mathbf{\varepsilon}^{0*}$ композита, когда компоненты $\varepsilon_{11}^{0*} = \varepsilon_{22}^{0*} \neq 0$ и / или $\varepsilon_{33}^{0*} \neq 0$. Выявлено, что при осесимметричном тензоре начальной макродеформации $\mathbf{\varepsilon}^{0*}$ композита тензоры $\mathbf{\kappa}^*$, $\mathbf{\chi}^*$ по-прежнему имеют однотипный вид (3), $\chi_{33}^* = \kappa_{33}^*$, но $\mathbf{\chi}^* \neq \mathbf{\kappa}^{*T}$ для рассмотренных случаев: $\varepsilon_{11}^{0*} = \varepsilon_{22}^{0*} \neq 0$ и / или $\varepsilon_{33}^{0*} \neq 0$ осесимметричного по оси r_3 начально напряженно-деформированного состояния композита. Для всех ненулевых значений компонент тензоров $\mathbf{\kappa}^*$, $\mathbf{\chi}^*$ выявлены (см. рис. 5–9) линейность и монотонно убывающий характер зависимостей относительных величин κ^* / κ^{0*} , χ^* / χ^{0*} от значений начальных осевых макродеформаций $\varepsilon_{11,22}^{0*}$ и / или ε_{33}^{0*} композита с учетом равенств $\kappa^* / \kappa^{0*} = \chi^* / \chi^{0*} = 1$ при $\mathbf{\varepsilon}^{0*} = 0$. Выявлено увеличение абсолютных значений компонент тензоров $\mathbf{\kappa}^*$, $\mathbf{\chi}^*$ рассматриваемых структур (см. рис. 1, 2) композитов при отрицательных значениях компонент ε_{11}^{0*} , ε_{22}^{0*} , ε_{33}^{0*} осесимметричного тензора начальной макродеформации $\mathbf{\varepsilon}^{0*}$ композита, при этом наиболее

существенное влияние имеем, в частности, для компоненты χ_{11}^* (см. рис. 5, b, 6, b). В случае комбинированного начального макродеформирования композита, когда одновременно имеем $\varepsilon_{11,22}^{0*} \neq 0$, $\varepsilon_{33}^{0*} \neq 0$, результирующие значения относительных величин κ^* / κ^{0*} , χ^* / χ^{0*} находим суммированием соответствующих «коэффициентов влияния» κ^* / κ^{0*} , χ^* / χ^{0*} от каждой из компонент $\varepsilon_{11,22}^{0*}$, ε_{33}^{0*} осесимметричного тензора начальной макродеформации ε^{0*} композита.

Список источников

1. *Vacudzu K.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М. : Мир, 1987. 542 с.
2. *Akbarov S.D.* Dynamics of pre-strained bi-material elastic systems: Linearized three-dimensional approach. Springer, 2016. 1004 p.
3. *Kolpakov A.G.* Effect of inflation of initial stresses on the homogenized characteristics of composite // *Mechanics of materials*. 2005. V. 37 (8). P. 840–854. doi: 10.1016/j.mechmat.2004.08.002
4. *Yesil U.B.* Forced and natural vibrations of an orthotropic pre-stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities // *Computers, Materials & Continua*. 2017. V. 53 (1). P. 1–22. doi: 10.3970/cmc.2017.053.001
5. *Guo X., Wei P.* Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezoelectric / piezomagnetic phononic crystal with initial stresses // *Ultrasonics*. 2016. V. 66. P. 72–85. doi: 10.1016/j.ultras.2016.04.025
6. *Dasdemir A.* Forced vibrations of pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and piezoelectric core // *International Applied Mechanics*. 2018. V. 54(4). P. 480–493. doi: 10.1007/s10778-018-0901-3
7. *Pan'kov A.A.* Effect of initial stress state on effective properties of piezocomposite // *Mechanics of Composite Materials*. 2022. V. 58 (5). P. 733–746. doi: 10.1007/s11029-022-10063-w
8. *Pan'kov A.A.* Pyroelectromagnetic effects of a piezocomposite in the binary refinement of the method of quasi-periodic polydisperse correlation components // *Mechanics of Composite Materials*. 2016. V. 52 (4). P. 535–544. doi: 10.1007/s11029-016-9604-1
9. *Кристенсен П.* Введение в механику композитов. М. : Мир, 1982. 334 с.
10. *Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А.* Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел. М. : Наука, 1984. 115 с.
11. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микрон неоднородных сред. М. : Наука, 1976. 399 с.

References

1. Washizu K. (1982) *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Oxford: Pergamon Press.
2. Akbarov S.D. (2016) *Dynamics of Pre-trained Bi-Material Elastic Systems: Linearized Three-Dimensional Approach*. Springer.
3. Kolpakov A.G. (2005) Effect of inflation of initial stresses on the homogenized characteristics of composite. *Mechanics of Materials*. 37(8). pp. 840–854. doi: 10.1016/j.mechmat.2004.08.002
4. Yesil U.B. (2017) Forced and natural vibrations of an orthotropic pre-stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities. *Computers, Materials & Continua*. 53(1). pp. 1–22. doi: 10.3970/cmc.2017.053.001
5. Guo X., Wei P. (2016) Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezoelectric / piezomagnetic phononic crystal with initial stresses. *Ultrasonics*. 66. pp. 72–85. doi: 10.1016/j.ultras.2016.04.025

6. Dasdemir A. (2018) Forced vibrations of pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and piezoelectric core. *International Applied Mechanics*. 54(4). pp. 480–493. doi: 10.1007/s10778-018-0901-3
7. Pan'kov A.A. (2022) Effect of initial stress state on effective properties of piezocomposite. *Mechanics of Composite Materials*. 58(5). pp. 733–746. doi: 10.1007/s11029-022-10063-w
8. Pan'kov A.A. (2016) Pyroelectromagnetic effects of a piezocomposite in the binary refinement of the method of quasi-periodic polydisperse correlation components. *Mechanics of Composite Materials*. 52(4). pp. 535–544. doi: 10.1007/s11029-016-9604-1
9. Kristensen R. (1982) *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* [Introduction to mechanics of composite materials]. Moscow: Mir.
10. Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. (1984) *Mekhanika deformirovaniya i razrusheniya strukturno neodnorodnykh tel* [Mechanics of deformation and destruction of structurally heterogeneous bodies]. Moscow: Nauka.
11. Shermegor T.D. (1976) *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of microheterogeneous media]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторе:

Паньков Андрей Анатольевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры механики композиционных материалов и конструкций Пермского национального исследовательского политехнического университета, Пермь, Россия. E-mail: a_a_pankov@mail.ru

Information about the author:

Pan'kov Andrey A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation). E-mail: a_a_pankov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 22.02.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 22.02.2023; accepted for publication 10.04.2024

Научная статья

УДК 534.1

doi: 10.17223/19988621/88/10

Нелинейный флаттер переходного процесса наследственно-деформируемых систем при сверхзвуковом режиме полета

Ботир Шукурллаевич Усмонов¹, Исмоил Иброхимович Сафаров²,
Мухсин Худойбердиевич Тешаев³

^{1,2} Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан

³ Бухарское отделение Института математики им. В.И.Романовского

Академии наук Республики Узбекистан, Бухара, Узбекистан

¹ busmonov@hotmail.com

² safarov54@mail.ru

³ muhsin_5@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача нелинейного флаттера переходного процесса наследственно-деформируемого крыла летательного аппарата, движущегося со сверхзвуковой скоростью. Нелинейные колебания крыла описываются системой нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, которая решается численно методом, предложенным Ф. Бадаловым. Сравнительно оценены перемещения характерных точек крыла в условиях флаттера. Найден механический эффект существенной зависимости критической скорости флаттера от амплитуды ядра релаксации и коэффициента Пуассона. Определена критическая скорость, с которой начинается быстрый рост прогиба во времени.

Ключевые слова: гибкая пластинка, поршневая теория, флаттер, аэродинамическое воздействие, метод Бубнова–Галеркина, ядро релаксации

Для цитирования: Усмонов Б.Ш., Сафаров И.И., Тешаев М.Х. Нелинейный флаттер переходного процесса наследственно-деформируемых систем при сверхзвуковом режиме полета // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 124–137. doi: 10.17223/19988621/88/10

Original article

Nonlinear flutter of the transient process of hereditarily deformable systems in supersonic flight mode

Botir Sh. Usmonov¹, Ismoil I. Safarov², Muhsin Kh. Teshaeв³

^{1,2} Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan

³ Bukhara Branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan

¹ busmonov@hotmail.com

² *safarov54@mail.ru*

³ *muhsin_5@mail.ru*

Abstract. In this paper, the problem of nonlinear flutter of a transient process of a hereditarily deformable wing of an aircraft moving at supersonic speed is considered. The aim of the work is to study the flutter problem for plate elements of aircraft in a gas flow under loads caused by atmospheric turbulence. Aerodynamic effects are specified according to the linearized piston theory. Nonlinear wing oscillations are described by a system of nonlinear integro-differential equations. They are solved numerically by the method proposed by F. Badalov, which is based on the Bubnov–Galerkin method, finite difference method, and power series. Free vibration is analyzed under conditions of ideal elasticity with account for a hereditarily deformable thin wing. The displacements of characteristic points of the wing under flutter conditions are comparatively assessed. It is established that aerodynamic nonlinearity has little impact on the critical speed, but with an increase in the Mach number, this impact increases. The mechanical effect of a significant dependence of the critical flutter speed on the relaxation kernel amplitude and Poisson's ratio is revealed.

Keywords: flexible plate, piston theory, flutter, aerodynamic impact, Bubnov–Galerkin method, relaxation kernel

For citation: Usmonov, B.Sh., Safarov, I.I., Teshaeв, M.Kh. (2024) Nonlinear flutter of the transient process of hereditarily deformable systems in supersonic flight mode. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 124–137. doi: 10.17223/19988621/88/10

Введение

Летательный аппарат (ЛА) при своем полете подвергается различным внешним нагрузкам. Эти нагрузки имеют динамический характер и вызываются многими причинами: случайными воздействиями атмосферной турбулентности; воздействиями воздушных волн, вызванных взрывами; динамическими нагрузками, возникающими при маневрах самолета; влиянием на хвостовое оперение турбулентного следа, образующегося за крыльями, гондолами или другими частями самолета [1–2]. Определение аэродинамических сил, действующих на крыло, приведено в работах [3–4]. Кроме того, на самолет действуют переменные силы при взлете и посадке, при его движении по Земле [3–4]. Под действием переменных нагрузок самолет деформируется и совершает вынужденные колебания в потоке газа под влиянием атмосферной турбулентности [5–6].

Проблема прочности и надежности самолета в целом и отдельных его элементов и проблема усталости материала и отдельных элементов конструкций всегда были важными для конструкторов [7–8]. За последнее время в связи с увеличением веса и размера машин и скорости полета эти проблемы приобрели особое значение. При решении данных проблем особенную роль играет учет влияния колебаний и деформаций самолета, возникающих под действием внешних переменных нагрузок, на прочность машины [9–10]. Если учесть прочность, экономичность и простоту исполнения основных элементов ЛА из композитных материалов [11–12], а также ярко выраженные реологические и наследственно-деформированные свойства при любых температурах этих материалов, то ЛА можно считать не только упругим, но и вязкоупругим телом [13–14].

Как показано в работах [15–17], диссипативные свойства деформируемых элементов существенно влияют на снижение (или управление) колебательных процессов механической системы. Поэтому исследование наследственно-деформируемых свойств элементов ЛА (механических систем) на колебательные процессы и явление флаттера при сверхзвуковом режиме полета является актуальной задачей.

Данная работа посвящена изучению панельного флаттера с учетом наследственно-деформируемых свойств материала крыла в потоке газа под действием нагрузок, вызываемых атмосферной турбулентностью.

Постановка задачи и основные соотношения

Задачи нелинейного флаттера наследственно-деформируемого крыла самолета переходного процесса в спокойной атмосфере при сверхзвуковом режиме полета решаются совместным рассмотрением уравнений теории вязко-упругости и аэрогидромеханики

$$LW + mW_{tt} + q_A = q(x, y, t), \quad (1)$$

где LW – оператор в частных производных, m – погонная масса крыла, $q(x, y, t)$ – поперечные нагрузки, $W_{tt} = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$.

Для анизотропных материалов определяющие уравнения имеют вид [11]:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varphi[\varepsilon_{kl}] - \int_0^t R_{ijkl}(t - \tau) \varphi[\varepsilon_{kl}] d\tau = E_{ijkl}^* \cdot \varphi[\varepsilon_{kl}], \quad (2)$$

$$\varphi[\varepsilon_{kl}] = \varepsilon_{kl} - \varphi \varepsilon_{kl}^3, \quad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) + \varphi[U_{k,i}],$$

где ε_{kl} – компоненты тензора деформации, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, E_{ijkl} – мгновенные модули упругости, R_{ijkl} – ядро релаксации, $U_{k,i}$ – компоненты перемещений.

Если учесть условия симметрии, то для компонентов тензора упругости можно записать

$$E_{ijkl}^* = E_{jikl}^* = E_{ijlk}^* = E_{lkij}^* \quad \text{и} \quad v_{ij} = const,$$

и для диссипативно-неоднородного материала соотношения (2) записываются как

$$\sigma = \{C^*\} \varepsilon \quad (3)$$

где

$$C^* = \begin{bmatrix} E_{1111}^* & E_{1122}^* & E_{2111}^* \\ E_{1122}^* & E_{2222}^* & E_{1222}^* \\ E_{2111}^* & E_{1222}^* & E_{1212}^* \end{bmatrix},$$

$$E_{1111}^* = E_{1111} (1 - R_1^*), \quad E_{2222}^* = E_{2222} (1 - R_2^*), \quad E_{1122}^* = E_{1122} (1 - R_3^*),$$

$$E_{2111}^* = E_{2111} (1 - R_4^*), \quad E_{1222}^* = E_{1222} (1 - R_5^*), \quad E_{1212}^* = E_{1212} (1 - R_6^*),$$

$$C^* = \begin{bmatrix} E_{1111}^* & E_{1122}^* & 0 \\ E_{1122}^* & E_{2222}^* & 0 \\ 0 & 0 & E_{1212}^* \end{bmatrix},$$

$$E_{1111}^* = E_{1111}(1-R_1^*), \quad E_{1122}^* = E_{1122}(1-R_1^*), \quad E_{2211}^* = E_{2121}(1-R_2^*),$$

$$E_{2222}^* = E_{2222}(1-R_1^*), \quad E_{1212}^* = E_{1212}(1-R_3^*), \quad \sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T,$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}\}^T,$$

здесь R_i^* ($i = \overline{1,6}$) – оператор Вольтерры:

$$R_i^* f(t) = \int_0^t R_i(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad R_i(t-\tau) = \varepsilon e^{-\beta_i(t-\tau)} (t-\tau)^{\alpha_i}, \quad 0 < \alpha_i < 1. \quad (4)$$

В случае ортотропного материала

$$E_{1111} = \frac{E_{11}}{1-\nu_{11}\nu_{22}}, \quad E_{2222} = \frac{E_{22}}{1-\nu_{11}\nu_{22}}, \quad E_{1122} = \frac{E_{11}\nu_{22}}{1-\nu_{11}\nu_{22}},$$

$$E_{2211} = \frac{E_{22}\nu_{11}}{1-\nu_{11}\nu_{22}}, \quad E_{1212} = G_{12}, \quad B_{1122} = B_{2211}.$$

С учетом соотношений (3)–(4) для крутящего момента M_{xy} и изгибающих моментов M_x, M_y получим выражения

$$M_x = M_x^{(\ell)} + M_x^{(H)}, \quad M_y = M_y^{(\ell)} + M_y^{(H)}, \quad M_{xy} = M_{xy}^{(\ell)} + M_{xy}^{(H)},$$

где

$$M_x^{(\ell)} = -\left[D_{11}(1-R_1^*)W_{xx} + D_{12}(1-R_3^*)W_{yy} + 2D_{16}(1-R_4^*)W_{xy} \right],$$

$$M_y^{(\ell)} = -\left[D_{22}(1-R_2^*)W_{yy} + D_{21}(1-R_3^*)W_{xx} + 2D_{26}(1-R_5^*)W_{xy} \right],$$

$$M_{xy}^{(\ell)} = -\left[2D_{66}(1-R_6^*)W_{xy} + D_{16}(1-R_4^*)W_{xx} + D_{26}(1-R_5^*)W_{yy} \right],$$

$$M_x^{(H)} = \bar{M}_x^{(H)}(W_{xx}, W_{yy}, W_{xy}), \quad M_y^{(H)} = \bar{M}_y^{(H)}(W_{xx}, W_{yy}, W_{xy}), \quad M_{xy}^{(H)} = \bar{M}_{xy}^{(H)}(W_{xx}, W_{yy}, W_{xy}),$$

$$D_{11} = \frac{E_{1111}h^3(x,y)}{12}, \quad D_{12} = \frac{E_{1122}h^3(x,y)}{12}, \quad D_{16} = \frac{E_{2111}h^3(x,y)}{12},$$

$$D_{22} = \frac{E_{2222}h^3(x,y)}{12}, \quad D_{21} = D_{12}, \quad D_{26} = \frac{E_{1222}h^3(x,y)}{12}, \quad D_{66} = \frac{E_{1212}h^3(x,y)}{12},$$

а в случае ортотропного материала $D_{16} = D_{26} = 0$,

$$M_x^{(\ell)} = -\left[D_{11}(1-R_1^*)W_{xx} + D_{12}(1-R_1^*)W_{yy} \right],$$

$$M_y^{(\ell)} = -\left[D_{22}(1-R_2^*)W_{yy} + D_{21}(1-R_2^*)W_{xx} \right],$$

$$M_{xy}^{(\ell)} = -\left[2D_{66}(1-R_3^*)W_{xy} \right],$$

$$D_{11} = \frac{E_{11}h^3(x,y)}{12(1-\nu_{11}\nu_{22})}, \quad D_{22} = \frac{E_{22}h^3(x,y)}{12(1-\nu_{11}\nu_{22})}, \quad D_{66} = \frac{G_{12}h^3(x,y)}{12},$$

$$D_{12} = \nu_{12}D_{11}, \quad D_{21} = \nu_{11}D_{22},$$

$h(x, y)$ – толщина, $D_{ij}(x, y)$ – жесткость анизотропной пластинки.

Воспользуемся уравнением движения пластинки

$$L[W] + q(x, y, t) = m(x, y)W_{tt}, \quad (5)$$

где:

$$L[W] = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}, \quad q(x, y, t) = q_n(x, y, t) - q_A(x, y, t),$$

$$m(x, y) = \rho h(x, y),$$

ρ – плотность, $q_n(x, y, t)$ – поперечная нагрузка, $q_A(x, y, t)$ – аэродинамическая нагрузка.

Ставится задача определения решения уравнений (5), удовлетворяющих следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \ell_i[W] &= 0 \quad \text{при } x = 0, x = a, \\ \ell_j[W] &= 0 \quad \text{при } y = 0, y = b; \quad (i, j = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (6)$$

и начальным условиям:

$$W|_{t=0} = \alpha(x, y), \quad W_t|_{t=0} = \beta(x, y). \quad (7)$$

Решение задачи (5)–(7) из-за физической и геометрической нелинейности сложно. При этом основные разрешающие уравнения задачи становятся нелинейными с неразделяющимися переменными. Разложим аэродинамическую силу в ряд:

$$q_A = x P_\infty \bar{M} W_x + x \frac{x+1}{4} P_\infty \bar{M}^2 W_x^2 + x \frac{x+1}{12} P_\infty \bar{M}^3 W_x^3 + \dots \quad (8)$$

и ограничимся линейными, квадратичными или кубическими членами. В разложении (8) демпфирующее слагаемое аэродинамической силы не учтено, так как влияние его в большинстве случаев невелико.

Для решения задачи (5)–(7) используя метод Бубнова–Галеркина. Дискретизируем по пространственным переменным [4], и решение уравнения (5) будем искать в виде:

$$W(x, y, t) = \sum_{k,i=1}^n U_{ki}(t) \phi_{ik}(x, y), \quad (9)$$

где $\phi_{ik}(x, y)$ – функции, удовлетворяющие граничным условиям (6), а $U_{ki}(t)$ удовлетворяют следующим интегро-дифференциальным уравнениям:

$$M \ddot{U}(t) + \sum_{m=1}^p A^{(m)} (1 - R_m^*) U(t) = q(t, U, \bar{M}). \quad (10)$$

Интегро-дифференциальные уравнения (10) удовлетворяют начальным условиям

$$U(0) = \alpha_0, \quad \dot{U}(0) = \alpha_1. \quad (11)$$

Здесь

$$U = [U_{11}, \dots, U_{1N}, \dots, U_{N1}, \dots, U_{NN}]^T, \quad q = [q_{11}, \dots, q_{1N}, \dots, q_{N1}, \dots, q_{NN}]^T,$$

$$M = \{M_{kinj}\}, \quad A^{(m)} = \{a_{kinj}^{(m)}\}, \quad P = 6, m = \overline{1, p}, \quad k, i, n, j = \overline{1, N},$$

$$M_{kinj} = \int_0^a \int_0^b m(x, y) \varphi_{ki}(x, y) \varphi_{nj}(x, y) dx dy, \quad a_{kinj}^{(1)} = \int_0^a \int_0^b (D_{11} \varphi_{kixx})_{xx} \varphi_{nj} dx dy,$$

$$a_{kinj}^{(2)} = \int_0^a \int_0^b (D_{22} \varphi_{kiyy})_{yy} \varphi_{nj} dx dy, \quad a_{kinj}^{(3)} = \int_0^a \int_0^b [(D_{12} \varphi_{kiyy})_{xx} + (D_{21} \varphi_{kixx})_{yy}] \varphi_{nj} dx dy,$$

$$a_{kinj}^{(4)} = \int_0^a \int_0^b [2(D_{16} \varphi_{kixy})_{xx} + (D_{16} \varphi_{kixx})_{xy}] \varphi_{nj} dx dy,$$

$$a_{kinj}^{(5)} = \int_0^a \int_0^b [2(D_{26} \varphi_{kiyx})_{yy} + (D_{26} \varphi_{kiyy})_{xx}] \varphi_{nj} dx dy,$$

$$a_{nj}^{(t)} = \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) \varphi_{nj} dx dy, \quad a_{kinj}^{(6)} = \int_0^a \int_0^b [2D_{66} \varphi_{kixy}]_{xy} dx dy.$$

В случае ортотропной пластинки $a_{kinj}^{(1)}, a_{kinj}^{(2)}, a_{kinj}^{(3)}$ принимают следующий вид:

$$a_{kinj}^{(1)} = \int_0^a \int_0^b (D_{11} \phi_{kixx} + D_{12} \phi_{kiyy})_{xx} \phi_{nj} dx dy,$$

$$a_{kinj}^{(2)} = \int_0^a \int_0^b (D_{22} \phi_{kiyy} + D_{21} \phi_{kixx})_{yy} \phi_{nj} dx dy,$$

$$a_{kinj}^{(3)} = 4 \int_0^a \int_0^b (D_{66} \phi_{kixy})_{xy} \phi_{nj} dx dy.$$

Здесь $q(t, U, \bar{M})$ – нелинейные вектор-функции, зависящие от обобщенных координат и числа Маха.

Исключаем слабо сингулярные особенности интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [4] и будем иметь следующую систему уравнений:

$$MU_m = \alpha_0 + \alpha_1 t_m + \sum_{s=0}^{m-1} B_s (t_m - t_s) \left\{ q(t_s, U_s, \bar{M}) - \sum_j A_j \left[U_s - \frac{\varepsilon_j}{\alpha_j} \sum_n P_n^{(j)} e^{-\beta_j t_n} U_{s-n} \right] \right\}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (12)$$

где:

$$U(t_m) = U_m; \quad t_m = m\Delta t; \quad B_0 = \frac{\Delta t}{2}, \quad B_s = \Delta t; \quad S = \overline{1, m-1};$$

$$P_0^{(j)} = \frac{\Delta t^{\alpha_j}}{2}; \quad P_n^{(j)} = \frac{\Delta t^{\alpha_j}}{2} [(n+1)^{\alpha_j} - (n-1)^{\alpha_j}]; \quad P_S^{(j)} = [S^{\alpha_j} - (S-1)^{\alpha_j}] \frac{\Delta t^{\alpha_j}}{2}.$$

Уравнения (12) позволяют исследовать колебания (флаттер) элементов ЛА. При использовании линейной наследственной теории эта зависимость записывается в виде [10]:

$$N = EF \left[N_0 + \frac{1}{2a} (1 - R^*) \int_0^a W_x^2 dx \right], \quad \sigma = E(1 - R^*) \varepsilon, \quad (13)$$

где:

$$R^* f(t) = \int_0^t R(t-\tau) f(\psi) d\tau, \quad \varepsilon = u_x + \frac{1}{2} u_x^2, \quad u = -z W_x,$$

$R(t)$ – ядро наследственности, E – модуль упругости, a – длина крыла, $F(x)$ – площадь поперечного сечения.

Если аэродинамическая нагрузка принята в виде [12]:

$$q_A = KVW_x,$$

то она называется линейной аэродинамической. Если будут учитываться квадратичные члены W_x и V , то q_A называется нелинейной аэродинамической нагрузкой. Следует учитывать также аэродинамическую нелинейность при больших числах Маха. С этой целью после разложения уравнения (13) по формуле бинома во втором приближении получим

$$q_A = \frac{xP_\infty}{C_\infty} [VW_x + x_1 V^2 W_x^2 + W_t]. \quad (14)$$

Вместо выражения (14) можно использовать выражение

$$q_A = K [VW_x + x_1 V^2 W_x^2 + W_t], \quad (15)$$

где для квазиустановившегося течения

$$z = (M^2 - 2) / (M^2 - 1) \rightarrow 1,$$

для квазистатического случая $z = 0$, в линейном приближении $x_1 = 0$.

Рассмотрим задачу флаттера наследственно-деформируемого крыла ЛА, учитывая геометрическую и аэродинамическую нелинейности. Крыло будем трактовать как консольный стержень, корневая часть которого жестко закреплена в фюзеляже (рис. 1). Такая одномерная стержневая модель с учетом переменности ширины $b(x)$ и толщины $h(x)$ позволяет точнее учесть реальные формы крыла самолета, чем двумерная модель. Более того, такая модель позволяет использовать известные по размаху численные значения изгибной жесткости и массы, найденные экспериментально в аэродинамических трубах.

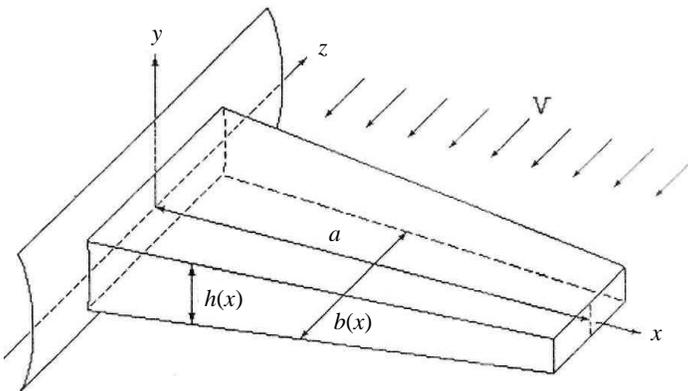


Рис. 1. Расчетная схема
Fig. 1. Computational scheme

Построим математическую модель колебаний (и флаттера) крыла с учетом отмеченных выше нелинейностей. Если использовать соотношения (13), изгибающий момент вычисляется следующим образом:

$$M_x = \int_{-\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} b(x) \sigma z dz = -J(x)(1-R^*)W_{xx}, \quad J(x) = \frac{b(x)h^3(x)E}{12}. \quad (16)$$

Подставляя (13), (15) и (16) в уравнение равновесия, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial W}{\partial x} \right) - m(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q_A(x, t),$$

где W – изгиб крыла. Теперь переходим к безразмерным координатам:

$$\begin{aligned} x &= a\bar{x}, \quad b(x) = b_0\bar{b}(x), \quad h(x) = h_0\bar{h}(x), \quad t = t_1\bar{t}, \\ J(x) &= J_0\bar{b}(x)\bar{h}^3(x) = J_0\bar{d}(x), \quad F(x) = F_0\bar{b}(x)\bar{h}(x), \\ m(x) &= m_0\bar{b}(x)\bar{h}(x) = m_0\bar{F}(x), \quad \sigma_1 = \frac{12N_0a^2}{h_0^2}, \quad \theta_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_1}, \\ t_1 &= \sqrt{\frac{m_0}{J_0}} a^2, \quad W = h_0\bar{W}, \quad P = \frac{Va^3\bar{K}}{J_0E}, \quad \theta_2 = \frac{Eb_0(ae+1)}{48K} \left(\frac{h_0}{a} \right)^4, \\ K &= aeP_\infty, \quad \gamma = \frac{Kza^4}{EJ_0t_1}, \quad \bar{K} = \frac{K}{C_\infty}. \end{aligned}$$

Масштаб времени $T_0 = L_0\sqrt{m_0/B^0}$, $L_0 = a$ – длина, B^0 – характерная жесткость на растяжение. Опуская штрихи над переменными, получим

$$\begin{aligned} (1-R^*)LM - \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[F(x)W_x \left(1 - \theta_1(1-R^*) \int_0^1 W_x^2 dx \right) \right] + \\ + PW_x + \theta_2 P^2 W_x^2 + \gamma W_t + F(x)W_{tt} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где:

$$LW = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(d(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \quad d(x) = b(x)h^3(x), \quad F(x) = b(x)h(x).$$

Граничные условия для решения ИДУ можно записать в виде:

$$W_{xx} = 0, \quad W_{xxx} = 0 \quad \text{при } x=1. \quad (18)$$

Для корректной математической постановки задачи вместе с граничными условиями (18) необходимы и начальные условия, т.е.

$$W|_{t=0} = d_x(x), \quad W_t|_{t=0} = d_1(x). \quad (19)$$

Таким образом, уравнения (17), удовлетворяющие граничным (18) и начальными условиями (19), в совокупности составляют математическую модель задачи нелинейного флаттера крыла ЛА.

Решение поставленных задач в континуальной постановке представляет определенные трудности, поэтому построим дискретную модель. Для этого перейдем к системам с конечным числом степеней свободы, дискретизируя по пространственным переменным.

Решение уравнения (17) будем искать в виде:

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \phi_k(x, y) \quad (20)$$

где $\phi_k(x, y)$ – функции, удовлетворяющие граничным условиям, $u_k(t)$ – некоторые функции от времени, которые следует определить. Тогда, подставляя (20) в (17), имеем

$$\sum_{K=1}^N \left\{ a_{Ki} \ddot{u}_K(t) + \gamma b_{Ki} \dot{u}_K(t) + \omega_{Ki} (1 - R^*) u_K(t) + (Pd_{Ki} - \sigma a_{Ki}) u_K(t) + \right. \\ \left. + \theta_2 P^2 \sum_{j=1}^N m_{Kji} u_K(t) u_j(t) - \sigma \theta_1 \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^N n_{Kjq} u_K(t) (1 - R^*) u_j(t) u_q(t) \right\} = 0, \quad (21) \\ i = \overline{1, N}.$$

Интегрирование системы (21) с ядром Ржаницына–Колтунова

$$R(t) = \varepsilon \exp(-\beta t) t^{\alpha-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

осуществлено численным методом, разработанным выше. Численные значения искомым функций $u_K(t_i) = u_{K,i}$ получены из решения следующей рекуррентной системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{K=1}^N \left[a_{Ki} + \gamma \frac{\Delta t}{2} B_{Ki} \right] u_{Ki} = \sum_{K=1}^N \left[(a_{Ki} + \gamma t_i b_{Ki}) u_K + a_{Ki} t_i \dot{u}_K \right] - \\ - \sum_{i_1}^{i-1} \left\{ \sum_{K=1}^N \left[\gamma A_{i_1} b_{Ki} u_{K,i_1} + A_{i_1} (t_l - t_{i_1}) (\omega_{K,i} (u_{K,i_1} - \frac{\varepsilon}{a} \sum_{i_2}^{i_1} B_{i_2} e^{-\beta t} u_{K,i_1-i_2+1})) + \right. \right. \\ \left. \left. + A_{i_1} (t_l - t_{i_1}) \left[\sum \sum \left(\theta_2 P^2 u_{K,i_1} u_{j,i_1} - \sigma \theta_1 \sum (u_{K,i_1} u_{j,i_1} u_{q,i_1} - \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{\varepsilon}{2} \sum B_{i_2} e^{-\beta t_{i_2}} u_{K,i_1} u_{j,i_1-i_2+1} u_{q,i_1-i_2+1} \right) \right] \right] \right\}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (22)$$

где:

$$t_i = i \Delta t, \quad B_1 = \Delta t^\alpha / 2, \quad B_{i_2} = \Delta t^\alpha \left[(i_2 + 1)^\alpha - (i_2 - 1)^\alpha \right] / 2,$$

$$B_{i_1} = \Delta t^\alpha \left[i_1^\alpha - (i_1 - 1)^\alpha \right] / 2, \quad A_1 = \Delta t / 2, \quad A_i = \Delta t, \quad i = \overline{2, i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Методика проведения вычислительного эксперимента с помощью алгоритма (22), ее валидность приведены в работе [8], т.е. определение критической скорости флаттера в случае нелинейной постановки ничем не отличается от методики, применяемой в случае линейной постановки задачи.

В качестве примера рассмотрим задачу флаттера наследственно-деформируемого консольного крыла переменного поперечного сечения.

Граничные условия записываются в виде:

$$W = W'_x = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad M = M' = 0 \quad \text{при } x = 1.$$

В качестве базисных функций принимаются балочные функции

$$\phi_K(x) = (sh \lambda_K x + \sin \lambda_K x)(ch \lambda_K x - \cos \lambda_K x) - (ch \lambda_K x + \cos \lambda_K x) \times (sh \lambda_K x - \sin \lambda_K x);$$

$$\lambda_1 = 1.875, \quad \lambda_2 = 4.694, \quad \lambda_3 = 7.855, \quad \lambda_4 = 10.996, \dots, \quad \lambda_K = \frac{\pi}{2} (2K - 1).$$

Интегрирование системы ИДУ (21) осуществляется вышеизложенным методом при начальных условиях

$$u_K(0) = \left[\int_0^1 \alpha_0(x) \varphi_K(x) dx \right] / (\varphi_K, \varphi_K), \quad \dot{u}_K(0) = 0, \quad (23)$$

$$\alpha_0(x) = \left\{ [x(1-x)]^4 + \varphi_1(x) \right\} / 10.$$

Результаты и анализ

Рассматривается консольный стержень переменной ширины и толщины (см. рис. 1), учитывая геометрическую и аэродинамическую нелинейности при следующих исходных данных:

$$d(x) = b(x)h^3(x), \quad b(x) = d - \alpha_1 x, \quad h(x) = 1 - \alpha_2 x,$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad \chi_1 = 1.4, \quad K = \chi_1 P_\infty, \quad P_\infty = 1.014 \text{ кг/см}^2.$$

Численные результаты при $x = a$ были получены с учетом и без учета аэродинамической нелинейности: $h/a \neq 0$ и $h/a = 0$, с учётом аэродинамического демпфирования, а также вязких свойств крыла на основе критерия, приведенного в [12]. Результаты перемещений стержня переменной толщины и ширины (см. рис. 1) с учетом и без учета аэродинамической нелинейности отличаются до 10%.

Численные результаты приведены на рис. 2, 3. Кривые, характеризующие переходный процесс для функции прогиба во времени в точке $x = 0.5$ при $a = 0.1$, $a = 0.2$, соответствующей геометрически нелинейной, линейной аэродинамической и нелинейной аэродинамической модели идеально-упругого крыла, приведены на рис. 2. Аналогичные результаты для вязкоупругого крыла приведены на рис. 3.

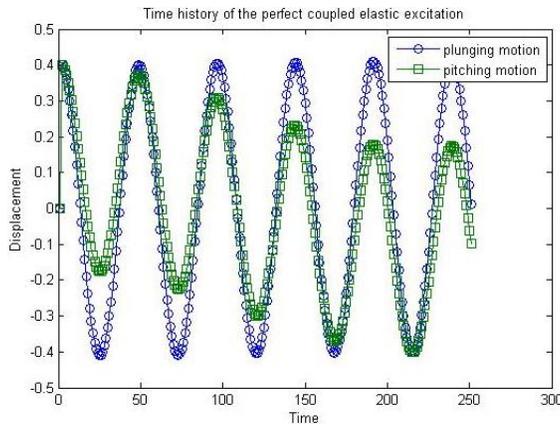


Рис. 2. Временная шкала идеальной модели упругого крыла

$$\chi = 0.9, \left(\frac{r}{b}\right)^2 = 0.44, \varepsilon = 0.0, \alpha = 0.0, \beta = 0.0, \Delta t = 0.1$$

Fig. 2. Time scale for an ideal elastic wing model at

$$\chi = 0.9, \left(\frac{r}{b}\right)^2 = 0.44, \varepsilon = 0.0, \alpha = 0.0, \beta = 0.0, \Delta t = 0.1$$

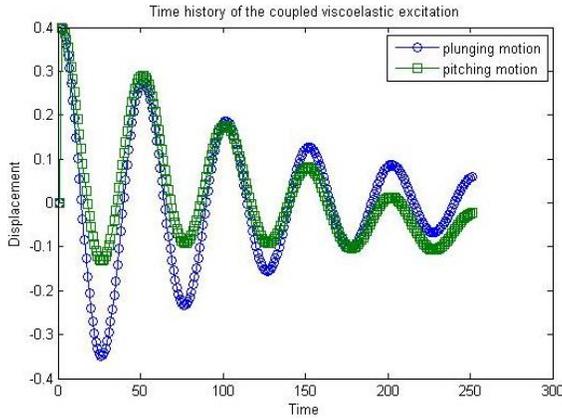


Рис. 3. Временная шкала идеальной модели вязкоупругого крыла

$$\chi = 0.9, \left(\frac{r}{b}\right)^2 = 0.44, \varepsilon = 0.2, \alpha = 0.25, \beta = 0.05, \Delta t = 0.1$$

Fig. 3. Time scale for an ideal viscoelastic wing model at

$$\chi = 0.9, \left(\frac{r}{b}\right)^2 = 0.44, \varepsilon = 0.2, \alpha = 0.25, \beta = 0.05, \Delta t = 0.1$$

На рис. 2, 3 показана свободная вибрация в условиях идеальной упругости без каких-либо эффектов структурных условий. Эти графики демонстрируют идеальные изгибные и крутильные смещения для

$$\chi = 0.9, \left(\frac{r}{b}\right)^2 = 0.44, \varepsilon = 0.0, \alpha = 0.0, \beta = 0.0, \Delta t = 0.1.$$

Критическая скорость $P_{кр}$, с которой начинается быстрый рост прогиба во времени, в упругом случае равна $P_{кр} = 5.06$ (в случае линейной постановки $P_{кр}^{(\lambda)} = 6.48$), а в вязкоупругом случае (см. рис. 2, 3) $P_{кр} = 3.2$ ($P_{кр}^{(\lambda)} = 6.48$).

Результаты критической скорости, полученные с учетом наследственно-деформируемых свойств материала крыла по предлагаемому методу, отличаются от результатов, полученных в работе [17] без учета наследственно-деформируемых свойств материала крыла (когда $R(t) = 0$), до 8%.

Заключение

Таким образом, на основе разработанной методики и алгоритма [8] решены задачи переходного процесса нелинейного флаттера наследственно-деформируемых систем при сверхзвуковом режиме полета. Установлено, что при учете наследственно-деформируемых свойств материала колебания крыла в зависимости от времени умеренно затухают до некоторого предельного значения. Выявлено, что при наступлении флаттера (когда достигается критическая скорость флаттера) амплитуда перемещений достигает своего максимального значения с некоторым опозданием для наследственно-деформируемых механических систем.

Установлено, что аэродинамическая нелинейность оказывает незначительное влияние на критическую скорость (до 5–6%).

Список источников

1. Романовский Ю.М., Стрелков С.П. О воздействии атмосферной турбулентности на самолет с упругими крыльями при различных скоростях полета // Известия АН СССР. ОТН Механика и машиностроение. 1959. № 4. С. 3–10.
2. Григолюк Э.И., Лампер Р.Е., Шандаров Л.Г. Флаттер панелей и оболочек // Итоги науки. Механика. М. : ВИНТИ, 1965. С. 34–90.
3. Гарифуллин М.Ф. Динамика и аэроупругость тонкостенных конструкций. Казань : Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2003.
4. Бадалов Ф.Б., Ганиханов Ш.Ф. Вибрации наследственно-деформируемых элементов конструкции летательных аппаратов. Ташкент : ТГАИ, 2002.
5. Безуевский А.В. Анализ характеристик аэроупругости беспилотного летательного аппарата с крылом большого удлинения // МСНТ : материалы XXXIII Всерос. конф. Миасс, 2013. Т. 2. С. 12–14.
6. Безуевский А.В. Влияние больших деформаций конструкции крыла на его модальные характеристики // Труды 55-й науч. конф. МФТИ. 2012. С. 51–53.
7. Бадалов Ф.Б., Усмонов Б.Ш. Новые нелинейные постановки задачи изгибно-элеронного флаттера крыла самолета // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2004. № 6. С. 30–33.
8. Бадалов Ф.Б., Усмонов Б.Ш. Прямая и вариационная постановка и методика решения задачи о вибрации наследственно-деформируемого крыла с элероном // Проблемы механики. 2004. № 1. С. 21–26.
9. Бадалов Ф.Б., Усмонов Б.Ш. Вибрация нелинейно наследственно-деформируемого крыла с элероном в воздушном потоке // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2004. № 1. С. 53–57.
10. Belubekyan M.V., Grishko A.M. The problem of flutter of a non-symmetric non-homogeneous over thickness rectangular plate. Shell Structures: Theory and Applications // Proceedings of the 10th SSTA Conference, Gdansk, Poland, 2013, 16–18 October 2013. P. 281–284.
11. Агарков А.В., Безуевский А.В., Григорьев А.В., Ишимуратов Ф.З., Малютин В.А. Расчетно-экспериментальные исследования характеристик жесткости консолей крыла полной аэродинамической модели самолета // Годовой отчет ФГУП «ЦАГИ» за 2015 год. М., 2016. С. 528–630.
12. Азаров Ю.А., Зиченков М.Ч., Парышев С.Э., Стрелков К.С. Развитие технологии моделирования явлений динамической аэроупругости в аэродинамических трубах. М. : Физматлит, 2018. 217 с.
13. Амирьянц Г.А., Буньков В.Г., Мамедов О.С., Парышев С.Э. Исследование характеристик статической и динамической аэроупругости моделей крыла компании BOEING // Современные научные проблемы и технологии в гражданской авиации. М. : Наука, 2013.
14. Usmonov B. Numerical Solution of Hereditary Equations with a Weakly Singular Kernel for Vibration Analysis of Viscoelastic Systems // Proceedings of the Latvian Academy of Sciences, Section B: Natural, Exact, and Applied Sciences. 2015. V. 69 (6). P. 326–330. doi: 10.1515/prolas-2015-0048
15. Баранов Н.И., Нуштаев П.Д., Нуштаев Ю.П. Флаттер органов управления самолетов и ракет. М. : Рускавиа, 2003.
16. Mirzaev I., Turdiev M. Vibrations of buildings with a sliding foundation having lateral yielding contact under real seismic impacts // AIP Conference Proceedings. 2022. V. 2432. Art. 030050. doi: 10.1063/5.0089584
17. Durdiev D.Q., Totieva Z.D. Inverse problem for a second-order hyperbolic integro-differential equation with variable coefficients for lower derivatives // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. V. 17. P. 1106–1127.

References

1. Romanovskiy Yu.M., Strelkov S.P. (1959) O vozdeystvii atmosferyonoy turbulentsyn na samolyot s uprugimi kryl'yami pri razlichnykh skorostyakh polyota [On the effect of atmospheric turbulence on an aircraft with elastic wings at various flight speeds]. *Izvestiya AN SSSR, OTN, Mekhanika i mashinostroenie – Izvestiya USSR Academy of Sciences, OTN Mechanics and Engineering*. 4. pp. 3–10.
2. Grigolyuk E.I., Lamper R.E., Shandarov L.G. (1963) Flatter paneley i obolochek [Flutter of panels and shells]. *Itogi Nauki. Mekhanika*. Moscow: VINITI. pp. 34–90.
3. Garifullin M.F. (2003) *Dinamika i aerouprugost' tonkostennykh konstruksiy* [Dynamics and aeroelasticity of thin-walled structures]. Kazan: Kazan State Technical University Press.
4. Badalov F.B., Ganikhanov Sh.F. (2002) *Vibratsiya nasledstvenno-deformiruemykh elementov konstruksiy letatel'nykh apparatov* [Vibrations of hereditarily deformable structural elements of aircraft]. Tashkent: Tashkent State Aviation Institute Press.
5. Bezuevskiy A.V. (2013) Analiz kharakteristik aerouprugosti bespilotnogo letatel'nogo apparata s krylom bol'shogo udlineniya [Analysis of the aeroelasticity characteristics of an unmanned aerial vehicle with a large elongation wing]. *MSNT materialy XXXIII Vserossiyskoy konferentsii, Miass*. 2. pp. 12–14.
6. Bezuevskiy A.V. (2012) Vliyaniye bol'shikh deformatsiy konstruksii kryla na ego modal'nye kharakteristiki [The influence of large deformations of the wing structure on its modal characteristics]. *Proceedings of the 55th Scientific Conference of the Moscow Institute of Physics and Technology*. pp. 51–53.
7. Mirzaev I., Khojmetov G., Yuvmitov A., Mirzaxmedov M. (2022) On influence of linear and nonlinear models of foundation-base interaction on vibrations of multi-storey buildings at seismic impacts. *AIP Conference Proceedings*. 2432. Article 030071. doi: 10.1063/5.0089506
8. Badalov F.B., Usmonov B.Sh. (2004) Pryamaya i variatsionnaya postanovka i metodika resheniya zadachi o vibratsii nasledstvenno-deformiruемого kryla s eleronom [Direct and variational formulation and method for solving the problem of vibration of a hereditarily deformable wing with an aileron]. *Problemy mekhaniki – Problems of Mechanics*. 1. pp. 24–28.
9. Badalov F.B., Usmonov B.Sh. (2004) Vibratsiya nelineynoy nasledstvenno-deformiruемого kryla s eleronom v vozdushnom potoke [Vibration of a non-linear hereditarily deformable wing with an aileron in the air flow]. *Doklady Akademii nauk Uzbekistana – Reports of Uzbekistan Academy of Sciences*. 1. pp. 53–57.
10. Belubekyan M.V., Grishko A.M. (2013) The problem of flutter of a non-symmetric non-homogeneous over thickness rectangular plate. *Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 10th SSTA Conference, Gdansk, Poland*. pp. 281–284.
11. Agarkov A.V., Bezuevskiy A.V., Grigor'ev A.V., Ishmuratov F.Z., Malyutin V.A. (2016) Raschetno-eksperimental'nye issledovaniya kharakteristik zhestkostey konsoli kryla polnoy aerodinamicheskoy modeli samoleta [Calculation and experimental studies of the stiffness characteristics of the wing panels of a complete aerodynamic model of an aircraft]. *Godovoy otchet FGUP "TSAGI" za 2015 god*. pp. 628–630.
12. Azarov Yu.A., Zichenkov M.Ch., Paryshev S.E., Strelkov K.S. (2018) *Razvitiye tekhnologii modelirovaniya yavleniy dinamicheskoy aerouprugosti v aerodinamicheskikh trubakh* [Development of technology for modeling the phenomena of dynamic aeroelasticity in wind tunnels]. Moscow: Fizmatlit.
13. Amir'yants G.A., Bun'kov V.G., Mamedov O.S., Paryshev S.E. (2013) Issledovanie kharakteristik staticheskoy i dinamicheskoy aerouprugosti modeley kryla kompanii BOEING [Study of characteristics of static and dynamic aeroelasticity of BOEING wing models]. *Sovremennyye nauchnyye problemy i tekhnologii v grazhdanskoj aviatsii*. Moscow: Nauka.
14. Usmonov B. (2015) Numerical solution of hereditary equations with a weakly singular kernel for vibration analysis of viscoelastic systems. *Proceedings of the Latvian Academy of Sciences*,

Section B: Natural, Exact, and Applied Sciences. 69(6). pp. 326–330. doi: 10.1515/prolas-2015-0048

15. Baranov N.I., Nushtaev P.D., Nushtaev Yu.P. (2003) *Flutter organov upravleniya samolyotov i raket* [Flutter controls in aircraft and missiles]. Moscow: Rusavia.
16. Mirzaev I., Turdiev M. (2022) Vibrations of buildings with a sliding foundation having lateral yielding contact under real seismic impacts. *AIP Conference Proceedings*. 2432. Article 030050. doi: [10.1063/5.0089584](https://doi.org/10.1063/5.0089584)
17. Durdiev D.Q., Totieva Z.D. (2020) Inverse problem for a second-order hyperbolic integro-differential equation with variable coefficients for lower derivatives. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 17. pp. 1106–1127. doi: 10.33048/semi.2020.17.084

Сведения об авторах:

Усмонов Ботир Шукуриллаевич – доктор технических наук, профессор, ректор Ташкентского химико-технологического института, Ташкент, Узбекистан. E-mail: busmonov@hotmail.com

Сафаров Исmoil Иброхимович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика» Ташкентского химико-технологического института, Ташкент, Узбекистан. E-mail: safarov54@mail.ru

Тешаев Мухсин Худойбердиевич – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник Бухарского отделения Института математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Бухара, Узбекистан. E-mail: muhsin_5@mail.ru

Information about the authors:

Usmonov Botir Sh. (Doctor of Technical Sciences, Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: busmonov@hotmail.com

Safarov Ismoil I. (Doctor of Physics and Mathematics, Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: safarov54@mail.ru

Teshaev Muhsin Kh. (Doctor of Physics and Mathematics, Bukhara Branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan). E-mail: muhsin_5@mail.ru

Статья поступила в редакцию 03.04.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 03.04.2023; accepted for publication 10.04.2024

Научная статья

УДК 536.245, 536.42

doi: 10.17223/19988621/88/11

О математической модели взаимодействия высокотемпературного потока плазмы с поверхностью древесины

Владимир Алексеевич Черемных¹, Геннадий Георгиевич Волокитин²,
Виктор Данилович Гольдин³, Сергей Александрович Басалаев⁴,
Анатолий Анатольевич Клопотов⁵, Николай Александрович Цветков⁶

^{1, 2, 5, 6} Томский государственный архитектурно-строительный университет, Томск, Россия

^{3, 4} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ vacheremnykh@gmail.com

² vgg-tomsk@mail.ru

³ vdg@math.tsu.ru

⁴ tarm@niipmm.tsu.ru

⁵ klopotovaa@tsuab.ru

⁶ nac.tsuab@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются процессы термического разложения древесины при ее обработке струей плазмы. Проведен термический анализ процесса нагрева древесины, с помощью которого определены кинетические параметры четырех стадий разложения. Полученные результаты могут быть использованы для математического моделирования теплового состояния и структурных изменений древесины при ее нагреве в струе плазмы.

Ключевые слова: физико-химическая механика, термическая обработка древесины, пиролиз, кинетика термического разложения, математическое моделирование

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FEMN-2023-0003).

Для цитирования: Черемных В.А., Волокитин Г.Г., Гольдин В.Д., Басалаев С.А., Клопотов А.А., Цветков Н.А. О математической модели взаимодействия высокотемпературного потока плазмы с поверхностью древесины // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 138–148. doi: 10.17223/19988621/88/11

On a mathematical model of the interaction of a high-temperature plasma flow with a wood surface

Vladimir A. Cheremnykh¹, Gennadiy G. Volokitin², Viktor D. Goldin³, Sergey A. Basalaev⁴, Anatoliy A. Klopotov⁵, Nikolay A. Tsvetkov⁶

^{1, 2, 5, 6} Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russian Federation

^{3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ vacheremnykh@gmail.com

² vgg-tomsk@mail.ru

³ vdg@math.tsu.ru

⁴ tarm@niipmm.tsu.ru

⁵ klopotovaa@tsuab.ru

⁶ nac.tsuab@yandex.ru

Abstract. In this study, the processes of thermal decomposition of wood during its treatment with a plasma flow are considered. To develop a mathematical model of these processes, a differential thermogravimetric analysis of the heating of larch samples in an argon atmosphere at a rate of 10–20 degrees/min is carried out. Based on the results obtained, a mathematical model of thermal decomposition is proposed, including four stages. The wood during heating is represented by a mixture of six components. At each stage, the kinetic parameters of the reactions are determined by processing measurements at a heating rate of 20 degrees/min. The equations of chemical kinetics describing changes in the mass of wood components are numerically solved using the finite-difference implicit Euler method and the obtained reaction parameters. The numerical solution to the equations of chemical kinetics with these parameters shows satisfactory agreement with the data from the corresponding experiment. The calculation performed at a heating rate of 10 degrees/min with the same kinetic parameters also shows satisfactory agreement with the measurements. Thus, the obtained reaction parameters do not depend on the heating rate in the considered range. The proposed model can be used in the mathematical description of changes in the structure and thermal state of wood samples exposed to high-temperature plasma flow treatment.

Keywords: physical and chemical mechanics, heat treatment of wood, pyrolysis, kinetics of thermal decomposition, mathematical modeling

Acknowledgments: This work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (No. FEMN-2023-0003).

For citation: Cheremnykh, V.A., Volokitin, G.G., Goldin, V.D., Basalaev, S.A., Klopotov, A.A., Tsvetkov, N.A. (2024) On a mathematical model of the interaction of a high-temperature plasma flow with a wood surface. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 138–148. doi: 10.17223/19988621/88/11

Введение

Древесина относится к классу материалов, давно и широко используемых человеком. Существует большое количество самых разнообразных методов ее обработки. Одним из способов является термическая обработка поверхности изде-

лий, которая способствует снижению ее водопроницаемости, уничтожению грибковых заболеваний древесины и плесени, повышает стойкость к истиранию [1–3]. Использование для этой цели струи плазмы имеет ряд преимуществ [1].

Древесина относится к сложным по строению пористым материалам, ее физико-механические и декоративные свойства существенно изменяются при термических воздействиях (рис. 1, 2).

На представленных микрофотографиях поперечных срезов (см. рис. 2) заметно изменение рельефа поверхности древесины (см. рис. 2, *b*): в результате плазменной обработки в местах расположения ранних трахеид образовались впадины. Также воздействие потоком плазмы привело к изменению цветовой гаммы поверхности древесины (см. рис. 1).



Рис. 1. Фотография поверхности изделия из древесины сосны после обработки потоком плазмы

Fig. 1. A photo of the surface of a pine wood product after plasma flow treatment

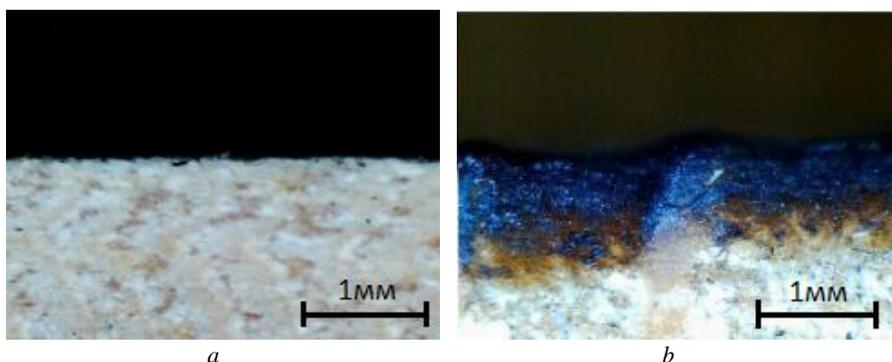


Рис. 2. Микрофотографии поперечного среза образцов лиственницы:

a – исходный необработанный образец; *b* – после обработки потоком плазмы

Fig. 2. Micrographs of a cross-section of larch samples:

(*a*) original raw sample and (*b*) after plasma flow treatment

Породы древесины имеют отличия в физических и механических свойствах. Также на физические свойства древесины оказывают влияние влажность изделий и условия произрастания дерева [4]. Для исследования влияния высокотемпературного потока плазмы на поверхность различных сортов древесины при различных параметрах нагрева необходимо использовать математическую модель данного

процесса. Установление зависимостей механических свойств тел, в частности строительных и конструкционных материалов, от температуры и их физико-химического взаимодействия с окружающей средой относится к физико-химической механике [5. С. 313].

Цель работы – проведение дифференциального термогравиметрического анализа процесса пиролиза древесины при высоких темпах нагрева (10–20 град/мин) и создание математической модели ее термического разложения при обработке поверхности потоком плазмы.

Модель термического разложения древесины

Нагрев тел, состоящих из дерева, сопровождается такими физико-химическими процессами, как испарение летучих компонентов, прежде всего влаги, пиролиз – многостадийный процесс термического разложения твердых компонентов древесины с выделением газов, жидких продуктов пиролиза и образованием коксика – твердого компонента, основу которого составляет углерод (древесный уголь), разложение коксика с образованием летучих продуктов и неорганической золы [6–8].

Все образующиеся на разных стадиях газы фильтруются из глубины тела к его поверхности и выводятся в окружающую среду. Эти процессы сопровождаются поглощением и выделением тепла, в результате чего уменьшается плотность материала, изменяются его теплофизические свойства. Поскольку внутри древесины не присутствует свободный кислород, то горение происходит только на ее поверхности.

Для правильного математического моделирования теплового режима тел из дерева при их нагреве необходимо учитывать все эти процессы. Обычно они описываются дифференциальными уравнениями, аналогичными уравнениям химической кинетики. Параметры реакций в этих уравнениях определяются путем сопоставления экспериментальных данных с расчетными. В настоящее время существуют работы, посвященные этому вопросу. Обзор некоторых из них можно найти в [7]. Результаты этих работ показывают, что кинетика реакций термического разложения зависит от многих параметров – размеров исследуемых образцов, способов нагрева, его темпа, скорости фильтрации газообразных продуктов и т.п. Многие исследования связаны с технологическими процессами в лесохимии либо с пожарной безопасностью, где тепловые потоки и температуры не очень высоки, а процесс нагрева достаточно медленный. При обработке поверхности древесины струей плазмы тепловые потоки достигают величин 10^6 Вт/м², а нагрев участков поверхности осуществляется за время порядка 1 с. В связи с этим представляет интерес дополнительно исследовать процесс термодеструкции древесины с большим темпом нагрева.

Одним из способов исследования процессов термического разложения материалов является дифференциальный термогравиметрический анализ – нагрев в дериватографе с фиксированным темпом и одновременным измерением массы твердого остатка в зависимости от времени. При этом испытываемый образец должен иметь достаточно малые размеры, чтобы в любой момент времени температурное поле в нем было однородным.

На рис. 3, 4 представлены результаты исследования образцов лиственницы первоначальной массы $\approx 10^{-4}$ кг на дериватографе (Derivatograph Q1500, Венгрия) при нагреве в атмосфере аргона.

На основе анализа кривых потери массы предлагается использовать следующую модель термодеструкции:

1. В начальный момент времени материал состоит из летучих компонентов (свободная вода, легкоиспаряющиеся компоненты) и материала основного каркаса.

2. В произвольный момент времени материал представляет собой шестикомпонентную смесь:

- летучие компоненты в исходном состоянии (компонент A_1);
- материал основного каркаса (компонент A_2);
- продукт первой стадии пиролиза (компонент A_3);
- коксик (компонент A_4);
- кокс (зола, инертный компонент A_5);
- газообразные продукты пиролиза (компонент A_6), конкретный состав этих продуктов не учитывается.

3. При нагреве в материале идут четыре реакции, соответствующие четырем стадиям:

- стадия 1 (участок 1–2 на рис. 3): испарение летучих компонентов;
- стадия 2 (участок 3–4): первая стадия пиролиза материала каркаса с выделением газа и образованием промежуточного продукта;
- стадия 3 (участок 4–5): вторая стадия пиролиза с образованием коксика;
- стадия 4 (участок 5–6): медленное разложение коксика ($t > t_3$) с почти постоянной скоростью.

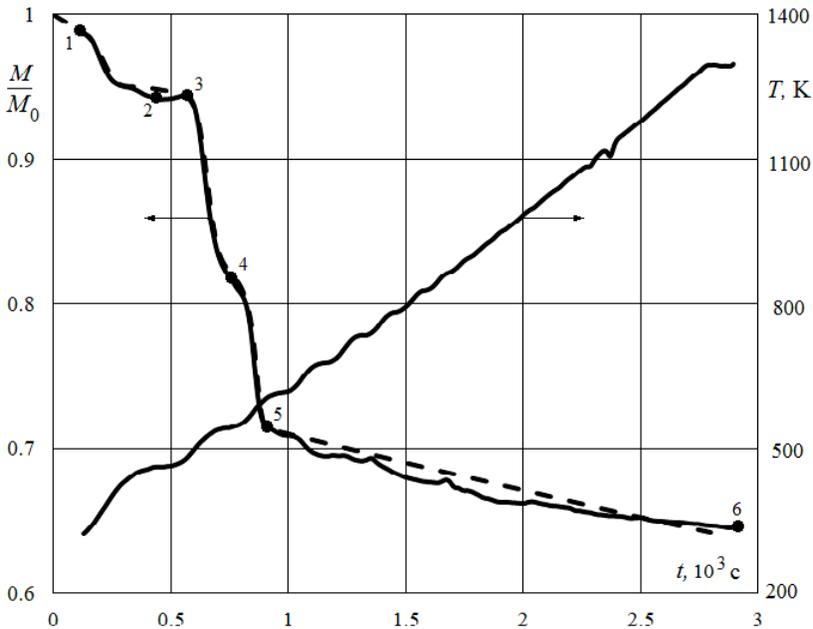


Рис. 3. Измеренные значения температуры и относительной потери массы образца лиственницы при темпе нагрева 20 град/мин. Штриховая линия – результат решения уравнений (2)–(6)

Fig. 3. Measured temperature and relative weight loss of a larch sample at a heating rate of 20 degrees/min. The dashed line is the result of solving equations (2)–(6)

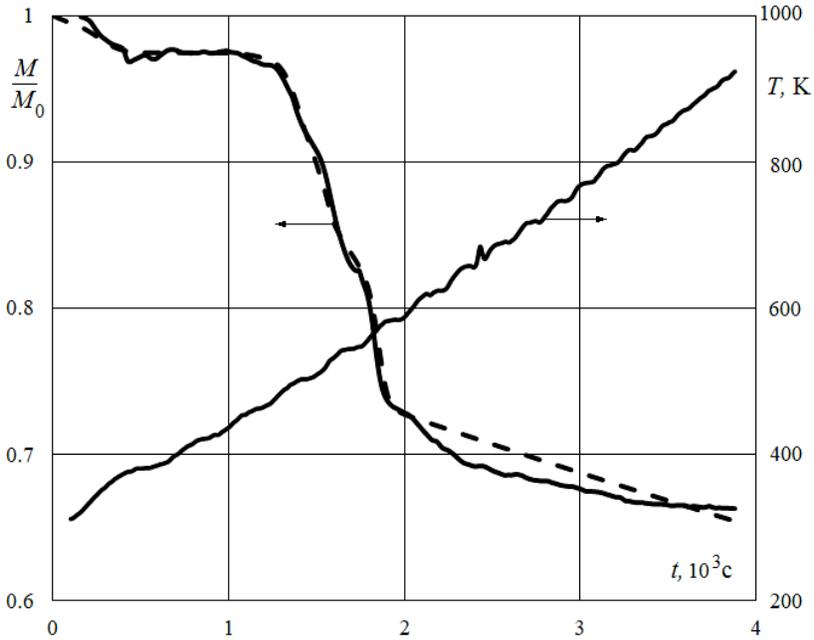
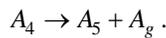
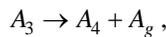
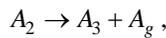
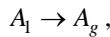


Рис. 4. Измеренные значения температуры и относительной потери массы образца лиственницы при темпе нагрева 10 град/мин. Штриховая линия – результат решения уравнений (1)–(5)

Fig. 4. Measured temperature and relative weight loss of a larch sample at a heating rate of 20 degrees/min. The dashed line is the result of solving equations (1)–(5)

4. Рассматривается следующая схема реакций:



5. Скорость каждой из реакций описывается законом Аррениуса.

Следует отметить, что в реальности каждая из рассматриваемых реакций может включать сложные многостадийные химические преобразования. В данной модели эта детализация не учитывается.

Масса компонентов описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dM_1}{dt} = -w_1; \quad (1)$$

$$\frac{dM_2}{dt} = -w_2; \quad (2)$$

$$\frac{dM_3}{dt} = v_2 w_2 - w_3; \quad (3)$$

$$\frac{dM_4}{dt} = v_3 w_3 - w_4, \quad (4)$$

$$\frac{dM_5}{dt} = v_4 w_4. \quad (5)$$

Здесь M_i – масса i -го компонента, кг, $i = 1-4$; v_i – массовая доля твердого продукта, образующегося в i -й реакции, $i = 2-4$; w_i – скорость i -й реакции, кг/с:

$$w_i = M_i k_i \exp\left(-\frac{E_i}{RT}\right);$$

k_i – предэкспонент i -й реакции, с^{-1} ; E_i – энергия активации i -й реакции, Дж/кмоль; T – температура образца, К; R – универсальная газовая постоянная, Дж/(кмоль·К), t – время, с.

В начальный момент времени масса образца $M = M_0 = M_1 + M_2$, причем $M_1 = M_{1,0}$, $M_2 = M_0 - M_1 = M(t_1)$, $M_3 = M_4 = M_5 = M_g = 0$, где $M_{1,0}$ – начальное значение массы легко летучих компонентов. Суммарная масса твердого остатка в любой момент времени $M(t) = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$.

Параметры реакций термического разложения определяются путем сопоставления численного решения системы уравнений (1)–(5) с измеренными значениями $M(t)$. Для получения предварительных значений параметров используется следующий алгоритм.

Как видно из рис. 3, 4, каждая из реакций идет в своем температурном и временном интервале. При $t < t_1$ идет главным образом реакция (1); здесь меняется только M_1 , M_2 остается постоянным, остальные компоненты еще не образовались. Из уравнения (1) следует

$$\ln\left(\frac{1}{M_1} \frac{dM_1}{dt}\right) = \ln\left(\frac{1}{M - M_2} \frac{dM}{dt}\right) = \ln(k_1) - \frac{E_1}{RT}.$$

Измеренные значения массы подставлялись в левую часть равенства, полученная кривая аппроксимировалась с помощью метода наименьших квадратов в виде линейной зависимости от величины $1/T$ – производилось «спрямление» данных. Значения k_1 , E_1 определялись по параметрам этого спрямления.

На второй стадии разложения, при $t_1 < t < t_2$, идет в основном реакция (2), $w_3 \approx 0$ и $M(t) = M_2 + M_3$. Из уравнений (2)–(3) следует $v_2 M_2 + M_3 = \text{const} = v_2 M(t_1) = M(t_2)$, так как в начале стадии компонента A_3 еще нет, а в конце нет компонента A_2 . Отсюда $v_2 = M(t_2)/M(t_1)$ и

$$M_3 = M(t_2) - v_2 M_2, \quad M(t) = (1 - v_2)M_2 + M(t_2), \quad \frac{1}{M_2} \frac{dM_2}{dt} = \frac{1}{M - M(t_2)} \frac{dM}{dt}.$$

При этом уравнение (2) приводится к виду:

$$\ln\left[\frac{1}{M - M(t_2)} \frac{dM}{dt}\right] = \ln(k_2) - \frac{E_2}{RT}. \quad (6)$$

Параметры k_2 , E_2 определялись путем спрямления вычисленной по экспериментальным данным функции

$$f = \ln\left[\frac{1}{M - M(t_2)} \frac{dM}{dt}\right]$$

в зависимости от $1/T$ (рис. 5).

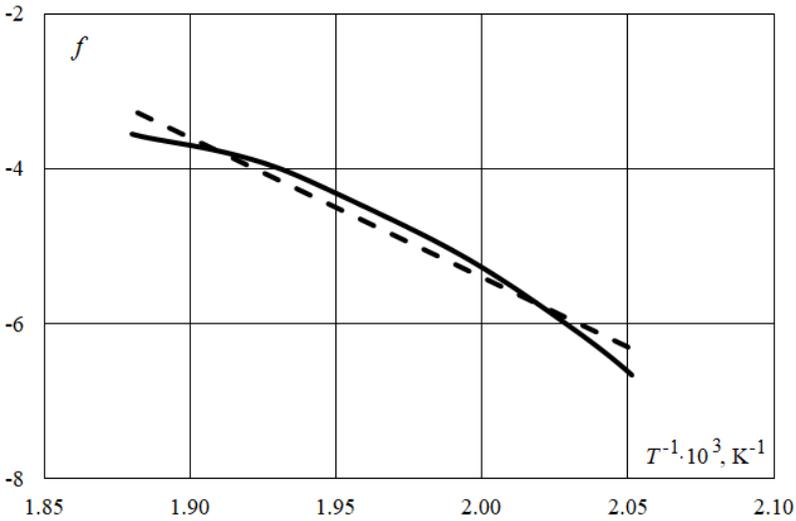


Рис. 5. Аппроксимация левой части уравнения (6), соответствующего потере массы на второй стадии термического разложения. Сплошная линия – экспериментальные значения, штриховая – линейная аппроксимация

Fig. 5. Approximation of the left side of equation (6) corresponding to the mass loss at the second stage of thermal decomposition. The solid line indicates experimental values, the dashed line, the linear approximation

Аналогичный алгоритм применялся для третьей и четвертой стадий разложения. При этом $v_i = M(t_i)/M(t_{i-1})$, а параметры k_i , E_i определялись на основе равенства, полученного из уравнений (3)–(4):

$$\ln \left[\frac{1}{M - M(t_i)} \frac{dM}{dt} \right] = \ln(k_i) - \frac{E_i}{RT}, \quad i = 3, 4.$$

Здесь $M(t_4)$ – масса неорганического коксового остатка после завершения процессов термического разложения.

В таблице приведены кинетические параметры реакций, полученные при обработке экспериментальных данных при темпе нагрева 20 град/мин. Эти параметры подставлялись в систему уравнений (1)–(5), которая решалась численно с использованием конечно-разностного неявного метода Эйлера. В начальный момент времени доля летучих компонентов бралась $M_{1,0}/M_0 = 0.05$. Нулевое значение энергии активации на 4-й стадии разложения означает, что здесь скорость реакции не зависит от температуры.

Параметры реакций термического разложения образцов лиственницы

Номер реакции	k , 1/с	E , Дж/кмоль	v
1	$8.1 \cdot 10^2$	$3.3 \cdot 10^7$	–
2	$1.9 \cdot 10^{13}$	$1.5 \cdot 10^8$	0.88
3	$4.7 \cdot 10^{17}$	$2.1 \cdot 10^8$	0.86
4	$6.0 \cdot 10^{-5}$	0	0.06

Значения безразмерной массы твердого остатка, полученные в результате численного решения, показаны на рис. 3 штриховой линией. С учетом достаточно

грубой модели пиролиза согласование теории и эксперимента можно считать удовлетворительным, особенно на наиболее важных второй и третьей стадиях термического разложения.

Расчеты при той же кинетике для меньшего темпа нагрева (10 град/мин) также хорошо согласуются с соответствующим экспериментом, если принять начальную долю летучих компонентов $M_{1,0}/M_0 = 0.026$ (см. рис. 4). Таким образом, в предложенной модели кинетические параметры пиролиза практически не зависят от темпа нагрева в указанном диапазоне.

Некоторые отличия между экспериментом и расчетом наблюдаются на 1-й и 4-й стадиях. Эти отличия могут объясняться недостаточной детализацией химических процессов на этих стадиях. Поскольку первая стадия связана с испарением летучих компонентов, доля которых в древесине мала, то ее влияние на общий процесс теплопереноса также представляется малым, и уточнения математической модели здесь не требуется. Четвертая стадия разложения идет с малой скоростью, и при малом времени теплового воздействия глубина превращения при пиролизе вряд ли будет глубокой. Кроме того, на этой стадии большую значимость должно иметь горение в воздушной среде, которого не было при испытаниях в инертном газе (аргоне).

Заключение

Таким образом, на основе термогравиметрического анализа предложена модель термического разложения древесины, подвергающейся воздействию высокотемпературного потока плазмы. При этом сложные физико-химические преобразования материала сводятся к четырем стадиям, на каждой из которых скорость реакции разложения описывается законом Аррениуса. В результате термогравиметрического анализа кинетические параметры каждой стадии определены на основе измерений динамики массы твердого остатка в процессе нагрева в инертной среде. Показано, что полученные параметры не зависят от скорости нагрева в диапазоне 10–20 град/мин. Предложенная модель является необходимой частью общей математической модели, описывающей изменения структуры и теплового состояния образцов древесины, подвергающихся обработке высокотемпературной струей плазмы.

Список источников

1. Волокитин Г.Г., Скрипникова Н.К., Сеницын В.А. и др. Плазменная обработка древесины // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23, № 1 (97). С. 125–130.
2. Янкина А.С. Особенности браширования древесины // Ростовский научный журнал. 2019. № 2. С. 287–294.
3. Дук Д.В., Мартыновская С.Н. Перспективы применения обжига древесины при создании малых архитектурных форм // Технологии и оборудование садово-паркового и ландшафтного строительства : сб. ст. X Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием, Красноярск, 24 ноября 2022 г. Красноярск : Сиб. гос. ун-т науки и технологий им. академика М.Ф. Решетнева, 2023. С. 351–355.
4. Уголев Б.Н. Древесиноведение и лесное товароведение. М. : МГУЛ, 2007. 351 с.
5. Физический энциклопедический словарь / гл. ред. Б.А. Введенский, Б.М. Вул. М. : Сов. энцикл., 1966. Т. 5. 576 с.
6. Kansa E.J., Perlee H.E., Chaiken R.F. Mathematical model of wood pyrolysis including internal forced convection // Combustion and Flame. 1977. V. 29. P. 311–324.

7. Гришин А.М. Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1992. 408 с.
8. Гришин А.М. Общая физико-математическая модель зажигания и горения древесины // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 2. С. 60–70.

References

1. Volokitin G.G., Skripnikova N.K., Volokitin O.G., Shekhovtsov V.V., Sinitsyn V.A., Vashchenko S.P., Kuz'min V.I. (2016) Plasma treatment of wood. *Thermophysics and Aeromechanics*. 23(1). pp. 119–124. doi: 10.1134/S0869864316010121
2. Yankina A.S. (2019) Osobennosti brashirovaniya drevesiny [Features of wood brushing]. *Rostovskiy nauchnyy zhurnal*. 2. pp. 287–294.
3. Duk D.V., Martynovskaya S.N. (2023) Perspektivy primeneniya obzhiga drevesiny pri sozdanii malykh arkhitekturnykh form [Prospects for the use of wood firing in producing of small architectural forms]. *Tekhnologii i oborudovanie sadovo-parkovogo i landshaftnogo stroitel'stva: Sbornik statey X Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem, Krasnoyarsk. Krasnoyarsk: FGBOU VSH "Sibirskiy gosudarstvennyy universitet nauki i tekhnologii imeni akademika M.F. Reshetnyova"*. pp. 351–355.
4. Ugolev B.N. (2007) *Drevesinovedenie i lesnoe tovarovedenie* [Wood science and forest commodity science]. Moscow: Moscow State Forest University.
5. *Fizicheskii entsiklopedicheskii slovar'* (1966) [Physical encyclopedic dictionary]. Volume 5. Ed. by B.A. Vvedenskiy and B.M. Vul. Moscow: Sovetskaya Entsiklopediya.
6. Kansa E.J., Perlee H.E., Chaiken R.F. (1977) Mathematical model of wood pyrolysis including internal forced convection. *Combustion and Flame*. 29. pp. 311–324. doi: 10.1016/0010-2180(77)90121-3
7. Grishin A.M. (1992) *Matematicheskoe modelirovanie lesnykh pozharov i novye sposoby bor'by s nimi* [Mathematical modeling of forest fires and new ways of suppression]. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie.
8. Grishin A.M. (2010) *Obshchaya fisiko-matematicheskaya model' zazhiganiya i goreniya drevesiny* [General physical and mathematical model of the ignition and burning of wood]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 10(2). pp. 60–70.

Сведения об авторах:

Черемных Владимир Алексеевич – аспирант Томского государственного архитектурно-строительного университета, Томск, Россия. E-mail: vacheremnykh@gmail.com

Волокитин Геннадий Георгиевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной механики и материаловедения Томского государственного архитектурно-строительного университета, Томск, Россия. E-mail: vgg-tomsk@mail.ru.

Гольдин Виктор Данилович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: vdg@math.tsu.ru.

Басалаев Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

Клопотов Анатолий Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной механики и материаловедения Томского государственного архитектурно-строительного университета, Томск, Россия. E-mail: klopotovaa@tsuab.ru

Цветков Николай Александрович – доктор технических наук, заведующий кафедрой теплоснабжения и инженерных систем в строительстве Томского государственного архитектурно-строительного университета, Томск, Россия. E-mail: nac.tsuab@yandex.ru

Information about the authors:

Cheremnykh Vladimir A. (Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vacheremnykh@gmail.com

Volokitin Gennadiy G. (Doctor of Technical Sciences, Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vgg-tomsk@mail.com

Goldin Viktor D. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vdg@math.tsu.ru

Basalaev Sergey A. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

Klopotov Anatoliy A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russian Federation). E-mail: klopotovaa@tsuab.ru

Tsvetkov Nikolay A. (Doctor of Technical Sciences, Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nac.tsuab@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 17.11.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 17.11.2023; accepted for publication 10.04.2024

Научная статья

УДК 517.958:531.32

doi: 10.17223/19988621/88/12

Разрывное конически симметричное течение идеальной несжимаемой жидкости

Олег Никифорович Шабловский

*Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого,
Гомель, Республика Беларусь, shablovsky-on@yandex.ru*

Аннотация. Построено точное частное конически симметричное решение уравнений Эйлера, определяющих стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости. Изучено течение, содержащее гидродинамический источник / сток и сильный разрыв, на котором происходит скачок плотности жидкости. Выполнен сравнительный анализ свойств источника и стока. Установлены качественные различия между этими течениями, проявляющиеся в геометрической конфигурации непротекаемых границ, а также в закономерностях поведения давления и скорости жидкости.

Ключевые слова: гидродинамический источник и сток, сильный разрыв течения, скачок плотности, возрастание энтропии, ротор завихренности

Для цитирования: Шабловский О.Н. Разрывное конически симметричное течение идеальной несжимаемой жидкости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 149–163. doi: 10.17223/19988621/88/12

Original article

A discontinuous conically symmetric flow of an ideal incompressible fluid

Oleg N. Shablovskiy

*Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus,
shablovsky-on@yandex.ru*

Abstract. The Euler equations are considered in spherical coordinates to describe the steady flow of an ideal incompressible fluid. An exact conically symmetric solution based on the source/sink and strong conic discontinuity with an apex in zero of the coordinate system is obtained. The northern region of the flow is situated in the finite vicinity of the symmetry axis, i.e., within a discontinuity cone, where the solution is regular and vortex-free. On the other side of the discontinuity, the flow adjoins the permeable equator plane. In this region, the flow is vortex-like, and its properties are determined by a density jump. The fluid flowing through the discontinuity is governed by the increase of entropy principle. The thermal field corresponding to the flow is presented. It shows that the spatial

heterogeneity of temperature results from the interaction between the azimuth vorticity component and the meridional velocity component. A strong discontinuity cone angle is revealed to be a significant parameter of the problem. A comparative analysis of the source and sink properties is performed. The considered flows qualitatively differ in terms of pressure and velocity behavior.

Keywords: hydrodynamic source and sink, strong flow discontinuity, density jump, entropy increase, vorticity rotor

For citation: Shablovskiy, O.N. (2024) A discontinuous conically symmetric flow of an ideal incompressible fluid. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 149–163. doi: 10.17223/19988621/88/12

Введение

В сферической системе координат (r, θ, φ) стационарное конически симметричное движение идеальной несжимаемой жидкости определяется уравнениями [1]

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta = 0, \quad (1)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} v_\theta^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (3)$$

Здесь r – радиальная координата; θ – полярный угол; в осесимметричном случае $(\partial/\partial\varphi \equiv 0)$ течение не зависит от азимутального угла φ ; v_r, v_θ – компоненты вектора скорости; $v_\varphi \equiv 0$; ρ – плотность; p – давление. Уравнение энергии, соответствующее невязкому нетеплопроводному течению, имеет вид:

$$\rho c_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = q_v, \quad (4)$$

где T – температура; c_p – удельная теплоемкость; $q_v = q_v(T)$ – мощность источников тепла.

Вопрос о сравнении свойств источника и стока ассоциируется с проблемой гистерезисных явлений, наблюдаемых в аэрогидродинамике. Укажем несколько основных работ, относящихся к этой теме. В [2] проведено экспериментальное исследование гистерезисов в положении областей потери устойчивости течения в вихревых жгутах, образующихся вблизи передних кромок треугольного крыла. Описание гистерезисных функций аэродинамических сил и моментов, зависящих от угла атаки, выполнено в [3]. В статье [4] изучено явление гистерезиса при взаимодействии ударных волн, возникающих перед системой тел в сверхзвуковом потоке. Важным является вопрос о неединственности численных решений уравнений Эйлера и Навье–Стокса [5]: неединственность проявляется в получении несимметричных решений симметричной задачи с использованием симметричных алгоритмов, и это приводит к гистерезисным явлениям по начальным данным дифференциальной задачи, т.е. по стартовым условиям дискретного алгоритма при расчете обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Гистерезисные переходы в закрученных течениях вязкой несжимаемой жидкости изучались ана-

литически и численно в [6, 7]. В [8] исследованы закономерности движения системы точечных либо распределенных стоков и источников в идеальной жидкости. В книге [9] обращено внимание на неэквивалентность источников и стоков импульса для автомодельного турбулентного следа. Современное состояние и перспективы исследований задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости при наличии точечного источника в области течения представлены в [10]. Основные результаты разработки теории уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости изложены в обзоре [11].

Цель работы: для системы уравнений (1)–(3) построить точное частное решение, описывающее источник / сток жидкости; проанализировать условия, в которых проявляются различия между источником и стоком.

Точное решение

Рассмотрим на основе уравнений (1)–(3) класс движений

$$v_r = G/r, v_\theta = -B/r, r > 0,$$

где функции $G = G(\theta)$, $B = B(\theta)$ определяются из системы уравнений

$$\frac{dB}{d\theta} + B \operatorname{ctg} \theta = G, \quad B \frac{dG}{d\theta} + G^2 = B_1 \equiv \text{const}, \quad (5)$$

B_1 – произвольная постоянная. Обсудим примеры точных частных решений уравнений (5). Пусть $G^2 = B_1 > 0$. Сначала возьмем $G = \sqrt{B_1} > 0$, $B = (B_0 - \sqrt{B_1} \cos \theta) / \sin \theta$, $B_0 \equiv \text{const}$. Здесь представляет интерес случай $B_0 = \sqrt{B_1}$, когда функция $B(\theta)$ не содержит особенности при $\theta = 0$:

$$B(\theta) = \sqrt{B_1} (1 - \cos \theta) / \sin \theta, \quad B(\theta = 0) = 0. \quad (6)$$

Если $G = -\sqrt{B_1} < 0$, $B(\theta) = (B_0 + \sqrt{B_1} \cos \theta) / \sin \theta$, то при $B_0 = -\sqrt{B_1}$ имеем

$$B(\theta) = -\sqrt{B_1} (1 - \cos \theta) / \sin \theta. \quad (7)$$

Зависимости (6) и (7) относятся к безвихревым течениям типа точечного источника ($v_r > 0$) и точечного стока ($v_r < 0$) соответственно. В обоих случаях

$$p = p_\infty - \frac{\rho}{2r^2} [B_1 + B^2(\theta)] > 0, \quad (8)$$

где $p_\infty \equiv \text{const}$ – давление на бесконечном удалении от источника. Далее эти два варианта решения рассматриваем при $0 \leq \theta < (\pi/2)$.

Нетрудно видеть, что системе (5) удовлетворяют функции

$$B^2(\theta) = \frac{B_3 - 2B_2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} - B_1, \quad G = \frac{B_2 - B_1 \cos \theta}{B \sin \theta}, \quad (9)$$

где B_1, B_2, B_3 – произвольные постоянные. Давление по-прежнему определяется выражением (8). Далее это решение применяем при $0 < \theta \leq (\pi/2)$. Если $B_2 = B_1$, $B_3 = 2B_1$, то (9) принимает вид (6), (7). Если $B_2 = \pm B_0 \sqrt{B_1}$, $B_3 = (B_1^2 + B_2^2) / B_1$, то (9) дает решение, соответствующее случаю $G^2 = B_1$.

В дополнение к этому результату отметим, что в [12] получено точное конически симметричное решение, позволившее рассмотреть задачу о протекании жидкости сквозь ядро сферического слоя в поле массовой силы.

Сильный разрыв течения

Будем рассматривать движение жидкости в полупространстве $r > 0$, $\theta \in [0, \pi/2]$ с вынужтой в начале координат точкой, в которой расположен гидродинамический и тепловой источник / сток. Выделяем две области.

$$n\text{-область: } 0 \leq \theta \leq \theta_j < (\pi/2), \quad \rho = \rho_n, \quad c_p = c_p^{(n)}. \quad (10)$$

В этой конечной окрестности луча $\theta = 0$ справедливы решения (6), (7), которые мы запишем, сменив обозначение $B_1 \rightarrow N_1$,

$$v_r = \mp \frac{\sqrt{N_1}}{r}, \quad v_\theta = \pm \sqrt{N_1} \frac{(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in [0, \theta_j], \quad (11)$$

$$p = p_\infty - \frac{\rho_n N_1}{r^2 (1 + \cos \theta)} > 0. \quad (12)$$

Здесь и далее верхний знак относится к стоку, нижний – к источнику. Например, для стока согласно (11) при $\theta = \theta_j$ имеем $v_\theta > 0$, а для источника $v_\theta < 0$.

$$e\text{-область: } 0 < \theta_j \leq \theta \leq (\pi/2), \quad \rho = \rho_e, \quad c_p = c_p^{(e)}. \quad (13)$$

Эта часть полупространства примыкает к плоскости $\theta = \pi/2$, которую мы условно называем плоскостью экватора. Движение жидкости определяется решением вида (9), в записи которого делаем замену символов B, B_1, B_2, B_3 на E, E_1, E_2, E_3 :

$$v_r = \frac{E_2 - E_1 \cos \theta}{rE \sin \theta}, \quad v_\theta = \frac{-E}{r}, \quad N_1 > 0, \quad r > 0, \quad \theta \in \left[\theta_j, \frac{\pi}{2} \right], \quad (14)$$

$$p = p_\infty - \frac{\rho_e (E_1 + E^2)}{2r^2}, \quad (15)$$

$$E(\theta) = \frac{(\mp 1)}{\sin \theta} (E_3 - 2E_2 \cos \theta - E_1 \sin^2 \theta)^{1/2}. \quad (16)$$

Выражения (12) и (15) одинаковы для источника и стока. Константа p_∞ одна и та же для обеих областей; условие $p > 0$ всегда можно выполнить подходящим выбором $p_\infty > 0$.

Плоскость экватора – проницаемая граница: через нее жидкость удаляется из области течения (сток) либо поступает в область течения (источник) (рис. 1). Для стока / источника скорость отвода / притока жидкости равна

$$v_\theta \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = \pm (E_3 - E_1)^{1/2} / r, \quad r > 0. \quad (17)$$

При решении уравнения энергии (4) температуру представляем в виде:

$$T = T_\infty + \frac{1}{r^2} \Psi(\theta), \quad (18)$$

где $T_\infty \equiv \text{const} > 0$ – температура жидкости на бесконечности. Далее применяем обозначения $\Psi_n(\theta)$, $\Psi_e(\theta)$ для функций, определяющих решение в n -, e -областях. Вычисление внутренней энергии и энтропии

$$U = \int c_p dT + \text{const}, \quad S = \int \frac{c_p}{T} dT + \text{const} \quad (19)$$

выполняем следующим образом. При постоянной удельной теплоемкости жидкости $c_p \equiv \text{const}$ определяем внутреннюю энергию как $U = c_p T$. Для подсчета энтропии аддитивную постоянную в (19) берем такой, что нулевое значение S соответствует температуре T_∞ :

$$S = c_p \ln(T/T_\infty). \quad (20)$$

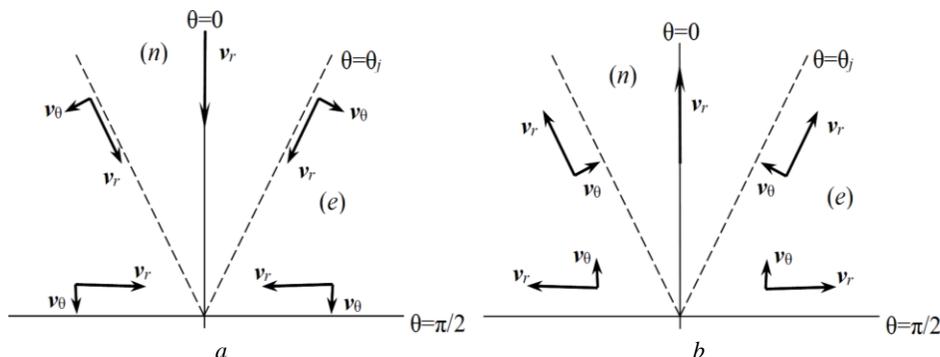


Рис. 1. Схема течения жидкости в n - и e -областях: a – сток; b – источник
 Fig. 1. Scheme of a fluid flow in n - and e -regions: (a) sink and (b) source

Коническая поверхность $\theta = \theta_j$, $r > 0$ – это неподвижный сильный разрыв, на котором условия динамической совместности имеют вид [1]:

$$\{v_r\} = 0, \quad \{\rho v_\theta\} = 0, \quad \{p + \rho v_\theta^2\} = 0, \quad (21)$$

$$\left\{ v_\theta p + \rho v_\theta \left(\frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2} + U \right) \right\} = 0. \quad (22)$$

Кроме того, на разрыве должен быть выполнен закон возрастания энтропии $\{S\} > 0$. Фигурные скобки означают скачок функции при переходе через разрыв. В данном случае v_θ есть нормальная компонента вектора скорости по отношению к поверхности разрыва $\theta = \theta_j$; v_r – касательная к поверхности разрыва составляющая вектора скорости. Таким образом, первое из условий (21) – это условие непрерывности радиальной компоненты скорости, а второе и третье соотношения представляют собой условия непрерывности потоков массы и импульса при переходе через разрыв:

$$v_r^{(n)} = v_r^{(e)}, \quad \rho_n v_\theta^{(n)} = \rho_e v_\theta^{(e)}, \quad (23)$$

$$p_n + \rho_n (v_\theta^{(n)})^2 = p_e + \rho_e (v_\theta^{(e)})^2.$$

Условие (22) определяет непрерывность потока энергии на поверхности разрыва гидродинамических величин. При указании направления перехода жидкости из одной области в другую исходим из того, что при прохождении жидкости через разрыв ее энтропия возрастает. Такой сильный разрыв может служить моделью природных либо техногенных процессов, сопровождающихся резким изменением гидродинамических и тепловых параметров течения. В соотношениях (23) применяем решения (11) и (14)–(16) и получаем

$$E_1 = \rho_* N_1 e_1, \quad E_2 = \rho_* N_1 e_2, \quad E_3 = \rho_* N_1 e_3, \quad (24)$$

$$e_1 = [\rho_*(1-\alpha) + 2\alpha]/(1+\alpha), \quad e_2 = [1 + \alpha^2 + \rho_* \alpha(1-\alpha)]/(1+\alpha), \quad e_3 = 2e_1, \quad (25)$$

$$\rho_* = \rho_n/\rho_e, \quad \alpha = \cos \theta_j, \quad \alpha \in (0,1). \quad (26)$$

Безвихревое течение в конусе $\theta = \theta_j$, $r > 0$ генерирует движение в e -области.

Выражения (24), (25) содержат информацию о входных параметрах N_1 , ρ_* , α . Следовательно, для источника и стока скорость и давление на проницаемой границе $\theta = \pi/2$ обусловлены воздействием сильного разрыва $\theta = \theta_j$ с априорно заданным скачком плотности. Согласно (17), (24) произвольная положительная константа N_1 характеризует скорость протекания жидкости через плоскость экватора:

$$(v_\theta)_{eq} = (\pm 1/r)(2\rho_* N_1 e_1)^{1/2}, \quad r > 0.$$

Индексом eq отмечаем значения функций при $\theta = \pi/2$. Данное решение не содержит формальных ограничений на выбор $\rho_* > 0$. Вместе с тем из физических соображений ясно, что следует брать значения ρ_* из левой и правой малых конечных окрестностей единицы. В дальнейшем при проведении оценочных расчетов принимаем $\rho_* \in [1/2, 3/2]$. Именно этот интервал встретится нам в последующем анализе задачи (см. обсуждение формулы (46)). Для краткости записи применяем неравенства $\rho_* < 1$ и $\rho_* > 1$, подразумевая при этом конечные левую и правую окрестности порогового значения $\rho_* = 1$.

Отметим еще такие формулы:

$$e_1 - e_2 = \frac{(1-\alpha)^2(\rho_* - 1)}{1+\alpha}, \quad e_2^2 - e_1^2 = \frac{Y}{(1+\alpha)^2}, \quad (27)$$

$$Y = (\rho_* - 1)(k_2 \rho_* - k_0), \quad (28)$$

$$k_0 = (1 - \alpha^2)^2, \quad k_1 = 2(\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha^4 - \alpha), \quad k_0 + k_1 + k_2 = 0, \quad k_2 < 0.$$

Существенно, что $Y = Y(\rho_*)$ – монотонно убывающая знакопеременная функция: $Y(\rho_*) > 0$ при $\rho_* < 1$; $Y(\rho_*) < 0$ при $\rho_* > 1$.

В балансе энергии (22) на разрыве учитываем (18), выделяем члены с $1/r$, $1/r^3$ и получаем два соотношения:

$$p_\infty(1 - \rho_*) = T_\infty \rho_n (c_p^{(e)} - c_p^{(n)}), \quad (29)$$

$$c_p^{(n)} \Psi_{nj} = \frac{N_1 Y}{2(1 - \alpha^2)^2} + c_p^{(e)} \Psi_{ej}, \quad (30)$$

$$\Psi_{nj} = \Psi_n(\theta_j), \quad \Psi_{ej} = \Psi_e(\theta_j).$$

Здесь и далее нижний индекс j указывает, что значение функции вычислено при $\theta = \theta_j$. Формула (29) дает связь между p_∞ и T_∞ , а (30) – это корреляция между температурами жидкости по обе стороны разрыва.

Температурное поле

Рассмотрим несколько вариантов решения тепловой задачи для гидродинамических процессов (11), (14).

I. Обсудим n - e -переход, т.е. сток, при отсутствии источников энергии, $q_v(T) \equiv 0$. В n -области течение изотермическое: $T_n = T_\infty > 0$, $\Psi_n(\theta) \equiv 0$, см. (18). Движению (14) в e -области соответствует решение

$$\Psi_e(\theta) = \Psi_1 e_1 / h_{12}(\theta), \quad (31)$$

$$h_{12}(\theta) = e_1 (1 + \cos^2 \theta) - 2e_2 \cos \theta > 0, \quad (h_{12})_j = \rho_* (1 - \alpha)^2, \quad (32)$$

в котором константа Ψ_1 определяет температуру жидкости на плоскости экватора: $\Psi_e(\theta = \pi/2) = \Psi_1$. Условие возрастания энтропии означает, что должно быть выполнено неравенство $T_{ej} > T_\infty$, т.е. $\Psi_{ej} > 0$, или, что то же самое, $\Psi_1 > 0$. Тогда в балансе энергии (30) при $\Psi_{nj} = 0$ необходимо иметь $Y(\rho_*) < 0$, т.е. $\rho_* > 1$ (см. обсуждение формулы (28)). Значит, при движении жидкости через разрыв из n -области к плоскости экватора ее плотность уменьшается, $\rho_n > \rho_e$ и, согласно (29), $c_p^{(n)} > c_p^{(e)}$.

Завихренность $\omega = (1/2) \operatorname{rot} v$ имеет вид:

$$\omega_r \equiv 0, \quad \omega_\theta \equiv 0, \quad \omega_\phi = \frac{(\rho_* N_1)^{1/2} (e_2^2 - e_1^2) \sin \theta}{2r^2 (h_{12})^{3/2}}. \quad (33)$$

Для ω_ϕ , меридианной компоненты скорости v_θ и температуры $T_e - T_\infty$ введем относительные величины, характеризующие значения названных функций на стороне разрыва, принадлежащей e -области, и на плоскости экватора:

$$\delta_\omega = \frac{(\omega_\phi)_j}{(\omega_\phi)_{eq}}, \quad \delta_v = \frac{(v_\theta)_j}{(v_\theta)_{eq}}, \quad \delta_T = \frac{(T_e - T_\infty)_j}{(T_e - T_\infty)_{eq}}.$$

В результате вычислений имеем

$$\delta_\omega = \left(\frac{e_1}{e_{12}} \right)^{3/2} \sin \theta_j, \quad \delta_v = \left(\frac{e_{12}}{e_1} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \theta_j}, \quad \delta_T = \frac{e_1}{e_{12}}, \quad e_{12} = (h_{12})_j, \quad (34)$$

$$\delta_T = \delta_v \delta_\omega.$$

Эта простая формула демонстрирует влияние завихренности (азимутальная компонента) и скорости (меридианная компонента) на формирование теплового поля.

Если $\rho_* = 1$, то сильный разрыв отсутствует: получаем $e_1 = e_2 = 1$, $Y = 0$, $\Psi_1 = 0$, и решение (14) совпадает с (11), т.е. в области $\theta \in [0, \pi/2]$, $r > 0$ имеем безвихревой изотермический сток. При изотермическом состоянии n -области в классе решений (14), (31) не содержится термодинамически допустимый e - n -переход (источник).

II. Продолжим анализ гидродинамического стока. Пусть в n -области течение по-прежнему изотермическое, $T_n = T_\infty$, а в e -области действует источник тепловой энергии

$$q_v = q_v^1 (T - T_\infty)^2, \quad q_v^1 \equiv \text{const}. \quad (35)$$

Тогда уравнение (4) имеет точное решение вида (18):

$$\Psi_e(\theta) = 1/\chi_e(\theta),$$

$$\chi_e(\theta) = \frac{\chi_1}{e_1} h_{12} - \frac{(1 + \alpha)^2 h_{12} K_e}{(\rho_* N_1)^{1/2} Y} \left[\frac{e_1 \cos \theta - e_2}{h_{12}^{1/2}} + \frac{e_2}{e_1^{1/2}} \right], \quad (36)$$

$$K_e = q_v^1 / (\rho_e c_p^{(e)}).$$

Константа χ_1 определяет температуру жидкости на плоскости экватора, $\chi_e(\theta = \pi/2) = \chi_1 = 1/\Psi_1 \neq 0$. На разрыве $\theta = \theta_j$ получаем

$$\chi_{ej} = \frac{\rho_*}{e_1} (1-\alpha)^2 \left[\chi_1 - \frac{e_1(1+\alpha)^2 K_e}{(\rho_* N_1)^{1/2} Y} \left(\frac{e_2}{e_1^{1/2}} - \frac{1}{\rho_*^{1/2}} \right) \right]. \quad (37)$$

Расчеты показывают, что

$$\rho_* e_2^2 - e_1 = (\rho_* - 1)(a_0 + a_1 \rho_* + a_2 \rho_*^2), \quad (38)$$

$$a_0 = 2\alpha(1+\alpha), \quad a_1 = \alpha^2(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)(1+\alpha^2), \quad a_2 = \alpha^2(1-\alpha)^2.$$

Введем обозначение

$$Z + 1 = \rho_* e_2^2 / e_1$$

и на основе (38) получим, что $Z > 0$ при $\rho_* > 1$. Теперь из (30) при $\Psi_{nj} = 0$ найдем $Y = -2c_p^{(e)}(1-\alpha^2)^2 / (N_1 \chi_{ej})$, подставим это выражение в (37) и определим относительную температуру $\delta_T = \chi_1 / \chi_{ej}$:

$$\delta_T = \delta_v \delta_\omega \left(1 - \frac{Q_e}{2} Z_1 \right), \quad Z_1 = (1+Z)^{1/2} - 1, \quad (39)$$

где $Q_e = K_e \sqrt{N_1} / c_p^{(e)}$ – безразмерный параметр теплового источника. Если $q_v^1 = 0$, то (39) принимает вид (34). Условие возрастания энтропии дает следующие оценки: $\rho_n > \rho_e$, $c_p^{(n)} > c_p^{(e)}$, $Z_1 > 0$, $\chi_1 > 0$, а также $\chi_{ej} > 0$. Это неравенство выполнено при всех режимах теплоотвода $Q_e < 0$ и при не слишком большом положительном q_v^1 : $0 < Q_e < (2/Z_1)$. Поведение ρ и c_p при переходе через разрыв аналогично тому, что наблюдалось для решения (31) без источника тепловой энергии.

III. Рассмотрим гидродинамический источник (e - n -переход), полагая, что температура жидкости в e -области постоянная [$T_e = T_\infty$, $\Psi_e(\theta) \equiv 0$], а в n -области происходит отвод тепловой энергии (35), $q_v^1 < 0$. Закону возрастания энтропии удовлетворяет следующее решение:

$$T_n = T_\infty + (\Psi_n / r^2),$$

$$K_n = q_v^1 / (\rho_n c_p^{(n)}) < 0, \quad \Psi_n = -2\sqrt{N_1} / K_n > 0. \quad (40)$$

В данном случае, согласно (30), $Y > 0$, $\rho_* < 1$. При переходе через разрыв плотность жидкости уменьшается, $\rho_n < \rho_e$ и $c_p^{(n)} < c_p^{(e)}$, см. (29). Из (30) при $\Psi_{ej} = 0$ имеем $2c_p^{(n)}\Psi_n = N_1 Y / (1-\alpha^2)^2$, и с учетом (40) получаем корреляцию между скоростью втекания жидкости через плоскость экватора (параметр N_1) и теплоотводом в n -области:

$$4c_p^{(n)}(1-\alpha^2)^2 + K_n Y \sqrt{N_1} = 0.$$

Сопоставление свойств источника и стока

Изучим влияние скачка плотности и угла раскрытия конуса $\theta = \theta_j$ на свойства источника и стока. Нужно обратить внимание на то, что для n - e -перехода (сток) величина $\rho_* = \rho_n / \rho_e$ есть отношение плотности ρ_n перед разрывом к плотности жидкости ρ_e за разрывом. И наоборот: в случае e - n -перехода (источник) ρ_* есть отношение плотности жидкости за разрывом к ее плотности перед разрывом. В обоих случаях плотность при переходе через разрыв уменьшается в направлении меридианной скорости. В соответствии с этим при сопоставлении свойств стока и источника применяем производные $\partial/\partial\rho_*$ и $\partial/\partial(1/\rho_*)$.

Отношение скорости втекания либо вытекания жидкости через плоскость экватора к ее скорости вдоль луча $\theta = 0$ определяется выражением

$$V_1 = \left[\frac{v_\theta(\theta = \pi/2)}{v_r(\theta = 0)} \right]^2 = \rho_* e_1. \quad (41)$$

Отсюда получаем следующие закономерности:

- сток: $\rho_* > 1$, $V_1^{(n-e)} > 1$, $\partial V_1^{(n-e)} / \partial \alpha < 0$, $\partial V_1^{(n-e)} / \partial \rho_* > 0$;
- источник: $\rho_* < 1$, $V_1^{(e-n)} < 1$, $\partial V_1^{(e-n)} / \partial \alpha > 0$, $\partial V_1^{(e-n)} / \partial (1/\rho_*) < 0$ (рис. 2, а).

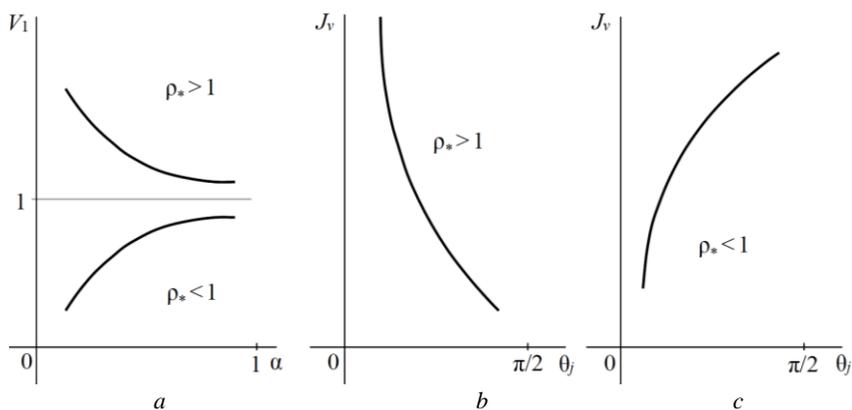


Рис. 2. Свойства меридианной компоненты скорости: а – функция (41); б, с – интеграл (42)
Fig. 2. Properties of a meridional velocity component: (а) function (41) and (b), (c) integral (42)

Интеграл

$$J_v(\theta_j, \rho_*) = \int_0^{\pi/2} (rv_\theta)^2 d\theta$$

характеризует поведение скорости v_θ во всей области течения и обладает такими свойствами:

$$J_v = J_v^{(n)} + J_v^{(e)}, \quad (42)$$

$$J_v^{(n)} = N_1 \left[\frac{2(1 - \cos\theta_j)}{\sin\theta_j} - \theta_j \right],$$

$$J_v^{(e)} = \rho_* N_1 \left[2e_1 \operatorname{ctg} \theta_j - \frac{2e_2}{\sin \theta_j} + 2e_2 + e_1 \left(\theta_j - \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

$$\frac{\partial J_v}{\partial \rho_*} > 0, \operatorname{sgn} \frac{\partial J_v}{\partial \theta_j} = \operatorname{sgn}(1 - \rho_*), \operatorname{sgn} \frac{\partial^2 J_v}{\partial \theta_j^2} = \operatorname{sgn}(\rho_* - 1),$$

см. рис. 2b, c.

Изучим выражение

$$V_2 = \left[\frac{v_r(\theta = \pi/2)}{v_r(\theta = 0)} \right]^2 = \rho_* \frac{e_2^2}{e_1^2}, \quad (43)$$

которое описывает поведение радиальной скорости по обе стороны сильного разрыва. Расчеты показывают, что зависимость $V_2(\alpha)$ немонотонная, имеет в области $\alpha \in (0,1)$ один экстремум – это максимум при $\rho_* > 1$, т.е. для стока; это минимум при $\rho_* < 1$, т.е. для источника (рис. 3a, b). В точке экстремума корреляция $\rho_* \leftrightarrow \alpha$ имеет вид:

$$\rho_* = \left(2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha - 1 \right) / \left(\alpha^3 - 2\alpha + 1 \right), \quad (44)$$

причем здесь значение α слабо реагирует на изменение ρ_* в конечной окрестности единицы. Например, для источника: 1) $\rho_* = 0.7567$, $\alpha = 0.735$, $(V_2)_{\min} = 0.7436$; 2) $\rho_* = 0.8160$, $\alpha = 0.734$, $(V_2)_{\min} = 0.8053$. Для стока: 1) $\rho_* = 1.0882$, $\alpha = 0.731$, $(V_2)_{\max} = 1.0951$; 2) $\rho_* = 1.1730$, $\alpha = 0.73$, $(V_2)_{\max} = 1.1877$. Даже если в (44) формально принять $\rho_* = 2$, получим $\alpha = (\sqrt{10} - 1)/3 \cong 0,7208$. Влияние скачка плотности видно из неравенств $\partial V_2^{(n-e)} / \partial \rho_* > 0$, $\partial V_2^{(e-n)} / \partial (1/\rho_*) < 0$.

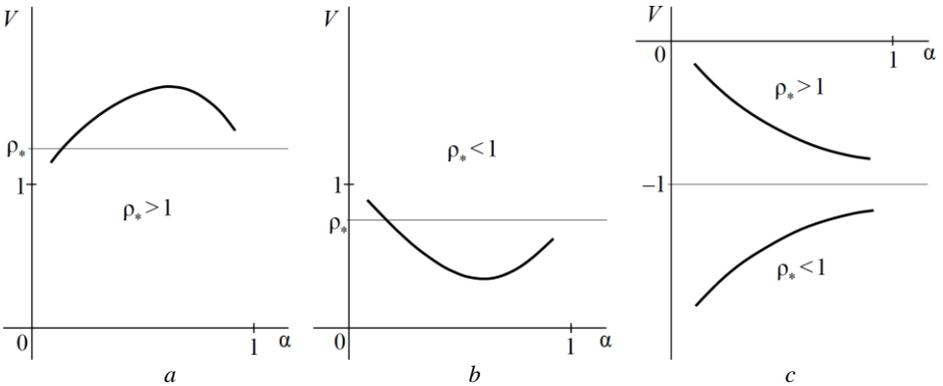


Рис. 3. Свойства радиальной компоненты скорости и ротора завихренности:

a, b – функция (43); c – функция (45)

Fig. 3. Properties of the radial velocity component and vorticity rotor:

(a), (b) function (43), and (c) function (45)

Из (33) ясно, что знаки ω_ϕ для источника и стока противоположны друг другу, см. (27), (28). Пространственная неоднородность ϕ -компоненты завихренности определяется вектором $\operatorname{rot} \omega = \Omega (\Omega_r, \Omega_\theta, \Omega_\phi \equiv 0)$. Расчеты показывают, что

$$\left(\frac{\Omega_r}{\Omega_\theta}\right)_{eq} = 3V_3, \quad V_3 = \left(\frac{v_r}{v_\theta}\right)_{eq} = -\frac{e_2}{e_1}, \quad V_3^2 = \frac{V_2}{V_1}. \quad (45)$$

Следовательно, в плоскости экватора отношение компонент вектора скорости с точностью до числового множителя равно отношению соответствующих компонент ротора завихренности. Параметр V_3 имеет следующие свойства (рис. 3, с). Сток:

$$1 + V_3^{(n-e)} > 0, \quad \partial V_3^{(n-e)} / \partial \alpha < 0, \quad \partial^2 V_3^{(n-e)} / \partial \alpha^2 > 0, \quad \partial V_3^{(n-e)} / \partial \rho_* > 0.$$

Источник:

$$1 + V_3^{(e-n)} < 0, \quad \partial V_3^{(e-n)} / \partial \alpha > 0, \quad \partial^2 V_3^{(e-n)} / \partial \alpha^2 < 0, \quad \partial V_3^{(e-n)} / \partial (1/\rho_*) < 0.$$

Для анализа поведения давления возьмем дробь

$$D = (p - p_\infty)_{eq} / (p - p_\infty)_{\theta=0}. \quad (46)$$

Здесь числитель и знаменатель отрицательные, см. (12) и (15). Условие $D \in (0,1)$ не дает физически содержательных оценок параметров задачи. Неравенство $D > 1$ записывается в виде: $\alpha(3 - 2\rho_*) > (1 - 2\rho_*)$. В частности, это будет выполнено при $\rho_* \in [1/2, 3/2]$. Таким образом, для источника и стока

$$0 < [p_{eq} / (p)_{\theta=0}] < 1.$$

Вместе с тем получаем такие закономерности:

– сток: $\partial D^{(n-e)} / \partial \alpha < 0, \quad \partial D^{(n-e)} / \partial \rho_* > 0;$

– источник: $\partial D^{(e-n)} / \partial \alpha > 0, \quad \partial D^{(e-n)} / \partial (1/\rho_*) < 0.$

Свойства меридианной компоненты градиента давления: $(\partial p / \partial \theta)_{\theta=0} = 0$; на обеих сторонах сильного разрыва $(\partial p / \partial \theta)_j < 0$. В e -области $\partial p / \partial \theta < 0$. Это значит, что для стока ($\partial \theta > 0$) имеем $\partial p < 0$ в направлении меридианной скорости; для источника ($\partial \theta < 0$) в направлении меридианной скорости $\partial p > 0$.

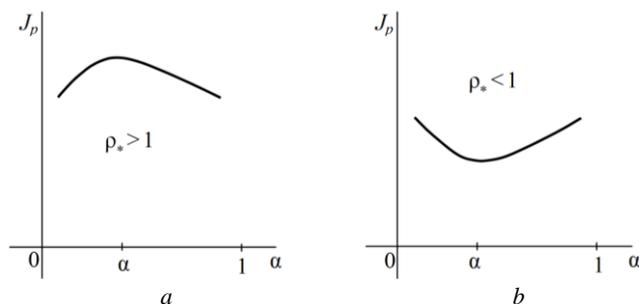


Рис. 4. Свойства давления жидкости – интеграл (47): а – сток; б – источник

Fig. 4. Properties of fluid pressure (integral (47)): (a) sink and (b) source

Интеграл

$$J_p(\alpha, \rho_*, \rho_n) = -2 \int_0^{\pi/2} r^2 (p - p_\infty) d\theta \quad (47)$$

обладает следующими свойствами:

$$J_p = 2\rho_n N_1 e_2,$$

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial J_p}{\partial \alpha} = \operatorname{sgn} [(\alpha - \alpha_m)(1 - \rho_*)], \quad \alpha_m = \sqrt{2} - 1,$$

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial^2 J_p}{\partial \alpha^2} = \operatorname{sgn}(1 - \rho_*).$$

Это значит, что зависимость J_p по отношению к аргументу α немонотонная: экстремум достигается при $\alpha = \alpha_m$ (рис. 4).

Непротекательная граница

В n -области решению (11), (12) соответствует непротекательная граница

$$r_w^{(n)} = C_1^{(n)} / (1 - x), \quad x = \cos \theta, \quad \theta \in (0, \theta_j];$$

здесь $r_w^{(n)} \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow 0$. В e -области непротекательная граница представляется выражением

$$r_w^{(e)} = C_1^{(e)} / \sqrt{e_1 x^2 - 2e_2 x + e_1}, \quad \theta \in \left[\theta_j, \frac{\pi}{2} \right],$$

в котором квадратный трехчлен под корнем положителен. Эти зависимости одинаковы для источника и стока, причем $dr_w^{(n)}/d\theta < 0$, $dr_w^{(e)}/d\theta < 0$, а обе вторые производные по θ положительные. Выбор константы $C_1^{(n)}$ определяет значение $r_w^{(n)}(\theta_j)$ на разрыве, а с помощью $C_1^{(e)}$ выполняем стыковку двух участков непротекательных границ $[r_w^{(n)}(\theta_j) = r_w^{(e)}(\theta_j)]$ и получаем

$$C_1^{(n)} = r_{wj}^{(n)}(1 - \alpha), \quad C_1^{(e)} = r_{wj}^{(n)}(1 - \alpha)\sqrt{\rho_*}.$$

Отметим, что здесь

$$r_{wj}^{(n)} / (r_w^{(e)})_{eq} = \sqrt{e_1 / \rho_*} / (1 - \alpha) > 1.$$

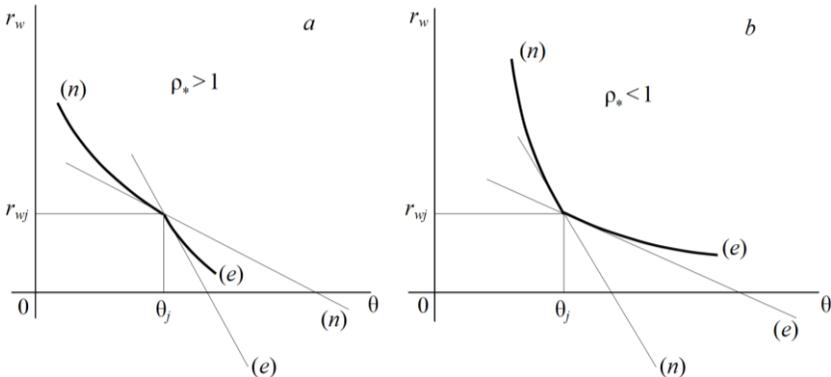


Рис. 5. Излом (48) непротекательной границы: a – сток; b – источник
 Fig. 5. Impermeable boundary with fracture (48): (a) sink and (b) source

На стыке $\theta = \theta_j$ терпит разрыв наклон $dr_w/d\theta$, а именно:

$$\left(dr_w^{(n)}/d\theta\right)_j = \rho_* \left(dr_w^{(e)}/d\theta\right)_j. \quad (48)$$

Значит, источник ($\rho_* < 1$) и сток ($\rho_* > 1$) различаются характером расположения n - и e -участков непротекаемой границы по отношению к точке излома $\theta = \theta_j$, $r_{wj} = r_w^{(n)}(\theta_j) = r_w^{(e)}(\theta_j)$ (рис. 5).

Заключение

Результаты сравнения свойств источника и стока состоят в следующем. Различия между этими течениями проявляются именно под влиянием скачка плотности при протекании жидкости через сильный разрыв, на котором выполнен закон возрастания энтропии. Существенным параметром задачи является угол раскрытия конуса $\theta = \theta_j$: безвихревое течение в конечной окрестности оси симметрии $\theta = 0$ генерирует вихревое течение в e -области, примыкающей к плоскости экватора. Формирование пространственно-неоднородного температурного поля обусловлено взаимодействием азимутальной компоненты завихренности и меридианной компоненты скорости, см. (34) и (39). Представленные на рис. 2–4 качественные свойства скорости и давления различаются для источника и стока характером поведения изученных функций: монотонное убывание и монотонное возрастание, направления выпуклости и вогнутости, наличие максимума либо минимума для немонотонных функций. Знаки φ -компоненты завихренности для источника и стока противоположны друг другу. В плоскости экватора корреляция между отношением компонент вектора скорости и отношением соответствующих компонент ротора завихренности описывается формулой (45). Выразительным примером является конфигурация непротекаемой границы, содержащей излом (рис. 5). Для стока острие излома направлено от оси симметрии в сторону вогнутости непротекаемой границы; для источника – к оси симметрии в сторону выпуклости границы.

Список источников

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М. : Наука, 1973. Т. 1. 536 с.
2. Головкин М.А., Головкин В.А., Калявкин В.М. Вопросы вихревой гидромеханики. М. : Физматлит, 2009. 264 с.
3. Хатунцева О.Н. Анализ причин возникновения аэродинамического гистерезиса при летных испытаниях спускаемого аппарата «Союз» на гиперзвуковом участке спуска // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52, № 4. С. 52–62.
4. Гувернюк С.В., Максимов Ф.А. Сверхзвуковое обтекание плоской решетки цилиндрических стержней // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 6. С. 1025–1033. doi: 10.7868/S0044466916060156
5. Волков В.Ф., Тарнавский Г.А. Нарушение симметрии и гистерезис стационарных и квазистационарных решений уравнений Эйлера и Навье–Стокса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41, № 11. С. 1742–1750.
6. Shtern V., Hussain F. Collapse, symmetry breaking, and hysteresis in swirling flows // Annual Review of Fluid Mechanics. 1999. V. 31. P. 537–566. doi: 10.1017/S0022112090001082
7. Ogun G., Baelmans M., Vanierschot M. On the flow structures and hysteresis of laminar swirling jets // Physics of Fluids. 2016. V. 28. P. 123604-1–123604-16. doi: 10.1063/1.4972227

8. Богомолов В.А. Движение идеальной жидкости постоянной плотности при наличии стоков // Механика жидкости и газа. 1976. № 4. С. 21–27.
9. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск : Наука, 1989. 336 с.
10. Пухначев В.В. Задача о точечном источнике // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 2. С. 19–31. doi: 10.15372/PMTF20190202
11. Бардос К., Тити Э.С. Уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости // Успехи математических наук. 2007. Т. 62, вып. 3. С. 5–46. doi: 10.4213/gm6811
12. Шабловский О.Н. Сферическое течение идеальной жидкости в пространственно-неоднородном силовом поле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 64. С. 146–155. doi: 10.17223/19988621/64/11

References

1. Sedov L.I. (1973) *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. Volume 1. Moscow: Nauka.
2. Golovkin M.A., Golovkin V.A., Kalyavkin V.M. (2009) *Voprosy vikhrevoy gidromekhaniki* [Issues of vortex hydromechanics]. Moscow: Fizmatlit.
3. Khatuntseva O.N. (2011) Analysis of the reasons for an aerodynamic hysteresis in flight tests of the Soyuz reentry capsule at the hypersonic segment of its descent. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 52. pp. 544–552. doi: 10.1134/S0021894411040067
4. Guvernuyuk S.V., Maksimov F.A. (2016) Supersonic flow past a flat lattice of cylindrical rods. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 56. pp. 1012–1019. doi: 10.1134/S0965542516060154
5. Volkov V.F., Tarnavskiy G.A. (2001) Narushenie simmetrii i gisterezis statsionarnykh i kvazistatsionarnykh reshe-niy uravneniy Eylera i Nav'e-Stoksa [Symmetry breaking and hysteresis of stationary and quasi-stationary solutions of the Euler and Navier-Stokes equations]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 41(11). pp. 1742–1750.
6. Shtern V., Hussain F. (1999) Collapse, symmetry breaking, and hysteresis in swirling flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 31. pp. 537–566. doi: 10.1017/S0022112090001082
7. Oqus G., Baelmans M., Vanierschot M. (2016) On the flow structures and hysteresis of laminar swirling jets. *Physics of Fluids*. 28. Article 123604. pp. 1–16. doi: 10.1063/1.4972227
8. Bogomolov B.A. (1976) Dvizhenie ideal'noy zhidkosti postoyannoy plotnosti pri nalichii stokov [Motion of an ideal fluid of constant density in the presence of sinks]. *Mekhanika zhidkosti i gaza – Fluid Dynamics*. 4. pp. 21–27.
9. Goldshtik M.A., Shtern V.N., Yavorskiy N.I. (1989) *Vyazkie techeniya s paradoksal'nymi svoystvami* [Viscous flows with paradoxical properties]. Novosibirsk: Nauka.
10. Pukhnachev V.V. (2019) Problem of a point source. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 60. pp. 200–210. doi: 10.1134/S0021894419020020
11. Bardos C., Titi E.S. (2007) Euler equations for incompressible ideal fluids. *Russian Mathematical Surveys*. 62(3). pp. 409–451. doi: 10.1070/RM2007v062n03ABEH004410
12. Shablovskiy O.N. (2020) Sfericheskoe techenie ideal'noy zhidkosti v prostanstvenno-neodnorodnom silovom pole [Spherical flow of an ideal fluid in a spatially inhomogeneous force field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and mechanics*. 64. pp. 146–155. doi: 10.17223/19988621/64/11

Сведения об авторе:

Шабловский Олег Никифорович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика» Гомельского государственного технического университета имени П.О. Сухого, Гомель, Республика Беларусь. E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

Information about the author:

Shablovskiy Oleg N. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 05.05.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 05.05.2023; accepted for publication 10.04.2024

Научная статья

УДК 532.517+621.929

doi: 10.17223/19988621/88/13

Моделирование гидродинамики, теплообмена и процесса усреднения гранулированных сред в пневматическом циркуляционном аппарате

Александр Вениаминович Шваб¹, Сергей Валерьевич Мусин²

^{1,2} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *avshvab@inbox.ru*

² *mmnt98@mail.ru*

Аннотация. Проведено теоретическое исследование движения плотного слоя гранулированной среды в инерционном режиме в пневматическом циркуляционном аппарате. Для описания напряжений в такой среде использовалась модель неньютоновской жидкости. Результаты исследования показали существенное влияние граничных условий на динамику движения зернистой среды. На основе полученной гидродинамики проведено моделирование процесса усреднения ключевого и основного компонентов смеси. Показаны возможности увеличения интенсивности процессов смешения и теплообмена за счет введения в аппарат дополнительных кольцевых дисков. Справедливость полученных результатов подтверждается сравнением с опытными данными и аналитическими решениями.

Ключевые слова: неньютоновская среда, гранулы, теплота, скорость, смешивание, математическая модель

Для цитирования: Шваб А.В., Мусин С.В. Моделирование гидродинамики, теплообмена и процесса усреднения гранулированных сред в пневматическом циркуляционном аппарате // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 164–178. doi: 10.17223/19988621/88/13

Original article

Modeling of hydrodynamics, heat transfer, and averaging of granular media in a pneumatic circulation apparatus

Aleksandr V. Shvab¹, Sergey V. Musin²

^{1,2} *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *avshvab@inbox.ru*

² *mmnt98@mail.ru*

Abstract. The mathematical modeling of hydrodynamics, heat transfer, and averaging of a highly concentrated granular medium in the working area of a vertical pneumatic circulation apparatus is performed. The hydrodynamics of a dense layer of the granular medium is described by a non-Newtonian model with partial slip conditions on solid walls. Such

a representation of the granular medium dynamics allows one to approve theoretical calculations with available experimental data for a steady flow in a flat channel. The numerical applicability of the partial slip condition for a non-Newtonian fluid is confirmed by the analytical dependences obtained by the authors for a steady flow in a circular tube and a flat channel, which are transformed into the known analytical formulas under no-slip conditions for a non-Newtonian medium. On the basis of the proposed model, the heat exchange intensity is analyzed when setting the constant heat flux density or the constant temperature on the annular shelves in the apparatus. The intensity of the granular mixture averaging in the bunker with the introduction of additional annular shelves is studied, and the efficiency of granular mixture mixing during rotation is considered. A method for analyzing the mixing of a granular medium in dynamics in each local area of the apparatus is proposed, which is based on the determination of the inhomogeneity coefficient. The results of this study can be used when developing powder technology devices for drying, mixing, dosing, and transport.

Keywords: non-Newtonian medium, granules, heat, velocity, mixing, mathematical model

For citation: Shvab, A.V., Musin, S.V. (2024) Modeling of hydrodynamics, heat transfer, and averaging of granular media in a pneumatic circulation apparatus. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 164–178. doi: 10.17223/19988621/88/13

Введение

В химической технологии для получения новых материалов широко используются процессы измельчения, усреднения, классификации и смешения [1–3]. Существуют механические технологии [4], однако в настоящее время более перспективными являются пневматические способы получения порошков с заданными свойствами [5, 6]. Последняя технология снижает энергозатраты за счет использования гравитационных сил и энергии сжатого воздуха. В частности, процессы смешения, усреднения, сушки гранулированных сред могут одновременно осуществляться в пневматическом циркуляционном аппарате (ПЦА) [7]. ПЦА представляет собой аппарат, состоящий из коаксиальной цилиндрической камеры, а также вертикальной трубы и сопла, через которое подается сжатый газ (вид ПЦА представлен на рис. 1, а в разделе «Физико-математическая постановка задачи»). Газ, движущийся из сопла, за счет аэродинамической силы сопротивления захватывает частицы и обеспечивает транспортирование сыпучей среды через вертикальную трубу в рабочую камеру аппарата. Таким образом, обеспечивается циркуляция гранулированной среды в аппарате, которая и осуществляет процессы смешивания и сушки. Основной процесс усреднения или сушки зернистой среды происходит в вертикальном коаксиальном канале под действием гравитационных сил. Перспективным направлением совершенствования такой технологии является разработка математических моделей.

Цель настоящей работы – создание математической модели для описания процесса динамики, смешения и теплопереноса гранулированной среды в коаксиальном цилиндрическом канале ПЦА.

Физико-математическая постановка задачи

Экспериментальные и теоретические исследования в области динамики плотного слоя гранул [8–13] показывают большое разнообразие физических и мате-

матических подходов для описания поведения такой среды. Это объясняется наличием уникальных свойств порошковых материалов и, как следствие, больших трудностей в создании общей теории.

Известно, что вязкое движение плотным слоем может быть описано двумя режимами течения. При малых скоростях динамика такой среды может быть объяснена «теорией предельного равновесия» [14], в которой не учитываются сдвиговые деформации. В другом, «инерционном режиме течения», для описания которого используется термин «быстрое движение гранулированных сред» [8], имеет место течение, аналогичное движению вязкой жидкости. В этом случае в рассматриваемой среде появляются внутренние напряжения, зависящие от тензора скоростей деформаций. Опытные исследования доказывают, что движение среды характеризуется неньютоновским характером течения, причем ее поведение подобно поведению дилатантной жидкости. Поэтому при моделировании напряжений трения в рассматриваемой среде используется известная модель «степенной жидкости» [8, 15].

В настоящей работе рассматривается установившееся осесимметричное течение в рабочем элементе ПЦА, а также исследуются возможности дополнительной интенсификации технологических процессов с помощью введенных кольцевых дисков внутри рабочей камеры, схематически показанных на рис. 1, *b c*, причем анализируется также альтернативный случай вращения дискового элемента (см. рис. 1, *b*) для интенсивного смешения зернистой среды.

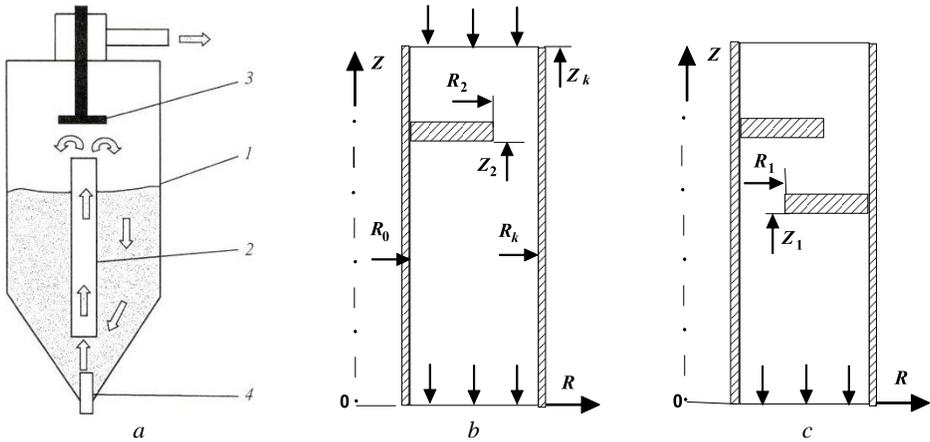


Рис. 1. Схема пневматического циркуляционного аппарата (*a*) и рабочей камеры (*b, c*):
 1 – цилиндрический корпус, 2 – транспортная труба, 3 – отбойник,
 4 – эжекционное устройство

Fig. 1. Design of the (*a*) pneumatic circulation apparatus and (*b*), (*c*) working chamber:
 (1) cylindrical body, (2) conveying pipe, (3) bump stop, and (4) ejection device

На входе в исследуемую область сверху поступает смесь гранул с постоянной скоростью U_0 и температурой T_0 и некоторой массовой концентрацией ключевого компонента ε_0 . При постановке задачи считается, что среда состоит из твердых частиц, контактирующих друг с другом, при этом объем отдельной частицы мал по сравнению с объемом аппарата. Известно [8], что рассматриваемую среду

можно считать вязкой, несжимаемой и движущейся в «инерционном режиме течения», для которого выполняется модель «быстрого движения гранулированных сред», причем тензор напряжения в соответствии с вышесказанным определяется на основе известного «степенного закона» [15]:

$$\sigma_{i,j} = \mu^n I_2^{(n-1)/2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right), \quad (1)$$

где I_2 – второй инвариант, который в цилиндрической системе координат в условиях осевой симметрии относительно окружной координаты и в безразмерном виде можно описать формулой

$$A = \frac{I_2 H^2}{U_0^2} = 2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right)^2. \quad (2)$$

Здесь безразмерные значения скоростей и координат получены с помощью масштабов скорости U_0 и длины $H = (R_k - R_0)$, где U_0 – среднее значение вертикальной составляющей скорости на входе в бункер, а R_k и R_0 – внешний и внутренний радиусы соответственно исследуемой коаксиальной области аппарата.

Система безразмерных уравнений неразрывности, количества движения, теплоты и массовой концентрации ключевого компонента смеси имеют вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r}{\partial \tau} + \frac{\partial u_r^2}{\partial r} + \frac{\partial (u_r u_z)}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{u_r^2}{r} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(b \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(b \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{b}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial b}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{b u_r}{r^2} \right]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial u_r u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial u_z u_\varphi}{\partial z} + \frac{2 u_r u_\varphi}{r} = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(b \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(b \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) + \frac{b}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial b}{\partial r} - \frac{b u_\varphi}{r^2} \right]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_z}{\partial \tau} + \frac{\partial (u_r u_z)}{\partial r} + \frac{\partial u_z^2}{\partial z} + \frac{u_r u_z}{r} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(b \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(b \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{b}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial b}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial u_r \theta}{\partial r} + \frac{\partial u_z \theta}{\partial z} + \frac{\theta u_r}{r} = \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right); \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial (\varepsilon u_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\varepsilon u_z)}{\partial z} + \frac{\varepsilon u_r}{r} = \frac{1}{\text{Pe}_d} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right), \quad (8)$$

где Re – обобщенное число Рейнольдса, Re и Re_d – тепловое и диффузионное числа Пекле соответственно:

$$\tau = \frac{tU_0}{H}; \quad Re = \frac{\rho H^n U_0^{2-n}}{\mu^n}; \quad Pe = \frac{HU_0}{a}; \quad Pe_d = \frac{HU_0}{D}.$$

Здесь также θ – безразмерная температура, которая имеет вид: $\theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ в случае задания температуры T_1 на кольцевых дисках и $\theta = \lambda(T - T_0)/(qH)$ при задании плотности теплового потока q там же, причем λ , D и a – эффективные коэффициенты теплопроводности, диффузии и температуропроводности соответственно; ε – массовая относительная концентрация ключевого компонента смеси. В практических расчетах вместо второго инварианта используют коэффициент интенсивности скоростей деформаций, равный $A^{1/2}$. Таким образом, безразмерный коэффициент b определяется зависимостью $b = A^{(n-1)/2}$.

Метод численного решения

Векторное уравнение переноса импульса представим в безразмерном виде:

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n}{\Delta t} + \mathbf{K} - \mathbf{D} = -\nabla p^n - \nabla(\delta p), \quad (9)$$

где \mathbf{K} и \mathbf{D} – слагаемые, отвечающие за конвективно-диффузионный перенос количества движения, δp определяет поправку к давлению на новом временном слое. В результате временного разделения поля скорости и давления соотношение (9) примет вид:

$$\frac{\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^n}{\Delta t} + \mathbf{K} - \mathbf{D} = -\nabla p^n; \quad (10)$$

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^+}{\Delta t} = -\nabla(\delta p), \quad (11)$$

где \mathbf{V}^+ – промежуточное сеточное значение вектора скорости. После скалярного умножения уравнения (11) на градиент с учетом выполнения уравнения неразрывности на новом временном слое получим соотношение для определения поправки к давлению, которое записано в нестационарном виде:

$$\frac{\partial(\delta p)}{\partial t} - \nabla^2(\delta p) = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{V}^+}{\Delta t}. \quad (12)$$

После решения системы уравнений (10) определялась скорость \mathbf{V}^+ , далее из уравнения (12) находился градиент давления $\nabla(\delta p)$ и, следовательно, ∇p^{n+1} . Из зависимости (11) определялись составляющие вектора скорости на новом временном слое:

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^+ - \Delta t \nabla(\delta p).$$

Решение полученной системы уравнений осуществляется методом установления по времени. Для решения уравнений переноса использовалась неявная обобщенная схемы чередующихся направлений в Δ -форме [16]. Для записи конвективно-диффузионных слагаемых использовалась экспоненциальная схема [17] на разнесенных сетках с применением метода контрольного объема. Для получения более точного коэффициента кажущейся вязкости b дополнительно определялись значения радиальной скорости в разностных точках сетки для осевой скорости и, наоборот, для горизонтальной составляющей скорости, а также коэффициент вязкости b определялся как в центре разностной ячейки, так и в узловых точках сетки.

Граничные условия

На входе в рассматриваемую область задавались следующие условия для безразмерных значений скорости: $u_z = -1$, $u_\varphi = 0$, $\partial u_r / \partial z = 0$. Для температуры использовалось условие $\theta = 0$, а для ключевого компонента применялось постоянное значение ϵ_0 в центральной области входного сечения.

В выходном сечении ставились условия Неймана для всех составляющих вектора скорости, температуры и ключевого компонента смеси.

На твердых стенках для составляющих вектора скорости использовались следующие условия. Нормальные значения скорости u_n на стенках принимались равными нулю, а для касательных к поверхности стенки скоростей u_t использовались условия частичного скольжения [9]:

$$-\frac{\partial u_t}{\partial n} = \beta u_t; \quad u_n = 0. \quad (13)$$

Здесь формула (13) записана в безразмерной форме с помощью ранее введенных масштабов длины и скорости, причем безразмерный коэффициент скольжения среды на стенке β с учетом масштаба длины имеет вид:

$$\beta = \gamma H,$$

где γ (1/м) – размерный коэффициент скольжения среды на стенке. Для температуры на стенках аппарата, за исключением кольцевых дисков, задавались условия тепловой изоляции – $\partial\theta/\partial n = 0$. Для задания температуры на кольцевых дисках использовалось два условия. В первом случае принималось условие для температуры $\theta = 1$, причем для этого случая безразмерная температура определялась формулой $\theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$. Во втором – задавалась постоянная плотность теплового потока q , т.е. для вводимой в этом случае безразмерной температуры $\theta = \lambda(T - T_0)/(qH)$ использовалось граничное условие в виде: $\partial\theta/\partial n = 1$. Для массовой концентрации ϵ на всех твердых поверхностях использовалось условие Неймана $\partial\epsilon/\partial n = 0$.

Интенсивность скоростей деформаций на границах определялась по значениям производных в соответствии с формулой (2), используя при этом дополнительные вычисления скоростей и кажущейся вязкости, указанные в методе численного расчета.

Анализ численных результатов

Справедливость проведенного численного моделирования динамики плотного слоя зернистой среды в рабочей зоне ПЦА подтверждается путем сравнения с аналитическими решениями и опытными данными. Так, на рис. 2 представлено рассчитанное распределение осевой скорости в круглой кольцевой трубе при различном отношении радиусов стенок внешнего и внутреннего канала для установившегося режима течения ньютоновской среды ($n = 1$) в сопоставлении с известной аналитической зависимостью [18]:

$$\frac{u_z}{u_{z,s}} = 2 \frac{(r_k^2 - r^2) \ln \frac{r_0}{r_k} - (r_k^2 - r_0^2) \ln \frac{r}{r_k}}{r_k^2 - r_0^2 + (r_k^2 + r_0^2) \ln \frac{r_0}{r_k}}. \quad (14)$$

Здесь $u_{z,s}$ – среднее значение осевой скорости по сечению, причем на данном графике расчет представлен сплошными кривыми, а точки соответствуют формуле (14).

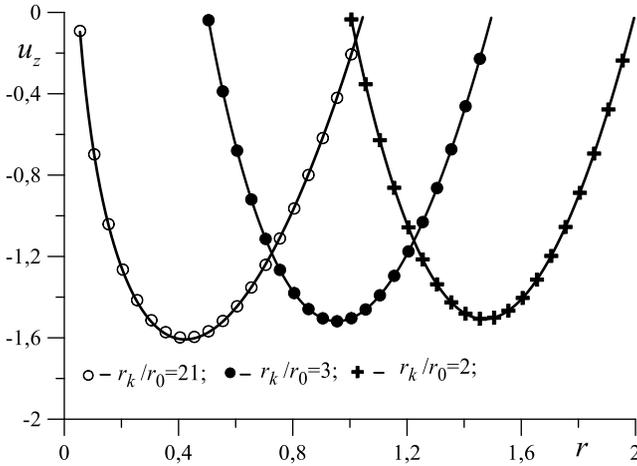


Рис. 2. Сравнение расчета с данными формулы (14) в кольцевом круглом канале для случая ньютоновской среды

Fig. 2. Comparison of the calculation with the data obtained by formula (14) in a circular annular channel for a Newtonian medium

Проверка правильности численных расчетов в рамках модели «степенной жидкости» (1) проводилась для динамики дилатантной и псевдопластичной жидкостей в круглой трубе и плоском канале в сопоставлении с аналитическими зависимостями для этих установившихся течений. Следует отметить, что при рассмотрении движения гранулированных сред в вертикальных каналах имеет место скольжение среды на стенках. Поэтому было получено аналитическое решение для установившегося течения неньютоновской среды «степенной жидкости» с учетом скольжения (13), которое для круглой трубы имеет следующий вид:

$$\frac{u_z}{u_{z,s}} = \frac{1 - \left(\frac{r}{r_k}\right)^{(n+1)/n} + \frac{n+1}{n\beta}}{\frac{n+1}{3n+1} + \frac{n+1}{n\beta}}. \quad (15)$$

Формула (15) при $\beta \rightarrow \infty$ переходит в зависимость, с условиями прилипания жидкости на стенке, которая имеет вид:

$$\frac{u_z}{u_{z,s}} = \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{r}{r_k}\right)^{(n+1)/n} \right].$$

Последняя формула полностью совпадает с известным аналитическим решением для установившегося течения степенной жидкости в круглой трубе [19].

На рис. 3 представлены результаты сравнения численного решения (сплошные кривые) с данными (значки) формулы (15) для псевдопластичной (см. рис. 3, а) и дилатантной среды (см. рис. 3, б) при различных значениях безразмерного коэффициента скольжения $\beta = \gamma H$ и при условии прилипания жидкости к стенке ($\beta \rightarrow \infty$).

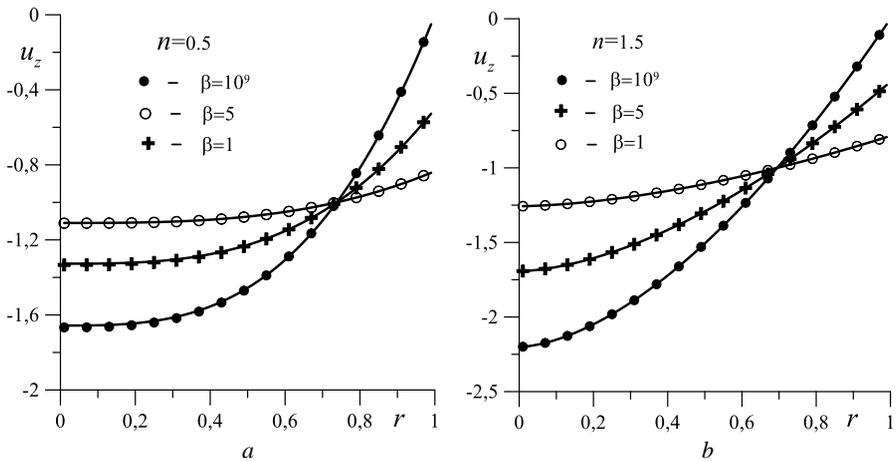


Рис. 3. Сравнение расчетов с данными формулы (15) для неньютоновского течения с учетом частичного скольжения среды на стенках
Fig. 3. Comparison of calculations with the data obtained by formula (15) for a non-Newtonian fluid flow with a partial slip condition on the walls

Аналогичное тестовое исследование было проведено для установившегося течения неньютоновской среды для плоского течения в канале. В частности, была получена формула, обобщающая известное аналитическое решение задачи об установившемся течении в половине плоского канала для модели «степенной жидкости» с учетом скольжения неньютоновской среды (13):

$$\frac{u_z}{u_{z,s}} = \frac{\frac{n}{(n+1)} \left[1 - \left(\frac{r}{r_k} \right)^{(n+1)/n} \right] + \frac{1}{\beta}}{\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{\beta}}. \quad (16)$$

Формула (16) при условии $\beta \rightarrow \infty$ переходит в известную аналитическую зависимость [19], которая получается при применении условий прилипания жидкости на стенке:

$$\frac{u_z}{u_{z,s}} = \frac{2n+1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{r}{r_k} \right)^{(n+1)/n} \right].$$

Здесь следует отметить, что значение r_k составляет половину сечения плоского канала, а начало координаты r находится в середине плоского канала.

На рис. 4 представлено аналогичное рис. 3 сравнение численного решения с аналитической формулой (16).

Справедливость предложенной физико-математической модели устанавливалась путем сравнения численных результатов с экспериментальными данными [12] по установившемуся течению плотного слоя гранулированной среды в вертикально расположенном плоском канале. Численные исследования при сопоставлении опытных данных с расчетом показали отсутствие совпадения в случае прилипания среды на стенках при любом реологическом параметре n . Однако при граничном условии частичного скольжения среды на стенках канала удается получить удовле-

творительное согласование теории и опыта. Так, на рис. 5 представлено такое сравнение при параметре нелинейности $n = 1.3$ и коэффициенте скольжения $\beta = 20$.

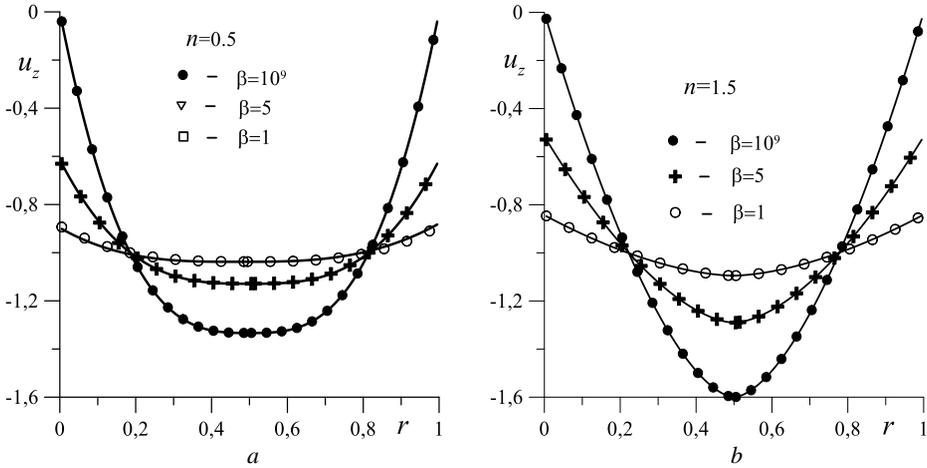


Рис. 4. Сравнение расчета с данными формулы (16) для установившегося течения неньютоновской среды в плоском канале

Fig. 4. Comparison of the calculation with the data obtained by formula (16) for a steady flow of a non-Newtonian medium in a flat channel

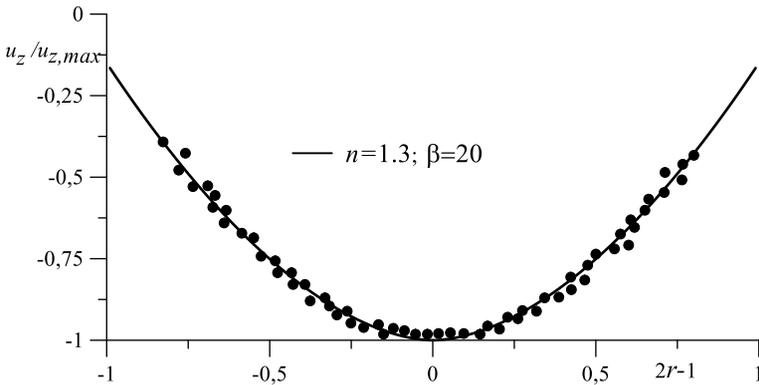


Рис. 5. Сопоставление численных и опытных данных [12] для течения высококонцентрированной гранулированной среды в плоском канале

Fig. 5. Comparison of numerical and experimental data [12] for the highly concentrated granular medium flow in a flat channel

Представленная математическая модель позволяет рассматривать практические задачи, касающиеся процессов смешения, усреднения и сушки гранулированных сред. Так, процесс усреднения зернистой среды в ПЦС рассматривался на основе системы уравнений (2)–(8), в которой непосредственный процесс смешения гранул основывался на конвективном и диффузионном механизме уравнения (8). Предполагалось, что основной и ключевой компоненты смеси имели одинаковые физические свойства, но отличались лишь цветом, причем значение ключевого компонента на входе в исследуемую область принималось за единицу, а основно-

го – за ноль. Кроме того, расчеты показали, что во входном сечении необходимо вводить ключевой компонент смеси в центральной зоне для более эффективного процесса смешения.

На практике результаты процесса смешения определяются расчетом коэффициента неоднородности K после завершения процесса смешения. Сам коэффициент неоднородности определяется, как правило, среднеквадратичным значением разности между локальной концентрацией и средней по всему объему смеси. С точки зрения моделирования процесса смешения наиболее интересным является определение коэффициента неоднородности $K(z)$ в каждом сечении по высоте аппарата, так как это позволяет исследовать процесс смешения в каждой локальной области, что открывает перспективы к совершенствованию конструкции рабочего элемента аппарата. Кроме того, такой график $K(z)$ позволяет определять процесс перемешивания ключевого и основного компонентов в процессе динамики смеси в аппарате. Значение коэффициента неоднородности $K(z)$ в некотором кольцевом сечении Δz аппарата можно рассчитать по следующей формуле:

$$K(z) = \frac{\int_{r_a}^{r_b} |(\varepsilon - \varepsilon_s)| u_z r dr}{\int_{r_a}^{r_b} u_z r dr}.$$

Здесь ε_s – среднее значение концентрации ключевого компонента ε в данном горизонтальном сечении между радиусами стенок от $r = r_a$ до $r = r_b$, где ε_s имеет вид:

$$\varepsilon_s = \frac{\int_{r_a}^{r_b} \varepsilon u_z r dr}{\int_{r_a}^{r_b} u_z r dr}.$$

На рис. 6. представлено изменение коэффициента неоднородности $K(z)/K_0$ по высоте аппарата, причем здесь значение K_0 соответствует значению коэффициента неоднородности во входном сечении.

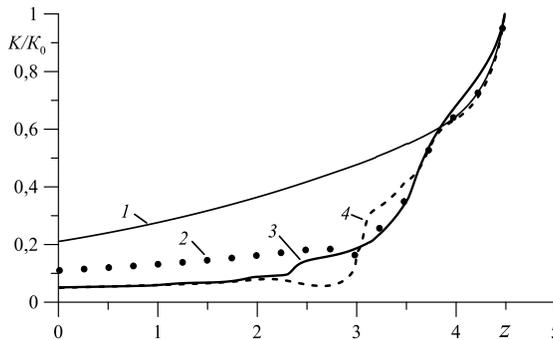


Рис. 6. Распределение коэффициента неоднородности по высоте исследуемой области при разном количестве полок в аппарате при параметрах $n = 1.3$; $\beta = 20$; $Re = 10$; $Pe_d = 120$

Fig. 6. Distribution of the heterogeneity coefficient along the height of the area under study with at different number of shelves in the apparatus with parameters $n = 1.3$; $\beta = 20$; $Re = 10$; $Pe_d = 120$

На этом графике кривая 1 соответствует случаю отсутствия кольцевых дисков в аппарате, кривая 2 – наличию одного диска, кривая 3 – двух дисков. Кривая 4 соответствует присутствию одного дискового кольца с учетом его вращения в исследуемой области. Для всех режимов течения концентрация ключевого компонента во входном сечении была равной $\varepsilon_0 = 1/3$. Распределение изолиний концентрации в исследуемой области для рассмотренных первых трех случаев показано на рис. 7.

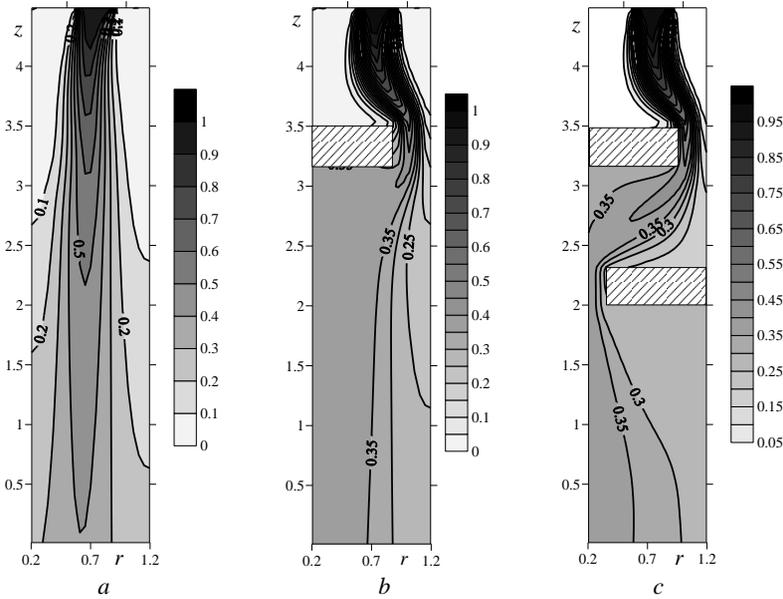


Рис. 7. Распределение изолиний концентрации ключевого компонента:
a – при отсутствии полок, *b*, *c* – в их присутствии
Fig. 7. Distribution of isoconcentration contours for the key component:
(a) without shelves, *(b)* and *(c)* with shelves

На рис. 8 показано распределение изолиний концентрации и изолиний окружающей составляющей скорости при наличии одного диска с учетом его вращения. Влияние вращения определяется обратным критерием Россби ($Rw=15$), где $Rw=\omega H/U_0$, и ω – угловая скорость вращения дискового элемента. Для этого случая характер поведения коэффициента неоднородности определяется кривой 4 на рис. 6. Немонотонный характер поведения коэффициентов неоднородности объясняется поведением модуля разности средней и локальной концентрации, а также резким изменением формы полок. Расчеты показывают, что, по-видимому, нецелесообразно при смешении использовать вращение полок, так как установкой нужного количества полок за счет сил гравитации удастся увеличить конвективное перемешивание смеси и добиться того же эффекта смешения и, при этом, не используя дополнительной энергии на вращение.

На рис. 9, *a* представлено температурное поле гранулированной смеси, нагревание которой в аппарате осуществляется за счет нагрева полок с постоянной плотностью теплового потока. Эффективное число Пекле ($Pe = 60$) [20].

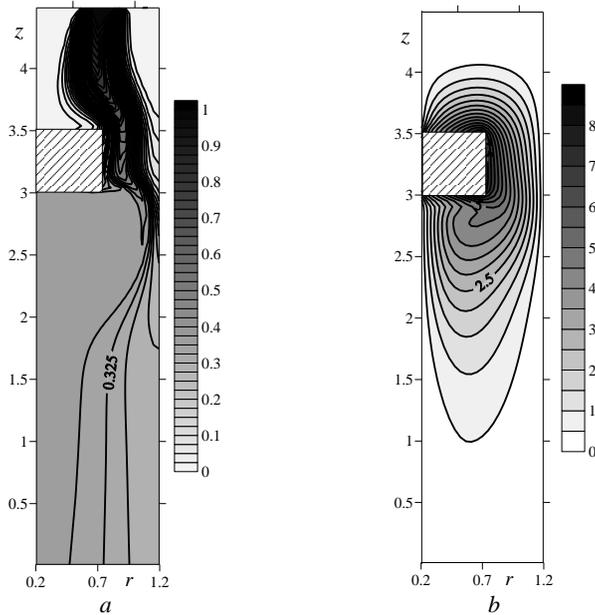


Рис. 8. Распределение изолиний концентрации (а) и окружной составляющей скорости (b) при параметрах $Re = 10$; $Rw = 15$; $n = 1.3$; $\beta = 20$; $Pe_d = 120$

Fig. 8. Distributions of (a) isoconcentration contours and (b) circumferential velocity component with parameters $Re = 10$; $Rw = 15$; $n = 1.3$; $\beta = 20$; $Pe_d = 120$

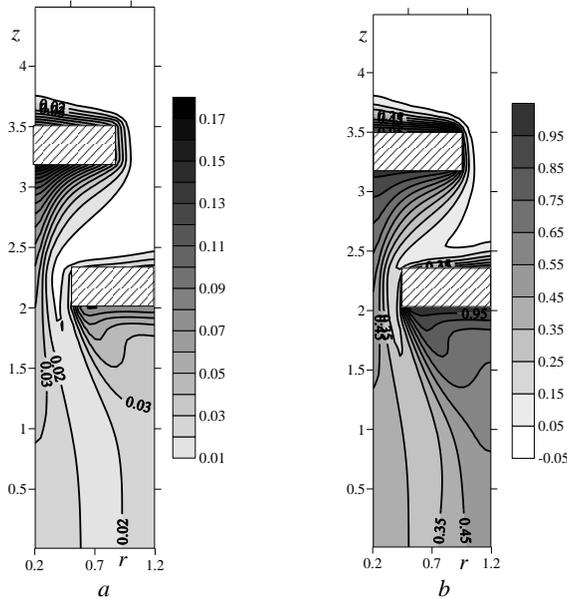


Рис. 9. Распределение изотерм в рассматриваемой области при параметрах $Re = 10$; $Pe = 60$; $n = 1.3$; $\beta = 20$; $a - q = \text{const}$ на полках; $b - \text{постоянная температура на полках}$

Fig. 9. Distribution of isotherms in the region under consideration with parameters $Re = 10$; $Pe = 60$; $n = 1.3$; $\beta = 20$ at: (a) $q = \text{const}$ on the shelves and (b) constant temperature on the shelves

Для случая постоянной температуры полок ($\theta = 1$), которая выше температуры смеси во входном сечении ($\theta = 0$), на рис. 9, *b* показано распределение температурного поля смеси при том же числе Пекле. Для получения более однородного поля температур, по-видимому, необходимо использовать большее число нагревательных устройств и с различной плотностью теплового потока.

Заключение

В работе представлена математическая модель динамики движения высококонцентрированной гранулированной среды в рабочей зоне ПЩА. Полученные результаты наглядно демонстрируют важность эффекта частичного скольжения плотного слоя зернистой среды на стенках, учет которого позволяет согласовывать опытные и расчетные данные. Справедливость численного применения скольжения среды на стенках для неньютоновской жидкости подтверждается аналитическими зависимостями, полученными авторами.

На основе рассмотренной гидродинамики проведен анализ особенностей температурного поля гранулированной среды при нагреве полок, а также исследован процесс усреднения гранулированной среды. Представлена методика анализа процесса смешения в каждой локальной области аппарата на основе определения коэффициента неоднородности. Предложенный теоретический подход для исследования процессов переноса количества движения, теплоты и вещества высококонцентрированной гранулированной среды имеет перспективы его применения в области химической технологии.

Список источников

1. *Касаткин А.Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии. М. : Химия, 2004. 750 с.
2. *Кафаров В.В., Дорохов И.Н.* Системный анализ процессов химической технологии. М. : Наука, 1976. 499 с.
3. *Муштаев В.И., Ульянов В.М.* Сушка дисперсных материалов. М. : Химия, 1988. 352 с.
4. *Макаров Ю.И.* Аппараты для смешения сыпучих материалов. М. : Машиностроение, 1973. 215 с.
5. *Матур К., Эпстайн Н.* Фонтанирующий слой : пер. с англ. Л. : Химия, 1978. 288 с.
6. *Росляк А.Т., Бирюков Ю.А., Пачин В.Н.* Пневматические методы и аппараты порошковой технологии. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1990. 272 с.
7. Авторское свидетельство СССР №770520 Пневматический смеситель / В.А. Шваб, Ю.А. Бирюков, Л.Н. Богданов. [Б.и.], 1980. № 38.
8. *Ширко И.В.* Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений. М. : Мир, 1985. 280 с.
9. *Шваб А.В., Марценко А.А.* Динамика плотного слоя гранулированной среды в пневматическом циркуляционном аппарате // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 4. С. 115–122.
10. *Неодерман Р., Девис С., Хортон Д.* Течение гранулированных материалов вокруг препятствий // Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений. М. : Мир, 1985. С. 228–241.
11. *Гениев Г.А.* Вопросы динамики сыпучей среды. М. : Госстройиздат, 1958. 122 с.
12. *Savage S.B.* Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels // J. Fluid Mech. 1979. V. 92, pt. 1. P. 53–96.

13. Шваб А.В., Марценко М.С., Рыжих Ю.Н. Моделирование гидродинамики и процесса усреднения высококонцентрированной гранулированной среды в аппаратах порошковой технологии. // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84, № 4. С. 676–681.
14. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М. : Физматгиз, 1960. 243 с.
15. Шульман З.П. Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей. М. : Энергия, 1975. 351 с.
16. Пейре Р. Тейлор Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л. : Гидрометеоиздат, 1986. 352 с.
17. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М. : Энергоатомиздат, 1984. 149 с.
18. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М. : Энергия, 1967. 412 с.
19. Берд Р., Стюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М. : Химия, 1974. 688 с.
20. Горбис З.Р. Теплообмен и гидромеханика дисперсных сквозных потоков. М. : Энергия. 1970. 424 с.

References

1. Kasatkin A.G. (2004) *Osnovnye protsessy i aparaty khimicheskoy tekhnologii* [Basic processes and apparatuses of chemical technology]. Moscow: Khimiya.
2. Kafarov V.V., Dorokhov I.N. (1976) *Sistemnyy analiz protsessov khimicheskoy tekhnologii* [System analysis of chemical technology processes]. Moscow: Nauka.
3. Mushtaev V.I., Ul'yanov V.M. (1988) *Sushka dispersnykh materialov* [Drying of dispersed materials]. Moscow: Khimiya.
4. Makarov Yu.I. (1973) *Apparaty dlya smesheniya sypuvnykh materialov* [Devices for mixing bulk materials]. Moscow: Mashinostroenie.
5. Mathur K., Epstein N. (1974) *Spouted Beds*. New York: Academic Press.
6. Roslyak A.T., Biryukov Yu.A., Pachin V.N. (1990) *Pnevmaticheskie metody i aparaty poroshkovoy tekhnologii* [Pneumatic methods and powder technology devices]. Tomsk: Izdatel'stvo TGU.
7. Shvab V.A., Biryukov Yu.A., Bogdanov L.N. (1980) *Pnevmaticheskii smesitel'* [Pneumatic mixer]. The copyright certificate of the USSR 770520.
8. Shirko I.V. (1985) *Mekhanika granulirovannykh sred. Teoriya bystrykh dvizheniy* [Mechanics of granular media. Theory of fast motions]. Moscow: Mir.
9. Shvab A.V., Martsenko A.A. (2016) Dinamika plotnogo sloya granulirovannoy sredy v pnevmaticheskom tsirkulyatsionnom apparate [The dynamics of a dense layer of granular medium in the circulating pneumatic apparatus]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 42. pp. 115–122. doi: 10.17223/19988621/42/10
10. Nedderman R., Davis S., Horton D. (1985) Techenie granulirovannykh materialov vokrug prepyatstviya [Flow of granular materials around obstacles]. In: *Mekhanika granulirovannykh sred. Teoriya bystrykh dvizheniy* [Mechanics of granular media. Theory of fast motions]. Moscow: Mir. pp. 228–241.
11. Geniev G.A. (1958) *Voprosy dinamiki sypuvnykh sredy* [Issues of the dynamics of loose media]. Moscow: Gosstroyizdat.
12. Savage S.B. (1979) Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels. *Journal Fluid Mechanics*. 92(1). pp. 53–96. doi: 10.1017/S0022112079000525
13. Shvab A.V., Martsenko M.S., Ryzhikh Yu.N. (2011) Modeling of hydrodynamics and the averaging process of a highly concentrated granular medium in powder technology apparatuses. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 84. pp. 730–735. doi: 10.1007/s10891-011-0528-2
14. Sokolovskiy V.V. (1960) *Statika sypuvnykh sredy* [Statics of loose media]. Moscow: Fizmatgiz.

15. Shul'man Z.P. (1975) *Konvektivnyy teplomassoperenos reologicheskii slozhnykh zhidkostey* [Convective heat and mass transfer of rheologically complex liquids]. Moscow: Energiya.
16. Peire R., Taylor T.D. (1983) *Computational Methods for Fluid Flow*. New York: Springer-Verlag.
17. Patankar S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
18. Petukhov B.S. (1967) *Teploobmen i soprotivlenie pri laminarnom techenii zhidkosti v trubakh* [Heat transfer and resistance during the laminar fluid flow in pipes]. Moscow: Energiya.
19. Byrd R., Stewart V., Lightfoot E. (1974) *Yavlenie perenosa* [Transfer phenomena]. Moscow: Khimiya.
20. Gorbis Z.R. (1970) *Teploobmen i gidromekhanika dispersnykh skvoznykh potokov* [Heat transfer and hydromechanics of dispersed through flows]. Moscow: Energiya.

Сведения об авторах:

Шваб Александр Вениаминович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: avshvab@inbox.ru

Мусин Сергей Валерьевич – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: mmnt98@mail.ru

Information about the authors:

Shvab Aleksandr V. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: avshvab@inbox.ru

Musin Sergey V. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mmnt98@mail.ru

Статья поступила в редакцию 05.07.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 05.07.2023; accepted for publication 10.04.2024

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ**MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES**

Научная статья

УДК 51(092)

doi: 10.17223/19988621/87/14

**Андрей Ростиславович Чехлов
(к 65-летию со дня рождения)**

Андрей Ростиславович Чехлов родился 26 сентября 1958 г. в г. Новосибирске. Отец, Чехлов Ростислав Васильевич (1925–1978), и мать, Декабрина Константиновна (девичья фамилия Холкина, 1932–2022), были инженерами. Они привили сыну уважение к науке и к ученым.

Школьные годы Андрея Ростиславовича Чехлова прошли увлеченно: любовь к физике и математике привела его к учебе в заочной физико-математической школе при МФТИ. После окончания средней школы в 1976 г. Андрей Ростиславович поступает на механико-математический факультет Томского государственного университета, где он сразу активно включается в научно-исследовательскую работу, пробует себя в решении трудных задач по изучаемым дисциплинам, по-

сещает кафедральные научные семинары, выступает с интересными докладами на студенческих научных конференциях и даже принимает участие во Всесоюзной научной студенческой олимпиаде по математике в Новосибирске. Пытливый ум и способности к математике не остаются незамеченными: Андрей Ростиславович награждается ЦК ВЛКСМ и МВиССО значком «За отличную учебу» (в 1977, 1978 и 1979 гг.).

В 1981 г. А.Р. Чехлов оканчивает университет по специальности «Математика» с отличием, защитив дипломную работу «Абелевы группы с заданными свойствами сумм и пересечений своих подгрупп» (научный руководитель – профессор С.Я. Гриншпон) и получает квалификацию «математик».

В 1981 г. Андрей Ростиславович поступает в аспирантуру кафедры алгебры Томского госуниверситета. Научным руководителем подающего большие надежды молодого математика становится кандидат физико-математических наук, доцент, впоследствии профессор, основатель томской научной школы по абелевым группам Исаак Хаимович Беккер. В 1985 г. в диссертационном совете при Институте математики с Вычислительным центром Академии наук Молдавской ССР А.Р. Чехлов защищает диссертацию «Абелевы группы без кручения, близкие к квазисервантно инъективным» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук; официальные оппоненты – доктор физико-математических наук, профессор А.Ю. Ольшанский, кандидат физико-математических наук, доцент А.М. Иванов.

После защиты кандидатской диссертации А.Р. Чехлов начинает работать на кафедре высшей математики ТИАСУРа (ныне Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники), вливается в дружный и высококвалифицированный коллектив кафедры, в котором во все времена было принято уделять большое внимание методической работе и совершенствованию методики преподавания высшей математики. Так, традициями были взаимопосещаемость занятий, передача педагогического опыта, методическая помощь молодым преподавателям, и Андрей Ростиславович раскрывается не только как математик, но и как любящий свою работу преподаватель. В 1995 г. он председательствует в предметной комиссии ТИАСУРа по математике. В том же году высшей аттестационной комиссией Андрею Ростиславовичу присваивается ученое звание доцента по кафедре высшей математики. Он читает лекции и ведет практические занятия по курсу высшей математики, набираясь педагогического опыта и запоминая студентам опытным, внимательным и мудрым преподавателем, который всегда разъяснит, поддержит, натолкнет, подскажет, подбодрит и вселит уверенность в своих силах. А.Р. Чехлов навсегда остался благодарным всему коллективу кафедры, ее заведующему, профессору Л.И. Магазинникову, а также заслуженным деятелям науки и техники РФ – ректору ТИАСУРа профессору И.Н. Пустынскому и проректору по учебной работе профессору В.П. Обруснику.

С 1997 г. Андрей Ростиславович работает в Томском университете в должности доцента. В 2003 г. в диссертационном совете при Красноярском государственном университете он защищает диссертацию «Абелевы группы с большим числом эндоморфизмов» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук (официальные оппоненты – доктора физико-математических наук, профессора С.Ф. Кожухов, А.А. Фомин и Б.В. Яковлев) и переходит на должность профессора кафедры алгебры механико-математического факультета.

А.Р. Чехлов относится к числу ведущих ученых и преподавателей механико-математического факультета ТГУ, он проявил себя как высокопрофессиональный специалист и опытный педагог в области математики. Его многолетняя научная и педагогическая деятельность отражена в журнальных научных статьях, количество которых перевалило за шестьдесят, а также пяти учебно-методических пособиях, изданных в Томске (ТГУ, 2004, 2008) и в Москве (одно в издательстве «Факториал Пресс», 2007; два в издательстве «Флинта», оба в 2012 г.). Юбилеяр много лет читает общие курсы «Алгебра», «Теория чисел», несколько спецкурсов. В 2018–2022 учебных годах читал общий курс «Теория чисел» для студентов специальности «Компьютерная безопасность» Института прикладной математики и компьютерных наук ТГУ. Андрей Ростиславович Чехлов является ведущим научным сотрудником Регионального научно-образовательного математического центра ТГУ.

Область научных интересов А.Р. Чехлова – теория абелевых групп и модулей. Он является известным специалистом в этих важных разделах алгебры. В частности, Андрей Ростиславович занимался изучением большого раздела теории абелевых групп, который условно можно назвать «группы, богатые эндоморфизмами»: рассматривал квазичисто инъективные группы, вполне транзитивные и транзитивные группы и их обобщения. Ввел и исследовал новый класс групп – cs -группы (в них все замкнутые чистые подгруппы являются прямыми слагаемыми). Охарактеризовал вполне транзитивные группы без кручения, все ненулевые эндоморфизмы которых суть мономорфизмы. Построил пример счетной транзитивной, не вполне транзитивной группы без кручения без ненулевых элементов максимального типа, – группы с такими свойствами ранее были неизвестны. Описал слабо транзитивные группы в одном широком классе групп. Получил структурное описание квазичисто инъективных групп без кручения, что внесло существенный вклад в решение проблемы 17а) известного американского алгебраиста Л. Фука.

А.Р. Чехловым было доказано, что разложимые однородные слабо квазичисто инъективные группы являются квазичисто инъективными, а также что алгебраически компактные группы – это в точности группы, выделяющиеся прямыми слагаемыми в каждой группе, содержащей их в качестве замкнутых сервантных подгрупп. Это новая характеристика алгебраически компактных групп. Изучались также абелевы группы и модули с различными ограничениями на коммутаторы их эндоморфизмов (новое направление в теории абелевых групп и модулей). Андреем Ростиславовичем введены понятия эндоморфного и проективного коммутанта и центра (в дальнейшем изучены строение и свойства этих подмодулей), эндоморфно разрешимых, нильпотентных и энгелевых модулей. Попутно в ходе исследования были даны понятия коммутаторно- и коммутаторно-проективно инвариантных подмодулей, исследовались строение и свойства этих подмодулей.

Андрей Ростиславович сотрудничает как с отечественными математиками, так и иностранными: ряд работ, опубликованных в высокорейтинговых иностранных журналах, выполнен им вместе с болгарским профессором П.В. Данчевым (Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences), американским профессором П. Кифом (Department of Mathematics, Whitman College, Walla Walla, USA), румынскими профессорами Г. Кэлузэрянэ и С. Брязом

(Department of Mathematics, Babes-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania), ирландским профессором Б. Голдсмитом (Technological University Dublin City Campus, Ireland). Вместе с соавторами занимался различными вопросами, связанными с вполне инвариантными, характеристическими, вполне и характеристически инертными подгруппами абелевых групп, изучал цокольно регулярные p -группы, различные обобщения вполне транзитивных, транзитивных и транзитивных по Крылову групп, бассовы и хопфовы группы и их обобщения.

Под руководством Андрея Ростиславовича защищена одна кандидатская диссертация. С 2001 г. юбиляр является членом диссертационного совета по физико-математическим наукам при Томском государственном университете.

А.Р. Чехлов принимал участие в работе и выступал с докладами на многих международных, всесоюзных и всероссийских научных конференциях и симпозиумах. В их числе: XVII и XVIII Всесоюзные алгебраические конференции (Минск, 1983; Кишинев, 1985); Научно-исследовательский семинар по теории колец и модулей (Москва, 1984); Алгебраический семинар МГПИ им. В.И. Ленина (Москва, 1984); IX Всесоюзный симпозиум по теории групп (Москва, 1984); IV Международная алгебраическая конференция (Новосибирск, 2000); Международная конференция «Алгебра и логика. Теория и приложения» (Красноярск, 2002, 2007, 2010); ежегодная Международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск).

В 2003 г. А.Р. Чехлов был награжден медалью «За заслуги перед Томским государственным университетом», а в 2008 г. ему присвоено звание «Почетный работник высшего профессионального образования РФ».

Андрей Ростиславович – квалифицированный и талантливый математик, а в повседневной жизни – скромный и трудолюбивый человек. Отличительная его черта – объективное и уважительное отношение к студентам и коллегам. А еще он влюблен в работу с землей и на земле – умелый садовод и огородник.

Редакционная коллегия журнала «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика», сотрудники механико-математического факультета, авторы заметки искренне поздравляют Андрея Ростиславовича с юбилеем, желают ему крепкого здоровья, семейного благополучия, творческого долголетия, новых замечательных статей и теорем.

Избранные работы А.Р. Чехлова

- Чехлов А.Р. О некоторых классах абелевых групп без кручения, близких к квазисервантно инъективным // Известия вузов. Математика. 1985. № 8.
- Чехлов А.Р. О квазисервантно инъективных абелевых группах без кручения // Известия вузов. Математика. 1988. № 6.
- Чехлов А.Р. Связные квазисервантно инъективные абелевы группы // Известия вузов. Математика. 1989. № 10.
- Чехлов А.Р. Об абелевых CS-группах без кручения // Известия вузов. Математика. 1990. № 3.
- Чехлов А.Р. О прямых произведениях и прямых суммах абелевых QCPI-групп без кручения // Известия вузов. Математика. 1990. № 4.
- Чехлов А.Р. Квазисервантно инъективные группы без кручения с неразложимыми сервантными подгруппами // Математические заметки. 2000. Т. 68, № 4.

- Чехлов А.Р. О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42, № 3.
- Чехлов А.Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Математические заметки. 2001. Т. 69, № 6.
- Чехлов А.Р. Вполне транзитивные группы без кручения конечного p -ранга // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 6.
- Chekhlov A.R. On mixed cs-groups // Acta Applicandae Mathematicae. 2005. V. 85.
- Крылов П.А., Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения с большим числом эндоморфизмов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 2.
- Chekhlov A.R., Krylov P.A. On L. Fuchs' problems 17 and 43 // Journal of Mathematical Sciences. 2007. V. 143 (5).
- Чехлов А.Р. О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, № 6.
- Чехлов А.Р. Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, № 4.
- Чехлов А.Р. Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 4.
- Чехлов А.Р. О коммутаторно инвариантных подгруппах абелевых групп // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 5.
- Чехлов А.Р. Е-разрешимые модули // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, № 7.
- Чехлов А.Р. О некоторых классах нильгрупп // Математические заметки. 2012. Т. 91, № 2.
- Чехлов А.Р. Об абелевых группах с нильпотентными коммутаторами эндоморфизмов // Известия вузов. Математика. 2012. № 10.
- Чехлов А.Р. Об абелевых группах, близких к Е-разрешимым // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, № 8.
- Чехлов А.Р. О проективном коммутанте абелевых групп // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53, № 2.
- Чехлов А.Р. О проективно разрешимых абелевых группах // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53, № 5.
- Чехлов А.Р. Слабо транзитивные Е-энгелевы абелевы группы без кручения // Математические заметки. 2013. Т. 94, № 4.
- Чехлов А.Р. Об абелевых группах с перестановочными мономорфизмами // Сибирский математический журнал. 2013. Т. 54, № 5.
- Чехлов А.Р. Об абелевых группах с инвариантными справа изометриями // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 3.
- Чехлов А.Р. О прямой сумме неприводимых групп // Математические заметки. 2015. Т. 97, № 5.
- Чехлов А.Р. Об абелевых группах с перестановочными коммутаторами эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20, № 5.
- Chekhlov A.R., Danchev P.V. On Abelian groups having all proper fully invariant subgroups isomorphic // Communications in Algebra. 2015. V. 43 (12).
- Chekhlov A.R., Danchev P.V. On commutator fully transitive Abelian groups // Journal of Group Theory. 2015. V. 18 (4).
- Чехлов А.Р. О вполне квазитранзитивных абелевых группах // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 5.
- Chekhlov A.R., Danchev P.V. On projectively Krylov transitive and projectively weakly transitive Abelian p -groups // Journal of Group Theory. 2017. V. 20 (1).
- Чехлов А.Р. О вполне инертных подгруппах вполне разложимых групп // Математические заметки. 2017. Т. 101, № 2.

- Чехлов А.П. О сильно инвариантных подгруппах абелевых групп // Математические заметки. 2017. Т. 102, № 1.
- Chekhlov A.R., Danchev P.V.* A generalization of co-Hopfian abelian groups // *International Journal of Algebra and Computation*. 2017. V. 27.
- Чехлов А.П. Промежуточно вполне инвариантные подгруппы абелевых групп // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 5.
- Chekhlov A.R., Danchev P.V.* A generalization of Hopfian abelian groups // *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis*. 2017. V. 60.
- Чехлов А.П. Абелевы группы с аннуляторными идеалами колец эндоморфизмов // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59, № 2.
- Чехлов А.П. Гомоморфно устойчивые абелевы группы // Математические заметки. 2018. Т. 103, № 4.
- Călugăreanu G., Chekhlov A.R., Krylov P.A.* Subgroups generated by images of endomorphisms of Abelian groups and duality // *Journal of Group Theory*. 2018. V. 21, № 5.
- Чехлов А.П. Абелевы группы с мономорфизмами, инвариантными относительно эпиморфизмов // Известия вузов. Математика. 2018. № 12.
- Чехлов А.П. О вполне идемпотентных гомоморфизмах абелевых групп // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 4.
- Chekhlov A.R., Danchev P.V.* The strongly invariant extending property for abelian groups // *Quaestiones Mathematicae*. 2019. V. 42 (8).
- Chekhlov A.R., Danchev P.V.* On commutator Krylov transitive and commutator weakly transitive Abelian p -groups // *Forum Mathematicum*. 2019. V. 31 (6).
- Breaz S., Călugăreanu G., Chekhlov A.R.* Strictly invariant submodules // *Mediterranean Journal of Mathematics*. 2019. V. 16 (4).
- Chekhlov A.R., Danchev P.V.* n -Hopfian and n -co-Hopfian Abelian Groups // *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. 2019. V. 48 (2).
- Чехлов А.П. О проективно вполне транзитивных абелевых группах // Фундаментальная и прикладная математика. 2019. Т. 22, № 5.
- Чехлов А.П. О слабо транзитивных абелевых группах без кручения // Фундаментальная и прикладная математика. 2019. Т. 22, № 5.
- Чехлов А.П. Проективно инвариантные подгруппы абелевых p -групп // Математические заметки. 2021. Т. 109, № 6.
- Chekhlov A.R., Danchev P.V., Goldsmith B.* On the Bassian property for Abelian groups // *Archiv der Mathematik*. 2021. V. 117, № 6.
- Călugăreanu G., Chekhlov A.R.* Solitary subgroups of Abelian groups // *Expositiones Mathematicae*. 2021. V. 39 (3).
- Călugăreanu G., Chekhlov A.R.* Abelian groups with left comorphic endomorphism rings // *International Electronic Journal of Algebra*. 2021. V. 30.
- Chekhlov A.R., Danchev P.V., Keef P.W.* Generalizations of fully transitive and valued Abelian p -groups // *Journal of Algebra*. 2021. V. 566.
- Chekhlov A.R., Danchev P.V., Goldsmith B.* On the socles of fully inert subgroups of Abelian groups // *Mediterranean Journal of Mathematics*. 2021. V. 18 (3).
- Chekhlov A.R., Danchev P.V., Goldsmith B.* On the socles of characteristically inert subgroups of Abelian groups // *Forum Mathematicum*. 2021. V. 33 (4).
- Чехлов А.П. Вполне инертные подгруппы вполне разложимых групп, имеющие однородные компоненты конечного ранга // Известия вузов. Математика. 2022. № 12.
- Chekhlov A.R., Danchev P.V., Goldsmith B.* On the generalized Bassian property for Abelian groups // *Acta Mathematica Hungarica*. 2022. V. 168 (1).
- Chekhlov A.R., Danchev P.V.* Weakly fully and characteristically inert socle-regular Abelian p -groups // *Communications in Algebra*. 2022. V. 50 (11).
- Chekhlov A.R., Danchev P.V., Keef P.W.* On transitivity-like properties for torsion-free Abelian groups // *Forum Mathematicum*. 2022. V. 34 (4).

Chekhlov A.R., Danchev P.V., Keef P.W. Universally fully and Krylov transitive torsion-free abelian groups // Monatshefte für Mathematik. 2022. V. 198 (3).

Chekhlov A.R., Danchev P.V. On the socles of strongly inert subgroups of Abelian p -groups // Siberian Mathematical Journal. 2023. V. 64 (2).

***А.А. Фомин, А.А. Туганбаев, П.А. Крылов, Е.А. Тимошенко,
А.В. Царев, Е.В. Кайгородов, Ц.Д. Норбосамбуев***

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2024. № 88

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 23.04.2024 г. Формат 70×100^{1/16}.
Печ. л. 11,6; усл. печ. л. 15,1. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 5882.

Дата выхода в свет 25.04.2024 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru