

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2024

№ 92

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36
Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>
Контактный тел./факс: (3822) 529-740
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Богданова Р.А. Об одной системе функциональных уравнений по вложению аддитивной ранга (2,2) в дуальную ранга (3,2) двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств	5
Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д. Изоморфизмы алгебр инцидентности	19
Халилов Э.Г. Конструктивный метод решения некоторых классов гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода	29
Хмылева Т.Е., Петрова К.М. О линейных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций с топологией поточечной сходимости на всюду плотных подмножествах	48

МЕХАНИКА

Азин А.В., Васильев А.В., Пономарев С.В., Рикконен С.В. Моделирование напряженно-деформированного состояния ультразвукового пьезопреобразователя в импедансном методе тестирования материалов	56
Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Поленчук С.Н., Романдин В.И. Экспериментальное исследование распада вертикальной жидкой струи	69
Архипов В.А., Золоторёв Н.Н., Порязов В.А. Влияние дисперсности алюминия на акустическую проводимость поверхности горения твердого топлива	79
Бондарчук С.С., Жуков А.С., Зиятдинов М.Х., Дубкова Я.А., Миньков Л.Л., Крайнов А.Ю. Моделирование внутрибаллистических процессов в РДТТ для зарядов с неизвлекаемой формообразующей оснastкой	89
Ищенко А.Н., Аксенов А.А., Акользин В.С., Бирюков И.М., Чупашев А.В., Шестопалова А.С., Шмелев В.В. Численное моделирование обтекания высокоскоростным потоком воды тела вращения с затупленным передним торцом	101
Кагенов А.М., Костюшин К.В., Ларкин Д.О. Математическое моделирование натекания многоблочной сверхзвуковой струи на плоскую подвижную преграду	114
Порязов В.А., Глотов О.Г., Крайнов А.Ю., Крайнов Д.А., Сорокин И.В., Сурудин Г.С. Экспериментальное исследование и моделирование горения металлизированного смесового твердого топлива с учетом распределения агломератов по размерам. I. Эксперимент: методика, обработка, результаты	125
Рашковский С.А., Костюшин К.В., Жильцов К.Н., Еремин И.В. Слияние жидких капель в процессе агломерации на поверхности горения	144
Степанов Е.Ю., Ищенко А.Н., Буркин В.В., Метелица Е.Р., Бирюков И.М., Саммель А.Ю. Определение условий для формирования устойчивого дугового разряда в электроплазменном устройстве при вторичном пробое разрядного промежутка	159
Чайковская Т.В., Марченко Е.С., Ветрова А.В. Расчетно-экспериментальные исследования прочностных свойств и долговечности имплантатов из никелида титана и костных тканей позвонков при замещении межпозвоночного диска сегмента шейного отдела позвоночника	169

CONTENTS

MATHEMATICS

Bogdanova R.A. On one system of functional equations for embedding an additive rank $(2, 2)$ into a dual rank $(3, 2)$ of two-metric phenomenologically symmetric geometries of two sets	5
Krylov P.A., Norbosambuev T.D. Isomorphisms of incidence algebras	19
Khalilov E.H. Constructive method for solving some classes of hypersingular integral equations of the second kind	29
Khmyleva T.E., Petrova K.M. On linear homeomorphisms of spaces of continuous functions with the pointwise convergence topology	48

MECHANICS

Azin A.V., Vasilyev A.V., Ponomarev S.V., Rikkonen S.V. Modeling of the stress-strain state of an ultrasonic piezoelectric transducer in an impedance method of testing materials	56
Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Perfilieva K.G., Polenchuk S.N., Romandin V.I. Experimental study of the breakup of vertical liquid jet	69
Arkhipov V.A., Zolotarev N.N., Poryazov V.A. Influence of aluminum dispersion on acoustic admittance of the solid propellant combustion surface	79
Bondarchuk S.S., Zhukov A.S., Ziatdinov M.Kh., Dubkva Y.A., Minkov L.L., Krainov A.Yu. Modeling of intra-ballistic processes in solid rocket motors for charges with non-removable forming rig	89
Ishchenko A.N., Aksenov A.A., Akol'zin V.S., Biryukov I.M., Chupashev A.V., Shestopalova A.S., Shmelev V.V. Numerical modeling of high-speed water flow around a body of revolution with a blunt front end	101
Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Larkin D.O. Mathematical modeling of the interaction of a multiple supersonic jet with a moving obstacle	114
Poryazov V.A., Glotov O.G., Krainov A.Yu., Krainov D.A., Sorokin I.V., Surodin G.S. Experimental investigation and modeling of metallized composite solid propellant combustion with allowance for the size distribution of agglomerates. I. Experiment: methodology, processing, results	125
Rashkovskiy S.A., Kostyushin K.V., Zhiltsov K.N., Eremin I.V. Merging of liquid droplets during agglomeration on a combustion surface	144
Stepanov E.Yu., Ishchenko A.N., Burkin V.V., Metelitsa E.R., Biryukov I.M., Sammel' A.Yu. Specification of conditions for stable arc discharge formation in an electro-plasma device during secondary breakdown in a discharge gap	159
Chaykovskaya T.V., Marchenko E.S., Vetrova A.V. Computational and experimental studies of strength properties and durability of implants made of titanium nickelide and vertebral bone tissue during intervertebral disc replacement in a segment of the cervical spine	169

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 514.1:517.965

MSC: 51K99, 34K99

doi: 10.17223/19988621/92/1

**Об одной системе функциональных уравнений по вложению
аддитивной ранга (2,2) в дуальную ранга (3,2)
двуметрических феноменологически симметричных
геометрий двух множеств**

Рада Александровна Богданова

*Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия,
bog-rada@yandex.ru*

Аннотация. Системы двух функциональных уравнений с несколькими неизвестными функциями от нескольких переменных естественно появляются при установлении взаимного вложения двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств (ДФС ГДМ). Вложение оказывается возможным, если соответствующая ему система функциональных уравнений имеет хотя бы одно невырожденное решение. В настоящей работе предлагается разработать метод нахождения общего невырожденного решения системы двух функциональных уравнений, соответствующих вложению аддитивной ДФС ГДМ ранга (2,2) в дуальную ДФС ГДМ ранга (3,2), что представляет собой интересную и содержательную в математическом смысле задачу. Данный метод может быть развит и применен к другим подобного вида системам функциональных уравнений, возникающих в рамках задачи по вложению ДФС ГДМ.

Ключевые слова: двуметрическая феноменологически симметричная геометрия двух множеств, система функциональных уравнений

Для цитирования: Богданова Р.А. Об одной системе функциональных уравнений по вложению аддитивной ранга (2,2) в дуальную ранга (3,2) двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 5–18. doi: 10.17223/19988621/92/1

On one system of functional equations for embedding an additive rank $(2, 2)$ into a dual rank $(3, 2)$ of two-metric phenomenologically symmetric geometries of two sets

Rada Alexandrovna Bogdanova

Gorno-Altai State University, Gorno-Altaysk, Russian Federation, bog-rada@yandex.ru

Abstract. Systems of two functional equations with several unknown functions of several variables naturally appear when establishing the mutual embedding of two-metric phenomenologically symmetric geometries of two sets (TPS GTS). An embedding is possible if the corresponding system of functional equations has at least one nondegenerate solution. Two-metric phenomenologically symmetric geometries were studied previously in the works of G.G. Mihailichenko and R.A. Bogdanova within the framework of the problems of constructing and classifying such geometries arising in a more general theory of phenomenologically symmetric geometries – geometries of maximum mobility. The discovery made in the beginning of the 19th century by Gauss, Lobachevsky, and Bolyai that Euclidean geometry is not the only possible one made it possible in the 20th century, along with other geometries, to discover geometries of maximum mobility, representing a separate class of geometries that admit a maximum group of movements. The origin of this theory in the 1960s was associated with the tasks of mathematical substantiation of the theory of relativity and other classical laws of physics. Phenomenologically symmetric geometries, which are geometries of local maximum mobility, represent a synthesis of two classical approaches to the construction of geometry: the group and metric approaches which for many decades (starting with the works of G. Helmholtz, F. Klein, A. Poincare, S. Lee, A. Cayley, etc.) served as a tool for research in the theory of representations of Lie groups, Riemannian geometry, and other branches of mathematics. Researchers who adhere to this direction associate a pair of points with not one value of a two-point function (a function of a pair of points)—an invariant of the corresponding transformation group – but several.

In this paper, it is proposed to develop a method for finding a general nondegenerate solution of a system of two functional equations corresponding to embedding of an additive rank $(2, 2)$ TPS of GTS into a dual rank $(3, 2)$ TPS of GTS, which is an interesting and meaningful problem in the mathematical sense. This method can be developed and applied to other similar systems of functional equations arising within the framework of the problem of embedding TPS GTS.

Keywords: two-metric phenomenologically symmetric geometry of two sets, a system of functional equations

For citation: Bogdanova, R.A. (2024) On one system of functional equations for embedding an additive rank $(2, 2)$ into a dual rank $(3, 2)$ of two-metric phenomenologically symmetric geometries of two sets. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 5–18. doi: 10.17223/19988621/92/1

Двуметрические феноменологически симметричные геометрии исследовались ранее в работах Г.Г. Михайличенко [1–3], Р.А. Богдановой [4–6] в рамках задач построения и классификации таких геометрий, возникающих в более общей теории феноменологически симметричных геометрий – геометрий максимальной подвижности. Открытие того, что евклидова геометрия не является единственно возможной, сделанное в начале XIX в. Гауссом, Лобачевским и Бойяи, позволило в XX в. наряду с другими геометриями открыть геометрии максимальной подвижности, представляющие отдельный класс геометрий, допускающих максимальную группу движений. Зарождение этой теории в 60-х гг. прошлого века было связано с задачами математического обоснования теории относительности и других классических законов физики [7, 8]. Феноменологически симметричные геометрии, являющиеся геометриями локальной максимальной подвижности, представляют собой синтез двух классических подходов к построению геометрии: группового и метрического, которые на протяжении многих десятилетий (начиная с работ Г. Гельмгольца, Ф. Клейна, А. Пуанкаре, С. Ли, А. Кэли и др.) служат инструментом исследования в теории представлений групп Ли, римановой геометрии и других разделов математики. Исследователи, придерживающиеся этого направления, сопоставляют паре точек не одно значение двухточечной функции (функции пары точек) – инвариант соответствующей группы преобразований, а несколько.

Двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств (ДФС ГДМ) впервые появились в теории физических структур, разработанной Ю.И. Кулаковым [9] и Г.Г. Михайличенко [2]. Известна полная классификация этих геометрий [1, 2, 10], которая была получена функциональным методом в свое время вторым автором. С точностью до замены координат в многообразиях и преобразованиях функции f , задающей двуметрическую феноменологически симметричную геометрию двух множеств, Г.Г. Михайличенко были найдены ДФС ГДМ ранга $(n + 2, 1)$ для $n = 1, 2, 3, 4$, причем им же было установлено, что для $n > 4$ не существует ДФС ГДМ. Под рангом понимается число точек, определяемых на двух множествах. Стоит также отметить, что методом вложения В.А. Кыровым и Г.Г. Михайличенко в их работе [11] была получена классификация ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$. Исследования по изучению геометрических свойств таких геометрий проводились В.А. Кыровым в работе [12].

Предлагаемая работа выполнена в рамках описанной выше концепции, чем и объясняется употребление терминов «метрика» и «метрический» в смысле, характерном для данной концепции и применяемом только в ней. Это, в частности, позволяет соотносить результаты, полученные автором данной работы, с результатами иных исследователей, развивающих указанное направление.

Цель данной работы состоит в разработке метода нахождения общего невырожденного решения одной системы двух функциональных уравнений, соответствующих вложению аддитивной ДФС ГДМ ранга $(2, 2)$ в дуальную ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$, что представляет собой интересную и содержательную в математическом смысле задачу. Эта система двух функциональных уравнений решается, поскольку выражения вектор-функций g и f , входящие в систему, известны.

Основа метода состоит в дифференцировании одного из функциональных уравнений, входящих в систему, с последующим переходом к дифференциальным уравнениям. Далее решения дифференциальных уравнений подставляются

во второе функциональное уравнение исходной системы функциональных уравнений, откуда при соответствующих ограничениях находится общее невырожденное ее решение. Данный метод может быть развит и применен к другим такого же вида системам функциональных уравнений, возникающим в рамках задачи вложения ДФС ГДМ, для нахождения их общего невырожденного решения.

Перейдем к точным формулировкам, которые приведем по монографии [2].

Двуметрическая феноменологически симметричная геометрия двух множеств (ДФС ГДМ) ранга $(n + 1, 2)$, где $n \in N$, задается на двумерном и $2n$ -мерном дифференцируемых многообразиях M^2 и N^{2n} дифференцируемой вектор-функцией (двухкомпонентной функцией) $f : M^2 \times N^{2n} \rightarrow R^2$ с открытой и плотной областью определения в $M^2 \times N^{2n}$, сопоставляющей паре точек два действительных числа [1, 2]. Координатное представление для этой функции $f = (f^1, f^2)$ имеет следующий вид:

$$f = f(x, y, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n}),$$

где (x, y) и $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n})$ – локальные координаты соответственно в многообразиях M^2 и N^{2n} . Дополнительно имеют место следующие аксиомы:

A1. Координатное представление функции f невырождено относительно координат (x, y) и $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n})$.

Невырожденность функции $f = (f^1, f^2)$ в ее координатном представлении выражается необращением в нуль якобианов:

$$\frac{\partial(f(x_i, y_i, \xi_a^1, \xi_a^2, \dots, \xi_a^{2n}))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0,$$

$$\frac{\partial(f(x_{i_1}, y_{i_1}, \xi_a^1, \xi_a^2, \dots, \xi_a^{2n}), \dots, f(x_{i_n}, y_{i_n}, \xi_a^1, \xi_a^2, \dots, \xi_a^{2n}))}{\partial(\xi_a^1, \xi_a^2, \dots, \xi_a^{2n})} \neq 0,$$

где x_i, y_i – координаты некоторой произвольной точки $i \in M^2$, $x_{i_1}, y_{i_1}, \dots, x_{i_n}, y_{i_n}$ – координаты соответственно точек $i_1, i_2, \dots, i_n \in M^2$, а $\xi_a^1, \xi_a^2, \dots, \xi_a^{2n}$ – координаты точки $\alpha \in N^{2n}$.

A2. Для плотного и открытого множества точек

$$(i_1, i_2, \dots, i_{n+1}, \alpha_1, \alpha_2) \in M^2 \times N^{2n}$$

все $4(n + 1)$ значений функции f связаны уравнением

$$\Phi(f^1(i_1, \alpha_1), f^2(i_1, \alpha_1), \dots, f^1(i_{n+1}, \alpha_2), f^2(i_{n+1}, \alpha_2)) = 0,$$

где $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ – вектор-функция (двухкомпонентная функция) $4(n + 1)$ переменных с $\text{rang} \Phi = 2$.

Пусть функция $g = (g^1, g^2) = g(x, y; \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n})$ задает ДФС ГДМ ранга $(n + 1, 2)$, а функция $f = (f^1, f^2) = f(\bar{x}, \bar{y}; \eta^1, \dots, \eta^{2n}, \eta^{2n+1}, \eta^{2n+2})$ задает ДФС ГДМ ранга $(n + 2, 2)$, где $n = 1, 2, 3$.

Определение [13]. Пусть ДФС ГДМ ранга $(n + 1, 2)$ задана на двумерном и $2n$ -мерном многообразиях и ДФС ГДМ ранга $(n + 2, 2)$ задана на двумерном и $4n$ -мерном многообразиях. Говорят, что ДФС ГДМ ранга $(n + 1, 2)$ вложена в ДФС ГДМ ранга $(n + 2, 2)$, если выполняется функциональное соотношение

$$f(\bar{x}, \bar{y}; \eta^1, \dots, \eta^{2n}, \eta^{2n+1}, \eta^{2n+2}) = \chi(g(x, y; \xi^1, \dots, \xi^{2n}), \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}),$$

где $\chi, \bar{x} = \lambda^1(x, y), \bar{y} = \lambda^2(x, y), \eta^1 = \tau^1(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}), \dots, \eta^{2n} = \tau^{2n}(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}), \eta^{2n+1} = \tau^{2n+1}(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}), \eta^{2n+2} = \tau^{2n+2}(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2})$ – дифференцируемые функции, причем выполняются неравенства

$$\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \frac{\partial(\eta^1, \dots, \eta^{2n+2})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^{2n+2})} \neq 0.$$

В работе [13] доказано, что в каждую ДФС ГДМ ранга $(n + 2, 2)$ вложена по крайней мере одна из ДФС ГДМ ранга $(n + 1, 2)$, где $n = 1, 2, 3$. Установление всех возможных последовательных по рангу взаимных вложений ДФС ГДМ предполагает рассмотрение 23 систем функциональных уравнений. Нахождение общего невырожденного решения одной из таких систем функциональных уравнений представляет собой сложную задачу как было отмечено В.А. Кыровым и Г.Г. Михайличенко в их работах [14, 15], в которой авторами с применением жордановых форм находятся канонические невырожденные решения одной из таких систем функциональных уравнений, возникающей в задаче о вложении ДФС ГДМ аддитивной, неаддитивной ранга $(2, 2)$ в мультипликативную ранга $(3, 2)$.

В последующем изложении будем использовать более удобные обозначения для координат и функций.

В данной статье ставится задача о нахождении всех возможных вложений аддитивной ДФС ГДМ ранга $(2, 2)$ с вектор-функцией компоненты которой

$$g^1 = x + \xi, \quad g^2 = y + \eta,$$

где x, y – координаты, определенные в двумерном многообразии M^2 , ξ, η – координаты, определенные в двумерном многообразии N^2 , в дуальную ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$ с вектор-функцией, компоненты которой

$$f^1 = x\xi + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi + \nu,$$

где x, y – координаты, определенные в двумерном многообразии M^2 , ξ, η, μ, ν – координаты, определенные в четырехмерном многообразии N^4 , которая сводится к нахождению общего невырожденного решения *особой системы двух функциональных уравнений*

$$\begin{cases} \bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu), \\ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi} + \bar{\nu} = \chi^2(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu) \end{cases} \quad (1)$$

относительно шести неизвестных функций

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}(x, y), \quad \bar{y} = \bar{y}(x, y), \quad \bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, \nu), \\ \bar{\eta} &= \bar{\eta}(\xi, \eta, \mu, \nu), \quad \bar{\mu} = \bar{\mu}(\xi, \eta, \mu, \nu), \quad \bar{\nu} = \bar{\nu}(\xi, \eta, \mu, \nu), \end{aligned} \quad (1.1)$$

зависящих от двух переменных x, y и четырех переменных ξ, η, μ, ν .

Особенность системы двух функциональных уравнений (1) состоит в нахождении шести функций $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{v}$ так, чтобы $\bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu}$ и $\bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi} + \bar{v}$ оказались какими угодно (но гладкими) функциями от переменных $x + \xi, y + \eta, \mu, v$. Также стоит отметить, что функции χ^1 и χ^2 , входящие в особую систему функциональных уравнений (1), также являются неизвестными.

Вложение оказывается возможным, если система (1) имеет хотя бы одно невырожденное решение, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \frac{\partial(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{v})}{\partial(\xi, \eta, \mu, v)} \neq 0. \quad (2)$$

При вложении допускаются обратимые замены локальных координат $(x; y) \mapsto (\bar{x}; \bar{y}), (\xi; \eta; \mu; v) \mapsto (\bar{\xi}; \bar{\eta}; \bar{\mu}; \bar{v})$ в двумерном и четырехмерном многообразиях, на которых метрическая функция задает ДФС ГДМ ранга (3,2), а также ее масштабное преобразование $\chi(f) \rightarrow f$. Заметим, что компоненты χ^1 и χ^2 этого преобразования по решению системы (1) и ее уравнениям определяются однозначно, т.е. χ^1 и χ^2 не входят в решение системы функциональных уравнений (1), а строятся путем подстановкой найденных решений $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{v}$ (1.1) в левую часть исходной системы функциональных уравнений (1).

Теорема. Общее невырожденное решение системы двух функциональных уравнений при вложении аддитивной ранга (2,2) ДФС ГДМ с вектор-функцией $g(x, y, \xi, \eta) = (g^1, g^2) = (x + \xi, y + \eta)$ в дуальную ранга (3,2) ДФС ГДМ с вектор-функцией $f(x, y, \xi, \eta, \mu, v) = (f^1, f^2) = (x\xi + \mu, x\eta + y\xi + v)$ определяется строением его первой функции $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$ в классе экспоненциальных и линейных функций.

1. Если первая из искомых функций $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$ экспоненциальная, то общее невырожденное решение имеет вид:

$$\begin{cases} \bar{x}(x, y) = h \exp(ax + by) + g, \\ \bar{y}(x, y) = (h(cx + \gamma y) + \beta) \exp(ax + by) + \alpha, \\ \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, v) = \bar{\xi}(\mu, v) \exp(a\xi + b\eta), \\ \bar{\eta}(\xi, \eta, \mu, v) = (\bar{\xi}(\mu, v)(c\xi + \gamma\eta) + \bar{\eta}(\mu, v)) \exp(a\xi + b\eta), \\ \bar{\mu}(\xi, \eta, \mu, v) = -g\bar{\xi}(\mu, v) \exp(a\xi + b\eta) + \bar{\mu}(\mu, v), \\ \bar{v}(\xi, \eta, \mu, v) = -[\bar{\xi}(\mu, v)(g(c\xi + \gamma\eta) + \alpha) + g\bar{\eta}(\mu, v)] \exp(a\xi + b\eta) + \bar{v}(\mu, v), \end{cases} \quad (3)$$

где $h \neq 0$, $a\gamma - bc \neq 0$ и $\bar{\mu}(\mu, v)$, $\bar{v}(\mu, v)$, $\bar{\xi}(\mu, v)$ – произвольные функции, входящие в общее решение и зависящие только от μ, v так, что $\partial(\bar{\mu}(\mu, v), \bar{v}(\mu, v)) / \partial(\mu, v) \neq 0$, причем

$$\begin{aligned} \chi^1 &= \bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu} = (h \exp(ax + by) + g) \bar{\xi}(\mu, v) \exp(a\xi + b\eta) - g\bar{\xi}(\mu, v) \exp(a\xi + b\eta) + \bar{\mu}(\mu, v) = \\ &= h\bar{\xi}(\mu, v) \exp(a(x + \xi) + b(y + \eta)) + \bar{\mu}(\mu, v), \\ \chi^2 &= \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi} + \bar{v} = \\ &= [\bar{\xi}(\mu, v)(h(c(x + \xi) + \gamma(y + \eta)) + \beta) + h\bar{\eta}(\mu, v)] \exp(a(x + \xi) + b(y + \eta)) + \bar{v}(\mu, v). \end{aligned}$$

2. Если первая из искоемых функций $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$ линейная, то общее невырожденное решение имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}(x, y) = ax + by + g, \\ \bar{y}(x, y) = \frac{acx^2}{2} + bcxy + \frac{b\gamma y^2}{2} + (h + gc)x + (\beta + g\gamma)y + \alpha, \\ \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, \nu) = \bar{\xi}(\mu, \nu), \\ \bar{\eta}(\xi, \eta, \mu, \nu) = \bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + \gamma\eta) + \bar{\eta}(\mu, \nu), \\ \bar{\mu}(\xi, \eta, \mu, \nu) = \bar{\xi}(\mu, \nu)(a\xi + b\eta) + \bar{\mu}(\mu, \nu), \\ \bar{v}(\xi, \eta, \mu, \nu) = \bar{\xi}(\mu, \nu) \left(\frac{ac\xi^2}{2} + bc\xi\eta + \frac{b\gamma\eta^2}{2} + h\xi + \beta\eta \right) + \bar{\eta}(\mu, \nu)(a\xi + b\eta) + \bar{v}(\mu, \nu), \end{array} \right. \quad (4)$$

где

$$a\gamma - bc = 0, \quad a\beta - bh \neq 0,$$

$$(a\beta - bh)\partial(\bar{\xi}(\mu, \nu), \bar{\eta}(\mu, \nu)) / \partial(\mu, \nu) - (\beta c - h\gamma)\partial(\bar{\xi}(\mu, \nu), \bar{\mu}(\mu, \nu)) / \partial(\mu, \nu) \neq 0,$$

причем

$$\begin{aligned} \chi^1 &= \bar{\xi}(\mu, \nu)(a(x + \xi) + b(y + \eta) + g) + \bar{\mu}(\mu, \nu), \\ \chi^2 &= \bar{\xi}(\mu, \nu)(ac(x + \xi)^2 / 2 + (x + \xi)(y + \eta) + \beta\gamma(y + \eta)^2 / 2 + \\ &+ (h + gc)(x + \xi) + (\beta + g\gamma)(y + \eta) + \alpha) + \bar{\eta}(\mu, \nu)(a(x + \xi) + b(y + \eta)) + \bar{v}(\mu, \nu). \end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, что в первое уравнение системы (1) из шести неизвестных функций входят только три, а именно: $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, \nu)$ и $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\xi, \eta, \mu, \nu)$. Определив их как его решение и подставив во второе уравнение системы (1), можно будет найти возможные на них ограничения, а также оставшиеся три неизвестные функции $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi, \eta, \mu, \nu)$ и $\bar{v} = \bar{v}(\xi, \eta, \mu, \nu)$. Первое уравнение системы (1) продифференцируем отдельно по переменным x и ξ . Поскольку в его правую часть они входят в виде суммы $x + \xi$, результаты дифференцирования по ним его левой части должны совпадать, откуда следует равенство

$$\bar{x}_x \bar{\xi} = \bar{x} \bar{\xi}_\xi + \bar{\mu}_\xi. \quad (5)$$

По шести независимым переменным x, y и ξ, η, μ, ν равенство (5) является тождеством. Зафиксируем в нем последние четыре переменные ξ, η, μ, ν . Учитывая, что по второму из условий (2) имеем $\bar{\xi} \neq 0$, для функции $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$ по переменной x получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\bar{x}_x = a\bar{x} + c. \quad (6)$$

Если $a \neq 0$, то решение уравнения (6) будет экспоненциальным:

$$\bar{x} = \bar{x}(y)e^{ax} - c/a, \quad (7)$$

причем по первому из условий (2) $\bar{x}(y) \neq 0$.

Если же $a = 0$, но $c \neq 0$, то решение будет линейным:

$$\bar{x} = cx + \bar{x}(y). \quad (8)$$

Если же, наконец, $a = 0$ и $c = 0$, то решение уравнения (6) от переменной x зависеть не будет:

$$\bar{x} = \bar{x}(y), \quad (9)$$

причем по первому из условий (2) $\bar{x}'(y) \neq 0$, т.е. $\bar{x}(y) \neq const$. В дифференциальное равенство (5) подставим сначала экспоненциальное решение (7):

$$a\bar{x}(y)e^{ax}\bar{\xi} = (\bar{x}(y)e^{ax} - c/a)\bar{\xi}_{\xi} + \bar{\mu}_{\xi},$$

откуда для функций $\bar{\xi}$ и $\bar{\mu}$ получаем систему уравнений $\bar{\xi}_{\xi} = a\bar{\xi}$, $\bar{\mu}_{\xi} = c\bar{\xi}$ со следующим решением:

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi}, \quad \bar{\mu} = c\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi} / a + \bar{\mu}(\eta, \mu, \nu), \quad (10)$$

где, очевидно, $\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) \neq 0$.

Выражения (7), (10) для функций $\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\mu}$ подставим в первое уравнение системы (1):

$$\bar{x}(y)\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu)e^{a(x+\xi)} + \bar{\mu}(\eta, \mu, \nu) = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu).$$

Производные его левой части по переменным y и η совпадают, поскольку в его правую часть они входят в виде суммы $y + \eta$, откуда следует равенство

$$\bar{x}'(y)\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu)e^{a(x+\xi)} = \bar{x}(y)\bar{\xi}_{\eta}(\eta, \mu, \nu)e^{a(x+\xi)} + \bar{\mu}_{\eta}(\eta, \mu, \nu),$$

а из него затем система уравнений

$$\bar{x}'(y) = b\bar{x}(y), \quad \bar{\xi}_{\eta}(\eta, \mu, \nu) = b\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu), \quad \bar{\mu}_{\eta}(\eta, \mu, \nu) = 0$$

для функций $\bar{x}(y)$, $\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu)$, $\bar{\mu}(\eta, \mu, \nu)$ со следующим решением:

$$\bar{x}(y) = he^{by}, \quad \bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) = \bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta}, \quad \bar{\mu}(\eta, \mu, \nu) = \bar{\mu}(\mu, \nu). \quad (11)$$

Соединяя выражения (7), (10) с решением (11), получим экспоненциальное решение первого уравнения системы (1)

$$\begin{cases} \bar{x} = he^{ax+by} - c/a, \\ \bar{\xi} = \bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta}, \\ \bar{\mu} = c\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta} / a + \bar{\mu}(\mu, \nu) \end{cases} \quad (12)$$

с явной зависимостью функции $\bar{x}$ от переменной x , поскольку $a \neq 0$, в котором, очевидно, $h \neq 0$ и $\bar{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$.

Проводя аналогичные рассуждения в отношении линейных решений (8), получим линейное решение первого уравнения системы (1)

$$\begin{cases} \bar{x} = cx + dy + g, \\ \bar{\xi} = \bar{\xi}(\mu, \nu), \\ \bar{\mu} = \bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + d\eta) + \bar{\mu}(\mu, \nu) \end{cases} \quad (13)$$

с явной зависимостью $\bar{x}$ от переменной x , поскольку $c \neq 0$, в котором $\bar{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$.

Покажем, что полученное решение (13) верно. Подставим выражения (13) в первое уравнение системы (1):

$$x\bar{\xi} + \bar{\mu} = (cx + dy + g)\bar{\xi}(\mu, \nu) + \bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + d\eta) + \bar{\mu}(\mu, \nu) =$$

$$= c(x + \xi)\bar{\xi}(\mu, \nu) + d(y + \eta)\bar{\xi}(\mu, \nu) + g\bar{\xi}(\mu, \nu) + \bar{\mu}(\mu, \nu) = \\ = (c(x + \xi) + d(y + \eta))\bar{\xi}(\mu, \nu) + g\bar{\xi}(\mu, \nu) + \bar{\mu}(\mu, \nu)$$

Полученное выражение есть явный вид некоторой функции $\chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu)$, т.е.

$$\chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu) = (c(x + \xi) + d(y + \eta))\bar{\xi}(\mu, \nu) + g\bar{\xi}(\mu, \nu) + \bar{\mu}(\mu, \nu),$$

где $\bar{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$ – произвольная функция, зависящая только от двух переменных μ, ν . Здесь стоит напомнить, что решение особой системы уравнений (1) зависит только от переменных $x + \xi, y + \eta, \mu, \nu$, причем неважно, каким образом проявляется зависимость между переменными μ, ν , поскольку глобальная задача данной работы состоит в том, чтобы найти такие решения особой системы функциональных уравнений (1), при которых является возможным структурно вложение геометрии меньшего ранга (2,2) в геометрию большего ранга (3,2).

Далее, проводя аналогичные рассуждения в отношении последних решений (9), получим общее экспоненциальное решение первого уравнения системы (1), не противоречащее условиям (2):

$$\begin{cases} \bar{x}(y) = he^{ax+by} + g, \\ \bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) = \bar{\xi}(\mu, \nu)e^{ax+b\eta}, \\ \bar{\mu}(\eta, \mu, \nu) = -g\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta} + \bar{\mu}(\mu, \nu), \end{cases} \quad (14)$$

где $a^2 + b^2 \neq 0$, $h \neq 0$, $\bar{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$, и линейное решение первого уравнения системы (1), в котором функция $\bar{x}$ не зависит от переменной x

$$\begin{cases} \bar{x} = qy + s, \\ \bar{\xi} = \bar{\xi}(\mu, \nu), \\ \bar{\mu} = q\bar{\xi}(\mu, \nu)\eta + \bar{\mu}(\mu, \nu), \end{cases} \quad (15)$$

где $p = 0$, $q \neq 0$, $\bar{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$.

Решение (15) можно включить в решение (13), если ввести новые обозначения констант и допустить в нем более общее ограничение $a^2 + b^2 \neq 0$ (тогда при $a = 0$, должно быть $b \neq 0$):

$$\begin{cases} \bar{x} = ax + by + g, \\ \bar{\xi} = \bar{\xi}(\mu, \nu), \\ \bar{\mu} = \bar{\xi}(\mu, \nu)(a\xi + b\eta) + \bar{\mu}(\mu, \nu), \end{cases} \quad (16)$$

где $a^2 + b^2 \neq 0$, $\bar{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$.

Заметим, что общее линейное решение (16) первого уравнения системы (1), как и его общее экспоненциальное решение (14), не противоречит условиям (2). В совокупности же эти решения составляют общее решение первого уравнения системы (1). Для того чтобы найти общее невырожденное решение системы (1) необходимо общие решения (14) и (16) ее первого уравнения подставить в ее второе уравнение. Поставим во второе уравнение системы (1) решение (14):

$$(he^{ax+by} + g)\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta} + \bar{v} = \chi^2(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu). \quad (17)$$

Производные левой части уравнения (17) по переменным x и ξ , очевидно, совпадают:

$$ahe^{ax+by}\bar{\eta} + \bar{y}_x\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta} = (he^{ax+by} + g)\bar{\eta}_\xi + a\bar{y}\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta} + \bar{v}_\xi.$$

Фиксируя в этом равенстве переменные ξ, η, μ, ν , сначала получим уравнения для функции $\bar{y}$, используя которое затем из того же равенства получаем уравнения для функций $\bar{\eta}$ и $\bar{v}$. В итоге имеем систему уравнений $\bar{y}_x - a\bar{y} = che^{ax+by} + d$, $\bar{\eta}_\xi - a\bar{\eta} = c\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta}$, $\bar{v}_\xi + g\bar{\eta}_\xi = d\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta}$ со следующими решениями:

$$\begin{cases} \bar{y} = chxe^{ax+by} + \bar{y}(y)e^{ax} - d/a, \\ \bar{\eta} = c\bar{\xi}(\mu, \nu)\xi e^{a\xi+b\eta} + \bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi}, \\ \bar{v} = (-gc\xi + d/a)\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta} - g\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi} + \bar{v}(\eta, \mu, \nu), \end{cases} \quad (18)$$

если $a \neq 0$, и

$$\begin{cases} \bar{y} = (che^{by} + d)x + \bar{y}(y), \\ \bar{\eta} = c\bar{\xi}(\mu, \nu)\xi e^{b\eta} + \bar{\eta}(\eta, \mu, \nu), \\ \bar{v} = (-gc + d)\bar{\xi}(\mu, \nu)\xi e^{b\eta} - g\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu) + \bar{v}(\eta, \mu, \nu), \end{cases} \quad (19)$$

если $a = 0$, причем $b \neq 0$, так как $a^2 + b^2 \neq 0$.

В уравнение (17), полагая $a \neq 0$, подставим выражения (18):

$$ch\bar{\xi}(\mu, \nu)(x + \xi)e^{a(x+\xi)+b(y+\eta)} + (\bar{y}(y)\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta} + h\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)e^{by})e^{a(x+\xi)} + \bar{v}(\eta, \mu, \nu) = \chi^2(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu). \quad (20)$$

Производные левой части уравнения (20) по переменным y и η , очевидно, совпадают:

$$\begin{aligned} &(\bar{y}'(y)\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta} + bh\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)e^{by})e^{a(x+\xi)} = \\ &= (b\bar{y}(y)\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta} + h\bar{\eta}_\eta(\eta, \mu, \nu)e^{by})e^{a(x+\xi)} + \bar{v}_\eta(\eta, \mu, \nu), \end{aligned}$$

откуда для функций $\bar{y}(y)$, $\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)$, $\bar{v}(\eta, \mu, \nu)$ получаем уравнения $\bar{y}'(y) - b\bar{y}(y) = \gamma he^{by}$,

$\bar{\eta}_\eta(\eta, \mu, \nu) - b\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu) = \gamma\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta}$, $\bar{v}_\eta(\eta, \mu, \nu) = 0$ со следующими решениями:

$$\begin{cases} \bar{y}(y) = \gamma h y e^{by} + \beta e^{by}, \\ \bar{\eta}(\eta, \mu, \nu) = \gamma\bar{\xi}(\mu, \nu)\eta e^{b\eta} + \bar{\eta}(\mu, \nu)e^{b\eta}, \\ \bar{v}(\eta, \mu, \nu) = \bar{v}(\mu, \nu), \end{cases} \quad (21)$$

которые являются также и решениями функционального уравнения (20).

Объединяя выражения (18) и (21), получим решения исходного функционального уравнения (17) для случая $a \neq 0$:

$$\begin{cases} \bar{y} = (h(cx + \gamma y) + \beta)e^{ax+by} - d/a, \\ \bar{\eta} = (\bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + \gamma\eta) + \bar{\eta}(\mu, \nu))e^{a\xi+b\eta}, \\ \bar{v} = (-g\bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + \gamma\eta) + d\bar{\xi}(\mu, \nu)/a - g\bar{\eta}(\mu, \nu))e^{a\xi+b\eta} + \bar{v}(\mu, \nu). \end{cases} \quad (22)$$

В уравнение (17) с $a = 0$ подставим выражения (19):

$$hc\bar{\xi}(\mu, \nu)(x + \xi)e^{b(y+\eta)} + h\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)e^{by} + d\bar{\xi}(\mu, \nu)(x + \xi)e^{b\eta} + \bar{y}'(y)\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta} + \bar{v}(\eta, \mu, \nu) = \chi^2(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu). \quad (23)$$

Производные левой части уравнения (23) по переменным y и η , очевидно, совпадают:

$$hb\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)e^{by} + \bar{y}'(y)\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta} = h\bar{\eta}_\eta(\eta, \mu, \nu)e^{by} + bd\bar{\xi}(\mu, \nu)(x + \xi)e^{b\eta} + b\bar{y}(y)\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta} + \bar{v}_\eta(\eta, \mu, \nu),$$

откуда выводим, что $d = 0$, так как $b \neq 0$, $\bar{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$, и для функций $\bar{y}(y)$, $\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)$, $\bar{v}(\eta, \mu, \nu)$ получаем уравнения

$\bar{y}'(y) - b\bar{y}(y) = \gamma h e^{by} + \alpha$, $\bar{\eta}_\eta(\eta, \mu, \nu) - b\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu) = \gamma \bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta}$, $\bar{v}_\eta(\eta, \mu, \nu) = \alpha \bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta}$ со следующими решениями:

$$\begin{cases} \bar{y}(y) = \gamma h y e^{by} + \beta e^{by} - \alpha / b, \\ \bar{\eta}(\eta, \mu, \nu) = \gamma \bar{\xi}(\mu, \nu) \eta e^{b\eta} + \bar{\eta}(\mu, \nu) e^{b\eta}, \\ \bar{v}(\eta, \mu, \nu) = \alpha \bar{\xi}(\mu, \nu) e^{b\eta} / b + \bar{v}(\mu, \nu), \end{cases} \quad (24)$$

которые удовлетворяют также и уравнению (23) с $d = 0$. Соединяя выражения (24) с выражениями (19), в которых должно быть $d = 0$, получаем решение уравнения (17) при $a = 0$:

$$\begin{cases} \bar{y} = (h(cx + \gamma y) + \beta) e^{by} - \alpha / b, \\ \bar{\eta} = (\bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + \gamma\eta) + \bar{\eta}(\mu, \nu)) e^{b\eta}, \\ \bar{v} = (-g\bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + \gamma\eta) + \alpha \bar{\xi}(\mu, \nu) / b - g\bar{\eta}(\mu, \nu)) e^{b\eta} + \bar{v}(\mu, \nu). \end{cases} \quad (25)$$

Решение (25) можно включить в решение (22), введя единое ограничение $a^2 + b^2 \neq 0$ и переобозначения $d \rightarrow -\alpha a$, $\alpha / b \rightarrow -\alpha$,

$$\begin{cases} \bar{y} = ((h(cx + \gamma y) + \beta) + \beta) e^{ax+by} + \alpha, \\ \bar{\eta} = (\bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + \gamma\eta) + \bar{\eta}(\mu, \nu)) e^{a\xi+b\eta}, \\ \bar{v} = -(\bar{\xi}(\mu, \nu)(g(c\xi + \gamma\eta) + \alpha) + g\bar{\eta}(\mu, \nu)) e^{a\xi+b\eta} + \bar{v}(\mu, \nu). \end{cases} \quad (26)$$

Соединяя общие решения (14) и (26) первого и второго уравнений системы (1), получим её общее экспоненциальное решение (3). Дополнительные ограничения в нём ($a\gamma - bc \neq 0$, $\partial(\bar{\mu}(\mu, \nu)) / \partial(\mu, \nu) \neq 0$) определяются условиями (2) его невырожденности, а компоненты χ^1 и χ^2 масштабной функции χ находятся его подстановкой в соответствующие функциональные уравнения системы (1).

В результате подстановки во второе уравнение системы (1) общего решения (16) получим следующее линейное решение:

$$\begin{cases} \bar{y} = acx^2 / 2 + bcxy + b\gamma y^2 / 2 + (h + gc)x + (\beta + g\gamma)y + \alpha, \\ \bar{\eta} = \bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + \gamma\eta) + \bar{\eta}(\mu, \nu), \\ \bar{v} = \bar{\xi}(\mu, \nu)(ac\xi^2 / 2 + bc\xi\eta + b\gamma\eta^2 / 2 + h\xi + \beta\eta) + \bar{\eta}(\mu, \nu)(a\xi + b\eta) + \bar{v}(\mu, \nu). \end{cases} \quad (27)$$

в котором $a\gamma - bc = 0$.

В совокупности общие решения (16) и (27) первого и второго уравнений системы (1) представляют собой ее общее линейное решение (4). Дополнительные к связи $a\gamma - bc = 0$ ограничения в нем (в частности, $a\beta - bh \neq 0$) вытекают из условий (2) его невырожденности, а компоненты масштабной функции $\chi = (\chi^1, \chi^2)$ находятся его подстановкой в каждое из уравнений системы (1), что и завершает доказательство теоремы.

Поставленная выше задача полностью решена. Найдено общее невырожденное решение системы функциональных уравнений (1), что подтверждает вложимость аддитивной ранга (2,2) ДФС ГДМ с известной вектор-функцией $g(x, y, \xi, \eta) = (g^1, g^2) = (x + \xi, y + \eta)$ в дуальную ранга (3,2) ДФС ГДМ с известной вектор-функцией $f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu) = (f^1, f^2) = (x\xi + \mu, x\eta + y\xi + \nu)$.

Список источников

1. Михайличенко Г.Г. Двуметрические феноменологические структуры ранга $(n+1,2)$ // Сибирский математический журнал. 1993. Т. 34, № 3. С. 132–143.
2. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии. Барнаул : Барнауль. гос. пед. ун-т, 2004. 132 с.
3. Михайличенко Г.Г. Полиметрические геометрии. Новосибирск : НГУ, 2001. 143 с.
4. Богданова Р.А. Классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 3 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1 (27). С. 11–24
5. Богданова Р.А. Двухточечные инварианты групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1 (39). С. 5–12. doi: 10.17223/19988621/39/1
6. Богданова Р.А., Михайличенко Г. Г., Мурадов Р.М. Последовательное по рангу $(n + 1,2)$ вложение двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств // Известия вузов. Математика. 2020. № 6. С. 9–14.
7. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. М. : МГУ, 1996. 262 с.
8. Владимиров Ю.С. Метафизика. 2-е изд., перераб. и доп. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 568 с.
9. Кулаков Ю.И. Теория физических структур. М. : Доминико, 2004. 847 с.
10. Михайличенко Г.Г. Математические основы и результаты Теории физических структур. Горно-Алтайск : РИО ГАГУ, 2016. 297 с.
11. Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Вложение аддитивной двуметрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга (2,2) в двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга (3,2) // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, № 1. С. 305–327. doi: 10.20537/vm180304
12. Кыров В.А. Двуметрические пространства // Известия вузов. Математика. 2005. № 8. С. 27–38.
13. Кыров В.А. О вложении двуметрических феноменологически симметричных геометрий // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 56. С. 5–16. doi: 10.17223/19988621/56/1
14. Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Невырожденные канонические решения одной системы функциональных уравнений // Известия вузов. Математика. 2021. № 8. С. 46–55. doi: 10.26907/0021-3446-2021-8-46-55.
15. Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Невырожденные канонические решения некоторой системы функциональных уравнений // Владикавказский математический журнал. 2022. Т. 24, № 1. С. 44–53. doi: 10.46698/u7680-5193-0172-d

References

1. Mikhailichenko G.G. (1993) Bimetric physical structures of rank $(n+1, 2)$. *Siberian Mathematical Journal*. 34(3). pp. 513–522.
2. Mikhailichenko G.G. (2004) *Dvumernyye geometrii* [Two-dimensional geometries]. Barnaul: Barnaul State Pedagogical University.
3. Mikhailichenko G.G. (2001) *Polimetricheskiye geometrii* [Polymetric geometries]. Novosibirsk: Novosibirsk State University.
4. Bogdanova R.A. (2014) Klassifikatsiya dvumetricheskikh fenomenologicheskikh simmetrichnykh dvumernykh geometriy ranga 3 [Classification of bi-metric phenomenological symmetric geometries of rank 3]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 27(1). pp. 11–24.
5. Bogdanova R.A. (2016) Dvukhtocheynyye invarianty grupp dvizheniy nekotorykh fenomenologicheskikh simmetrichnykh dvumernykh geometriy [Two-point invariants of groups of motions of some phenomenologically symmetric two-dimensional geometries]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 39(1). pp. 5–12. DOI: 10.17223/19988621/39/1.
6. Bogdanova R.A., Mikhailichenko G.G., Muradov R.M. (2020) Successive in rank $(n+1, 2)$ embedding of dimetric phenomenologically symmetric geometries of two sets. *Russian Mathematics*. 64(6). pp. 6–10.
7. Vladimirov Yu.S. (1996) *Relyatsionnaya teoriya prostranstva-vremeni i vzaimodeystviy. Chast 1. Teoriya sistem otnosheniy* [Relational theory of the space-time and interactions. Part 1. Theory of systems of relations]. Moscow: Moscow State University.
8. Vladimirov Yu.S. (2009) *Metafizika* [Metaphysics]. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy.
9. Kulakov Yu.I. (2004) *Teoriya fizicheskikh struktur* [Theory of physical structures]. Moscow: Dominiko.
10. Mikhailichenko G.G. (2016) *Matematicheskiye osnovy i rezultaty teorii fizicheskikh struktur* [Mathematical foundations and results of the theory of physical structures]. Gorno-Altaysk: Gorno-Altaysk State University.
11. Krov V.A., Mikhailichenko G.G. (2018) Vlozheniye additivnoy dvumetricheskoy fenomenologicheskikh simmetrichnoy geometrii dvukh mnozhestv ranga $(2, 2)$ v dvumetricheskiye fenomenologicheskikh simmetrichnyye geometrii dvukh mnozhestv ranga $(3, 2)$ [Embedding of the additive two-metric phenomenologically symmetric geometry of two sets of rank $(2, 2)$ into the two-metric phenomenologically symmetric geometries of two sets of rank $(3, 2)$]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki*. 28(3). pp. 305–327. DOI: 10.20537/vm180304.
12. Krov V.A. (2005) Two-Metric Spaces. *Russian Mathematics*. 49(5). pp. 25–35.
13. Krov V.A. (2018) O vlozhenii dvumetricheskikh fenomenologicheskikh simmetrichnykh geometriy [On the embedding of two-dimetric phenomenologically symmetric geometries]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 56. pp. 5–16. DOI: 10.17223/19988621/56/1.
14. Krov V.A., Mikhailichenko G.G. (2021) Nondegenerate canonical solutions of one system of functional equations. *Russian Mathematics*. 65(8). pp. 40–48. DOI: 10.3103/S1066369X21080053.
15. Krov V.A., Mikhailichenko G.G. (2022) Nevrozhdennyye kanonicheskiye resheniya nekotorykh sistem funktsional'nykh uravneniy [Nondegenerate canonical solutions of a system of functional equations]. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal – Vladikavkaz Mathematical Journal*. 24(1). pp. 44–53. DOI: 10.46698/u7680-5193-0172-d.

Сведения об авторе:

Богданова Рада Александровна – доцент, и.о. заведующего кафедрой математики, физики и информатики Горно-Алтайского государственного университета (Горно-Алтайск, Россия).
E-mail: bog-rada@yandex.ru

Information about the author:

Bogdanova Rada A. (Associate Professor, Acting Head of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science of the Gorno-Altai State University, Gorno-Altaysk, Russian Federation). E-mail: bog-rada@yandex.ru

The article was submitted 12.03.2024; accepted for publication 09.12.2024

Статья поступила в редакцию 12.03.2024; принята к публикации 09.12.2024

Научная статья

УДК 512.552

doi: 10.17223/19988621/92/2

MSC: 16R99

Изоморфизмы алгебр инцидентности

Петр Андреевич Крылов¹,
Цырендоржи Дашацыренович Норбосамбуев²

^{1,2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ krylov@math.tsu.ru

² nstsddts@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена изучению изоморфизмов между алгебрами инцидентности $K' = I(Y, R)$ и $K = I(X, R)$, где Y и X – предупорядоченные множества, R – алгебра над некоторым коммутативным кольцом T . При некоторых предположениях доказывается, что любой изоморфизм алгебр $K' \rightarrow K$ индуцирует изоморфизм предупорядоченных множеств $Y \rightarrow X$. При этом всякий изоморфизм между K' и K равен композиции диагонального изоморфизма из K' в K и внутреннего автоморфизма алгебры K .

Ключевые слова: алгебра инцидентности, изоморфизм, предупорядоченное множество

Благодарности: Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (РНФ) № 23-21-00375, <https://rscf.ru/en/project/23-21-00375/>

Для цитирования: Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д. Изоморфизмы алгебр инцидентности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 19–28. doi: 10.17223/19988621/92/2

Original article

Isomorphisms of incidence algebras

Piotr A. Krylov¹, Tsyrendorzhi D. Norbosambuev²

^{1,2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ krylov@math.tsu.ru

² nstsddts@yandex.ru

Abstract. Let Y and X be preordered sets, R be an algebra over some commutative ring, $K' = I(Y, R)$ and $K = I(X, R)$ be incidence algebras. Several questions can be formulated regarding isomorphisms between the algebras K' and K . One of them is known as the isomorphism problem. It is usually written in the following form. If the algebras K' and K are isomorphic, then will Y and X be isomorphic as preordered sets? Another general question asks us to find the structure of isomorphisms between K' and K .

The article contains two theorems. Theorem 3.1, under certain assumptions about the algebras K' and K and the ring R , gives a positive answer to the isomorphism problem. Theorem 3.2, under one condition on the algebras K' and K , states that any isomorphism of the algebras K' and K after conjugation by an inner automorphism of the algebra K becomes a diagonal (in a certain sense) isomorphism.

Keywords: incidence algebra, isomorphism, preordered set

Acknowledgments: This work was supported by grant of Russian Science Foundation (RSF) № 23-21-00375, <https://rscf.ru/en/project/23-21-00375/>

For citation: Krylov, P.A., Norbosambuev, T.D. (2024) Isomorphisms of incidence algebras. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 19–28. doi: 10.17223/19988621/92/2

Введение

Данная работа продолжает статьи [1] и [2], в которых исследованы автоморфизмы и дифференцирования колец инцидентности.

Один из естественных и важных вопросов теории алгебр инцидентности нестрогое можно сформулировать следующим образом: насколько предупорядоченное множество X определяет алгебру инцидентности $I(X, R)$? В более точной форме суть данного вопроса выражает известная проблема изоморфизма для колец инцидентности (см.: [3. 7.2]). А в более широком контексте речь идет об описании изоморфизмов между алгебрами инцидентности.

С начальным этапом исследования изоморфизмов колец инцидентности можно ознакомиться в [3]. Итог данного этапа подводит теорема 7.2.5 в этой книге. Она утверждает, что если X и Y – локально конечные частично упорядоченные множества, F – поле и кольца инцидентности $I(X, F)$ и $I(Y, F)$ изоморфны, то X и Y являются изоморфными частично упорядоченными множествами.

В дальнейшем записанный результат переносился и обобщался на другие кольца инцидентности $I(X, R)$, где X – произвольное предупорядоченное множество, R – некоторое кольцо. Так, работа [4] содержит теорему, подобную теореме 3.1, для случая, когда фактор-кольцо $R/J(R)$ неразложимо ($J(R)$ – радикал Джекобсона кольца R ; см. п. «е» в конце разд. 2 настоящей статьи). Статья [5] посвящена некоторому аналогу проблемы изоморфизма для алгебр инцидентности категорий Мёбиуса. В [6] и [7] исследуются изоморфизмы так называемых формальных матричных колец инцидентности.

В раздел 1 настоящей работы включена некоторая необходимая информация о кольцах инцидентности. Раздел 2 содержит три вопроса (а)–(с). Два из них касаются проблемы изоморфизма для колец инцидентности. Еще один вопрос относится к задаче об описании изоморфизмов между кольцами инцидентности. Также формулируется несколько условий для алгебр инцидентности. Затем устанавливаются различные соотношения между введенными условиями. Заключительный раздел 3 состоит из двух теорем и их доказательств. При определенных условиях эти теоремы отвечают на вопросы (а)–(с) из раздела 2.

В статье рассматриваются только ассоциативные алгебры с ненулевой единицей.

1. Об алгебрах инцидентности

Для удобства чтения приведем некоторую информацию о предупорядоченных множествах (см.: [3]).

Пусть X – произвольное множество и $\leq$ – рефлексивное и транзитивное отношение на X . В таком случае система $\langle X, \leq \rangle$ называется предупорядоченным множеством, а $\leq$ – предпорядок на X . Если дополнительно отношение $\leq$ антисимметрично, то $\langle X, \leq \rangle$ – частично упорядоченное множество.

Везде в тексте $\langle X, \leq \rangle$ – предупорядоченное множество. Для любых элементов x, y из X через $[x, y]$ обозначают подмножество $\{z \in X \mid x \leq z \leq y\}$ и называют его интервалом в X . Интервал вида $[x, x]$ обозначают через $[x]$.

Зададим на X бинарное отношение $\sim$, положив $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$ и $y \leq x$. Ясно, что $\sim$ – отношение эквивалентности на X . Соответствующие классы эквивалентности имеют вид $[x]$ для всевозможных $x \in X$. Отношение предпорядка $\leq$ согласовано с отношением эквивалентности $\sim$. Следовательно, на фактормножестве $\bar{X} = X / \sim$ появляется индуцированное отношение $\leq$, причем $\langle \bar{X}, \leq \rangle$ – частично упорядоченное множество.

Считаем далее, что все интервалы в X конечны. В таком случае X называют локально конечным предупорядоченным множеством. Договоримся в дальнейшем обозначать через x элементы частично упорядоченного множества $\bar{X}$, т.е. классы эквивалентности вида $[x]$. Таким образом, для обозначения класса $[x]$ будем использовать какой-нибудь его представитель. Такая договоренность не приведет к путанице. В конкретной ситуации всегда ясно, об элементах какого именно множества ($\bar{X}$ или X) идет речь.

Пусть далее буква R обозначает алгебру над некоторым коммутативным кольцом T .

Алгебра инцидентности является некоторым кольцом функций. Пусть $\langle X, \leq \rangle$ – произвольное локально конечное предупорядоченное множество. Положим $I(X, R) = \{f : X \times X \rightarrow R \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \not\leq y\}$. Функции складываются поточечно. Произведение функций f и g из $I(X, R)$ задается формулой

$$(fg)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) \cdot g(z, y) \quad (1)$$

для каждых $x, y \in X$. Для любых $t \in T$ и $x, y \in X$ еще полагаем $(tf)(x, y) = tf(x, y)$. В результате получаем T -алгебру $I(X, R)$, которая называется алгеброй инцидентности или кольцом инцидентности предупорядоченного множества X над кольцом R . Конкретную алгебру $I(X, R)$ будем обозначать буквой A .

Будут полезны некоторые специальные функции из $I(X, R)$. Для данного $x \in X$ положим $e_{[x]}(t, t) = 1$ для всех $t \in [x]$ и $e_{[x]}(z, y) = 0$ для оставшихся пар (z, y) . Система $\{e_{[x]} \mid x \in X\}$ состоит из попарно ортогональных центральных в L идемпотентов (кольцо L определено в следующем абзаце). На основании соглашения об обозначении класса $[x]$ каким-то его представителем будем писать e_x вместо $e_{[x]}$.

Определим подкольцо L и идеал M в A . Положим $L = \{f \in A \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \neq y\}$ и $M = \{f \in A \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \sim y\}$. Имеем прямую сумму T -модулей $A = L \oplus M$,

т.е. кольцо A есть расщепляющееся расширение идеала M с помощью подкольца L . Идеал M естественным образом считаем L – L -бимодулем. Кроме того, M – неунитальная алгебра.

Идеал M лежит в радикале Джекобсона алгебры A . Следовательно, элемент $1 + d$ обратим в A для всякого $d \in M$ (см.: [3. Theorem 1.2.3]).

Пусть дан произвольный интервал $[x]$. Обозначим через $R_{[x]}$ множество функций $f \in A$, для которых $f(z, y) = 0$, если $z \not\prec x$ или $y \not\prec x$. Как и в случае идемпотентов e_x , пишем R_x вместо $R_{[x]}$. Справедливы равенства $R_x = e_x A e_x = e_x L e_x$. Делаем вывод, что R_x – кольцо с единицей e_x . Если перейти к ограничениям функций из A на $[x] \times [x]$, то фактически R_x – это алгебра всех функций $[x] \times [x] \rightarrow R$ с поточечным сложением и произведением типа свертки как в (1). Выберем какую-либо нумерацию интервала $[x]$: $[x] = \{x_1, \dots, x_n\}$. После этого, если функции $f \in R_x$ поставить в соответствие матрицу $(f(x_i, x_j))$, то придем к изоморфизму алгебр $R_x \cong M(n, R)$. Возьмем теперь два различных интервала $[x]$, $[y]$ и положим $M_{xy} = \{f \in A \mid f(s, t) = 0, \text{ если } s \not\prec x \text{ или } t \not\prec y\}$. Тогда $M_{xy} = e_x A e_y$ и, значит, M_{xy} является R_x – R_y -бимодулем.

Уточним, что $M_{xy} = 0$, если $x \not\leq y$. А при $x < y$ существует канонический изоморфизм $M_{xy} \cong M(n \times m, R)$, где $n = |[x]|$, $m = |[y]|$, относительно указанных выше изоморфизмов $R_x \cong M(n, R)$ и $R_y \cong M(m, R)$. После отождествлений всех алгебр R_x с $M(n, R)$ и бимодулей M_{xy} с $M(n \times m, R)$ становится ясно, что действия колец R_x и R_y на M_{xy} будут обычными умножениями матриц. Понятно также, что M_{xy} есть L – L -бимодуль. Действие L на M_{xy} сводится к действию R_x слева и R_y справа. Еще раз обратим внимание, что под индексами в R_x и M_{xy} подразумеваем $[x]$ и $[x][y]$ соответственно (см. выше).

Произведение $\prod_{x, y \in X} M_{xy}$ обладает структурой L – L -бимодуля. Именно, если $f \in L$,

$$(g_{xy}) \in \prod_{x, y \in X} M_{xy}, \text{ то } f(g_{xy}) = (f_x g_{xy}) \text{ и } (g_{xy})f = (g_{xy} f_y), \text{ где } f_x = e_x f e_x \text{ и } f_y = e_y f e_y.$$

Определим теперь в бимодуле $\prod_{x, y \in X} M_{xy}$ умножение посредством формулы

$$(g_{xy})(h_{xy}) = (d_{xy}), \text{ где } d_{xy} = \sum_{x \leq z \leq y} g_{xz} \cdot h_{zy}. \text{ После чего этот бимодуль становится (не-}$$

унитальной) алгеброй.

Предложение 1.1. Существуют канонические изоморфизмы алгебр $L \cong \prod_{x \in X} R_x$, а также L – L -бимодулей и алгебр.

Доказательство. Определим отображение $\omega: L \rightarrow \prod_{x \in X} R_x$, полагая $\omega(f) = (f_x)$

для каждого f из L , где $f_x = e_x f e_x$. Тогда ω – изоморфизм алгебр. Отображение $\varepsilon: M \rightarrow \prod_{x, y \in X} M_{xy}$, $\varepsilon(g) = (g_{xy})$, где $g_{xy} = e_x g e_y$, будет изоморфизмом L – L -бимодулей

и алгебр. ■

В дальнейшем мы не будем различать соответствующие объекты относительно изоморфизмов ω и ε .

2. Некоторые определения и вспомогательные результаты

Напоминаем о договоренности из предыдущего раздела о том, что все кольца являются алгебрами над некоторым коммутативным кольцом T . Пусть Y и X – произвольные предупорядоченные множества, $\bar{Y}$ и $\bar{X}$ – соответствующие частично упорядоченные множества (см. разд. 1). Далее, пусть R – некоторое кольцо, $K' = I(Y, R)$ и $K = I(X, R)$ – алгебры инцидентности. Сформулируем следующие вопросы.

(а) Когда из изоморфизма алгебр $K' \cong K$ следует изоморфизм частично упорядоченных множеств $\bar{Y} \cong \bar{X}$?

(б) Когда из изоморфизма алгебр $K' \cong K$ следует изоморфизм предупорядоченных множеств $Y \cong X$?

Вопросы (а) и (б) являются некоторыми вариациями известной проблемы изоморфизма для колец инцидентности.

Третий вопрос связан с описанием изоморфизмов между алгебрами K' и K .

(с) При каких условиях любой изоморфизм $\varphi: K' \rightarrow K$ можно «диагонализировать»? Подразумевается, что должны найтись внутренний автоморфизм ν алгебры K и диагональный изоморфизм $\gamma: K' \rightarrow K$ такие, что $\varphi = \nu\gamma$.

Как в разделе 1, запишем разложение $K = L \oplus M$ и подобное разложение для алгебры K' : $K' = L_1 \oplus M_1$, в котором подкольцо L_1 и идеал M_1 имеют понятный смысл.

Располагая произвольным гомоморфизмом алгебр $\varphi: K' \rightarrow K$, можно стандартным образом составить 2×2 матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$, где $\alpha: L_1 \rightarrow L$, $\beta: M_1 \rightarrow M$, $\gamma: M_1 \rightarrow L$, $\delta: L_1 \rightarrow M$ – определенные T -модульные гомоморфизмы.

Мы будем заниматься только «треугольным» случаем, т.е. когда $\gamma = 0$. И рассматриваем лишь изоморфизмы φ . Также не будем различать изоморфизм φ и соответствующую ему 2×2 матрицу. Иногда пишем «треугольный изоморфизм» φ , где $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$, и «диагональный изоморфизм» φ , где $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Если $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ – треугольный изоморфизм алгебр $K' \rightarrow K$, то α и β являются изоморфизмами алгебр $L_1 \rightarrow L$ и $M_1 \rightarrow M$ соответственно (считаем M_1 и M неунитальными алгебрами).

В разделе 1 были введены идемпотенты e_x алгебры K . Обозначим через f_y аналогичные идемпотенты алгебры K' .

Условия (I) и (II) ниже можно рассматривать как перенос условий (I) и (II) из раздела 5 работы [8] на ситуацию двух алгебр K' и K .

(I) Любой изоморфизм $K' \rightarrow K$ является треугольным.

(II) Для любого изоморфизма $\varphi: K' \rightarrow K$ и каждого $x \in X$ справедливо включение $\varphi^{-1}(e_x) \in f_y + M_1$ для какого-то $y \in Y$.

Для обоих условий выполняются их симметричные аналоги. Конкретно, если верно (I), то всякий изоморфизм $K \rightarrow K'$ также будет треугольным. Прежде чем перейти к (II), раскроем связь между данными условиями.

Доказательство следующей леммы фактически повторяет доказательство леммы 5.6 работы [8], и мы опускаем его.

Лемма 2.1. Для алгебр K' и K справедливы следующие утверждения:

1. Из условия (II) вытекает условие (I).
2. Для неразложимого кольца R условия (II) и (I) равносильны.

Напомним об изоморфизме $L = \prod_{x \in X} R_x$ из предложения 1.1. А теперь вернемся к вопросу о симметричности условия (II). Оформи́м ответ на него в виде следующей леммы.

Лемма 2.2. Если условие (II) выполнено, то оно также справедливо для алгебр K и K' .

Доказательство. Мы должны проверить, что для всякого изоморфизма $\psi: K \rightarrow K'$ и любого $y \in Y$ имеет место включение $\psi^{-1}(f_y) \in e_x + M$ для некоторого $x \in X$.

Поскольку условие (II) выполнено, то в силу леммы 2.1 все изоморфизмы между K' и K в любом направлении будут треугольными. Поэтому имеем

$$\psi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \text{ и } \psi^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ \delta' & \beta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Применение условия (II) к ψ^{-1} влечет, что для любого $x \in X$ существует $y \in Y$ со свойством $\psi(e_x) \in f_y + M_1$ для некоторого $y \in Y$. Поэтому $\alpha(e_x) = f_y$, а также $\psi^{-1}(f_y) = e_x + d$, где $d \in M$.

Если $z \in X$, $z \neq x$ и $\alpha(e_z) = f_t$, то из равенства $e_x e_z = 0$ вытекает равенство $f_y f_t = 0$, откуда $y \neq t$. Делаем вывод о том, что сопоставление $x \rightarrow y$, где $\alpha(e_x) = y$, задает биекцию множества X на какое-то подмножество Y' из Y .

Достаточно проверить, что $Y' = Y$. Иначе, пусть $y \in Y$ и $y \notin Y'$. Затем, пусть $\alpha(a) = f_y$, где $a \in L$. Запишем $a = (a_x) = a_s + c$, где $a_s \neq 0$, $c \in \prod_{t \neq s} R_t$. Получаем соот-

ношения $\psi(e_s) \in f_k + M_1$ и $\alpha(e_s) = f_k$ для некоторого $k \in Y'$. Затем имеем $\alpha(e_s a) = f_k f_y = 0$. Отсюда $e_s a = a_s = 0$, что противоречит выбору элемента a_s . Закljučаем, что $Y' = Y$. ■

Приведем одно условие на некоторое кольцо S .

(1) Для любых ортогональных идемпотентов $e, f \in S$ из равенства $fSe = 0$ следует равенство $eSf = 0$.

Следующее утверждение является некоторым аналогом леммы 5.7 работы [8]. Его доказательство также повторяет доказательство этой леммы.

Лемма 2.3. Если все кольца R_x обладают свойством (1), то для алгебр K' и K выполняется условие (I).

После доказательства леммы 5.7 работы [8] отмечено, что кольцо $M(n, R)$ удовлетворяет условию (1), если кольцо R относится к одному из следующих классов колец:

- 1) локальные кольца;
- 2) области главных левых (или правых) идеалов;
- 3) коммутативные дедекиндовы области.

С учетом лемм 2.1 и 2.3 получаем следующее. Если кольцо R принадлежит одному из классов колец 1–3, то алгебры K' и K удовлетворяют условиям (I) и (II).

Записанное ниже утверждение переносит лемму 5.9 из [8] на ситуацию двух алгебр K' и K . При этом и доказательство этой леммы 5.9 после незначительных поправок годится в этой более общей ситуации.

Лемма 2.4. Условие (II) для алгебр K' и K будет справедливо, если фактор-кольцо $R/J(R)$ неразложимо.

А теперь можно в целом воспроизвести текст, помещенный в конце раздела 5 работы [8]. Сделаем это очень кратко.

Самым общим и удобным условием для ответов на вопросы (а)–(с) можно указать условие (II). Алгебры K' и K удовлетворяют условию (II), если кольцо R относится к одному из следующих классов колец:

- а) локальные кольца;
- б) области главных левых (или правых) идеалов;
- с) коммутативные дедекиндовы области;
- д) Y и X – частично упорядоченные множества и R не имеет ненулевых идемпотентов, кроме 1;
- е) такое кольцо R , что фактор-кольцо $R/J(R)$ неразложимо.

В следующем разделе считаем, что алгебры K' и K удовлетворяют условию (II). В частности, это будет так, если R – какое-то кольцо из списка а–е.

3. Вопросы (а)–(с)

Символы Y , X , $\bar{Y}$, $\bar{X}$, K' и K продолжают иметь значение, приданное им в предыдущем разделе. Также действует недавняя договоренность по поводу алгебр K' и K . Серьезную роль будет играть (n, m) -условие, сформулированное ниже (см. текст перед теоремой 9.1 в [8]).

Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ из $M(n, R) \cong M(m, R)$ следует $n = m$.

Например, (n, m) -условию удовлетворяют кольца R из следующего списка: коммутативные кольца, локальные кольца, области главных левых (правых) идеалов.

Теорема 3.1. Для алгебр K' и K , удовлетворяющих условию (II), справедливы следующие утверждения.

1. Любой изоморфизм алгебр $K' \rightarrow K$ индуцирует изоморфизм частично упорядоченных множеств $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$.

2. Если кольцо R удовлетворяет (n, m) -условию, то всякий изоморфизм $K' \rightarrow K$ индуцирует изоморфизм предупорядоченных множеств $Y \rightarrow X$.

Доказательство.

1. Зафиксируем некоторый изоморфизм $\varphi: K' \rightarrow K$. Он треуголен, поскольку выполняется условие (II) (лемма 2.1). Если $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$, то α – изоморфизм алгебр $L_1 \rightarrow L$. Для всякого $y \in Y$ найдется такой $x \in X$, что $\alpha(f_y) = e_x$. Если $t \in Y$, $t \neq y$ и $\alpha(f_t) = e_s$, то из $f_y f_t = 0$ вытекает $e_x e_s = 0$ и, значит, $x \neq s$.

Пусть теперь $z \in X$. Так как обратный изоморфизм φ^{-1} имеет вид: $\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, то заключаем, что $\alpha^{-1}(e_z) = f_y$ для какого-то $y \in Y$ и $\alpha(f_y) = e_z$. Делаем вывод, что α индуцирует биекцию частично упорядоченных множеств $\bar{\tau}: \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$. Именно,

если $\alpha(f_y) = e_x$, то $\bar{\tau}(y) = x$ и, следовательно, $\alpha(f_y) = e_{\bar{\tau}(y)}$. (Еще раз обратим внимание на соглашение в разделе 1 об индексах $x, y, \dots$ в символах $e_x, f_y, \dots$)

Покажем, что $\bar{\tau}$ – изоморфизм частично упорядоченных множеств. Пусть $y, z \in \bar{Y}$ и $y < z$. Тогда $(M_1)_{yz} = f_y M_1 f_z \neq 0$. Далее получаем $\varphi(f_y) = \alpha(f_y) + \delta(f_y) = e_{\bar{\tau}(y)} + \delta(f_y)$ и аналогично $\varphi(f_z) = e_{\bar{\tau}(z)} + \delta(f_z)$. Существует внутренний автоморфизм μ алгебры K , для которого по теореме 5.5 работы [8] верны равенства $\mu(e_{\bar{\tau}(y)} + \delta(f_y)) = e_{\bar{\tau}(y)}$, $\mu(e_{\bar{\tau}(z)} + \delta(f_z)) = e_{\bar{\tau}(z)}$. Теперь можем записать равенства $\mu\varphi(M_1)_{yz} = \mu\varphi(f_y M_1 f_z) = e_{\bar{\tau}(y)} M e_{\bar{\tau}(z)} = M_{\bar{\tau}(y)\bar{\tau}(z)} \neq 0$. Отсюда $\bar{\tau}(y) < \bar{\tau}(z)$.

Наоборот, если дано, что $\bar{\tau}(y) < \bar{\tau}(z)$, то аналогичным методом, используя изоморфизм φ^{-1} , можно получить неравенство $y < z$. Все сказанное подводит к мысли, что $\bar{\tau}$ – изоморфизм частично упорядоченных множеств $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$.

2. Снова предположим, что $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}: K' \rightarrow K$ – изоморфизм. Из доказательства п. 1 вытекает, что φ индуцирует изоморфизм $\alpha: L_1 \rightarrow L$. Последний, в свою очередь, индуцирует изоморфизм между R'_y и $R_{\bar{\tau}(y)}$ для всякого $y \in Y$ (подразумевается, что мы располагаем равенством $L_1 = \prod_{y \in Y} R'_y$, аналогичным равенству $L = \prod_{x \in X} R_x$ из предложения 1.1). Если $R'_y \cong M(n, R)$ и $R_{\bar{\tau}(y)} \cong M(m, R)$, то в силу (n, m) -условия получаем $n = m$. Из этого следует равномощность интервалов $[y]$ в Y и $[\bar{\tau}(y)]$ в X . Следовательно, изоморфизм $\bar{\tau}: \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ можно поднять до изоморфизма предупорядоченных множеств $\tau: Y \rightarrow X$. ■

Вторая теорема дает положительный ответ на вопрос (с) для наших колец K' и K .

Теорема 3.2. Пусть алгебры K' и K удовлетворяют условию (II). Тогда всякий изоморфизм между K' и K равен композиции диагонального изоморфизма из K' в K и внутреннего автоморфизма алгебры K .

Доказательство. Возьмем произвольный изоморфизм $\varphi: K' \rightarrow K$, и пусть $\bar{\tau}: \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ – изоморфизм из доказательства теоремы 3.1, п. 1. Образует элемент $v = (v_{st})$ в K , где $v_{st} = \varphi(f_{\bar{\tau}^{-1}(t)})(s, t)$ для любых $s, t \in X$. Заметим, что $v_{e_x} = \varphi(f_{\bar{\tau}^{-1}(x)})e_x$ при всяком $x \in X$. Имеем $v_{tt} = 1$, и поэтому элемент v обратим в K (предложение 4.1 в [8]).

Итак, для каждого $z \in Y$ можно записать равенство $v e_{\bar{\tau}(z)} = \varphi(f_z) e_{\bar{\tau}(z)}$. Справедливо также равенство $\varphi(f_z) v = \varphi(f_z) e_{\bar{\tau}(z)}$. Таким образом, имеем равенства $\varphi(f_z) v = v e_{\bar{\tau}(z)}$, $v^{-1} \varphi(f_z) v = e_{\bar{\tau}(z)}$ для всякого $z \in Y$. Пусть μ – внутренний автоморфизм алгебры K , определяемый элементом v . Тогда верно равенство $\mu \varphi(f_z) = e_{\bar{\tau}(z)}$, $z \in Y$. Полагая $\gamma = \mu \varphi$, получаем $\varphi = \mu^{-1} \gamma$, где γ – диагональный изоморфизм $K' \rightarrow K$, а μ^{-1} – внутренний автоморфизм алгебры K . ■

Следствие 3.3. Пусть алгебры $I(Y, R)$ и $I(X, R)$ удовлетворяют условию (II), Y и X – частично упорядоченные множества. Тогда из изоморфизма $I(Y, R) \cong I(X, R)$ вытекает изоморфизм $Y \cong X$.

Некоторые кольца R , для которых алгебры $I(Y, R)$ и $I(X, R)$ удовлетворяют условию (II), указаны в конце предыдущего раздела.

Замечание. Если X – конечное предпорядоченное множество, то кольцо инцидентности $I(X, R)$ часто называют кольцом структуральных матриц. Об этих кольцах хорошо написано во введении к статье [9], в которой доказана следующая теорема. Пусть R – полупервичное нётерово кольцо, B_1 и B_2 – булевы матрицы порядка n такие, что $M(n, B_1, R) \cong M(n, B_2, R)$. Тогда найдется подстановка τ порядка n со свойством $B_2 = \tau B_1$.

Список источников

1. Кайгородов Е.В., Крылов П.А. Кольца инцидентности и их автоморфизмы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 41–50.
2. Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д. Об автоморфизмах и дифференцированиях редуцированных алгебр и коалгебр инцидентности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 90. С. 33–39.
3. Spiegel E., O'Donnell C.J. Incidence Algebras. New York : Marcel Dekker, 1997. 334 p.
4. Voss E.R. On the isomorphism problem for incidence rings // Illinois J. Math. 1980. Vol. 24 (4). P. 624–638.
5. Leroux P. The isomorphism problem for incidence algebras of Möbius categories // Illinois J. Math. 1982. Vol. 26 (1). P. 52–61.
6. Tapkin D.T. Isomorphisms of formal matrix incidence rings // Russian Mathematics. 2017. Vol. 61. P. 73–79.
7. Tapkin D.T. Isomorphisms of formal matrix rings with zero trace ideals // Siberian Math. Zh. 2018. Vol. 59. P. 523–535.
8. Krylov P., Tuganbaev A. Incidence rings: automorphisms and derivations // arXiv:2305.02984v1 [math.RA], 2023. doi: 10.48550/arXiv.2305.02984
9. Dăscălescu S., van Wyk L. Do Isomorphic Structural Matrix Rings have Isomorphic Graphs? // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 124 (5). P. 1385–1391.

References

1. Kaigorodov E.V., Krylov P.A. (2024) Incidence ring and their automorphisms. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 41–50.
2. Krylov P.A., Norbosambuev T.D. (2024) On automorphisms and derivations of reduced incidence algebras and coalgebras. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*. 90. pp. 33–39.
3. Spiegel E., O'Donnell C.J. (1997) *Incidence Algebras*. New York: Marcel Dekker.
4. Voss E.R. (1980) On the isomorphism problem for incidence rings. *Illinois Journal of Mathematics*. 24. pp. 624–638.
5. Leroux P. (1982) The isomorphism problem for incidence algebras of Möbius categories. *Illinois Journal of Mathematics*. 26. pp. 52–61.
6. Tapkin D.T. (2017) Isomorphisms of formal matrix incidence rings. *Russian Mathematics*. 61. pp. 73–79.
7. Tapkin D.T. (2018) Isomorphisms of formal matrix rings with zero trace ideals. *Siberian Mathematical Journal*. 59. pp. 523–535.
8. Krylov P., Tuganbaev A. (2023) Incidence rings: automorphisms and derivations. arXiv:2305.02984v1 [math.RA]. DOI: 10.48550/arXiv.2305.02984.
9. Dăscălescu S., van Wyk L. (1996) Do Isomorphic Structural Matrix Rings Have Isomorphic Graphs? *Proceedings of the American Mathematical Society*. 124. pp. 1385–1391.

Сведения об авторах:

Крылов Петр Андреевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: krylov@math.tsu.ru

Норбосамбуев Цырендоржи Дашацыренович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ntsddts@yandex.ru

Information about the authors:

Krylov Piotr A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: krylov@math.tsu.ru

Norbosambuev Tsyrendorzhi D. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ntsddts@yandex.ru

The article was submitted 03.06.2024; accepted for publication 09.12.2024

Статья поступила в редакцию 03.06.2024; принята к публикации 09.12.2024

Научная статья

УДК 519.64

MSC: 65R20, 31B10

doi: 10.17223/19988621/92/3

Конструктивный метод решения некоторых классов гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода

Эльнур Гасан оглы Халилов

*Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,
Баку, Азербайджан;*

Западно-Каспийский Университет, Баку, Азербайджан, elnurkhalil@mail.ru

Аннотация. Исследуются приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений, полученных из внешней краевой задачи Неймана и внешней краевой задачи с импедансным условием для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве. Следует указать, что в этих гиперсингулярных интегральных уравнениях участвует оператор, порожденный нормальной производной потенциала двойного слоя. Построенный А.М. Ляпуновым контрпример показывает, что для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью нормальная производная, вообще говоря, не существует, т.е. оператор, порожденный нормальной производной потенциала двойного слоя, не определен в пространстве непрерывных функций. Применяя метод регуляризации, рассматриваемые гиперсингулярные интегральные уравнения внешней краевой задачи Неймана и внешней краевой задачи с импедансным условием для уравнения Гельмгольца приведены к слабо-сингулярным интегральным уравнениям. Построив квадратурные формулы для одного класса криволинейных интегралов, рассматриваемые интегральные уравнения мы заменяем системой алгебраических уравнений. Затем с использованием теоремы Г.М. Вайнникко о сходимости для линейных операторных уравнений доказано, что полученные системы алгебраических уравнений разрешимы единственным образом и решения системы алгебраических уравнений сходятся к значению точного решения рассматриваемых гиперсингулярных интегральных уравнений в опорных точках. Указывается скорость сходимости метода.

Ключевые слова: краевая задача Неймана, краевая задача с импедансным условием, уравнение Гельмгольца, метод интегральных уравнений, криволинейный гиперсингулярный интеграл, метод коллокации

Для цитирования: Халилов Э.Г. Конструктивный метод решения некоторых классов гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 29–47. doi: 10.17223/19988621/92/3

Constructive method for solving some classes of hypersingular integral equations of the second kind

Elnur H. Khalilov

Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan;
Western Caspian University, Baku, Azerbaijan, elnurkhalil@mail.ru

Abstract. The paper studies approximate methods for solving hypersingular integral equations obtained from the Neumann external boundary value problem and from the external boundary value problem with the impedance condition for the Helmholtz equation in two-dimensional space. It should be pointed out that these hypersingular integral equations involve an operator generated by the normal derivative of the double layer potential. A counterexample built by A.M. Lyapunov shows that the normal derivative for a double layer potential with continuous density, generally speaking, does not exist, i.e., the operator generated by the normal derivative of the double layer potential is not defined in the space of continuous functions. Using the regularization method, the considered hypersingular integral equations of the external Neumann boundary value problem and the external boundary value problem with the impedance condition for the Helmholtz equation are reduced to weakly singular integral equations. Having constructed quadrature formulas for one class of curvilinear integrals, the integral equations under consideration are replaced by a system of algebraic equations. Then, using G.M. Vainikko's theorem on convergence for linear operator equations, we prove that the resulting systems of algebraic equations are uniquely solvable, and the solutions to the system of algebraic equations converge to the value of the exact solution of the considered hypersingular integral equations at the reference points, and the rate of convergence of the method is indicated.

Keywords: Neumann boundary value problem, impedance boundary value problem, Helmholtz equation, integral equations method, curvilinear hypersingular integral, collocation method

For citation: Khalilov, E.H. (2024) Constructive method for solving some classes of hypersingular integral equations of the second kind. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 29–47. doi: 10.17223/19988621/92/3

1. Введение и постановка задачи

Известно, что в частных случаях (когда область является кругом, квадратом и др.) можно найти точное решение внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве. Однако во многих случаях невозможно найти точное решение внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца. В связи с этим возникает интерес к исследованию приближенного решения таких краевых задач. Одним из методов решения внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца является приведение к интегральному уравнению второго рода. Отметим, что основное преимущество применения метода интегральных уравнений к исследованию внешних краевых задач заключается в том, что подобный подход

позволяет свести задачу, поставленную для неограниченной области, к задаче для ограниченной области меньшей размерности.

Пусть $D \subset R^2$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей L , а f , g и λ – заданные непрерывные функции на L . Рассмотрим следующие краевые задачи для уравнения Гельмгольца.

Внешняя краевая задача Неймана. Найти функцию $u \in C^{(2)}(R^2 \setminus \bar{D}) \cap C(R^2 \setminus D)$, обладающую нормальной производной в смысле равномерной сходимости, т.е. предел

$$\frac{\partial u(x)}{\partial v(x)} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} (v(x), \text{grad} u(x + h v(x))), \quad x \in L,$$

существует равномерно на L , удовлетворяющую уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в $R^2 \setminus \bar{D}$, условию излучения Зоммерфельда

$$\left(\frac{x}{|x|}, \text{grad} u(x) \right) - i k u(x) = o\left(\frac{1}{|x|^{1/2}} \right), \quad x \rightarrow \infty,$$

равномерно по всем направлениям $x/|x|$, и граничному условию $\frac{\partial u(x)}{\partial v(x)} = f(x)$ на L ,

где $v(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in L$, Δ – оператор Лапласа, k – волновое число, причем $\text{Im} k \geq 0$.

Внешняя задача с импедансным краевым условием. Найти функцию $u \in C^{(2)}(R^2 \setminus \bar{D}) \cap C(R^2 \setminus D)$, обладающую нормальной производной в смысле равномерной сходимости, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца в $R^2 \setminus \bar{D}$, условию излучения Зоммерфельда на бесконечности и граничному условию $\frac{\partial u(x)}{\partial v(x)} + \lambda(x)u(x) = g(x)$ на L , где $\text{Im}(\bar{k}\lambda(x)) \geq 0$, $x \in L$.

Пусть функция $u(x)$ является решением внешней краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца. В работе [1. С. 116] показано, что неизвестные граничные значения $\psi(x) = u(x)$, $x \in L$ удовлетворяют граничному интегральному уравнению второго рода

$$\psi - K\psi = -S f \quad (1)$$

и гиперсингулярному интегральному уравнению первого рода

$$T\psi = f + \tilde{K} f, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} (S\phi)(x) &= 2 \int_L \Phi_k(x, y) \phi(y) dl_y, \quad x \in L, \\ (K\phi)(x) &= 2 \int_L \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial v(y)} \phi(y) dl_y, \quad x \in L, \\ (\tilde{K}\phi)(x) &= 2 \int_L \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial v(x)} \phi(y) dl_y, \quad x \in L, \end{aligned}$$

$$(T\varphi)(x) = 2 \frac{\partial}{\partial v(x)} \left(\int_L \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial v(y)} \varphi(y) dl_y \right), \quad x \in L,$$

$\Phi_k(x, y)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, т.е.

$$\Phi_k(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} & \text{при } k = 0, \\ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|) & \text{при } k \neq 0, \end{cases}$$

здесь $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, определяемая формулой $H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iN_0(z)$, $J_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$ – функция Бесселя ну-

левого порядка, $N_0(z) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z}{2} + C \right) J_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$ – функция

Неймана нулевого порядка, а $C = 0,57721\dots$ – постоянная Эйлера.

Построенный А.М. Ляпуновым (см.: [2. С. 89–90]) контрпример показывает, что для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью нормальная производная, вообще говоря, не существует. Следовательно, оператор T не определен в пространстве $C(L)$ всех непрерывных на кривой L функций с нормой $\|\varphi\|_{\infty} = \max_{x \in L} |\varphi(x)|$. Кроме того, несмотря на разрешимость интегральных уравнений (1) и (2), уравнение (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда волновое число k не совпадает с собственным значением внутренней задачи Дирихле, а уравнение (2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда волновое число k не совпадает с собственным значением внутренней задачи Неймана. Однако в работе [1. С. 117] показано, что если функция $u(x)$ имеет нормальную производную в смысле равномерной сходимости, то гиперсингулярное интегральное уравнение второго рода

$$\psi - K\psi - i\eta T\psi = -Sf - i\eta(f + \tilde{K}f), \quad (3)$$

полученное из линейных комбинаций уравнений (1) и (2), разрешимо единственным образом в пространстве $N(L)$ – линейном пространстве всех непрерывных функций ψ , потенциал двойного слоя с плотностью ψ которых имеет непрерывные нормальные производные на обеих сторонах кривой L , где $\eta \neq 0$ – произвольное действительное число, причем $\eta \operatorname{Re} k \geq 0$. Следует указать, что внешнюю краевую задачу Неймана для уравнения Гельмгольца можно привести к различным интегральным уравнениям, приближенные решения которых исследованы в работах [3–6]. Уравнение (3) имеет то преимущество, что его решение является граничным значением решения внешней краевой задачи Неймана на L . При этом функция

$$u(x) = \int_L \left\{ \psi(y) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial v(y)} - f(y) \Phi_k(x, y) \right\} dl_y, \quad x \in R^2 \setminus \bar{D},$$

является решением внешней краевой задачи Неймана, если $\psi \in N(L)$ является решением гиперсингулярного интегрального уравнения (3). Кроме того, следует указать, что решение уравнения (3) является решением уравнения метода нулевого поля, полученного Уотерменом [7] для рассеяния акустических волн.

Кроме того, в работе [1. С. 111] показано, что комбинация потенциалов простого и двойного слоев

$$u(x) = \int_L \left\{ \Phi_k(x, y) + i\eta \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial v(y)} \right\} \varphi(y) dl_y, \quad x \in R^2 \setminus \bar{D},$$

где $\eta \neq 0$ – произвольное вещественное число, причем $\eta \operatorname{Re} k \geq 0$, является решением краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием, если плотность φ есть решение гиперсингулярного интегрального уравнения

$$(1 - i\eta\lambda)\varphi - (\tilde{K} + i\eta T + i\eta\lambda K + \lambda S)\varphi = -2g. \quad (4)$$

Отметим, что в работе [8] дано обоснование метода коллокации для гиперсингулярного интегрального уравнения внешней краевой задачи Неймана, а в работе [9] – метода коллокации для гиперсингулярного интегрального уравнения внешней краевой задачи с импедансным условием для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве. Однако известно, что в трехмерном пространстве фундаментальное решение уравнения Гельмгольца имеет вид:

$$\Phi_k(x, y) = \frac{\exp(ik|x - y|)}{4\pi|x - y|}, \quad x, y \in R^3, \quad x \neq y,$$

и поэтому интегральные операторы, участвующие в уравнениях (3) и (4), строго отличаются от интегральных операторов, участвующих в интегральных уравнениях внешней краевой задачи Неймана и внешней краевой задачи с импедансным условием для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве.

Следует отметить, что в работе [10] исследованы приближенные методы решения одного класса гиперсингулярных интегральных уравнений внешней краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца. Здесь после дискретизации получаются гиперсингулярные интегральные уравнения с более простыми ядрами. Настоящая же работа посвящена исследованию приближенного метода решения гиперсингулярных интегральных уравнений (3) и (4) методом приведения их к слабосингулярному интегральному уравнению, что позволяет найти решение полученных уравнений в более широком пространстве и налагать более слабые условия на заданную функцию f .

2. Обоснование метода коллокации для гиперсингулярного интегрального уравнения (3)

Так как оператор T является неограниченным в пространстве $N(L)$ (см.: [1. С. 73]), то проведем регуляризацию уравнения (3). Пусть волновое число k_0 не совпадает с собственными значениями внутренних задач Дирихле или Неймана (для этого достаточно выбрать любое значение k_0 с $\operatorname{Im} k_0 > 0$). В дальнейшем обозначим индексом «0» то обстоятельство, что параметр k , входящий в операторы S , $\tilde{K}$ и T , равен значению k_0 . Поскольку оператор

$$A_0 = -S_0(I - \tilde{K}_0)^{-1}(I + \tilde{K}_0)^{-1} : C(L) \rightarrow N(L)$$

представляет собой обратный оператор к $T_0 : N(L) \rightarrow C(L)$ (см.: [1. С. 102]), уравнение (3) можно преобразовать к эквивалентному виду:

$$\psi + A\psi = Bf, \quad (5)$$

причем полученное уравнение рассматривается в пространстве $C(L)$, где I – единичный оператор на $C(L)$,

$$A\psi = \frac{1}{i\eta} A_0 (K + i\eta(T - T_0) - I)\psi, \quad Bf = \frac{1}{i\eta} A_0 (S + i\eta(I + \tilde{K}))f.$$

Следует указать, что операторы S , K и $T - T_0$ являются компактными в пространстве $C(L)$ (см.: [1. С. 73–74]), а значит, и оператор A является компактным в пространстве $C(L)$ (см.: [1. С. 105]). Однако, несмотря на обратимость операторов $I + \tilde{K}_0$ и $I - \tilde{K}_0$, явные виды обратных операторов $(I + \tilde{K}_0)^{-1}$ и $(I - \tilde{K}_0)^{-1}$ неизвестны, следовательно, неизвестны явные виды операторов A и B .

Замечания 1. В работе [10] решение уравнения, полученного после дискретизации, исследуется в пространстве $C^{1,\alpha}(L)$, а на заданную функцию f налагается условие $f \in C^{0,\beta}(L)$, где $C^{0,\beta}(L)$ – пространство Гельдера с показателем β , $C^{1,\alpha}(L)$ – пространство непрерывно дифференцируемых функций, производная которых удовлетворяет условию Гельдера с показателем α , причем $0 < \alpha \leq \beta < 1$. Как видно, решение уравнения (5) исследуется в пространстве $C(L)$ и заданная функция $f \in C(L)$. Это является одним из преимуществ применяемого метода.

Для обоснования метода коллокации вначале построим квадратурные формулы для $(A\psi)(x)$ и $(Bf)(x)$, $x \in L$. Предположим, что кривая L задана параметрическим уравнением $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a, b]$. Разобьем промежутки $[a, b]$ на $n > 2M_0(b-a)/d$ равных частей: $t_p = a + \frac{(b-a)p}{n}$, $p = \overline{0, n}$, где

$$M_0 = \max_{t \in [a, b]} \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} < +\infty$$

(см.: [11. С. 560]) и d – стандартный радиус (см.: [12. С. 400]). В качестве опорных точек возьмем $x(\tau_p)$, $p = \overline{1, n}$, где $\tau_p = a + \frac{(b-a)(2p-1)}{2n}$. Тогда кривая L

разбивается на элементарные части: $L = \bigcup_{p=1}^n L_p$, где $L_p = \{x(t) : t_{p-1} \leq t \leq t_p\}$.

Известно, что (см.: [13])

(1) $\forall p \in \{1, 2, \dots, n\} : r_p(n) \sim R_p(n)$, где

$$r_p(n) = \min \left\{ |x(\tau_p) - x(t_{p-1})|, |x(t_p) - x(\tau_p)| \right\}, \quad R_p(n) = \max \left\{ |x(\tau_p) - x(t_{p-1})|, |x(t_p) - x(\tau_p)| \right\},$$

а запись $a(n) \sim b(n)$ означает, что $C_1 \leq \frac{a(n)}{b(n)} \leq C_2$, где C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от n ;

$$(2) \forall p \in \{1, 2, \dots, n\}: R_p(n) \leq d/2;$$

$$(3) \forall p, j \in \{1, 2, \dots, n\}: r_j(n) \sim r_p(n);$$

$$(4) r(n) \sim R(n) \sim \frac{1}{n}, \text{ где } R(n) = \max_{p=1, n} R_p(n), r(n) = \min_{p=1, n} r_p(n).$$

В дальнейшем такое разбиение будем называть разбиением кривой L на «регулярные» элементарные части.

Пусть $L_d(x)$ и $\Gamma_d(x)$ – части соответственно кривой L и касательной прямой $\Gamma(x)$ в точке $x \in L$, заключенные внутри круга $B_d(x)$ радиуса d с центром в точке x . Кроме того, пусть $\tilde{y} \in \Gamma(x)$ – проекция точки $y \in L$. Тогда

$$|x - \tilde{y}| \leq |x - y| \leq C_1(L)|x - \tilde{y}| \text{ и } \text{mes} L_d(x) \leq C_2(L) \text{mes} \Gamma_d(x),$$

где $C_1(L)$ и $C_2(L)$ – положительные постоянные, зависящие лишь от L (если L – окружность, то $C_1(L) = \sqrt{2}$ и $C_2(L) = 2$).

Поступая точно так же, как и в доказательстве леммы 2.1 работы [14], можно показать справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Существуют такие постоянные $C'_0 > 0$ и $C'_1 > 0$, не зависящие от n , для которых при $\forall p, j \in \{1, 2, \dots, n\}, j \neq p$, и $\forall y \in L_j$ справедливы следующие неравенства:*

$$C'_0 |y - x(\tau_p)| \leq |x(\tau_j) - x(\tau_p)| \leq C'_1 |y - x(\tau_p)|.$$

Пусть

$$\Phi_k^n(x, y) = \frac{i}{4} H_{0,n}^{(1)}(k|x - y|), \quad x, y \in L, \quad x \neq y,$$

где

$$H_{0,n}^{(1)}(z) = J_{0,n}(z) + i N_{0,n}(z), \quad J_{0,n}(z) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

и

$$N_{0,n}(z) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z}{2} + C \right) J_{0,n}(z) + \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}.$$

В работах [15] и [16] доказано, что выражения

$$(S_n f)(x(\tau_p)) = \frac{2(b-a)}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} f(x(\tau_j)), \quad (6)$$

$$(K_n \psi)(x(\tau_p)) = \frac{2(b-a)}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \psi(x(\tau_j)), \quad (7)$$

$$(\tilde{K}_n f)(x(\tau_p)) = \frac{2(b-a)}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_p))} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} f(x(\tau_j)) \quad (8)$$

и

$$((T - T_0)_n \psi)(x(\tau_p)) =$$

$$= \frac{2(b-a)}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \frac{\partial}{\partial v(x(\tau_p))} \left(\frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} - \frac{\partial \Phi_{k_0}^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right) \times \\ \times \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \psi(x(\tau_j)) \quad (9)$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p = \overline{1, n}$, являются квадратурными формулами для интегралов $(Sf)(x)$, $(K\psi)(x)$, $(\tilde{K}f)(x)$ и $((T-T_0)\psi)(x)$ соответственно, причем

$$\max_{p=1, n} |(Sf)(x(\tau_p)) - (S_n f)(x(\tau_p))| \leq M^1 \left(\omega(f, 1/n) + \|f\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \right), \\ \max_{p=1, n} |(K\psi)(x(\tau_p)) - (K_n \psi)(x(\tau_p))| \leq M \left(\omega(\psi, 1/n) + \|\psi\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \right), \\ \max_{p=1, n} |(\tilde{K}f)(x(\tau_p)) - (\tilde{K}_n f)(x(\tau_p))| \leq M \left(\omega(f, 1/n) + \|f\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \right)$$

и

$$\max_{p=1, n} |((T-T_0)\psi)(x(\tau_p)) - ((T-T_0)_n \psi)(x(\tau_p))| \leq M \left(\omega(\psi, 1/n) + \|\psi\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \right),$$

где через $\omega(\varphi, \delta)$ обозначен модуль непрерывности функции $\varphi \in C(L)$, т.е.

$$\omega(\varphi, \delta) = \max_{\substack{|x-y| \leq \delta \\ x, y \in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad \delta > 0.$$

Пользуясь квадратурными формулами (6)–(9) получаем, что выражения

$$(C_n \psi)(x(\tau_p)) = \sum_{j=1}^n c_{pj} \psi(x(\tau_j)) \quad (10)$$

и

$$(G_n f)(x(\tau_p)) = \sum_{j=1}^n g_{pj} f(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p = \overline{1, n}$, являются квадратурными формулами для интегралов

$$(C\psi)(x) = (K\psi)(x) + i\eta((T-T_0)\psi)(x) - \psi(x)$$

и

$$(Gf)(x) = (Sf)(x) + i\eta(\tilde{K}f)(x) + i\eta f(x)$$

соответственно, причем справедливы следующие оценки:

$$\max_{p=1, n} |(C\psi)(x(\tau_p)) - (C_n \psi)(x(\tau_p))| \leq M \left(\omega(\psi, 1/n) + \|\psi\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \right), \\ \max_{p=1, n} |(Gf)(x(\tau_p)) - (G_n f)(x(\tau_p))| \leq M \left(\omega(f, 1/n) + \|f\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \right),$$

¹ Здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

здесь

$$c_{pp} = -1 \text{ при } p = \overline{1, n},$$

$$c_{pj} = \frac{2(b-a)}{n} \left(i\eta \frac{\partial}{\partial v(x(\tau_p))} \left(\frac{\partial(\Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) - \Phi_{k_0}^n(x(\tau_p), x(\tau_j)))}{\partial v(x(\tau_j))} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right) \times \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2}$$

при $p, j = \overline{1, n}, p \neq j$,

и $g_{pp} = i\eta$ при $p = \overline{1, n}$,

$$g_{pj} = \frac{2(b-a)}{n} \left(\Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) + i\eta \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_p))} \right) \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2}$$

при $p, j = \overline{1, n}, p \neq j$.

Через I^n обозначим единичную матрицу n -го порядка, а через C^n – пространство n -мерных векторов $z^n = (z_1^n, z_2^n, \dots, z_n^n)^T$, $z_l^n \in C$, $l = \overline{1, n}$, с нормой $\|z^n\| = \max_{l=1, n} |z_l^n|$, где запись a^T означает транспонировку вектора a . Рассмотрим n -мерную матрицу $\tilde{K}_0^n = (\tilde{k}_{pj}^0)_{p, j=1}^n$ с элементами

$$\tilde{k}_{pj}^0 = \begin{cases} 0 & \text{при } p = j, \\ \frac{2(b-a)}{n} \frac{\partial \Phi_{k_0}^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_p))} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} & \text{при } p \neq j. \end{cases}$$

Поступая точно так же, как и в работе [17], нетрудно доказать справедливость следующих двух лемм.

Лемма 2. Если $\text{Im} k > 0$, то существует обратная матрица $(I^n + \tilde{K}_0^n)^{-1}$, причем

$$M_1 = \sup_n \left\| (I^n + \tilde{K}_0^n)^{-1} \right\| < +\infty$$

$$и \quad \max_{l=1, n} \left| \left((I + \tilde{K}_0)^{-1} g \right)(x(\tau_l)) - \sum_{j=1}^n \tilde{k}_{lj}^+ g(x(\tau_j)) \right| \leq M \left(\omega(g, 1/n) + \|g\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right),$$

где $g \in C(L)$, а $\tilde{k}_{lj}^+$ – элемент l -й строки и j -го столбца матрицы $(I^n + \tilde{K}_0^n)^{-1}$.

Лемма 3. Если $\text{Im} k > 0$, то существует обратная матрица $(I^n - \tilde{K}_0^n)^{-1}$, причем

$$M_2 = \sup_n \left\| (I^n - \tilde{K}_0^n)^{-1} \right\| < +\infty$$

$$и \quad \max_{l=1, n} \left| \left((I - \tilde{K}_0)^{-1} g \right)(x(\tau_l)) - \sum_{j=1}^n \tilde{k}_{lj}^- g(x(\tau_j)) \right| \leq M \left(\omega(g, 1/n) + \|g\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right),$$

где $g \in C(L)$, а $\tilde{k}_{lj}^-$ – элемент l -й строки и j -го столбца матрицы $(I^n - \tilde{K}_0^n)^{-1}$.

Пусть

$$f_{pj}^0 = \begin{cases} 0 & \text{при } p = j, \\ \frac{2(b-a)}{n} \Phi_{k_0}^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} & \text{при } p \neq j, \end{cases} \quad (11)$$

и
$$a_{lj} = -\frac{1}{i\eta} \sum_{p=1}^n \left(f_{lp}^0 \left(\sum_{m=1}^n \tilde{k}_{pm}^- \left(\sum_{t=1}^n \tilde{k}_{mt}^+ c_{tj} \right) \right) \right), \quad l, j = \overline{1, n}.$$

Теорема 1. Выражение

$$(A_n \psi)(x(\tau_l)) = \sum_{j=1}^n a_{lj} \psi(x(\tau_j)) \quad (12)$$

в точках $x(\tau_l)$, $l = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для $(A\psi)(x)$, причем

$$\max_{l=\overline{1, n}} |(A\psi)x(\tau_l) - (A_n \psi)x(\tau_l)| \leq M \left(\omega(\psi, 1/n) + \|\psi\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right).$$

Доказательство. Так как

$$(A_n \psi)x(\tau_l) = -\frac{1}{i\eta} \sum_{j=1}^n \left(f_{lj}^0 \left(\sum_{p=1}^n \tilde{k}_{jp}^- \left(\sum_{m=1}^n \tilde{k}_{pm}^+ \left(\sum_{t=1}^n c_{mt} \psi(x(\tau_t)) \right) \right) \right) \right),$$

то справедливо представление

$$\begin{aligned} (A\psi)(x(\tau_l)) - (A_n \psi)(x(\tau_l)) &= -\frac{1}{i\eta} \left(S_0 (I - \tilde{K}_0)^{-1} (I + \tilde{K}_0)^{-1} C\psi \right) (x(\tau_l)) - \\ &\quad - \sum_{j=1}^n f_{lj}^0 \left((I - \tilde{K}_0)^{-1} (I + \tilde{K}_0)^{-1} C\psi \right) (x(\tau_j)) - \\ &\quad - \frac{1}{i\eta} \sum_{j=1}^n f_{lj}^0 \left[\left((I - \tilde{K}_0)^{-1} (I + \tilde{K}_0)^{-1} C\psi \right) (x(\tau_j)) - \sum_{p=1}^n \tilde{k}_{jp}^- \left((I + \tilde{K}_0)^{-1} C\psi \right) (x(\tau_p)) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{i\eta} \sum_{j=1}^n f_{lj}^0 \left(\sum_{p=1}^n \tilde{k}_{jp}^- \left[\left((I + \tilde{K}_0)^{-1} C\psi \right) (x(\tau_p)) - \sum_{m=1}^n \tilde{k}_{pm}^+ (C\psi)(x(\tau_m)) \right] \right) - \\ &\quad - \frac{1}{i\eta} \sum_{j=1}^n f_{lj}^0 \left(\sum_{p=1}^n \tilde{k}_{jp}^- \left(\sum_{m=1}^n \tilde{k}_{pm}^+ \left[(C\psi)(x(\tau_m)) - \sum_{t=1}^n c_{mt} \psi(x(\tau_t)) \right] \right) \right). \end{aligned}$$

Тогда, учитывая оценки погрешности квадратурных формул (6) и (10) и принимая во внимание леммы 2 и 3, имеем

$$\begin{aligned} &|(A\psi)(x(\tau_l)) - (A_n \psi)(x(\tau_l))| \leq \\ &\leq M \left[\left\| (I - \tilde{K}_0)^{-1} (I + \tilde{K}_0)^{-1} C\psi \right\|_\infty \frac{\ln n}{n} + \omega \left((I - \tilde{K}_0)^{-1} (I + \tilde{K}_0)^{-1} C\psi, 1/n \right) \right] + \\ &\quad + M \left[\left\| (I + \tilde{K}_0)^{-1} C\psi \right\|_\infty \frac{\ln n}{n} + \omega \left((I + \tilde{K}_0)^{-1} C\psi, 1/n \right) \right] \sum_{j=1}^n |f_{lj}^0| + \\ &\quad + M \left[\|C\psi\|_\infty \frac{\ln n}{n} + \omega(C\psi, 1/n) \right] \sum_{j=1}^n \left(|f_{lj}^0| \sum_{p=1}^n |\tilde{k}_{jp}^-| \right) + \end{aligned}$$

$$+M \left[\|\psi\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} + \omega(\psi, 1/n) \right] \sum_{j=1}^n \left(|f_{lj}^0| \sum_{p=1}^n \left(|\tilde{k}_{jp}^-| \sum_{m=1}^n |\tilde{k}_{pm}^+| \right) \right). \quad (13)$$

Учитывая неравенства

$$\omega(K\psi, 1/n) \leq M \|\psi\|_{\infty} \frac{\ln n}{n}, \quad \omega((T-T_0)\psi, 1/n) \leq M \|\psi\|_{\infty} \frac{\ln n}{n},$$

имеем:

$$\omega(C\psi, 1/n) \leq \omega(K\psi, 1/n) + |\eta| \omega((T-T_0)\psi, 1/n) + \omega(\psi, 1/n) \leq \omega(\psi, 1/n) + M \|\psi\|_{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Известно (см.: [1. С. 92]), что для любого $g \in C(L)$ уравнение

$$\rho + \tilde{K}_0 \rho = g$$

имеет единственное решение $\rho_* \in C(L)$. Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \omega\left((I + \tilde{K}_0)^{-1} g, 1/n\right) &= \omega(\rho_*, 1/n) = \omega(g - \tilde{K}_0 \rho_*, 1/n) \leq \omega(g, 1/n) + \omega(\tilde{K}_0 \rho_*, 1/n) \leq \\ &\leq \omega(g, 1/n) + M \|\rho_*\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} = \omega(g, 1/n) + M \left\| (I + \tilde{K}_0)^{-1} g \right\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \leq \\ &\leq \omega(g, 1/n) + M \left\| (I + \tilde{K}_0)^{-1} \right\| \|g\|_{\infty} \frac{\ln n}{n}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\omega\left((I - \tilde{K}_0)^{-1} f, 1/n\right) \leq \omega(f, 1/n) + M \|f\|_{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Отсюда находим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \omega\left((I - \tilde{K}_0)^{-1} (I + \tilde{K}_0)^{-1} C\psi, 1/n\right) &\leq \omega\left((I + \tilde{K}_0)^{-1} C\psi, 1/n\right) + M \left\| (I + \tilde{K}_0)^{-1} C\psi \right\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \leq \\ &\leq \omega(C\psi, 1/n) + M \|C\psi\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} + M \left\| (I + \tilde{K}_0)^{-1} C\psi \right\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \leq M \left(\omega(\psi, 1/n) + \|\psi\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \right). \end{aligned}$$

Поступая точно так же, как и в работе [15], легко показать, что выражение $\sum_{j=1}^n |f_{lj}^0|$ в точках $x(\tau_l), l = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для интеграла

$$2 \int_L |\Phi_{k_0}(x, y)| dl_y,$$

причем

$$\max_{l=1, n} \left| 2 \int_L |\Phi_{k_0}(x(\tau_l), y)| dl_y - \sum_{j=1}^n |f_{lj}^0| \right| \leq M \frac{\ln n}{n}.$$

Следовательно,

$$\max_{l=1, n} \sum_{j=1}^n |f_{lj}^0| \leq 2 \max_{x \in L} \int_L |\Phi_{k_0}(x, y)| dl_y + M \frac{\ln n}{n}. \quad (14)$$

Кроме того, из леммы 2 и 3 очевидны неравенства

$$\max_{j=1, n} \sum_{p=1}^n |\tilde{k}_{jp}^+| \leq M_1, \quad \max_{j=1, n} \sum_{p=1}^n |\tilde{k}_{jp}^-| \leq M_2. \quad (15)$$

В результате, принимая во внимание полученные выше неравенства в (13), получаем доказательство теоремы.

Аналогичным образом можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Выражение*

$$(B_n f)(x(\tau_l)) = \sum_{j=1}^n b_{lj} f(x(\tau_j)) \quad (16)$$

в точках $x(\tau_l)$, $l = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для $(Bf)(x)$, причем

$$\max_{l=1, n} |(Bf)x(\tau_l) - (B_n f)x(\tau_l)| \leq M \left(\omega(f, 1/n) + \|f\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \right),$$

где

$$b_{lj} = -\frac{1}{i\eta} \sum_{p=1}^n \left(f_{lp}^0 \left(\sum_{m=1}^n \tilde{k}_{pm}^- \left(\sum_{t=1}^n \tilde{k}_{mt}^+ g_{tj} \right) \right) \right), \quad l, j = \overline{1, n}.$$

Теперь дадим обоснование метода коллокации для уравнения (5). Используя квадратурные формулы (12) и (16), уравнение (5) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^n -приближенных значений $\psi(x(\tau_l))$, $l = \overline{1, n}$, которую запишем в виде:

$$(I^n + A^n)z^n = B^n f^n, \quad (17)$$

где $A^n = (a_{lj})_{l,j=1}^n$, $B^n = (b_{lj})_{l,j=1}^n$, $f^n = p^n f$, а $p^n : C(L) \rightarrow C^n$ – линейный ограниченный оператор, определяемый формулой $p^n f = (f(x(\tau_1)), f(x(\tau_2)), \dots, f(x(\tau_n)))^T$ и называемый оператором простого сноса.

Теорема 3. *Уравнения (5) и (17) имеют единственные решения $\psi_* \in C(L)$ и $z_*^n \in C^n$ соответственно, при этом $\|z_*^n - p^n \psi_*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ с оценкой скорости сходимости*

$$\|z_*^n - p^n \psi_*\| \leq M \left(\omega(f, 1/n) + \frac{\ln n}{n} \right).$$

Доказательство. Отметим, что здесь мы будем использовать теорему Г.М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений [18], при этом воспользуемся обозначениями и необходимыми определениями и предложениями из работы [18]. Проверим выполнение условий теоремы 4.2 работы [18]. В монографии [1. С. 117] показано, что $\text{Ker}(I + A) = \{0\}$. Очевидно, что операторы $I^n + A^n$ фредгольмовы с нулевым индексом, и система операторов простого сноса $P = \{p^n\}$ является связывающей для пространств $C(L)$ и C^n [18. С. 6–7].

Тогда по определению 1.1 из [18] в силу теоремы 2 получаем, что $B^n f^n \xrightarrow{P} Bf$.

Теперь покажем, что $I^n + A^n \xrightarrow{PP} I + A$. Принимая во внимание способ разбиения кривой L на «регулярные» элементарные части и лемму 1, нетрудно показать, что выражение

$$F^n(x(\tau_m)) = \sum_{\substack{t=1, \\ t \neq m}}^n |c_{mt}|$$

в точках $x(\tau_m)$, $m = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для слабо сингулярного интеграла

$$F(x) = 2 \int_L \left(\frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial v(y)} + i \eta \frac{\partial}{\partial v(x)} \left(\frac{\partial (\Phi_k(x, y) - \Phi_{k_0}(x, y))}{\partial v(y)} \right) \right) dl_y, \quad x \in L,$$

причем

$$\max_{m=\overline{1, n}} |F(x(\tau_m)) - F^n(x(\tau_m))| \leq M \frac{\ln n}{n}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \max_{m=\overline{1, n}} \sum_{t=1}^n |c_{mt}| &= 1 + \max_{m=\overline{1, n}} F^n(x(\tau_m)) \leq \\ &\leq 1 + \max_{m=\overline{1, n}} |F(x(\tau_m)) - F^n(x(\tau_m))| + \max_{x \in L} F(x) \leq M. \end{aligned} \quad (18)$$

Принимая во внимание неравенства (14), (15) и (18), приходим к оценке

$$\|A^n z^n\| = \max_{l=\overline{1, n}} \left| \sum_{j=1}^n a_{lj} z_j^n \right| \leq M \|z^n\|, \quad \forall z^n \in C^n.$$

Пусть $\psi_n \xrightarrow{p} \psi$. Тогда в силу теоремы 1 получаем, что

$$\begin{aligned} &\|(I^n + A^n)\psi_n - p^n((I + A)\psi)\| \leq \\ &\leq \|\psi_n - p^n\psi\| + M \|\psi_n - p^n\psi\| + \|A^n(p^n\psi) - p^n(A\psi)\| \rightarrow 0 \\ &\text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

следовательно, по определению 2.1 из [18] имеем, что $I^n + A^n \xrightarrow{pp} I + A$.

Так как $I^n \rightarrow I$ устойчиво по определению 3.2 из [18], то согласно предложению 3.5 и определению 3.3 из работы [18] осталось проверить условие компактности, которое вследствие предложения 1.1 из работы [18] равносильно условию $\forall \{z^n\}$, $z^n \in C^n$, $\|z^n\| \leq M$, существует относительно компакная последовательность $\{A_n z^n\} \subset C(L)$ такая, что

$$\|A^n z^n - p^n(A_n z^n)\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В качестве $\{A_n z^n\}$ выберем последовательность

$$(A_n z^n)(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) z_j^n, \quad x \in L,$$

где

$$\begin{aligned} a_j(x) &= -\frac{1}{i\eta} \sum_{p=1}^n \left(f_p^0(x) \left(\sum_{m=1}^n \tilde{k}_{pm}^- \left(\sum_{t=1}^n \tilde{k}_{mt}^+ c_{tj} \right) \right) \right), \quad j = \overline{1, n}, \\ f_p^0(x) &= 2 \int_{L_p} \Phi_{k_0}(x, y) dl_y, \quad x \in L, \quad p = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание способ разбиения кривой L на «регулярные» элементарные части и лемму 1, имеем

$$\sum_{p=1}^n |f_{lp}^0 - f_p^0(x(\tau_l))| \leq 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^n \int_{L_p} |\Phi_{k_0}(x(\tau_l), y) - \Phi_{k_0}(x(\tau_l), x(\tau_p))| dl_y + \\ + 2 \int_{L_l} |\Phi_{k_0}(x(\tau_l), y)| dl_y \leq M \frac{\ln n}{n}, \quad l = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Кроме того, очевидно, что

$$\sum_{p=1}^n |f_p^0(x)| \leq 2 \int_L |\Phi_{k_0}(x, y)| dl_y \leq M. \quad (20)$$

Так как

$$(A_n z^n)(x) = -\frac{1}{i\eta} \sum_{j=1}^n \left(f_j^0(x) \left(\sum_{p=1}^n \tilde{k}_{jp}^- \left(\sum_{m=1}^n \tilde{k}_{pm}^+ \left(\sum_{t=1}^n c_{mt} z_t^n \right) \right) \right) \right),$$

то, учитывая условие $\|z^n\| \leq M$ и неравенства (15), (18) и (19), получаем, что

$$\|A_n z^n - p^n(A_n z^n)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Возьмем любые точки $x', x'' \in L$ такие, что $|x' - x''| = \delta < d/2$. Тогда, принимая во внимание неравенства (15) и (18) и поступая точно так же, как и в работе [16], можно показать, что

$$\begin{aligned} |(A_n z^n)(x') - (A_n z^n)(x'')| &\leq M \|z^n\| \sum_{j=1}^n |f_j^0(x') - f_j^0(x'')| \leq \\ &\leq M \|z^n\| \int_L |\Phi_{k_0}(x', y) - \Phi_{k_0}(x'', y)| dl_y \leq \\ &\leq M \|z^n\| \int_{L_{\delta/2}(x')} |\Phi_{k_0}(x', y)| dl_y + M \|z^n\| \int_{L_{\delta/2}(x'')} |\Phi_{k_0}(x'', y)| dl_y + \\ &+ M \|z^n\| \int_{L_{\delta/2}(x')} |\Phi_{k_0}(x'', y)| dl_y + M \|z^n\| \int_{L_{\delta/2}(x'')} |\Phi_{k_0}(x', y)| dl_y + \\ &+ M \|z^n\| \int_{L \setminus (L_{\delta/2}(x') \cup L_{\delta/2}(x''))} |\Phi_{k_0}(x', y) - \Phi_{k_0}(x'', y)| dl_y \leq M \|z^n\| \delta |\ln \delta|, \end{aligned} \quad (21)$$

а значит, $\{A_n z^n\} \subset C(L)$.

Относительная компактность последовательности $\{A_n z^n\}$ следует из теоремы Арцеля. Действительно, равномерная ограниченность непосредственно вытекает из неравенств (15), (18) и (20) и условия $\|z^n\| \leq M$, а равностепенная непрерывность следует из оценки (21). Тогда, применяя теорему 4.2 из работы [18], получаем, что уравнения (5) и (17) имеют единственные решения $\psi_* \in C(L)$ и $z^n \in C^n$ соответственно, причем

$$m_3 \delta_n \leq \|z^n - p^n \psi_*\| \leq M_3 \delta_n,$$

где

$$m_3 = 1 / \sup_n \|I^n + A^n\| > 0, \quad M_3 = \sup_n \|(I^n + A^n)^{-1}\| < \infty, \\ \delta_n = \|(I^n + A^n)(p^n \psi_*) - B^n f^n\|.$$

В силу теорем 1 и 2 находим

$$\begin{aligned} \delta_n &= \max_{l=1,n} \left| \psi_* (x(\tau_l)) + \sum_{j=1}^n a_{lj} \psi_* (x(\tau_j)) - \sum_{j=1}^n b_{lj} f (x(\tau_j)) \right| = \\ &= \max_{l=1,n} \left| \left((Bf)(x(\tau_l)) - \sum_{j=1}^n b_{lj} f (x(\tau_j)) \right) + \left(\sum_{j=1}^n a_{lj} \psi_* (x(\tau_j)) - (A\psi_*)(x(\tau_l)) \right) \right| \leq \\ &\leq M \left(\omega(f, 1/n) + \omega(\psi_*, 1/n) + (\|f\|_\infty + \|\psi_*\|_\infty) \frac{\ln n}{n} \right). \end{aligned}$$

Так как $\psi_* = (I + A)^{-1} Bf$, то

$$\|\psi_*\|_\infty \leq \|(I + A)^{-1}\| \|B\| \|f\|_\infty.$$

Кроме того, принимая во внимание оценку

$$\omega(F_0\rho, 1/n) \leq M \|\rho\|_\infty \frac{\ln n}{n},$$

имеем

$$\omega(Bf, 1/n) \leq M \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n}, \quad \omega(A\psi_*, 1/n) \leq M \|\psi_*\|_\infty \frac{\ln n}{n}.$$

Следовательно,

$$\omega(\psi_*, 1/n) = \omega(Bf - A\psi_*, 1/n) \leq \omega(Bf, 1/n) + \omega(A\psi_*, 1/n) \leq M \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n},$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Замечания 2. Как видно, если $f \in C(L) \setminus C^\beta(L)$, то предложенный в работе [10] метод не дает возможности исследовать решение интегрального уравнения, полученного после дискретизации рассматриваемого уравнения. Кроме того, если $f \in C^\beta(L)$, то скорость сходимости данного метода равна $\omega(f, 1/n) + \frac{\ln n}{n} \approx \frac{1}{n^\beta}$,

а в работе [10] скорость сходимости метода составила $\frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}}$, т.е. в этом случае скорость сходимости данного метода является более сильной, чем скорость сходимости метода в работе [10], где $0 < \alpha \leq \beta < 1$.

3. Обоснование метода коллокации для гиперсингулярного интегрального уравнения (4)

Сначала проведем регуляризацию уравнения (4). Пусть волновое число k_0 не совпадает с собственными значениями внутренних задач Дирихле или Неймана (для этого достаточно выбрать любое значение k_0 с $\text{Im } k_0 > 0$). Обозначим индексом «0» то обстоятельство, что параметр k , входящий в операторы S , $\tilde{K}$ и T , равен значению k_0 . Поскольку оператор

$$A_0 = -S_0(I - \tilde{K}_0)^{-1}(I + \tilde{K}_0)^{-1}$$

представляет собой обратный оператор к T_0 , уравнение (4) можно преобразовать к эквивалентному виду (см.: [1. С. 111]):

$$\varphi + \tilde{A}\varphi = \tilde{B}g, \quad (22)$$

причем полученное уравнение рассматривается в пространстве $C(L)$, где

$$\tilde{A}\varphi = -\frac{1}{i\eta} A_0 \left[(1 - i\eta\lambda)I - (\tilde{K} + i\eta(T - T_0) + i\eta\lambda K + \lambda S) \right] \varphi, \quad \tilde{B}g = \frac{2}{i\eta} A_0 g.$$

Для обоснования метода коллокации вначале построим квадратурные формулы для интегралов $(\tilde{A}\varphi)(x)$ и $(\tilde{B}g)(x)$, $x \in L$. Разобьем L на «регулярные» элементарные части: $L = \bigcup_{j=1}^n L_j$. Принимая во внимание построенные квадратурные

формулы (6)–(9) для интегралов S , K , $\tilde{K}$ и $T - T_0$ соответственно и их оценки погрешности, нетрудно показать, что выражение

$$(\tilde{C}_n\varphi)(x(\tau_l)) = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{lj} \varphi(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для интеграла

$$(\tilde{C}\varphi)(x) = (1 - i\eta\lambda(x))\varphi(x) - \\ - \left((\tilde{K}\varphi)(x) + i\eta((T - T_0)\varphi)(x) + i\eta\lambda(x)(K\varphi)(x) + \lambda(x)(S\varphi)(x) \right),$$

где

$$\tilde{c}_{ll} = 1 - i\eta\lambda(x(\tau_l)) \quad \text{при } l = \overline{1, n}, \\ \tilde{c}_{lj} = -\frac{2(b-a)}{n} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \times \\ \times \left(\frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_l), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_l))} + i\eta \frac{\partial}{\partial v(x(\tau_l))} \left(\frac{\partial (\Phi_k^n(x(\tau_l), x(\tau_j)) - \Phi_{k_0}^n(x(\tau_l), x(\tau_j)))}{\partial v(x(\tau_j))} \right) + \right. \\ \left. + i\eta\lambda(x(\tau_l)) \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_l), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} + \lambda(x(\tau_l)) \Phi_k^n(x(\tau_l), x(\tau_j)) \right) \quad \text{при } l, j = \overline{1, n}, \quad l \neq j,$$

причем

$$\max_{l=\overline{1, n}} |(\tilde{C}\varphi)(x(\tau_l)) - (\tilde{C}_n\varphi)(x(\tau_l))| \leq M \left(\omega(\varphi, 1/n) + \|\varphi\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right).$$

Пусть элементы f_{lj}^0 , $l, j = \overline{1, n}$, определяются формулой (11), $\tilde{k}_{lj}^-$ – элемент l -й строки и j -го столбца матрицы $(I^n - \tilde{K}_0^n)^{-1}$, $\tilde{k}_{lj}^+$ – элемент l -й строки и j -го столбца матрицы $(I^n + \tilde{K}_0^n)^{-1}$,

$$\tilde{a}_{lj} = \frac{1}{i\eta} \sum_{p=1}^n \left(f_{lp}^0 \left(\sum_{m=1}^n \tilde{k}_{pm}^- \left(\sum_{t=1}^n \tilde{k}_{mt}^+ \tilde{c}_{tj} \right) \right) \right), \quad l, j = \overline{1, n},$$

$$\tilde{b}_{lj} = -\frac{2}{i\eta} \sum_{p=1}^n \left(f_{lp}^0 \left(\sum_{m=1}^n \tilde{k}_{pm}^- \tilde{k}_{mj}^+ \right) \right), \quad l, j = \overline{1, n}.$$

Поступая точно так же, как и в доказательстве теоремы 1, можно показать, что выражения

$$(\tilde{B}_n g)(x(\tau_l)) = \sum_{j=1}^n \tilde{b}_{lj} g(x(\tau_j)) \quad (23)$$

и

$$(\tilde{A}_n \varphi)(x(\tau_l)) = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{lj} \varphi(x(\tau_j)) \quad (24)$$

в точках $x(\tau_l), l = \overline{1, n}$, являются квадратурными формулами для $(\tilde{B}g)(x)$ и $(\tilde{A}\varphi)(x)$ соответственно, причем

$$\max_{l=1, n} |(\tilde{B}g)(x(\tau_l)) - (\tilde{B}_n g)(x(\tau_l))| \leq M \left(\omega(g, 1/n) + \|g\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \right),$$

$$\max_{l=1, n} |(\tilde{A}\varphi)(x(\tau_l)) - (\tilde{A}_n \varphi)(x(\tau_l))| \leq M \left(\omega(\varphi, 1/n) + \|\varphi\|_{\infty} \omega(\lambda, 1/n) + \|\varphi\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \right).$$

Используя квадратурные формулы (23) и (24), уравнение (22) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^n – приближенных значений $\varphi(x(\tau_l)), l = \overline{1, n}$, которую запишем в виде:

$$(I^n + \tilde{A}^n)z^n = \tilde{B}^n g^n, \quad (25)$$

где $\tilde{A}^n = (\tilde{a}_{lj})_{l,j=1}^n$, $\tilde{B}^n = (\tilde{b}_{lj})_{l,j=1}^n$ и $g^n = p^n g$.

Поступая точно так же, как и в доказательстве теоремы 3, можно показать справедливость основного результата данного раздела.

Теорема 4. Уравнения (22) и (25) имеют единственные решения $\varphi_* \in C(L)$ и $z_*^n \in C^n$ соответственно, при этом $\|z_*^n - p^n \varphi_*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ с оценкой скорости сходимости

$$\|z_*^n - p^n \varphi_*\| \leq M \left(\omega(g, 1/n) + \omega(\lambda, 1/n) + \frac{\ln n}{n} \right).$$

Список источников

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. : Мир, 1987. 311 с.
2. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М. : Гос. изд-во тех.-теорет. лит., 1953. 415 с.
3. Anand A., Owall J., Turc C. Well-conditioned boundary integral equations for two-dimensional sound-hard scattering problems in domains with corners // J. Int. Eq. Appl. 2012. V4. 2 (3). P. 321–358. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.jiea/1350925560>
4. Harris P.J., Chen K. On efficient preconditioners for iterative solution of a Galerkin boundary element equation for the three-dimensional exterior Helmholtz problem // J. of Comput. Appl. Math. 2003. V. 156. P. 303–318. doi: 10.1016/S0377-0427(02)00918-4
5. Kleinman R.E., Wendland W. On Neumann's method for the exterior Neumann problem for the Helmholtz equation // J. of Math. Anal. Appl. 1977. V. 57 P. 170–202. doi: 10.1016/0022-247X(77)90294-3

6. Yaman O.I., Ozdemir G. Numerical solution of a generalized boundary value problem for the modified Helmholtz equation in two dimensions // *Math. Computers in Simulation*. 2021. V. 190. P. 181–191. doi: 10.1016/j.matcom.2021.05.013
7. Waterman P.C. New formulation of acoustic scattering // *The J. of the Acoustical Society of America*. 1969. V. 45. P. 1417–1429. doi: 10.1121/1.1911619
8. Khalilov E.H., Aliev A.R. Justification of a quadrature method for an integral equation to the external Neumann problem for the Helmholtz equation // *Math. Meth. in the Appl. Sc.* 2018. V. 41 (16). P. 6921–6933. doi: 10.1002/mma.5204
9. Халилов Э.Г. Конструктивный метод решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием // *Дифференциальные уравнения*. 2018. Т. 54, № 4. С. 544–555. doi: 10.1134/S0012266118040109
10. Kress R. On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory // *J. of Comput. Appl. Math.* 1995. V. 61. P. 345–360. doi: 10.1016/0377-0427(94)00073-7
11. Мухомелевили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Физматлит, 1962. 599 с.
12. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1976. 527 с.
13. Бахшальева М.Н., Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2021. Т. 61, № 6. С. 936–950. doi: 10.31857/S0044466921030030
14. Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений // *Математические заметки*. 2020. Т. 107, № 4. С. 604–622. doi: 10.4213/mzm10729
15. Khalilov E.H. Quadrature formulas for some classes of curvilinear integrals // *Baku Math. Journal*. 2022. V. 1 (1). P. 15–27. doi: 10.32010/j.bmj.2022.02
16. Халилов Э.Г. Исследование приближенного решения интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2023. № 82. С. 39–54. doi: 10.17223/19988621/82/4
17. Халилов Э.Г. О приближенном решении одного класса граничных интегральных уравнений первого рода // *Дифференциальные уравнения*. 2016. Т. 52, № 9. С. 1277–1283. doi: 10.1134/S0012266116090147
18. Вайникко Г.М. Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений // *Итоги науки и техники. Математический анализ*. 1979. Т. 16. С. 5–53. doi: 10.1007/BF01377042

References

1. Colton D.L., Kress R. (1983) *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. New York: Wiley.
2. Gunter N.M. (1967) *Potential Theory and Its Applications to Basic Problems of Mathematical Physics*. New York: Frederick Ungar Publishing Company.
3. Anand A., Ovall J., Turc C. (2012) Well-conditioned boundary integral equations for two-dimensional sound-hard scattering problems in domains with corners. *Journal of Integral Equations and Applications*. 24(3). pp. 321–358. DOI: 10.1216/JIE-2012-24-3-321.
4. Harris P.J., Chen K. (2003) On efficient preconditioners for iterative solution of a Galerkin boundary element equation for the three-dimensional exterior Helmholtz problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 156. pp. 303–318. DOI: 10.1016/S0377-0427(02)00918-4.
5. Kleinman R.E., Wendland W. (1977) On Neumann’s method for the exterior Neumann problem for the Helmholtz equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 57. pp. 170–202. DOI: 10.1016/0022-247X(77)90294-3.

6. Yaman O.I., Ozdemir G. (2021) Numerical solution of a generalized boundary value problem for the modified Helmholtz equation in two dimensions. *Mathematics and Computers in Simulation*. 190. pp. 181–191. DOI: 10.1016/j.matcom.2021.05.013.
7. Waterman P.C. (1969) New formulation of acoustic scattering. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 45. pp. 1417–1429. DOI: 10.1121/1.1911619.
8. Khalilov E.H., Aliev A.R. (2018) Justification of a quadrature method for an integral equation to the external Neumann problem for the Helmholtz equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 41(16). pp. 6921–6933. DOI: 10.1002/mma.5204.
9. Khalilov E.H. (2018) Constructive method for solving a boundary value problem with impedance boundary condition for the Helmholtz equation. *Differential Equations*. 54(4). pp. 539–550. DOI: 10.1134/S0012266118040109.
10. Kress R. (1995) On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 61. pp. 345–360. DOI: 10.1016/0377-0427(94)00073-7.
11. Muskhelishvili N.I. (1962) *Singular Integral Equations*. Groningen: Noordhoff.
12. Vladimirov V.S. (1984) *Equations of Mathematical Physics*. Moscow: Mir Publishers.
13. Bakhshaliyeva M.N., Khalilov E.H. (2021) Justification of the collocation method for an integral equation of the exterior Dirichlet problem for the Laplace equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 61(6). pp. 923–937. DOI: 10.1134/S0965542521030039.
14. Khalilov E.H. (2020) Justification of the collocation method for a class of surface integral equations. *Mathematical Notes*. 107(4). pp. 663–678. DOI: 10.1134/S0001434620030335.
15. Khalilov E.H. (2022) Quadrature formulas for some classes of curvilinear integrals. *Baku Mathematical Journal*. 1(1). pp. 15–27. DOI: 10.32010/j.bmj.2022.02.
16. Khalilov E.H. (2023) Issledovaniye priblizhennogo resheniya integral'nogo uravneniya vneshney krayevoy zadachi Dirikhle dlya uravneniya Gel'mgol'tsa v dvumernom prostanstve [Investigation of an approximate solution of the integral equation of the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in the two-dimensional space]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 39–54. DOI: 10.17223/19988621/82/4.
17. Khalilov E.H. (2016) On an approximate solution of a class of boundary integral equations of the first kind. *Differential Equations*. 52(9). pp. 1234–1240. DOI: 10.1134/S0012266116090147.
18. Vainikko G. M. (1981) Regular convergence of operators and approximate solution of equations. *Journal of Soviet Mathematics*. 15. pp. 675–705. DOI: 10.1007/BF01377042.

Сведения об авторе:

Халилов Эльнур Гасан оглы – доктор математических наук, профессор кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности (Баку, Азербайджан); профессор научного и инновационного центра Западно-Каспийского Университета (Баку, Азербайджан). E-mail: elnurkhalil@mail.ru

Information about the author:

Khalilov Elnur H. (Doctor of Mathematical Sciences, Professor of the General and Applied Mathematics Department of Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan; Professor of the Scientific and Innovation Center of the Western Caspian University, Baku, Azerbaijan) E-mail: elnurkhalil@mail.ru

Статья поступила в редакцию 10.04.2024; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 10.04.2024; accepted for publication 09.12.2024

Научная статья

УДК 515.1

MSC: 54F65

doi: 10.17223/19988621/92/4

О линейных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций с топологией поточечной сходимости на всюду плотных подмножествах

Татьяна Евгеньевна Хмылёва¹, Кира Максимовна Петрова²

^{1,2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ tex2150@yandex.ru

² lililitiy534@yandex.ru

Аннотация. По аналогии с пространствами $C_p(X)$ введены в рассмотрение пространства $C_{p,A}(X)$ непрерывных вещественнозначных функций с топологией поточечной сходимости на всюду плотном подмножестве $A \subset X$. Для пространств $C_{p,A}[a,b]$ и $C_{p,B}[c,d]$, где $A = [a,b] \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $B = [c,d] \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, доказано, что пространства $C_{p,A}[a,b]$ и $C_{p,B}[c,d]$ линейно гомеоморфны тогда и только тогда, когда $n = m$.

Ключевые слова: непрерывные функции, гомеоморфизм, топология поточечной сходимости, линейные ограниченные функционалы, функции ограниченной вариации, интеграл Стильеса

Для цитирования: Хмылева Т.Е., Петрова К.М. О линейных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций с топологией поточечной сходимости на всюду плотных подмножествах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 48–55. doi: 10.17223/19988621/92/4

Original article

On linear homeomorphisms of spaces of continuous functions with the pointwise convergence topology

Tatiana E. Khmyleva¹, Kira M. Petrova²

^{1,2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ tex2150@yandex.ru

² lililitiy534@yandex.ru

Abstract. In this work, by analogy with spaces $C_p(X)$, spaces $C_{p,A}(X)$ are defined, where A is an everywhere dense subset of X . The base of neighborhoods of the function $f \in C_{p,A}(X)$ is defined by sets of the form

$$U(f, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \{g \in C(X) : |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\},$$

where $x_i \in A$ and $\varepsilon > 0$.

We consider the question of linear homeomorphism of the spaces $C_{p,A}[a,b]$ and $C_{p,B}[c,d]$, where $A = [a,b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ and $B = [c,d] \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$. If $n = m$ and the number of endpoints of the intervals $[a,b]$ and $[c,d]$ contained in the sets $\{a_1, \dots, a_n\}$ and $\{b_1, \dots, b_m\}$ is the same, then obviously the spaces $C_{p,A}[a,b]$ and $C_{p,B}[c,d]$ are linearly homeomorphic. If the number of endpoints in these sets is different, then the linear homeomorphism is proved by decomposing the spaces $C_{p,A}[a,b]$ and $C_{p,B}[c,d]$ into a product.

At $n \neq m$, it is proved that the spaces $C_{p,A}[a,b]$ and $C_{p,B}[c,d]$ are not linearly homeomorphic. The proof is carried out by contradiction. Suppose that there is a linear homeomorphism $T : C_{p,A}[a,b] \rightarrow C_{p,B}[c,d]$. Then, by the closed graph theorem, T is an isomorphism of Banach spaces $C[a,b]$ and $C[c,d]$. Therefore, we can consider the mapping $T^* : C^*[c,d] \rightarrow C^*[a,b]$. Using the general form of functionals in spaces $C^*[c,d]$ and $C^*[a,b]$, we prove that T^* is not an isomorphism, which contradicts our assumption.

As a consequence, we obtain that the spaces of uniformly continuous functions with the topology of pointwise convergence $UC_p[a,b]$ and $UC_p(a,b)$ are not linearly homeomorphic.

Keywords: continuous functions, homeomorphism, pointwise convergence topology, linearly bounded functionals, function of bounded variation, Stieltjes integral

For citation: Khmyleva, T.E., Petrova, K.M. (2024) On linear homeomorphisms of spaces of continuous functions with the pointwise convergence topology. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 48–55. doi: 10.17223/19988621/92/4

Введение

Все рассматриваемые в данной статье пространства являются тихоновскими.

Определение 1. Пусть $A \subset X$ – всюду плотное подмножество. Пространство $C_{p,A}(X)$ – пространство непрерывных вещественнозначных функций, где база окрестностей функции $f \in C_{p,A}(X)$ задается множествами вида:

$$U(f, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \{g \in C(X) : |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}, \text{ где } x_i \in A \text{ и } \varepsilon > 0.$$

Через $\pi_A : C_p(X) \rightarrow C_p(A)$ обозначим отображение сужения функций из $C_p(X)$ на A , т.е. $\pi_A(f) = f|_A$ для всех $f \in C_p(X)$. Подпространство $\pi_A(C_p(X)) \rightarrow C_p(A)$ обозначают $C_p(A|X)$.

Известно, что если $A \subset X$ – всюду плотное подмножество, то $\pi : C_p(X) \rightarrow C_p(A|X)$ – взаимно однозначное непрерывное отображение [1. С. 17]), т.е. уплотнение. Но если мы рассмотрим отображение $\pi : C_{p,A}(X) \rightarrow C_p(A|X)$, то нетрудно увидеть, что получаем линейный гомеоморфизм.

Для компакта X через $C(X)$ обозначаем пространство всех непрерывных вещественнозначных функций с нормой $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in X\}$.

$C^*(X)$ – пространство линейных непрерывных функционалов Φ на пространстве $C(X)$ с нормой $\|\Phi\| = \sup\{|\Phi(f)| : \|f\| \leq 1\}$.

$C_p^*(X)$ – пространство линейных непрерывных функционалов ϕ на пространстве $C_p(X)$. Известно, что если $\phi \in C_p^*[a, b]$, то

$$\phi = \alpha_1 \delta_{x_1} + \dots + \alpha_l \delta_{x_l},$$

где $x_i \in [a, b]$ и $\delta_{x_i} f = f(x_i)$ [2. С. 400].

Через $V[a, b]$ обозначаем множество функций ограниченной вариации, заданных на промежутке $[a, b]$, $\bigvee_a^b g$ – вариация функции $g \in V[a, b]$. По теореме

Жордана любая функция $g \in V[a, b]$ представима в виде: $g = v - u$, где v, u – неубывающие функции на $[a, b]$, и $v(x) = \bigvee_a^x g$. Следовательно, $\bigvee_{x_1}^{x_2} g = v(x_2) - v(x_1)$ для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Для подмножества $Y \subset X$ обозначим $C^0(X|Y) = \{f \in C(X) : f|_Y \equiv 0\}$. Если это пространство наделено топологией поточечной сходимости, то пишем $C_p^0(X|Y) = \{f \in C_p(X) : f|_Y \equiv 0\}$.

Если $X = \bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n$ – топологическая сумма тихоновских пространств X_n , то ясно, что $C_p(X) = \prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n)$. Для $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n)$ пусть $\|f_n\| = \sup\{|f_n(x)| : x \in X\}$.

Положим

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n) \right)_{c_0} = \left\{ f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n) : \{n \in \mathbb{N} : \|f_n\| > \varepsilon\} \text{ — конечно, } \forall \varepsilon > 0 \right\}.$$

Пусть $\mathbb{R}^{\omega}$ – счетное произведение прямых, $c \subset \mathbb{R}^{\omega}$ – подпространство всех сходящихся числовых последовательностей.

$X \sim Y$ означает, что топологические пространства X и Y гомеоморфны. Если X и Y линейные топологические пространства, то $X \cong Y$ означает, что Y и Y линейно гомеоморфны.

Основные результаты

Мы рассматриваем пространства $C_{p,A}[a, b]$ и $C_{p,B}[c, d]$, где $A = [a, b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = [c, d] \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$.

Теорема 1. Если $n = m$, то пространства $C_{p,A}[a, b]$ и $C_{p,B}[c, d]$ являются линейно гомеоморфными.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

А) Пусть $|\{a, b\} \cap \{a_1, \dots, a_n\}| = |\{c, d\} \cap \{b_1, \dots, b_n\}|$, т.е. количество концевых точек во множествах A и B одинаково.

В этом случае существует гомеоморфизм $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ такой, что $\varphi(a_i) = b_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Нетрудно видеть, что отображение $T: C_{p,B}[c, d] \rightarrow C_{p,A}[a, b]$, действующее по формуле $Tf = f \circ \varphi$ для любого $f \in C_{p,B}[c, d]$, является искомым линейным гомеоморфизмом.

Б) $|\{a, b\} \cap \{a_1, \dots, a_n\}| \neq |\{c, d\} \cap \{b_1, \dots, b_n\}|$, т.е. количество концевых точек во множествах A и B различно.

Проведем доказательство для случая $a_1 = a$ и $\{b_1, \dots, b_n\} \subset (c, d)$. В остальных случаях доказательство аналогично. Не нарушая общности, будем считать, что

$b_1 < \dots < b_n$. Возьмем две последовательности $y_k = b_1 - \frac{\delta}{k}$ и $y'_k = b_1 + \frac{\delta}{k}$, причем δ выбрано так, что $y_1 = c$ и $y'_1 < b_2$. Рассмотрим множество $F = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{y'_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда для любой функции $f \in C_{p,B}[c, d]$ выполнено

$$f|_F = \{f(y_1), f(y'_1), f(y_2), f(y'_2), \dots\} \in c.$$

Для произвольного элемента $h = \{h_i\} \in c$ и $k \in \mathbb{N}$ определим линейную функцию l_k , заданную на промежутке $[y_k, y_{k+1}]$, такую что $l_k(y_k) = h_{2k}$, а $l_k(y_{k+1}) = h_{2k+2}$. Аналогично определим функцию l'_k , заданную на промежутке $[y'_{k+1}, y'_k]$, такую что $l'_k(y'_{k+1}) = h_{2k+1}$, $l'_k(y'_k) = h_{2k-1}$ и $l'_0 \equiv h_1$ на промежутке $[y'_1, d]$.

Рассмотрим оператор $P: c \rightarrow C_{p,B}[c, d]$, определенный формулой

$$P(h)(y) = \begin{cases} l_k(y), & \text{если } y \in [y_k, y_{k+1}], \\ l'_k(y), & \text{если } y \in [y'_{k+1}, y'_k], \\ l'_0(y), & \text{если } y \in [y'_1, d], \\ \lim_{k \rightarrow \infty} h_k, & \text{если } y = b_1. \end{cases}$$

Поскольку значения линейных функций l_k и l'_k непрерывно зависят от значений на концах промежутка, оператор P является непрерывным. Линейность этого оператора очевидна.

Теперь рассмотрим оператор $S: C_{p,B}[c, d] \rightarrow c \times C_{p,B}^0([c, d] | F)$, действующий по формуле

$$Sf = (f|_F, f - P(f|_F)).$$

Нетрудно проверить, что такой оператор является линейной непрерывной биекцией. Обратный оператор $S^{-1}: c \times C_{p,B}^0([c, d] | F) \rightarrow C_{p,B}[c, d]$, действующий по правилу

$$S^{-1}(h, f) = f + P(h),$$

также является линейной непрерывной биекцией. Следовательно,

$$C_{p,B}[c, d] \cong c \times C_{p,B}^0([c, d] | F).$$

Обозначим $I'_k = [y'_{k+1}, y'_k]$, $I_k = [y_k, y_{k+1}]$ и каждому элементу $f \in C_{p,B}^0([c, d] | F)$ поставим в соответствие две последовательности $\{f | I_k\}_{k=1}^\infty$, $\{f | I'_k\}_{k=1}^\infty$ и функцию $f|_{[y'_1, d]}$.

Тогда получим

$$C_{p,B}^0([c, d] | F) \cong \left(\prod_{k=1}^\infty C_p^0(I_k | \{y_k, y_{k+1}\}) \right)_{c_0} \times \left(\prod_{k=1}^\infty C_p^0(I'_k | \{y'_{k+1}, y'_k\}) \right)_{c_0} \times C_{p,B}^0([y'_1, d] | \{y'_1\}).$$

Поскольку $I_k \sim [0, 1] \sim I'_k$, то

$$C_{p,B}^0([c, d] | F) \cong \left(\prod_{k=1}^\infty C_p^0([0, 1] | \{0, 1\}) \right)_{c_0} \times C_{p,B}^0([y'_1, d] | \{y'_1\}).$$

Следовательно,

$$C_{p,B}[c, d] \cong c \times \left(\prod_{k=1}^\infty C_p^0([0, 1] | \{0, 1\}) \right)_{c_0} \times C_{p,B}^0([y'_1, d] | \{y'_1\}).$$

Для пространства $C_{p,A}[a, b]$ возьмем последовательность $x_k = a_1 + \frac{\delta}{k} = a + \frac{\delta}{k}$, причем δ выбрана так, что $x_1 < a_2$. Рассмотрим множество $F' = \{x_k\}_{k=1}^\infty$. Тогда аналогично предыдущему получим

$$C_{p,A}[a, b] \cong c \times C_{p,A}^0([a, b] | F') \cong c \times \left(\prod_{k=1}^\infty C_p^0([0, 1] | \{0, 1\}) \right)_{c_0} \times C_{p,A}^0([x_1, b] | \{x_1\}).$$

Так как выброшенных точек в отрезках $[x_1, b]$ и $[y'_1, d]$ одинаковое число, то, применяя рассуждения из п. А), получаем, что

$$C_{p,A}^0([x_1, b] | \{x_1\}) \cong C_{p,B}^0([y'_1, d] | \{y'_1\}).$$

Следовательно, $C_{p,A}[a, b] \cong C_{p,B}[c, d]$.

Теорема 2. Если $n \neq m$, то пространства $C_{p,A}[a, b]$ и $C_{p,B}[c, d]$ не являются линейно гомеоморфными.

Доказательство. По теореме 1 мы можем ограничиться случаем $\{b_1, \dots, b_m\} \subset (c, d)$. Пусть $A = [a, b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = [c, d] \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$ и $n > m$. Предположим, существует линейный гомеоморфизм $T: C_{p,A}[a, b] \rightarrow C_{p,B}[c, d]$. Тогда оператор $T^*: C_{p,B}^*[c, d] \rightarrow C_{p,A}^*[a, b]$, действующий по правилу $T^*\phi = \phi \circ T$, – тоже линейный гомеоморфизм. По следствию из теоремы о замкнутом графике для линейного отображения в банаховых пространствах получаем, что отображение $T: C[a, b] \rightarrow C[c, d]$ является линейным гомеоморфизмом, $T^*: C^*[c, d] \rightarrow C^*[a, b]$ действует по той же формуле $T^*\phi = \phi \circ T$ и также является линейным гомеоморфизмом пространств $C^*[c, d]$ и $C^*[a, b]$.

Заметим, что если $\phi \in C_{p,A}^*[a, b]$, то

$$\phi = \alpha_1 \delta_{x_1} + \dots + \alpha_l \delta_{x_l},$$

где $x_i \in A$ и $\delta_{x_i} f = f(x_i)$. Так как $a_i \notin A$, то $\delta_{a_i} \in C^*[a, b]$, но $\delta_{a_i} \notin C_{p,A}^*[a, b]$ для $i = 1, \dots, n$.

Если $\phi \in C^*[c, d]$, то

$$\phi(Tf) = \phi_g(Tf) = \int_c^d Tf(y)dg,$$

где g – функция ограниченной вариации на промежутке $[c, d]$, такая что $g(c) = 0$ и $g(y) = g(y+0)$ для любого $y \in (c, d]$ [3. С. 384].

Для каждого $i \leq n$ существует функция $g_i \in V[c, d]$, такая что $(T^{-1})^* \delta_{a_i} = \phi_{g_i}$ и $g_i(b_k) = g(b_k+0)$ для $k = 1, \dots, m$.

По свойствам интеграла Стильтьеса

$$\alpha_1 \phi_{g_1} + \dots + \alpha_n \phi_{g_n} = \phi_{\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n}.$$

Покажем, что существуют константы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, такие что функция $g = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n$ непрерывна в точках $b_1, \dots, b_m$ и $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$. Непрерывность означает, что выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} \alpha_1 g_1(b_1) + \dots + \alpha_n g_n(b_1) = \alpha_1 g_1(b_1-0) + \dots + \alpha_n g_n(b_1-0), \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_1 g_1(b_m) + \dots + \alpha_n g_n(b_m) = \alpha_1 g_1(b_m-0) + \dots + \alpha_n g_n(b_m-0). \end{cases}$$

Получаем однородную систему m уравнений с n неизвестными, где $n > m$. В этом случае система имеет ненулевое решение. Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$.

Зададим последовательность непрерывных функций $\{f_j\}_{j=1}^\infty \in C_{p,A}[a, b]$:

$$f_j(a_1) = 1, \quad f_j(x) = 0, \text{ если } x \notin (a_1 - \frac{\delta}{j}, a_1 + \frac{\delta}{j}) \text{ и } \delta > 0 \text{ задано так, что } a_1 + \delta < a_2.$$

Ясно, что в пространстве $C_{p,A}[a, b]$ последовательность $f_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ и $\|f_j\| = 1$.

Для каждого $j \in \mathbb{N}$, с одной стороны,

$$\begin{aligned} (T^{-1})^*(\alpha_1 \delta_{a_1} + \dots + \alpha_n \delta_{a_n})(Tf_j) &= ((\alpha_1 \delta_{a_1} + \dots + \alpha_n \delta_{a_n}) \circ T^{-1})(Tf_j) = \\ &= (\alpha_1 \delta_{a_1} + \dots + \alpha_n \delta_{a_n})(f_j) = \alpha_1 f_j(a_1) + \dots + \alpha_n f_j(a_n) = \alpha_1 \neq 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, получаем

$$\begin{aligned} (T^{-1})^*(\alpha_1 \delta_{a_1} + \dots + \alpha_n \delta_{a_n})(Tf_j) &= (\alpha_1 \phi_{g_1} + \dots + \alpha_n \phi_{g_n})(Tf_j) = \phi_g(Tf_j) = \\ &= \int_c^d Tf_j(y)dg = \int_c^{b_1 - \frac{\delta}{k}} Tf_j(y)dg + \int_{b_1 - \frac{\delta}{k}}^{b_1 + \frac{\delta}{k}} Tf_j(y)dg + \int_{b_1 + \frac{\delta}{k}}^{b_2 - \frac{\delta}{k}} Tf_j(y)dg + \dots + \int_{b_{m-1} + \frac{\delta}{k}}^{b_m - \frac{\delta}{k}} Tf_j(y)dg + \\ &\quad + \int_{b_m - \frac{\delta}{k}}^{b_m + \frac{\delta}{k}} Tf_j(y)dg + \int_{b_m + \frac{\delta}{k}}^d Tf_j(y)dg. \end{aligned}$$

По свойствам интеграла Стильеса [4. С. 218]) для всех $i = 1, \dots, m$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_{b_i - \frac{\delta}{k}}^{b_i + \frac{\delta}{k}} Tf_j(y) dg \right| \leq \max_{c \leq y \leq d} |Tf_j(y)| \cdot \bigvee_{b_i - \frac{\delta}{k}}^{b_i + \frac{\delta}{k}} g = \|Tf_j\| \cdot \bigvee_{b_i - \frac{\delta}{k}}^{b_i + \frac{\delta}{k}} g \leq \|T\| \cdot \|f_j\| \cdot \bigvee_{b_i - \frac{\delta}{k}}^{b_i + \frac{\delta}{k}} g = \|T\| \cdot \bigvee_{b_i - \frac{\delta}{k}}^{b_i + \frac{\delta}{k}} g \quad (1)$$

По определению функции $v(y) = \bigvee_c^y g$, получим

$$\bigvee_{b_i - \frac{\delta}{k}}^{b_i + \frac{\delta}{k}} g = v(b_i + \frac{\delta}{k}) - v(b_i - \frac{\delta}{k}).$$

Известно, что если функция g непрерывна в некоторой точке y , то функция v также непрерывна в точке y [4. С. 210]. Поэтому для некоторого $k_0 \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\bigvee_{b_i - \frac{\delta}{k_0}}^{b_i + \frac{\delta}{k_0}} g = v(b_i + \frac{\delta}{k_0}) - v(b_i - \frac{\delta}{k_0}) < \frac{|\alpha_1|}{2m \cdot \|T\|}.$$

Тогда, учитывая (1), получим

$$\sum_{i=1}^m \left| \int_{b_i - \frac{\delta}{k_0}}^{b_i + \frac{\delta}{k_0}} Tf_j(y) dg \right| < \|T\| \cdot \frac{|\alpha_1|}{2m \cdot \|T\|} m = \frac{|\alpha_1|}{2}.$$

Рассмотрим интегралы вида:

$$\int_c^{b_1 - \frac{\delta}{k_0}} Tf_j(y) dg, \int_{b_1 + \frac{\delta}{k_0}}^{b_{i+1} - \frac{\delta}{k_0}} Tf_j(y) dg, \int_{b_m + \frac{\delta}{k_0}}^d Tf_j(y) dg.$$

Каждый из этих $m + 1$ интегралов представляет собой линейный непрерывный функционал $\Phi_i \in C^*[b_{i-1} + \frac{\delta}{k_0}, b_i - \frac{\delta}{k_0}]$, $(b_0 + \frac{\delta}{k_0})$ считаем равным c , а $b_{m+1} - \frac{\delta}{k_0}$ считаем равным d . Поскольку слабая сходимость ограниченных последовательностей в пространствах $C(K)$ совпадает с поточечной сходимостью [5. С. 288], то для всех $i = 1, \dots, m+1$ выполнено $\Phi_i(f_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Следовательно, существует такое j_0 , что каждый из этих интегралов будет меньше $\frac{|\alpha_1|}{2(m+1)}$.

Таким образом,

$$|\alpha_1| = |(T^{-1})^*(\alpha_1 \delta_{a_1} + \dots + \alpha_n \delta_{a_n})(Tf_{j_0})| < |\alpha_1|.$$

Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Обозначим через $UC_p(a, b)$ ($UC_p[a, b]$) пространство равномерно непрерывных вещественнозначных функций, заданных на интервале (a, b) ($[a, b]$) и наделенное топологией поточечной сходимости. Нетрудно видеть, что $UC_p(a, b) = C_p((a, b) | [a, b])$. Так как $C_p((a, b) | [a, b]) \cong C_{p, (a, b)}[a, b]$, то из теоремы 2 получаем такое следствие.

Следствие 1. $UC_p(a, b) \not\cong UC_p[a, b]$, т.е. пространства равномерно непрерывных функций, определенных на интервале (a, b) и полуинтервале $[a, b)$, не являются линейно гомеоморфными.

Следствие 2. $UC_p(\mathbb{R}) \not\cong UC_p[0, +\infty)$.

Список источников

1. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. М. : Изд-во МГУ, 1989. 222 с.
2. van Mill J. The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces. Amsterdam et al. : Elsevier, 2001. 643 p. (North-Holland Mathematical library; v. 64).
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. М. : Физматлит, 2004. 572 с.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М. : Наука, 1974. 480 с.
5. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.

References

1. Arkhangel'skii A.V. (1992) *Topological Functions Spaces. Mathematics and Applications, Soviet Series*, vol.78. Dordrecht: Kluwer Academic.
2. van Mill J. (2001) *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces*. North-Holland.
3. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. (2012) *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Eastford: Martino Fine Books.
4. Natanson I.P. (2016) *Theory of Functions of a Real Variable*. Mineola: Dover Publications.
5. Dunford N., Schwartz J.T. (1988) *Linear Operators*. Part I. New York: Wiley.

Сведения об авторах:

Хмылёва Татьяна Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tex2150@yandex.ru.

Петрова Кира Максимовна – студент механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: lililitiy534@yandex.ru

Information about the authors:

Khmyleva Tatiana Evgenievna (Candidate of Physics and Mathematics, Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tex2150@yandex.ru

Petrova Kira Maximovna (Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lililitiy534@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 21.06.2024; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 21.06.2024; accepted for publication 09.12.2024

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 620.17

doi: 10.17223/19988621/92/5

**Моделирование напряженно-деформированного состояния
ультразвукового пьезопреобразователя в импедансном
методе тестирования материалов****Антон Владимирович Азин¹, Александр Викторович Васильев²,
Сергей Васильевич Пономарев³, Сергей Владимирович Рикконен⁴**^{1, 2, 3, 4} *Томский государственный университет, Томск, Россия*¹ *antonazin@niipmm.tsu.ru*² *alphatoms@yandex.ru*³ *psv@niipmm.tsu.ru*⁴ *s.rikkonen@yandex.ru*

Аннотация. Работа посвящена моделированию напряженно-деформированного состояния элементов ультразвукового пьезопреобразователя при тестировании материалов. Рассматривается вопрос минимального веса пригруза ультразвукового пьезопреобразователя, не повреждающего поверхность тестируемого материала, с одной стороны, и его достаточность для обеспечения полного контакта индентора с поверхностью тела при гармоническом колебательном процессе – с другой. Для численного моделирования колебательного процесса предложена одномерная конечно-элементная модель системы «ультразвуковой пьезопреобразователь–образец». Получен частотный набор резонансов в рассматриваемом диапазоне частот 15–30 кГц, который соответствует экспериментальным данным с расхождением не более 7%.

Ключевые слова: импедансный метод, ультразвуковой пьезопреобразователь, математическая постановка, напряженное состояние, колебательная система, резонансы

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSWM-2020-0036).

Для цитирования: Азин А.В., Васильев А.В., Пономарев С.В., Рикконен С.В. Моделирование напряженно-деформированного состояния ультразвукового пьезопреобразователя в импедансном методе тестирования материалов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 56–68. doi: 10.17223/19988621/92/5

Original article

Modeling of the stress-strain state of an ultrasonic piezoelectric transducer in an impedance method of testing materials

Anton V. Azin¹, Alexander V. Vasilyev²,
Sergey V. Ponomarev³, Sergey V. Rikkonen⁴

^{1, 2, 3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ antonazin@niipmm.tsu.ru

² alphantomsk@yandex.ru

³ psv@niipmm.tsu.ru

⁴ s.rikkonen@yandex.ru

Abstract. The work is devoted to modeling the stress-strain state of the elements of an ultrasonic piezoelectric transducer (UPT). UPT is used in the impedance method for testing materials.

The issue of the minimum weight of the load is being considered. For a harmonic oscillatory process in the system, the weight of the load must be sufficient to ensure contact of the UPT indenter with the body surface. At the same time, the loading action should not damage the surface of the test sample.

A mathematical formulation of the problem is formulated to describe the oscillatory process of the “UPT-test sample” system after ensuring the contact of the UPT indenter with the surface of the material. A one-dimensional finite element model of the oscillatory system “UPT-test sample” is proposed. A frequency set of resonances in the frequency range of 15–30 kHz has been obtained. When comparing the simulation results with experimental data, the error is no more than 7%.

Keywords: impedance method, ultrasonic piezoelectric transducer, mathematical formulation, stress state, oscillatory system, resonances

Acknowledgments: The work was carried out within the framework of the State mission of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme FSWM-2020-0036).

For citation: Azin, A.V., Vasilyev, A.V., Ponomarev, S.V., Rikkonen, S.V. (2024) Modeling of the stress-strain state of an ultrasonic piezoelectric transducer in an impedance method of testing materials. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 56–68. doi: 10.17223/19988621/92/5

Введение

Импедансный метод определения неоднородностей в материале основан на регистрации изменения механического импеданса дефектного и бездефектного участков. Метод эффективен для контроля клеевых, диффузионных и паяных соединений [1]. Для возбуждения в конструкциях механических колебаний и снятия информативного сигнала используют преобразователи специальной конструкции. Наиболее перспективная конструктивная схема ультразвукового пьезо-преобразователя (УЗПП) импедансного типа – это одноосная схема [2, 3]. Насто-

ящая работа рассматривает усовершенствованную одноосную схему УЗПП с дополнительно установленными датчиком силы и двумя датчиками ускорения.

Вопросам математического моделирования УЗПП посвящено достаточное количество публикаций [3–5]. Моделирование работы УЗПП, как правило, проводится исходя из потребностей оптимизации каких-либо параметров. При моделировании пьезоактюаторов основными параметрами являются стабильность и предсказуемость механической реакции на сигнал управления, зависящие от свойств пьезоматериала [6]. При моделировании источников микроперемещений акцентом является определение эффективного режима передачи энергии исполнительному устройству [7, 8]. Моделирование работы УЗПП как источников энергии ставит перед исследователями проблему поиска оптимальной конструктивной формы пьезоэлемента и несущих его элементов, в том числе и подложки, направленного на увеличение энергоэффективности [9]. При этом физико-механические свойства подложки и конструктивное распределение масс оказывают непосредственное влияние на амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) колебательной системы и ее напряженно-деформированное состояние (НДС).

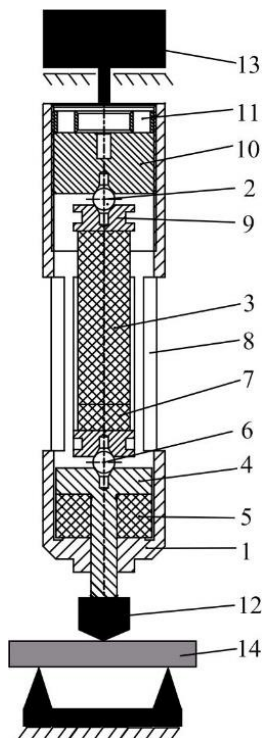


Рис. 1. Схема проведения эксперимента с помощью УЗПП: 1 – корпус, 2 и 6 – центраторы, 3 – многослойный пьезоактюатор АПМ-2-7, 4 – толкатель, 5 – упругость предварительного поджатия, 7 – датчик силы, 8 – смотровые окна, 9 – стальные щеки, 10 – гайка предварительного поджатия, 11 – стопорная гайка, 12 – индентор, 13 – пригруз, 14 – образец (нагрузка)

Fig. 1. Scheme of the experiment using the UPT: (1) housing, (2) and (6) centralizers, (3) multilayer piezoactuator APM-2-7, (4) pusher, (5) preload elasticity, (7) force sensor, (8) viewing windows, (9) cheeks, (10) preload nut, (11) locking nut, (12) indenter, (13) preload, and (14) sample (load)

Также в расчет принимается возможность расширения полосы рабочих частот, что связано с определением резонансных режимов колебательной системы. Другая немаловажная особенность пьезоэлектриков – эффекты прямого и обратного пьезоэффекта. При этом электроупругие свойства самого пьезоэлектрика зависят как от его внутренних электрических характеристик, так и от характеристик внешней электрической цепи, подключенной к пьезоэлектрику. Изменение физико-механических характеристик также сказывается на общем НДС конструкции и ее АЧХ [10].

Характерной особенностью использования пьезоматериала также является необходимость его предварительного механического нагружения [4]. Предварительное нагружение пьезоактюаторов обязательно как для устройств микроперемещений, так и для УЗПП, используемых в методах неразрушающего контроля. При этом возникающее НДС конструкции, как и свойства используемых конструкционных материалов, определяют собственную амплитудно-частотную характеристику УЗПП. Результирующая АЧХ УЗПП определяется единой, вместе с исследуемым образцом, многоконтурной колебательной системой.

Предлагаемая постановка задачи рассматривает ультразвуковой пьезопреобразователь как единую колебательную систему и учитывает физико-механические свойства составляющих эту систему элементов. При этом НДС конструкции и АЧХ могут являться исходными данными для определения таких физико-механических свойств исследуемых материалов, как жесткость и модуль упругости [11, 12].

На рис. 1 представлена схема проведения экспериментальных исследований образца с помощью УЗПП. Конструкция УЗПП излучателя состоит из корпуса (1) со смотровыми окнами (8), центраторов (2) и (6), многослойного пьезоактюатора АПМ-2-7 (3), толкателя (4), упругости предварительного поджатия (5), датчика силы (7), стальных щек (9), гайки предварительного поджатия (10), стопорной гайки (11), индентора (12). Также на рис. 1 цифрами обозначены пригруз (13) и образец (нагрузка) (14).

Постановка задачи

Рассмотрим область Ω , представленную набором подобластей $\Omega_j, j = 1, 2, \dots, k$, соответствующих элементам конструкции УЗПП с упругими, вязкоупругими и пьезоэлектрическими характеристиками материалов (см. рис. 1). Считаем, что физико-механические процессы, происходящие в подобластях Ω_j , можно адекватно описать в рамках теорий упругости, вязкоупругости и электроупругости. Пусть $\Gamma = \partial\Omega$ – граница области Ω , одного из элементов конструкции УЗПП; $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ – вектор внешней единичной нормали к Γ ($x \in \Gamma$) [7, 8].

Для элементов с чисто упругими свойствами считаем, что состояние элемента определяется вектор-функцией перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$. Тогда уравнение движения элемента имеет вид [13]:

$$\rho \ddot{u}_i + \alpha_d \dot{u}_i - (\sigma_{ij,j} + \sigma_{ij,j}^{(0)}) = f_i, \quad (1)$$

где u_i , σ_{ij} – компоненты вектора перемещения и второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа; $\sigma_{ij,j}^{(0)}$ – начальные напряжения сред, полученные в результате предварительного статического нагружения, α_d – первый коэффициент демпфи-

рования по Релею (инерционный коэффициент); $\rho = \rho(x)$ – плотность материала; $f_i = f(x_i, t)$, при $i = 1, 2, 3$, – массовые силы; $\ddot{u}_i$, $\dot{u}_i$ – вторая и первая производные по времени i компоненты вектора перемещения.

Связь деформаций и перемещений рассматривается в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,j}u_{k,i}), \quad (2)$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций Грина; u_{ij} – частная производная i -й компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}$ по направлению j .

Для моделирования механического поведения линейно упругих элементов конструкции УЗПП качестве определяющих соотношений использован закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \text{div} \vec{u}, \quad (4)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, μ , λ – параметры Ламе.

Для вязкоупругого элемента (тестируемого материала в импедансном методе) моделирование напряженного состояния проводится по соотношениям вязкоупругости

$$\sigma_{ij}(t) = \lambda \theta(t) \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}(t) - \int_0^t R(t-\tau) \phi(e_{ij}(\tau)) d\tau, \quad (5)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \sigma \delta_{ij}. \quad (6)$$

Здесь e_{ij} – компоненты девiatorа деформаций, G – модуль сдвига, t – общее время наблюдения, τ – предшествующее моменту наблюдения время, $R(t-\tau)$ – функция влияния (ядро релаксации), убывающая при возрастании $t-\tau$, ϕ – функция нелинейности материала.

Моделирование механического поведения вязкоупругого элемента так же, как и для упругой среды, производится с использованием соотношений (1) и (2).

Постановка задачи для электроупругого элемента (пьезоактюатора) разделяется на механическую и электрическую составляющие.

Для моделирования электрического поведения электроупругого элемента используются выражения (7)–(10):

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\varphi_{,i}. \quad (7)$$

– связь между тензором деформаций ε и вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ с тензором напряжений σ и вектором электрической индукции $\mathbf{D}$:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^E (\varepsilon_{kl} + \beta_d \dot{\varepsilon}_{kl}) - e_{kij} E_k, \quad (8)$$

$$D_{ij} = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik}^S E_k, \quad (9)$$

– уравнение приближения квазиэлектростатики:

$$D_{i,i} = \sigma_\Omega, \quad (10)$$

где c_{ijkl}^E – упругие свойства, e_{kij} – пьезоэлектрические свойства, ε_{ik}^S – диэлектрические свойства пьезоэлектрического материала, β_d – второй коэффициент демпфирования по Релею (конструкционный коэффициент), σ_Ω – объемная плотность электрических зарядов, причем $\sigma_\Omega = 0$ [5].

Подставляя в (1) и (10) определяющие соотношения (8), (9) и формулы (2) и (7), получаем итоговую систему дифференциальных уравнений электроупругости:

$$\rho \ddot{u}_i + \alpha_d \rho \dot{u}_i - (c_{ijkl}^E (u_{k,l} + \beta_d \dot{u}_{k,l}) - e_{kij} \Phi_{,k} + \sigma_{ij,j}^{(0)}) = f_i, \quad (11)$$

$$(e_{ikl} u_{k,l} + \epsilon_{ik}^S \Phi_{,k})_{,i} = \sigma_\Omega, \quad (12)$$

Граничные условия для элементов конструкции УЗПП подразделяются на механические и электрические.

Для задания электрических граничных условий считаем, что граница электроупругой среды P разделена на два участка: $P = P_\Phi + P_D$.

На границе P_Φ нанесены электроды, которые питаются генератором напряжения с выходным потенциалом $V(t)$, т.е.

$$\Phi = \Phi_\Gamma, \quad \Phi_\Gamma = V(t), \quad x \in P_\Phi. \quad (13)$$

На границе электроупругого элемента P_D , где нет электродов, задается поверхностная плотность электрических зарядов $\sigma_\Gamma = \sigma_\Gamma(x, t)$; $n^* \cdot D = -\sigma_\Gamma$, $\sigma_\Gamma = 0$, $x \in P_D$.

Для формулировки *общих механических граничных условий для упругого, вязкоупругого и электроупругого элементов* предположим, что граница элемента Γ разбивается на участки: Γ_u и Γ_σ .

Для закрепленных поверхностей элементов запишем условие вида:

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma_u. \quad (14)$$

Для предварительно нагруженных поверхностей элементов конструкции УЗПП справедливо выражение

$$p(x, t) = n^* \cdot \sigma^{(0)}, \quad x \in \Gamma_\sigma, \quad (15)$$

а для свободных от нагрузки поверхностей справедливо выражение

$$(\sigma_{ij,j} + \sigma_{ij,j}^{(0)}) n_j = 0, \quad x \in \Gamma_\sigma, \quad (16)$$

где $p = n^* \cdot \sigma^{(0)}$ – трехмерный вектор напряжений на площадке с нормалью n [5].

Далее рассмотрим три вида механического нагружения: предварительное статическое, динамическое «без нагрузки», динамическое «с нагрузкой» (рис. 2). Начальные условия для динамических режимов – это НДС, полученное при предварительном статическом нагружении.

Краевые условия для динамического нагружения в режиме «без нагрузки».

Граничные условия. Рассмотрим упругий элемент T , через поверхность T_3 которого УЗПП прикреплен к раме установки (см. рис. 2, а).

Контактное взаимодействие индентора и образца отсутствует. Тогда граничные условия для динамического режима «без нагрузки»:

$$u(x, t) = 0, \quad x \in T_3. \quad (17)$$

Начальные условия. При $t = 0$ поле перемещений u и скоростей $\dot{u}$ предполагается заданным:

$$u(x, 0) = 0, \quad (18)$$

$$\dot{u}(x, 0) = 0. \quad (19)$$

Краевые условия для динамического нагружения в режиме «с нагрузкой».

Граничные условия. Рассмотрим упругий элемент K (элемент индентора УЗПП) и вязкоупругий элемент Θ (элемент нагрузки в виде образца). В динамическом режиме «с нагрузкой» УЗПП под действием своего веса и веса пригруза свободно опирается индентором на образец, который расположен на опорах (см. рис. 2, а).

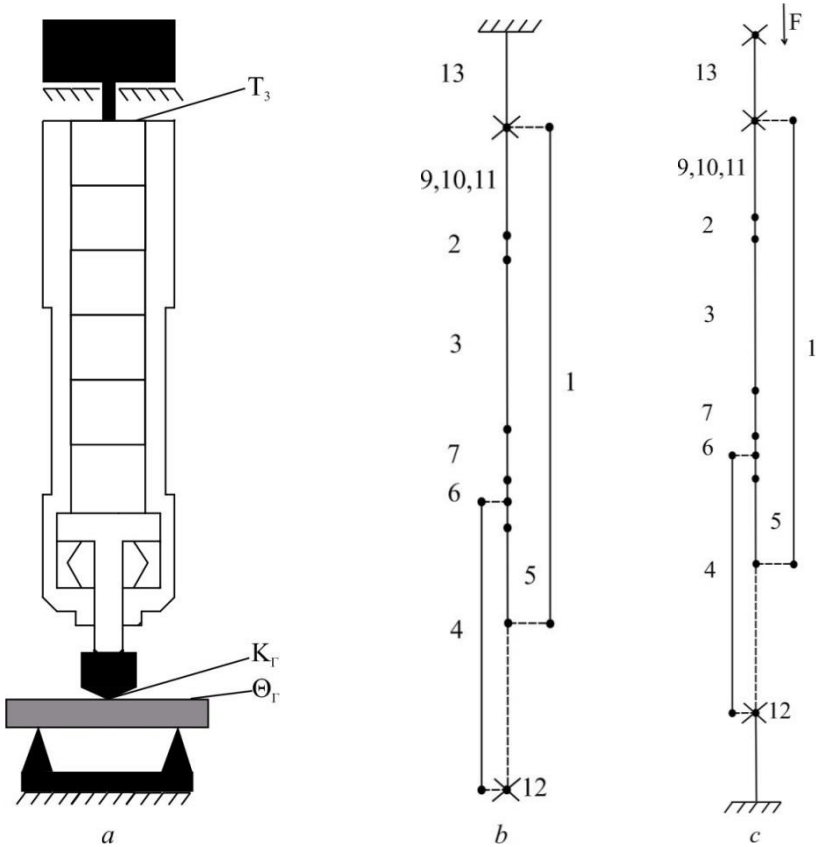


Рис. 2. Виды испытания: *a* – общий вид эксперимента, *b* – режим «без нагрузки», *c* – режим «с нагрузкой»

Fig.2. Types of testing: (a) general type of the experiment, (b) “no load” mode, and (c) “with load” mode

На граничных поверхностях K_{Γ} и Θ_{Γ} отсутствует сцепление и имеет место условие непроникания:

$$u^{+}(x) = u^{-}(x), \text{ при } x \in K_{\Gamma}, x \in \Theta_{\Gamma}, \quad (20)$$

где u^{+} и u^{-} – перемещения двух граничащих между собой контактных поверхностей [7, 8].

Начальные условия для динамического нагружения в режиме «без нагрузки», как в (18) и (19).

Результаты моделирования

Конструкции УЗПП и образца моделировались в пакете прикладных программ ANSYS:

– статический анализ и оценки НДС элементов конструкций (предварительное нагружение) рассматривались на трехмерной модели;

– динамический анализ процесса воздействия УЗПП на образец и сравнение результатов численного моделирования с результатами экспериментов рассматривались на одномерной модели.

Трехмерный случай. Трехмерная конечно-элементная модель (КЭМ) включает УЗПП и образец (нагрузку). КЭМ конструкции состояла из 40 365 узлов и 27 428 элементов. Для КЭМ конструкции УЗПП использовался тип элементов SOLID5, позволяющий учесть анизотропные свойства пьезоэлектрического материала ЦТС-46 для многослойного пьезоактюатора и датчика силы. Для клеевых соединений в конструкции пьезоактюатора использовался объемный тип элемента SOLID45. Для остальных элементов конструкции УЗПП использовался объемный тип элемента SOLID187.

В КЭМ УЗПП введены контактные пары (типы элементов TARGE170 и CONTA174) между элементами конструкции:

1) между упругостью предварительного поджатия и корпусом для учета всестороннего сжатия упругого элемента;

2) между упругостью предварительного поджатия и толкателем для учета потерь из-за сухого трения в контактной паре.

В табл. 1 приведены справочные свойства материалов элементов конструкции УЗПП, используемые для моделирования.

Таблица 1

Свойства материалов элементов конструкций

Материал	Плотность, кг/м ³	Модуль упругости, Па	Коэффициент Пуассона
Сталь	7 800	$2.1 \cdot 10^{11}$	0.29
ПММА	1 190	$3 \cdot 10^9$	0.33
Резина	1 200	$2.7 \cdot 10^6$	0.49
Эпоксидный клей	1 250	$5 \cdot 10^{10}$	0.4

В состав УЗПП входит многослойный пьезоактюатор, который состоит из семи однотипных блоков. Блоки соединены эпоксидной смолой. При этом каждый блок состоит из 50 внутренних слоев. Поляризация каждой поры слоев в блоке ориентирована в противоположном направлении друг к другу. Данные о свойствах пьезокерамического материала ЦТС-46, используемого при изготовлении многослойного пьезоактюатора, взяты из [6].

В реальных условиях элементы конструкции УЗПП (2)–(9) вставлены в корпус (1) и сжаты гайкой предварительного поджатия (10) с усилием 200 Н (см. рис. 1). В КЭМ элементы (2)–(9) склеены между собой, с дном стакана корпуса и внутренней поверхностью гайки (10). Между стержнем толкателя (4) и упругостью (10), также между боковой внутренней поверхностью корпуса (1) и упругостью (10) введены контактные пары.

При статическом преднагрузении многослойного пьезоактюатора в конструкции УЗПП зоной максимальной интенсивности напряжений является зона смотровых окон корпуса УЗПП при $\sigma_{\max} = 8.9 \cdot 10^7$ Па (рис. 3, а).

При статическом нагружении образца с помощью УЗПП зона контакта индентора и образца является зоной максимальной интенсивности напряжений при $\sigma_{\max} = 1.1 \cdot 10^7$ Па (рис. 3, б). Результаты анализа НДС элементов УЗПП и образца

демонстрируют, что выбранные материалы элементов конструкции работают в зоне упругости.

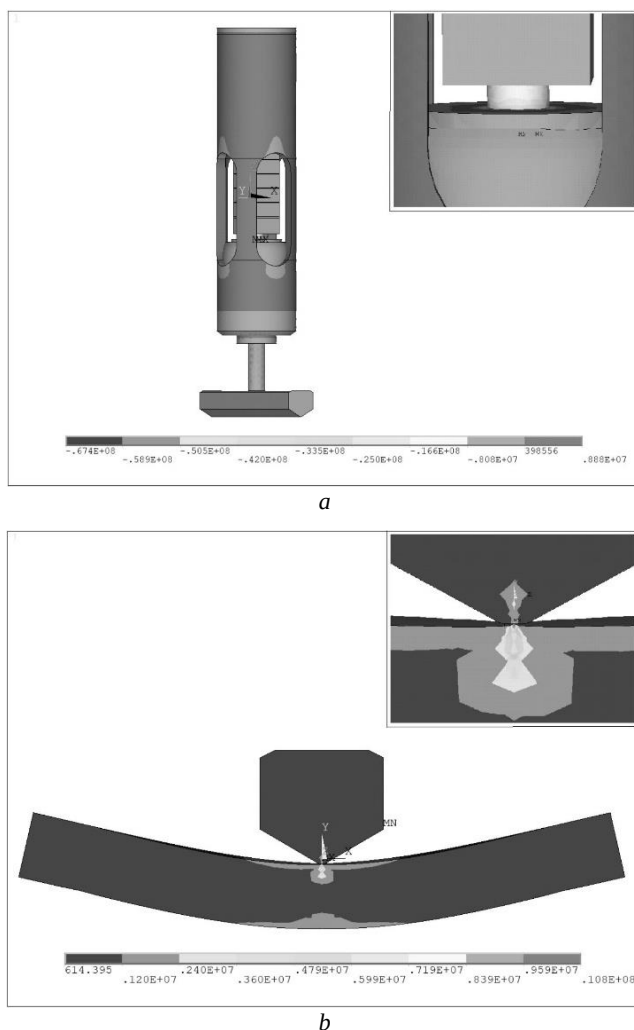


Рис. 3. Результаты численного моделирования. Трехмерный случай:
a – НДС конструкции УЗПП; *b* – НДС образца (нагрузки)
Fig. 3. Modeling results (3D case): (a) stress-strain state of the UPT design;
 (b) stress-strain state of the sample (load)

Рассматриваемая конструкция УЗПП имеет осевое направление перемещений подвижных элементов. Нормальные и тангенциальные нагрузки на боковые поверхности отсутствуют. Таким образом, есть основания для одномерного моделирования динамики УЗПП.

Одномерный случай. Одномерная КЭМ модель включает УЗПП и образец (нагрузку). Каждый элемент конструкции описан одним одномерным конечным

элементом LINK1, учитывающим площадь поперечного сечения, длину и параметры выбранного материала элемента конструкции. Пригруз и индентор учтены в качестве сосредоточенной массы элементом MASS21. Рассмотрено два расчетных случая (см. рис. 2):

1. Работа УЗПП без нагрузки (образца), т.е. в режиме короткого замыкания (КЗ).
2. Работа УЗПП с нагрузкой (образцом) в виде пластинки, работающей на изгиб.

Для каждого рассмотренного случая граничные условия для элементов конструкции УЗПП, которые находились внутри корпуса, были одинаковыми, отличались только внешние граничные условия.

В первом рассмотренном случае перемещения узла верхней части корпуса УЗПП были нулевыми по всем осям (см. рис. 2, *b*).

Во втором рассмотренном случае нагрузка (образец) располагается на двух зафиксированных опорах, индентор УЗПП оперт на образец по центральной оси, а боковая поверхность корпуса радиально ограничена в движении, т.е. у корпуса есть только осевое перемещение. При этом на верхнюю грань корпуса действует постоянная вертикальная сила пригруза 6 Н, прижимающая УЗПП к нагрузке (образцу) (см. рис. 2, *c*). Для моделируемой системы на основе доминирующей частоты колебаний, выявленной при модальном анализе, введен коэффициент конструкционного демпфирования $\beta = 7.2 \cdot 10^{-7}$.

Таблица 2

Сравнение результатов экспериментальных исследований и численного решения

Вид испытания	№ резонанса	Частота (эксперимент), кГц	Частота (расчет), кГц	Отклонение, %	Амплитуда (эксперимент), м	Амплитуда (расчет), м
Без нагрузки (КЗ)	1	15.5	16.45	6.1	$1.13 \cdot 10^{-8}$	$1.25 \cdot 10^{-7}$
	2	21.5	20.77	3.4	$2.74 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$
	3	26	27.65	6.3	$3.7 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-7}$
С нагрузкой	1	—	16.1	—	—	$28 \cdot 10^{-8}$
	2	21.9	22.8	4.1	$6.4 \cdot 10^{-8}$	$4.8 \cdot 10^{-6}$

В табл. 2 приведены результаты численного расчета в сравнении с экспериментальными данными. Анализ результатов эксперимента и расчета показал хорошее согласование по резонансным частотам, отклонение составляет не более 7%. Но величины амплитуд перемещения толкателя УЗПП на данных резонансных частотах различаются для эксперимента и расчета. По мнению авторов, причина несогласования величин амплитуд перемещения состоит в стандартном подходе при выборе коэффициента демпфирования для моделируемой системы. Данный вопрос требует дополнительных исследований.

Заключение

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. Приведенная математическая постановка задачи учитывает влияние начального напряженного состояния пьезопакета УЗПП на амплитудно-частотные и

резонансные характеристики колебательной системы при взаимодействии с поверхностью испытуемого материала в импедансном методе.

2. Результаты расчетов по одномерной модели динамического взаимодействия УЗПП с материалом показывают согласование с результатами экспериментального определения резонансных частот импедансного метода тестирования материалов с разницей не более 7%.

3. Существенное различие расчетных и экспериментальных резонансных амплитуд можно объяснить необходимостью подбора подходящей модели демпфирования в колебательной системе «УЗПП–образец».

Список источников

1. Мурашов В.В. Применение вариантов акустического импедансного метода для контроля деталей из ПКМ и многослойных клееных конструкций // *Авиационные материалы и технологии*. 2017. № S. С. 469–482. doi: 10.18577/2071-9140-2017-S-469-482
2. Rathod V.T. A Review of Acoustic Impedance Matching Techniques for Piezoelectric Sensors and Transducers // *Sensors*. 2020. Vol. 20 (14). Art. 4051. doi: 10.3390/s20144051
3. Лавриненков А.Д. Расчет амплитудно-частотных характеристик ультразвуковых преобразователей продольных и продольно-крутильных колебаний с помощью пакета ABAQUS // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2014. Т. 6. С. 955–966. doi: 10.20537/2076-7633-2014-6-6-955-966
4. Панич А.Е. Пьезокерамические актюаторы. Ростов н/Д : Изд-во Юж. фед. ун-та, 2008.
5. Наседкин А.В. Моделирование пьезоэлектрических преобразователей в ANSYS. Ростов н/Д : Изд-во Юж. фед. ун-та, 2015.
6. Храмов А.М. Напряженно-деформированное состояние взаимодействующих элементов пьезоактюатора : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2017.
7. Кузнецов С.А. Напряженно-деформированное состояние активных вантовых элементов с пьезоприводами системы регулирования формы отражающей поверхности космических рефлекторов : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2020.
8. Азин А.В., Кузнецов С.А., Пономарев С.А., Пономарев С.В., Рикконен С.В. Моделирование контактного взаимодействия элементов пьезоэлектрического двигателя // *Космические аппараты и технологии*. 2019. Т. 3, № 4. С. 164–170. doi: 10.26732/2618-7957-2019-4-222-229
9. Чебаненко В.А. Исследование колебаний пьезоэлектрических структур в составе устройств накопления энергии : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 2018.
10. Ошмарин Д.А. Моделирование демпфирования колебаний SMART-систем с элементами из пьезоэлектрических материалов и электрическими элементами : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь, 2022.
11. Азин А.В., Богданов Е.П., Васильев А.В., Пономарев С.А., Пономарев С.В., Рикконен С.В. Настройка резонансных режимов работы ультразвукового излучателя при одностороннем доступе к объекту // *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. 2023. Т. 334, № 10. С. 199–209.
12. Щербakov И.В., Люшин Б.А. Моделирование поведения отклика ортотропной пластины при воздействии динамической нагрузки // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 61. С. 111–118.
13. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М. : Мир, 1987.

References

1. Murashov V.V. (2017) Application of options of the acoustic impedance method for control of parts from PCM and multilayer glued structures. *Aviatsionnyye materialy i tekhnologii* –

- Aviation Materials and Technologies*. S. pp. 469–482. DOI: 10.18577/2071-9140-2017-S-469-482.
2. Rathod V.T. (2020) A review of acoustic impedance matching techniques for piezoelectric sensors and transducers. *Sensors*. 20(14). Article 4051. DOI: 10.3390/s20144051.
 3. Lavrinenkov A.D. (2014) Raschet amplitudno-chastotnykh kharakteristik ul'trazvukovykh preobrazovateley prodol'nykh i prodol'no-krutil'nykh kolebaniy s pomoshch'yu paketa ABAQUS [Calculation of amplitude-frequency characteristics of ultrasonic transducers of longitudinal and longitudinal-torsional oscillations using ABAQUS package]. *Komp'yuternyye issledovaniya i modelirovaniye – Computer Research and Modeling*. 6. pp. 955–966. DOI: 10.20537/2076-7633-2014-6-6-955-966.
 4. Panich A.E. (2008) *P'ezokeramicheskie aktyuatory* [Piezoceramic actuators]. Rostov-on-Don: Southern Federal University.
 5. Nasedkin A.V. (2015) *Modelirovaniye p'ezoelektricheskikh preobrazovateley v ANSYS* [Modeling piezoelectric transducers in ANSYS]. Rostov-on-Don: Southern Federal University.
 6. Khramtsov A.M. (2017) *Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye vzaimodeystviyushchikh elementov p'ezoaktyuatora* [Stress-strain state of interacting piezoactuator elements]. Dissertation. Tomsk State University.
 7. Kuznetsov S.A. (2020) *Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye aktivnykh vantovykh elementov s p'ezoprivodami sistemy regulirovaniya formy otrazhayushchey poverkhnosti kosmicheskikh reflektorov* [Stress-strain state of active cable-stayed elements with piezoelectric drives of the system for regulating the shape of the reflective surface of space reflectors]. Dissertation. Tomsk State University.
 8. Azin A.V., Kuznetsov S.A., Ponomarev S.A., Ponomarev S.V., Rikkonen S.V. (2019) Modelirovaniye kontaktnogo vzaimodeystviya elementov p'ezoelektricheskogo dvigatelya [Simulation of contact interaction of piezoelectric engine elements] *Kosmicheskie apparaty i tekhnologii*. 3(4). pp. 164–170. DOI: 10.26732/2618-7957-2019-4-222-229.
 9. Chebanenko V.A. (2018) *Issledovaniye kolebaniy p'ezoelektricheskikh struktur v sostave ustroystv nakopleniya energii* [Study of oscillations of piezoelectric structures in energy storage devices]. Dissertation. Southern Federal University.
 10. Oshmarin D.A. (2022) *Modelirovaniye dempfirovaniya kolebaniy SMART-sistem s elementami iz p'ezoelektricheskikh materialov i elektricheskimi elementami* [Modeling of oscillation damping of SMART-systems with elements of piezoelectric materials and electrical elements]. Dissertation. Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science.
 11. Azin A.V., Bogdanov E.P., Vasilyev A.V., Ponomarev S.A., Ponomarev S.V., Rikkonen S.V. (2023) Nastroyka rezonansnykh rezhimov raboty ul'trazvukovogo izluchatelya pri odnostoronnem dostupe k ob'ektu [Configurations of ultrasonic emitter resonance modes for unilateral access to an object]. *Izvestiya Tomskogo Polytekhnicheskogo Universiteta. Inzhiniring Georesursov*. 334(10). pp.199-209. DOI: 10.18799/24131830/2023/10/4346.
 12. Shcherbakov I.V., Lyukshin B.A. (2019) Modelirovaniye povedeniya otklika ortotropnoy plastiny pri vozdeystvii dinamicheskoy nagruzki [Simulation of the behavior of an orthotropic plate response under dynamic load] *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 61. pp. 111–118. DOI: 10.17223/19988621/61/10.
 13. Washizu K. (1982) *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Oxford: Pergamon Press.

Сведения об авторах:

Азин Антон Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: antonazin@niipmm.tsu.ru

Васильев Александр Викторович – аспирант Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: alphantomsk@yandex.ru

Пономарев Сергей Васильевич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, заведующий отделом Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: psv@niipmm.tsu.ru

Рикконен Сергей Владимирович – кандидат технических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: s.rikkonen@yandex.ru

Information about the authors:

Azin Anton V. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: antonazin@niipmm.tsu.ru

Vasilyev Alexander V. (Postgraduate, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: alphantomsk@yandex.ru

Ponomarev Sergey V. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: psv@niipmm.tsu.ru

Rikkonen Sergey V. (Candidate of Technical, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: s.rikkonen@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 25.09.2024; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 25.09.2024; accepted for publication 09.12.2024

Научная статья

УДК 532.522.2

doi: 10.17223/19988621/92/6

Экспериментальное исследование распада вертикальной жидкой струи

**Владимир Афанасьевич Архипов¹, Сергей Александрович Басалаев²,
Ксения Григорьевна Перфильева³, Сергей Николаевич Поленчук⁴,
Владимир Иванович Романдин⁵**

^{1, 2, 3, 4, 5} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ leva@niipmm.tsu.ru

² tarm@niipmm.tsu.ru

³ k.g.perfiljeva@yandex.ru

⁴ perzh.polenchuk@mail.ru

⁵ romandin@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Представлены методика и результаты экспериментального исследования капиллярного распада вертикальной жидкой струи, свободно истекающей через сопло из сосуда Мариотта. Определена качественная картина распада струи на капли в зависимости от ее начального диаметра. Получены зависимости длины сплошного участка струи от начальных значений ее диаметра и скорости, а также от вязкости и коэффициента поверхностного натяжения жидкости.

Ключевые слова: вертикальная струя жидкости, распад струи на капли, капиллярный режим, длина сплошного участка струи, вязкость и коэффициент поверхностного натяжения жидкости, экспериментальное исследование

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00307, <https://rscf.ru/project/22-19-00307/>

Для цитирования: Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Поленчук С.Н., Романдин В.И. Экспериментальное исследование распада вертикальной жидкой струи // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 69–78. doi: 10.17223/19988621/92/6

Original article

Experimental study of the breakup of vertical liquid jet

**Vladimir A. Arkhipov¹, Sergey A. Basalaev², Ksenia G. Perfiljeva³,
Sergey N. Polenchuk⁴, Vladimir I. Romandin⁵**

^{1, 2, 3, 4, 5} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ leva@niipmm.tsu.ru

² tarm@niipmm.tsu.ru

³ k.g.perfiljeva@yandex.ru⁴ perzh.polenchuk@mail.ru⁵ romandin@niipmm.tsu.ru

Abstract. The experimental study results of the breakup of a vertical liquid jet freely flowing through nozzle from vessel are presented. A qualitative picture of the breakup jet into drops at the its varying diameter and initial velocity has been obtained. The results of measuring the length of the continuous area of the liquid jet by the visualization method depending on the initial values of its diameter and flow rate as well as on the fluid characteristics have been obtained. It has been experimentally determined that the length of the continuous area of the jet monotonically increases with an increase in its initial diameter for all studied types of liquids. The length of the continuous area of the jet also increases for all the liquids studied with an increase in the initial velocity of liquid flow from the nozzle. A decrease in the surface tension coefficient due to the introduction of surfactant leads to an increase in the length of the continuous area of the jet compared to distilled water. An increase in the viscosity of the liquid due to the use of a water-glycerin solution leads to an increase in the length of the continuous area of the jet.

Keywords: vertical liquid jet, jet breakup into drops, capillary regime, length of continuous section of jet, viscosity and surface tension coefficient of liquid, experimental study

Acknowledgments: This study was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 22-19-00307), <https://rscf.ru/project/22-19-00307/>

For citation: Arkhipov, V.A., Basalaev, S.A., Perfilieva, K.G., Polenchuk, S.N., Romandin, V.I. (2024) Experimental study of the breakup of vertical liquid jet. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 69–78. doi: 10.17223/19988621/92/6

Введение

Распад струи жидкости, истекающей из сопла, является одной из классических задач капиллярной гидродинамики [1], интерес к которой не снижается до настоящего времени [2]. Процессы каплеобразования при диспергировании жидких струй играют важную роль в целом ряде технических приложений. В качестве примеров можно привести распыливание жидких топлив в камерах сгорания двигательных установок, струйные принтеры и установки для 3D-печати, системы орошения в сельском хозяйстве, наземные и авиационные технологии тушения пожаров. Для обеспечения требуемых характеристик распыла, в частности длины сплошного участка струи и размеров образующихся капель, необходимо проведение детальных экспериментальных исследований, позволяющих оптимизировать процесс диспергирования для конкретной задачи.

Одной из актуальных задач является оптимизация на основе математического и физического моделирования процесса сброса жидкого хладагента с борта летательного аппарата при авиационном тушении пожаров. Для верификации разрабатываемых математических моделей и программных комплексов расчета соответствующих процессов перспективным и экономически целесообразным является применение беспилотных летательных аппаратов с модельным сливным устройством (МСУ) [3]. При выборе конструкции и режимных рабочих параметров МСУ необходимо знать особенности динамики диспергирования жидкости при ее сбросе и свободном падении в виде макрообъема [4] или струи.

В настоящей работе представлены методика и результаты экспериментального исследования распада вертикальной жидкой струи, свободно истекающей из сосуда через сопло. При малых скоростях движения струи по отношению к газу ее распад происходит под действием капиллярных сил [1]. Рассмотрен капиллярный режим распада струи жидкости, для которого определены качественная картина процесса и зависимость длины сплошного участка струи от начальных значений ее диаметра и скорости, а также от вязкости и коэффициента поверхностного натяжения жидкости.

Методика экспериментального исследования

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Для получения вертикальной струи жидкости с постоянным и контролируемым значением начальной скорости использовался сосуд Мариотта, состоящий из замкнутой емкости 1 с исследуемой жидкостью и открытой с обоих концов трубки 2, введенной в верхнюю часть емкости 1 через герметичную пробку 3. Верхний конец трубки 2 сообщается с атмосферой, а нижний помещен в исследуемую жидкость.

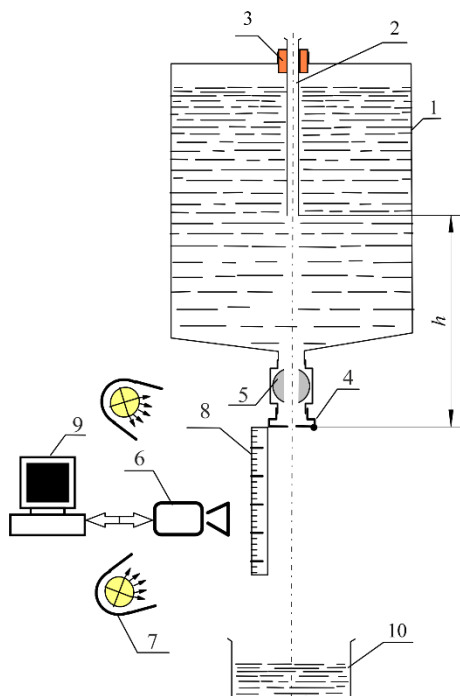


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

- 1 – замкнутая емкость; 2 – трубка; 3 – герметичная пробка; 4 – диафрагма с калиброванным соплом; 5 – запорный вентиль; 6 – камера машинного зрения; 7 – система подсветки; 8 – масштабная линейка; 9 – компьютер; 10 – приемная емкость

Fig. 1. Experimental setup diagram:

- (1) closed container; (2) tube; (3) sealed plug; (4) diaphragm with calibrated nozzle; (5) shut-off valve; (6) machine vision camera; (7) illumination system; (8) scale; (9) computer; and (10) receiving container

Истечение жидкости происходит через калиброванное сопло заданного диаметра в диафрагме 4, расположенной в нижней части емкости 1, при открытии запорного вентиля 5. Начальная скорость истечения изменялась вертикальным перемещением трубки 2 и определялась по формуле Торричелли

$$u_0 = \sqrt{2gh}, \quad (1)$$

где g – ускорение свободного падения; h – расстояние от нижнего конца трубки 2 до диафрагмы 4.

Для определения качественной картины истечения и длины сплошного участка струи жидкости использовалась высокоскоростная визуализация. Регистрация изображения проводилась камерой машинного зрения типа MER2-502-79U3C с темпом съемки 300 кадров в секунду.

Для фоновой засветки объекта использовалась специальная система 7, включающая осветительную панель с пятью вмонтированными светодиодами матрицами мощностью 10 Вт, обеспечивающими получение контрастных видеок кадров. Размеры струи в вертикальном направлении контролировали с помощью масштабной линейки 8. Обработка видеок кадров для определения длины сплошного участка струи до ее разрушения на капли проводилась с помощью компьютера 9 путем обработки видеок кадров по программе CorelDRAW с погрешностью ~ 4%.

В качестве дополнительного способа оценки длины сплошного участка струи жидкости использовался электроконтактный метод, основанный на изменении электропроводности струи при ее деформации (утонении) или разрыве электрической цепи при полном нарушении сплошности струи, связанным с образованием индивидуальных капель.

Результаты исследований и их анализ

Эксперименты проводились для дистиллированной воды, дистиллированной воды с добавлением ~ 0.1 мас. % поверхностно-активного вещества (ПАВ) и водно-глицеринового раствора с соотношением объемов 1:1. В качестве ПАВ использовали синтанол АЛМ-10. Для снижения погрешности определения коэффициентов поверхностного натяжения σ и динамической вязкости μ жидкости их измерения проводились до и после эксперимента. Коэффициент поверхностного натяжения измерялся статическим методом с использованием тензиметра K6 KRUSS с относительной погрешностью ~ 0.25%, коэффициент динамической вязкости водно-глицеринового раствора определялся по измеренной скорости стационарного осаждения u алюминиевого шарика диаметром $D = 1.3$ мм в стоксовском режиме:

$$\mu = \frac{gD^2(\rho_p - \rho)}{18u}, \quad (2)$$

где ρ_p , ρ – плотность материала шарика и водно-глицеринового раствора соответственно.

Измеренные значения физических характеристик исследованных жидкостей, а также их справочные данные [5] представлены в табл. 1.

В ходе экспериментального исследования длины сплошного участка струи варьировали ее начальный диаметр за счет изменения диаметра сопла диафрагмы 4 в диапазоне $d = (2.0 \div 5.0)$ мм, а также начальную скорость струи в диапазоне $u_0 = (2.7 \div 3.4)$ м/с за счет изменения расстояния h (рис. 1).

Таблица 1

Физические характеристики исследуемых жидкостей

	Жидкость	ρ , кг/м ³	μ , Па·с	σ , Н/м
I	Вода	998	10^{-3}	0.0727
II	Вода + ПАВ	998	10^{-3}	0.0376
III	Вода + глицерин	1 128	$6 \cdot 10^{-3}$	0.0631

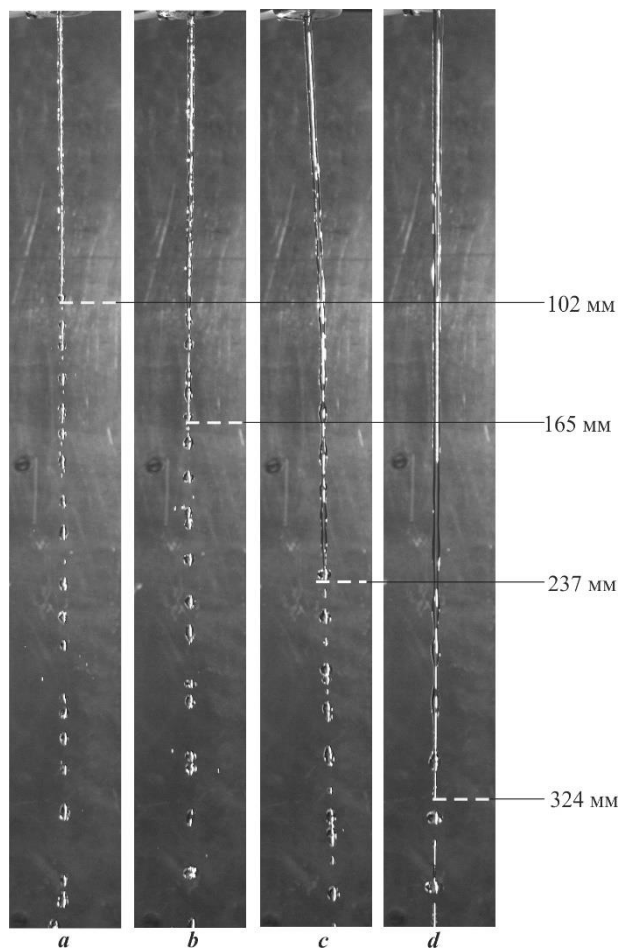


Рис. 2. Качественная картина процесса распада струи дистиллированной воды ($u_0 = 2.7$ м/с) для разных значений ее начального диаметра: $d = 2$ мм (a); $d = 3$ мм (b); $d = 4$ мм (c); $d = 5$ мм (d)

Fig. 2. Qualitative picture of the process of the distilled water jet breakup ($u_0 = 2.7$ м/с) for different values of its initial diameter: $d =$ (a) 2; (b) 3 (c) 4; and (d) 5 mm

Качественная картина истечения струи подобна для всех исследованных жидкостей. В качестве примера на рис. 2 представлены видеокadres истечения струи дистиллированной воды для значения начальной скорости $u_0 = 2.7$ м/с при варьировании диаметра струи от 2 до 5 мм. Пунктиром на рис. 2 показаны значения длины сплошного участка струи. Из приведенных видеокadres на рис. 2 следует,

что истекающая струя включает три участка – сплошной участок длиной l ; переходный участок, характеризующийся образованием связанных тонкими перемычками капель, и участок движения индивидуальных капель. Диаметр капель, образующихся на переходном участке, соответствует начальному диаметру струи. На участке движения индивидуальных капель они приобретают форму сплюснутого сфероида. Отметим, что наличие трех характерных участков по длине струи было обнаружено и электроконтактным методом. В частности, на переходном участке были обнаружены пульсации тока на экране осциллографа, связанные с изменением электропроводности струи при ее деформации.

Результаты измерения длины сплошного участка струи жидкости методом визуализации в зависимости от начальных значений ее диаметра и скорости истечения, осредненные по результатам обработки $(30 \div 80)$ видеок кадров, представлены в табл. 2 и на рис. 3 для дистиллированной воды (жидкость I, рис. 3, *a*), дистиллированной воды с добавкой ПАВ (жидкость II, рис. 3, *b*) и водно-глицеринового раствора (жидкость III, рис. 3, *c*). Результаты определения длины сплошного участка дополнительным электроконтактным методом, проведенные для воды, согласуются с результатами основной методики в пределах 10%.

Таблица 2

Результаты измерений длины сплошного участка струи

Жидкость	u_0 , м/с	l , мм			
		$d = 2$ мм	$d = 3$ мм	$d = 4$ мм	$d = 5$ мм
I	2.7	102 ± 5	165 ± 7	237 ± 7	320 ± 10
	3.1	117 ± 5	179 ± 5	260 ± 7	350 ± 10
	3.4	131 ± 6	200 ± 7	280 ± 7	370 ± 10
II	2.7	148 ± 5	258 ± 7	368 ± 8	620 ± 10
	3.1	165 ± 6	298 ± 8	395 ± 8	640 ± 8
	3.4	168 ± 8	316 ± 7	450 ± 10	660 ± 10
III	2.7	218 ± 5	352 ± 5	500 ± 8	600 ± 10
	3.1	250 ± 5	372 ± 7	525 ± 8	650 ± 10
	3.4	280 ± 5	394 ± 8	548 ± 8	710 ± 10

Анализ графиков, приведенных на рис. 3, показывает, что длина сплошного участка струи монотонно увеличивается с увеличением ее начального диаметра в ~ 3 раза (жидкость I), в ~ 4 раза (жидкость II) и в ~ 2.6 раза (жидкость III). При повышении начальной скорости истечения жидкости из сопла также происходит увеличение длины сплошного участка струи для всех исследованных жидкостей на $\sim (7 \div 30)\%$.

Снижение коэффициента поверхностного натяжения за счет введения ПАВ (см. рис. 3, *b*) приводит к увеличению длины сплошного участка струи по сравнению с дистиллированной водой на $\sim (30 \div 90)\%$.

Увеличение вязкости жидкости до $6 \cdot 10^{-3}$ Па·с (водно-глицериновый раствор) приводит к увеличению длины сплошного участка струи в ~ 2 раза.

На рис. 3 (линии 1, 2, 3) и в табл. 3 представлены результаты расчетов длины сплошного участка струи жидкости по формуле В.Г. Левича [1] для режима капиллярного распада при осесимметричных возмущениях ее поверхности

$$l = 8.46 \cdot u_0 \sqrt{\frac{\rho d^3}{8\sigma}}. \quad (3)$$

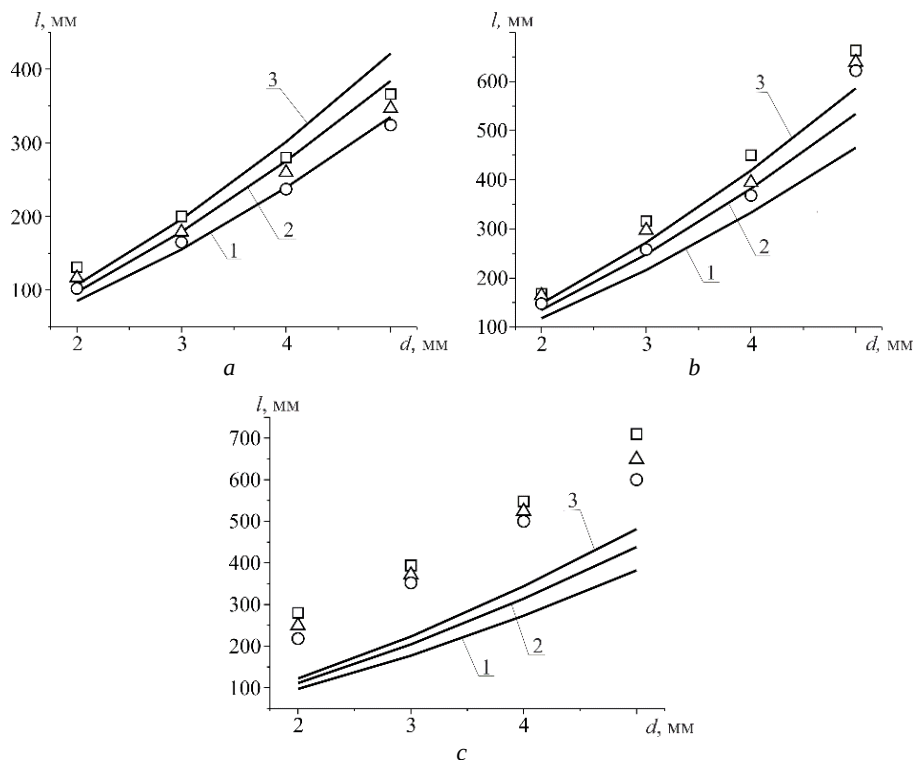


Рис. 3. Зависимость длины сплошного участка струи от диаметра сопла для дистиллированной воды (а), дистиллированной воды с добавлением ПАВ (б) и водно-глицеринового раствора (с): линии 1, 2, 3 – расчеты по формуле (3) для значений начальной скорости струи 2.7, 3.1 и 3.4 м/с соответственно; точки на графиках – экспериментальные данные для $u_0 = 2.7$ м/с ($\circ$), $u_0 = 3.1$ м/с (Δ), $u_0 = 3.4$ м/с ($\square$)

Fig. 3. Dependence of the length of the continuous section of the jet on the nozzle diameter for (a) distilled water, (b) distilled water with surfactant, and (c) water-glycerin solution: lines 1, 2, 3, calculations using formula (3) for the value of initial jet velocity 2.7, 3.1, and 3.4 m/s, respectively; points on the graphs are experimental data for $u_0 = 2.7$ ($\circ$), 3.1 (Δ), and 3.4 m/s ($\square$)

Таблица 3

Результаты расчетов длины сплошного участка струи по формуле (3)

Жидкость	u_0 , м/с	l , мм			
		$d = 2$ мм	$d = 3$ мм	$d = 4$ мм	$d = 5$ мм
I	2.7	85	155	239	335
	3.1	97	179	275	384
	3.4	107	196	301	421
II	2.7	118	216	333	465
	3.1	135	248	382	534
	3.4	148	272	419	586
III	2.7	97	177	273	382
	3.1	111	204	314	438
	3.4	122	223	344	481

Дополнительно проведен расчет длины сплошного участка струи жидкости по формуле В.Г. Левича [1] для аэродинамического режима дробления

$$l = 15d. \quad (4)$$

Полученные значения l не зависят от начальной скорости струи и типа жидкости; при увеличении начального диаметра струи от 2 до 5 мм длина ее сплошного участка монотонно увеличивается от 30 до 75 мм. Полученные значения l кратно отличаются от измеренных, что свидетельствует о капиллярном режиме распада струи в проведенных экспериментах. Это подтверждается расчетами числа Вебера

$$We = \frac{\rho_g du_0^2}{\sigma}, \quad (5)$$

где ρ_g – плотность окружающего воздуха.

Для исследованного диапазона параметров расчетом по формуле (5) получены значения $We = (0.2 \div 1.8)$. Отметим, что воздействие окружающего газа на развитие капиллярных возмущений и распад струи проявляется при $We > 5.3$ [6].

Заключение

1. Получена качественная картина распада вертикальной струи жидкости на капли при варьировании ее диаметра от 2 до 5 мм и начальной скорости от 2.7 до 3.4 м/с. Показано, что для трех исследованных жидкостей (дистиллированная вода, дистиллированная вода с добавкой ПАВ, водно-глицериновый раствор) структура струи идентична и включает три участка – сплошной участок длиной l ; переходный участок, характеризующийся образованием связанных тонкими перемычками капель, и участок движения индивидуальных капель.

2. Экспериментально определено, что длина сплошного участка струи монотонно увеличивается с увеличением ее начального диаметра в ~ 3 раза (дистиллированная вода), в ~ 4 раза (дистиллированная вода с добавкой ПАВ) и в ~ 2.6 раза (водно-глицериновый раствор).

3. Показано, что повышение начальной скорости струи жидкости приводит к увеличению длины ее сплошного участка для всех исследуемых жидкостей на $\sim (7 \div 30)\%$.

4. Показано, что снижение коэффициента поверхностного натяжения жидкости за счет введения ПАВ в ~ 2 раза приводит к увеличению длины сплошного участка струи на $\sim (30 \div 90)\%$.

5. Показано, что увеличение коэффициента динамической вязкости жидкости от 10^{-3} до $6 \cdot 10^{-3}$ Па·с приводит к увеличению длины сплошного участка струи в ~ 2 раза.

Список источников

1. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М. : Физматгиз, 1959.
2. Рябов М.Н., Гобызов О.А., Абдрахманов Р.Х., Бильский А.В. Экспериментальное исследование истечения и дробления двухфазной коаксиальной микроструи // Прикладная механика и техническая физика. 2024. Т. 61, № 1. С. 11–22. doi: 10.15372/PMTF202315353
3. Чадин Ю.М., Марунченко Л.Ю., Костюшин К.В., Петров Д.С., Юстус А.В. Разработка экспериментальной БАС для моделирования сброса хладагента при тушении пожаров // Беспилотные аппараты «БПЛА-2024» : сб. ст. Междунар. молодежного форума.

Минск, 22–26 апреля 2024 г. / Белорус. гос. технолог. ун-т.; отв. за изд. И.В. Войтов.
Минск : БГТУ, 2024. С. 66–70.

4. Архипов В.А., Басалаев С.А., Золоторёв Н.Н., Перфильева К.Г., Усанина А.С. Влияние поверхностного натяжения на разрушение макрообъема жидкости при его свободном падении // Письма в Журнал технической физики. 2020. Т. 46, № 3. С. 31–34. doi: 10.21883/PJTF.2020.03.48989.17970
5. Рабинович В.А., Хавин З.Я. Краткий справочник химика. Л. : Химия, 1978.
6. Бондарева Н.В., Григорьев А.Л., Коровин Т.Г., Коротеев А.А., Сафронов А.А., Skorobogatko T.D., Khlynov A.V. Экспериментальное исследование влияния числа Онезорге на размеры капель, образовавшихся в результате капиллярного распада струи // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 26, № 5. С. 773–777.

References

1. Levich V.G. (1959). *Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika* [Physicochemical hydrodynamics]. Moscow: Fizmatgiz.
2. Ryabov M.N., Gobyzov O.A., Abdrakhmanov R.Kh., Bilsky A.V. (2024) Experimental study of the flow and breakup of a two-phase coaxial micro jet. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 65(1). pp. 7–17. DOI: 10.1134/S0021894424010024.
3. Chadin Yu.M., Marunchenko L.Yu., Kostyushin K.V., Petrov D.S., Yustus A.V. (2024). *Razrabotka eksperimental'noy BAS dlya modelirovaniya sbrosa khladagenta pri tushenii pozharov* [Development of an experimental UAS for simulating refrigerant discharge during fire extinguishing]. Unmanned aerial vehicles "UAV-2024": *Coll. Art. of the International Youth Forum. Minsk, April 22-26, 2024 / Belarusian State Technological University. Minsk: BSTU*. pp. 66–70.
4. Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Zolotorev N.N., Perfilyeva K.G., Usanina A.S. (2020) The surface tension effect on macrovolume destruction of a liquid during its free fall. *Technical Physics Letters*. 46. pp. 130–133. DOI: 10.1134/S1063785020020030.
5. Rabinovich V.A., Khavin Z.Ya. (1978) *Kratkiy spravochnik khimika* [A brief handbook of a chemist]. Leningrad: Chemistry.
6. Bondareva N.V., Grigoriev A.L., Korovin T.G., Koroteev A.A., Safronov A.A., Skorobogatko T.D., Khlynov A.V. (2019) Experimental study of the Ohnesorge number effect on the size of droplets formed as a result of the jet capillary breakup. *Thermophysics and Aeromechanics*. 26. pp. 723–727. DOI: 10.1134/S0869864319050093.

Сведения об авторах:

Архипов Владимир Афанасьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом газовой динамики и физики взрыва Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Басалаев Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

Перфильева Ксения Григорьевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru

Поленчук Сергей Николаевич – техник I категории Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: perzh.polenchuk@mail.ru

Романдин Владимир Иванович – научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: romandin@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Arkhipov Vladimir A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Basalaev Sergey A. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

Perfilieva Ksenia G. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru

Polencuk Sergey N. (Technician Ist Category of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: perzh.polenchuk@mail.ru

Romandin Vladimir I. (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: romandin@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 29.10.2024; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 29.10.2024; accepted for publication 09.12.2024

Научная статья

УДК 621.454.3

doi: 10.17223/19988621/92/7

Влияние дисперсности алюминия на акустическую проводимость поверхности горения твердого топлива

Владимир Афанасьевич Архипов¹, Николай Николаевич Золоторёв²,
Василий Андреевич Порязов³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ leva@niipmm.tsu.ru

² nikzolotorev@mail.ru

³ poryazov@ftf.tsu.ru

Аннотация. Представлены результаты экспериментального исследования акустической проводимости поверхности горения твердого топлива, модифицированного добавками порошка алюминия разной дисперсности. Эксперименты проводились с использованием двухконцевой Т-образной камеры сгорания. В ходе эксперимента регистрировались высокочастотные пульсации давления в камере сгорания с помощью высокочувствительного пьезоэлектрического датчика, расположенного на ее корпусе. Полученные данные позволили определить влияние дисперсности порошка алюминия на акустическую проводимость горящей поверхности твердого топлива.

Ключевые слова: твердое топливо, порошок алюминия, дисперсность частиц алюминия, высокочастотная неустойчивость, акустическая проводимость поверхности горения, Т-камера, экспериментальное исследование

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSWM-2020-0036.

Для цитирования: Архипов В.А., Золоторёв Н.Н., Порязов В.А. Влияние дисперсности алюминия на акустическую проводимость поверхности горения твердого топлива // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 79–88. doi: 10.17223/19988621/92/7

Original article

Influence of aluminum dispersion on acoustic admittance of the solid propellant combustion surface

Vladimir A. Arkhipov¹, Nikolay N. Zolotorev², Vasily A. Poryazov³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ leva@niipmm.tsu.ru

² nikzolotorev@mail.ru

³ poryazov@ftf.tsu.ru

Abstract. The article presents results of experimental determination of the acoustic conductivity of the combustion surface of a solid propellant modified with additives of alu-

minum powder of various dispersion. The experiments were conducted in a specially designed double-ended T-shaped combustion chamber the design of which allowed its length to be varied. The T-shaped chamber allows for the generation of acoustic waves during combustion of solid propellant charges. During the experiment, high-frequency pressure pulsations in the combustion chamber were recorded using a highly sensitive piezoelectric sensor located on its body. The obtained data were processed using spectral analysis, which made it possible to determine the frequency of the resulting acoustic oscillations and their amplitude. The obtained data allow calculating the acoustic conductivity of the burning surface of solid propellant depending on the frequency and amplitude of oscillations in the combustion chamber. Acoustic conductivity characterizes the ability of the surface to amplify sound waves and is an important parameter for modeling combustion processes and assessing the stability of solid-propellant rocket engines. The obtained results can serve as a basis for verification of the developed mathematical models of the combustion process of solid propellants with additions of aluminum powder.

Keywords: solid propellant, aluminum powder, aluminum particle size distribution, high-frequency instability, acoustic admittance of the combustion surface, T-chamber, experimental study

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of state contract No. FSWM-2020-0036.

For citation: Arkhipov, V.A., Zolotarev, N.N., Poryazov, V.A. (2024) Influence of aluminum dispersion on acoustic admittance of the solid propellant combustion surface. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 79–88. doi: 10.17223/19988621/92/7

Введение

Изучение высокочастотной неустойчивости горения в ракетных двигательных установках как на жидком, так и на твердом топливе является актуальной задачей при создании новых топливных композиций, обеспечивающих наряду с высокими значениями удельного импульса надежное функционирование и устойчивость процессов горения [1, 2]. Во время работы твердотопливной энергетической установки (ТТЭУ) при определенных параметрах и свойствах твердого топлива возможно возникновение высокочастотной неустойчивости горения [3, 4]. Это явление объясняется резонансом: собственные частоты колебаний в камере сгорания близки к частотам, создаваемым процессом горения топлива. Такой резонанс вызывает вибрационное (или резонансное) горение, которое является самовозбуждающимся процессом с быстрым повышением давления в камере. Высокочастотные колебания внутри камеры сгорания способны вызвать неконтролируемое увеличение давления, что может привести к разрушению камеры [5].

Экспериментальные исследования критически важны для понимания и предотвращения подобных ситуаций. Ключевой параметр, который необходимо определить, – акустическая проводимость твердого топлива в широком диапазоне частот. Эта характеристика отражает способность твердого топлива поглощать или усиливать звуковые волны, что напрямую влияет на стабильность горения. Полученные данные позволяют оценить работоспособность и необходимые пределы прочности конструкции камеры сгорания при воздействии вибрационных нагрузок. Для этого необходимо проведение экспериментальных исследований

для новых разрабатываемых компонентных составов твердого топлива, конструкции камеры сгорания и режимов работы двигателя. При этом применяются специальные методы обработки данных, включающие анализ спектров колебаний и использование адекватных математических моделей. Основным источником усиления акустических колебаний – поверхность горения твердого топлива. Увеличение интенсивности связано с тем, что небольшие колебания давления в газовой фазе, всегда присутствующие в виде турбулентных шумов, приводят к изменениям скорости горения. Эти изменения, в свою очередь, вызывают дополнительную генерацию продуктов сгорания и энергии, что усиливает начальные колебания.

Следует учесть, что не все возмущения приводят к неустойчивости. Только те возмущения, частота которых близка к частоте релаксации волны горения, характеризующей скорость распространения тепловых и химических процессов в волне горения, вызывают значительное усиление. Эта частота зависит от многих факторов, включая химический и компонентный состав топлива, размер пор, температуру горения и давление в камере сгорания. Более того, характер горения может быть существенно разным в зависимости от вида топлива [6, 7]. Например, топлива с мелкодисперсной структурой могут проявлять более высокую склонность к вибрационному горению, чем топлива с крупнозернистой структурой. Геометрия камеры сгорания также играет существенную роль. Форма камеры, наличие внутренних перегородок и сопел – все это влияет на резонансные частоты системы.

Современные модели горения учитывают сложные физико-химические процессы, протекающие в зоне горения, такие как тепло- и массообмен, химические реакции и турбулентность. Используя экспериментальные данные и результаты моделирования для конкретного компонентного состава и дисперсности компонентов в составе твердого топлива, можно определить составы, устойчивые к высокочастотным колебаниям и обеспечивающие безопасную и эффективную работу ТТЭУ [8]. Кроме того, разрабатываются и специальные добавки к топливу, снижающие его склонность к резонансному горению путем модификации процесса горения на молекулярном уровне. Это напрямую связано с разработкой новых высокоэнергетических топливных смесей, включающих инновационные составляющие, такие как активные горючие-связующие (полимерные матрицы с улучшенными энергетическими свойствами для полного сгорания топлива) и металлические нанопорошки (алюминий, бор, магний), значительно повышающие удельный импульс, катализаторы горения, ускоряющие химические реакции и увеличивающие скорость горения. Влияние таких добавок на устойчивость горения также требует тщательного экспериментального исследования. Эти добавки, направленные на повышение энергетических характеристик топлива, одновременно повышают вероятность возникновения высокочастотных неустойчивостей горения. Скорость горения таких композиций значительно превосходит скорость горения традиционных твердых топлив, что обуславливает более интенсивное взаимодействие между химическими реакциями, тепловым потоком и акустическими волнами в камере сгорания.

В целом проблема высокочастотной неустойчивости горения в ТТЭУ является сложной многофакторной задачей, требующей комплексного подхода, сочетающего экспериментальные исследования, математическое моделирование и разра-

ботку новых материалов и технологий. Все это в совокупности позволяет понять механизмы возникновения высокочастотных неустойчивостей и разработать методы их подавления для обеспечения безопасной и эффективной работы ракетных двигателей. В настоящей работе представлены методика и результаты экспериментального определения акустической проводимости поверхности горения твердого топлива, модифицированного добавками порошка алюминия различной дисперсности.

Экспериментальное исследование

Для изучения характера возникновения акустической волны при горении используются специальные камеры сгорания, разработанные для исследования вибрационного горения твердых топлив. Современные датчики и системы регистрации акустических колебаний позволяют получить необходимую информацию для анализа акустической проводимости поверхности горения твердого топлива.

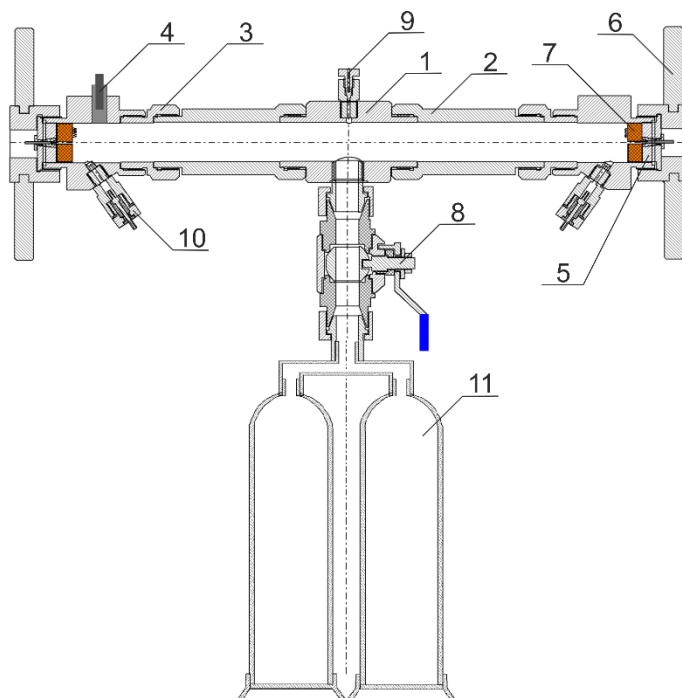


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1 – центральная секция; 2 – удлинитель основной; 3 – удлинитель укороченный; 4 – датчик давления; 5 – узел крепления заряда твердого топлива; 6 – зажим; 7 – образец твердого топлива; 8 – кран высокого давления; 9 – кран Маевского для сброса давления газов; 10 – система зажигания образца; 11 – балластные емкости

Fig. 1. Scheme of the experimental setup:

(1) central section; (2) main extension; (3) shortened extension; (4) pressure sensor; (5) solid propellant charge fastening device; (6) clamp; (7) solid propellant sample; (8) high-pressure valve; (9) Mayevsky valve for releasing gas pressure; (10) sample ignition system; and (11) ballast tanks

В настоящей работе для проведения исследований использовалась экспериментальная установка, представляющая собой двухконцевую Т-образную камеру сгорания [5, 9, 10]. Экспериментальная установка предназначена для создания условий горения двух образцов твердого топлива, способствующих развитию акустической неустойчивости. Схема и фотография экспериментальной установки приведены на рис. 1, 2.



Рис. 2. Фотография экспериментальной установки
Fig. 2. Photo of the experimental setup

Изменение длины резонатора Т-камеры происходит путем монтажа дополнительных секций, совпадающих по диаметру ($D = 42$ мм) с центральной секцией. Зажигание образцов твердого топлива производилось с помощью электрической системы зажигания и накаливающей проволоки. Перед экспериментом в камеру сгорания и балластные емкости предварительно закачивался воздух до заданного давления. Воздух для создания давления в системе подавался от поршневого компрессора КВД-Г. Эксперименты с образцами твердого топлива проводились при давлении $p = 3.0$ МПа. Для каждого типа состава твердого топлива проводилось несколько дублирующих экспериментов.

Для более точной регистрации колебаний давления заподлицо устанавливаются высокочувствительный тензометрический датчик давления ЛХ-412 и пьезоэлектрический датчик пульсаций ЛХ-601, расположенные на корпусе Т-камеры. Сигналы с этих датчиков записываются с высокой частотой дискретизации с помощью виртуального осциллографа АКИП-74824, что позволяет получить детальную информацию о частотном спектре колебаний и определить преобладающие частоты, характерные для возникновения акустической неустойчивости. Анализ полученных данных, включающий обработку полученных сигналов с датчика давления и пульсаций, проводится с использованием специализированного обо-

рудования и программного обеспечения, позволяющего определить характеристики неустойчивости, такие как частота, амплитуда и пространственное распределение колебаний.

Образцы были изготовлены на основе бидисперсного перхлората аммония (ПХА), состоящего из 60% крупнодисперсной фракции с диаметром частиц ($165 \div 315$) мкм и 40% мелкодисперсной фракции с диаметром частиц менее 50 мкм. В качестве горючего-связующего использовался бутадиеновый каучук, пластифицированный трансформаторным маслом (СКДМ-80). Для определения влияния дисперсного состава порошка алюминия на акустическую проводимость в состав твердого топлива были введены в качестве энергетических добавок порошки алюминия промышленных марок АСД-4, АСД-6, АСД-8. Компонентные составы образцов модельных твердых топлив и среднемассовые диаметры частиц алюминия D_{43} приведены в табл. 1.

Таблица 1

Компонентные составы исследуемых твердых топлив

№	Компонентный состав, мас. %				
	ПХА	СКДМ-80	Энергетическая добавка		D_{43} , мкм
1	81.4	18.6	Без металла	—	—
2	69.2	15.8	АСД-4	15	8.1
3	69.2	15.8	АСД-6	15	4.6
4	69.2	15.8	АСД-8	15	2.1

Площадь поверхности горения образцов твердого топлива изменялась путем выполнения в образце параллельных пропилов определенной ширины и глубины. На рис. 3 представлены фотографии готовых образцов твердого топлива.

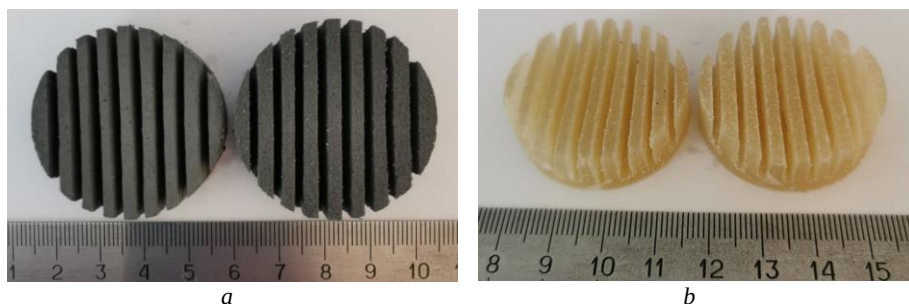


Рис. 3. Образцы твердого топлива, содержащие в качестве энергетической добавки 15 мас. % порошка алюминия (а), и без энергетической добавки (б)

Fig. 3. Solid propellant samples (a) containing 15 wt. % of aluminum powder and (b) without energy additives

Одной из основных характеристик склонности твердых топлив к вибрационному горению является акустическая проводимость горячей поверхности твердого топлива. Увеличение действительной части акустической проводимости χ как основного источника усиления звуковых волн в продуктах сгорания приводит к созданию условий усиления амплитуды колебаний и дестабилизации процесса горения. Обработка полученных результатов была проведена по методике, подробно представленной в работах [11–14]. Значения частоты колебаний при

горении твердого топлива, а также действительной части удельной безразмерной эффективной акустической проводимости горящей поверхности твердого топлива приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты исследования акустической проводимости и частоты колебаний исследуемых составов твердого топлива

№	Марка алюминия	Длина резонатора, мм	Частота колебаний, Гц	Акустическая проводимость, χ	Давление, МПа
1	Без металла	1 045	413	$4.8 \cdot 10^{-3}$	3.0
2	АСД-4		455	$2.3 \cdot 10^{-3}$	
3	АСД-6		457	$2.9 \cdot 10^{-3}$	
4	АСД-8		—	—	

Из результатов, приведенных в табл. 2, следует, что величина χ для составов, содержащих порошки алюминия АСД-4 и АСД-6, меньше, чем для безметалльного состава на 52 и 40% соответственно. Снижение действительной части акустической проводимости для этих составов связано с демпфирующим влиянием частиц конденсирующей фазы. При добавлении в состав модельного твердого топлива 15 мас. % мелкодисперсного порошка алюминия АСД-8 акустические колебания давления в резонаторе Т-камеры не наблюдались. Это связано, по-видимому, с особенностями процесса горения мелкодисперсного порошка алюминия АСД-8 ($D_{43} = 2.1$ мкм) и с характеристиками конденсированных продуктов его сгорания.

Полученные экспериментальные данные качественно согласуются с опубликованными результатами других авторов. Количественное сравнение результатов проведенных экспериментов для исследованных составов с литературными данными является не совсем корректным. Это обусловлено различиями в массовых долях компонентов, природе горючего-связующего, дисперсности частиц ПХА и алюминия. Полученные результаты по порядку величины согласуются с экспериментальными данными [7] и результатами математического моделирования [14].

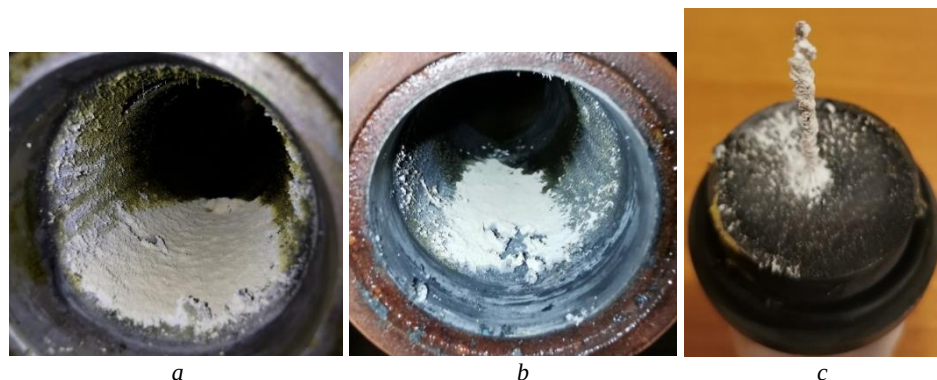


Рис. 4. Фотографии конденсированной фазы продуктов сгорания в резонаторе (а, б) и узле крепления образца твердого топлива (с)

Fig. 4. Photo of the condensed phase of combustion products (a, b) in the resonator and (c) in the solid propellant charge fastening device

Отличительной особенностью при сгорании образцов твердых топлив, содержащих порошок алюминия, является образование остатков конденсированной фазы продуктов сгорания и ее отложения на торцевых концах Т-камеры. На рис. 4 приведены фотографии образования конденсированной фазы в виде белого порошка после проведения эксперимента. Отбор конденсированных продуктов сгорания проводился для каждого эксперимента после демонтажа зажима и узла крепления образца твердого топлива.

После проведения экспериментов с образцами твердого топлива без содержания добавок порошка алюминия образование конденсированной фазы такого характера отсутствует.

Заключение

В настоящей статье представлены результаты серии экспериментов по измерению акустической проводимости поверхности горения модельных твердых топлив на основе СКДМ-80 (горючее-связующее), бидисперсного перхлората аммония (окислитель) с добавлением 15 мас. % порошков алюминия (энергетическая добавка) разной дисперсности, проведенных с использованием Т-камеры с длиной резонатора 1 045 мм.

Для исследования влияния дисперсности частиц алюминия в качестве энергетической добавки модельных твердых топлив использовались промышленные порошки алюминия марок АСД-4, АСД-6 и АСД-8, среднемассовый диаметр частиц которых D_{43} составлял 8,1, 4,6 и 2,1 мкм соответственно.

Результаты экспериментов показали, что для модельных составов с крупнодисперсными частицами алюминия (АСД-4, АСД-6) в резонаторе Т-камеры наблюдались интенсивные колебания с частотой ~ 450 Гц (при среднем давлении в камере $\sim 3,0$ МПа).

Показано, что для составов твердого топлива с порошками АСД-4, АСД-6 действительная часть акустической проводимости в два раза ниже, чем для аналогичного состава твердого топлива, не содержащего энергетическую добавку.

Таким образом, добавление порошка алюминия в состав твердого топлива приводит к стабилизации процесса горения и снижению амплитуды акустических колебаний с сохранением их частоты. Это может быть связано с демпфированием акустических колебаний конденсированными продуктами сгорания частиц алюминия.

При добавлении в состав модельного твердого топлива 15 мас. % мелкодисперсного порошка алюминия АСД-8 акустические колебания давления в резонаторе Т-камеры не наблюдались.

Полученные в экспериментах результаты по влиянию дисперсности порошков алюминия на развитие акустических колебаний в резонаторе Т-камеры можно объяснить различием средних размеров частиц конденсированных продуктов сгорания (оксида алюминия Al_2O_3), образующихся при горении порошков алюминия разной дисперсности в составе твердого топлива, которые могут демпфировать возникающие акустические колебания.

Список источников

1. Шевченко Т.А., Корчикова О.В. Высокочастотные колебания в камерах сгорания жидкостных ракетных двигателей // Решетневские чтения. 2018. Т. 1. С. 225–226.

2. Su W., Wang N., Li J., Zhao Y., Yan M. Improved method of measuring pressure coupled response for composite solid propellants // *Journal of Sound and Vibration*. 2013. V. 333 (8). P. 2226–2240. doi: 10.1016/J.JSV.2013.12.003
3. Исследование ракетных двигателей на твердом топливе / под ред. М. Саммерфильда. М. : Изд-во иностр. лит., 1963.
4. Price E.W. Experimental observations of combustion instability // *Fundamentals of Solid Propellant Combustion*. 1984. P. 733–790.
5. Horton M.D. Use of the one-dimensional T-burner to study oscillatory combustion // *AIAA Journal*. 1964. V. 2 (6). P. 1112–1118.
6. Ganesan S., Chakravarthy S.R. Effect of initial grain temperature on combustion response of composite solid propellants in t-burner // *Combustion Science and Technology*. 2022. V. 196 (11). P. 1615–1627. doi: 10.1080/00102202.2022.2121162
7. Куроедов А.А., Борисов Д.М., Семёнов П.А. Определение акустической проводимости зоны горения безметаллических и металлизированных энергетических конденсированных систем // *Труды МАИ*. 2018. № 98. URL: https://trudymai.ru/upload/iblock/0cc/Kuroedov_Borisov_Semenov_rus.pdf?lang=ru&issue=98
8. Крайнов А.Ю., Моисеева К.М. Исследование газодинамики горения смесового твердого топлива при колебаниях давления // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2024. № 90. С. 130–139.
9. Coates R.L., Horton M.D., Ryan N.W. T-burner method of determining the acoustic admittance of burning propellants // *AIAA Journal*. 1964. V. 2 (6). P. 1119–1122.
10. Хортон М.Д. Применение одномерной Т-камеры для изучения вибрационного горения // *Ракетная техника и космонавтика*. 1964. № 6. С. 65–69.
11. Архипов В.А., Волков С.А., Ревагин Л.Н. Экспериментальное исследование акустической проводимости горящей поверхности смесевых твердых топлив // *Физика горения и взрыва*. 2011. Т. 47, № 2. С. 74–80.
12. Архипов В.А., Бондарчук С.С., Жуков А.С. Нестационарные режимы горения конденсированных систем : учеб. пособие. Томск : Изд. Дом Том. гос. ун-та, 2017.
13. Архипов В.А., Волков С.А., Ревагин Л.Н. Влияние состава смесевых композиций и ионизирующего излучения на устойчивость горения // *Химическая физика*. 2012. Т. 31, № 5. С. 50–56.
14. Крайнов А.Ю., Порязов В.А., Моисеева К.М. Моделирование нестационарного горения твердого топлива в камере сгорания и расчет акустической проводимости поверхности горения топлива // *Инженерно-физический журнал*. 2023. Т. 96, № 3. С. 692–702.

References

1. Shevchenko T.A., Korchikova O.V. (2018) Vysokochastotnyye kolebaniya v kamerakh sgoraniya zhidkostnykh raketnykh dvigateley [High-frequency oscillations in combustion chambers of liquid rocket engines]. *Reshetnevskiye chteniya*. 1. pp. 225–226.
2. Su W., Wang N., Li J., Zhao Y., Yan M. (2013) Improved method of measuring pressure coupled response for composite solid propellants. *Journal of Sound and Vibration*. 333(8). pp. 2226–2240. DOI: 10.1016/J.JSV.2013.12.003.
3. Summerfield M., Ed. (1960) *Solid Propellant Rocket Research*. Academic Press.
4. Price E.W. (1984) Experimental observations of combustion instability. *Fundamentals of Solid Propellant Combustion*. pp. 733–790.
5. Horton M.D. (1964) Use of the one-dimensional T-burner to study oscillatory combustion. *AIAA Journal*. 2(6). pp. 1112–1118.
6. Ganesan S., Chakravarthy S.R. (2022) Effect of initial grain temperature on combustion response of composite solid propellants in t-burner. *Combustion Science and Technology*. 196(11). pp. 1615–1627. DOI: 10.1080/00102202.2022.2121162.
7. Kuroedov A.A., Borisov D.M., Semenov P.A. (2018) Opredeleniye akusticheskoy provodimosti zony goreniya bezmetal'nykh i metallizirovannykh energeticheskikh kondensi-

- rovannykh system [Determination of acoustic admittance of the combustion zone of metal-free and metalized energetic condensed media]. *Trudy MAI*. 98.
8. Krainov A.Yu., Moiseeva K.M. (2024) *Issledovaniye gazodinamiki goreniya smesevogo tverdogo topliva pri kolebaniyakh davleniya* [A study of the gas dynamics of combustion of a mixed solid propellant with pressure fluctuations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 90. pp. 130–139.
 9. Coates R.L., Horton M.D., Ryan N.W. (1964) T-burner method of determining the acoustic admittance of burning propellants. *AIAA Journal*. 2(6). pp. 1119–1122.
 10. Horton M.D. (1964) *Primeneniye odnomernoy T-kamery dlya izucheniya vibratsionnogo goreniya* [Use of the one-dimensional T-burner to study oscillatory combustion]. *Raketnaya tekhnika i kosmonavtika*. 6. pp. 65–69.
 11. Arkhipov V.A., Volkov S.A., Revyagin L.N. (2011) Experimental study of the acoustic admittance of the burning surface of composite solid propellants. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 47(2). pp. 193–199.
 12. Arkhipov V.A., Bondarchuk S.S., Zhukov A.S. (2017) *Nestatsionarnyye rezhimy goreniya kondensirovannykh sistem* [Nonstationary modes of combustion of condensed systems]: Tomsk: Tomsk State University.
 13. Arkhipov V.A., Volkov S.A., Revyagin L.N. (2012) Influence of the composition and ionizing radiation on the stability of combustion of composite propellants. *Russian Journal of Physical Chemistry B*. 6(3). pp. 384–389.
 14. Krainov A.Yu., Poryazov V.A., Moiseeva K.M. (2023) Simulation of the nonstationary burning of a solid propellant in a combustion chamber and calculation of the acoustic admittance of the combustion surface of this propellant. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 96(3). pp. 688–699.

Сведения об авторах:

Архипов Владимир Афанасьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом газовой динамики и физики взрыва Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Золоторёв Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nikzolotorev@mail.ru

Порязов Василий Андреевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

Information about the authors:

Arkhipov Vladimir A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Zolotorev Nikolay N. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nikzolotorev@mail.ru

Poryazov Vasily A. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 07.11.2024; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 07.11.2024; accepted for publication 09.12.2024

Научная статья

УДК 536.42+536.24

doi: 10.17223/19988621/92/8

Моделирование внутрибаллистических процессов в РДТТ для зарядов с неизвлекаемой формообразующей оснасткой

**Сергей Сергеевич Бондарчук¹, Александр Степанович Жуков²,
Мансур Хузиахметович Зиятдинов³, Яна Александровна Дубкова⁴,
Леонид Леонидович Миньков⁵, Алексей Юрьевич Крайнов⁶**

^{2,3,4,5,6} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

² *Zhuk_77@mail.ru*

³ *ziatdinovm@mail.ru*

⁴ *kimberlyo.ohi@gmail.com*

⁵ *lminkov@ftf.tsu.ru*

⁶ *akrainov@ftf.tsu.ru*

Аннотация. Приводится оценка развития внутрибаллистического процесса в ракетном двигателе на твердом топливе с канально-щелевым зарядом, щелевая область которого заполнена неизвлекаемой формообразующей оснасткой (НФО). Использована математическая модель, учитывающая первоначальную локализацию точки воспламенения заряда НФО, постепенное выгорание заряда НФО, постепенное зажигание заряда двигателя по мере оголения рабочей поверхности, а также различную теплофизическую природу продуктов сгорания состава НФО и основного заряда. Зависимости давления в камере сгорания, тяги и времени функционирования изделия, существенным образом зависящие от динамики развития поверхности горения заряда, определяются скоростью горения материала НФО.

Ключевые слова: ракетный двигатель на твердом топливе, неизвлекаемая формообразующая оснастка, внутрикамерные процессы, математическое моделирование

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

Для цитирования: Бондарчук С.С., Жуков А.С., Зиятдинов М.Х., Дубкова Я.А., Миньков Л.Л., Крайнов А.Ю. Моделирование внутрибаллистических процессов в РДТТ для зарядов с неизвлекаемой формообразующей оснасткой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 89–100. doi: 10.17223/19988621/92/8

Original article

Modeling of intra-ballistic processes in solid rocket motors for charges with non-removable forming rig

Sergey S. Bondarchuk¹, Alexander S. Zhukov², Mansur Kh. Ziatdinov³,
Yana A. Dubkova⁴, Leonid L. Minkov⁵, Aleksey Yu. Krainov⁶

^{2,3,4,5,6} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

² Zhuk_77@mail.ru

³ ziatdinovm@mail.ru

⁴ kimberlyo.ohi@gmail.com

⁵ lminkov@ftf.tsu.ru

⁶ akrainov@ftf.tsu.ru

Abstract. The use of unextractable forming tool (UFT) can significantly reduce the cost of producing expensive removable rig, shortens the solid rocket motor manufacturing cycle and increases production safety. It is proposed to use porous plates made of titanium powders using additive technologies and impregnated with a fast-burning composition based on aluminum borides as UFTs. The paper provides an assessment of the development of the intra-ballistic process in a solid rocket motor with a channel-slot grain, the slot region of which is occupied by UFT. For the assessment, a mathematical model was used that takes into account the initial localization of the ignition point of the UFT-grain, the gradual burnout of the UFT-grain, the gradual ignition of the motor grain as the working surface becomes exposed, as well as the different thermophysical nature of the combustion products of the UFT composition and the main grain. The dependence of the pressure in the combustion chamber, the thrust and the operating time, which significantly depend on the dynamics of the development of the burning surface of the grain, are determined by the combustion rate of the UFT material.

Keywords: solid propellant rocket motor, non-removable forming rig, intra-chamber processes, mathematical modeling

Acknowledgments: This study was supported by the Tomsk State University Development Programme (Priority-2030).

For citation: Bondarchuk, S.S., Zhukov, A.S., Ziatdinov, M.Kh., Dubkva, Y.A., Minkov, L.L., Krainov, A.Yu. (2024) Modeling of intra-ballistic processes in solid rocket motors for charges with non-removable forming rig. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 89–100. doi: 10.17223/19988621/92/8

Введение

Использование существующей технологии изготовления прочноскрепленных зарядов требует значительных материальных и временных затрат, организации специальных условий их производства, что связано с выполнением сложных и продолжительных операций: подготовки технологической оснастки, ее сборки с корпусом двигателя, распрессовки изделия и пр. Кроме того, такая технология зачастую существенно ограничивает использование новых высокоэнергетических топливных композиций на активных горючих-связующих, не обеспечивает высо-

кую длительность гарантийного срока хранения из-за деформации заряда. Сохранение исходных геометрических параметров прочноскрепленного заряда в течение всего эксплуатационного периода позволит обеспечить высокую стабильность тактико-технических характеристик изделия и его «ампулированное» состояние при хранении и эксплуатации.

Использование неизвлекаемой формообразующей оснастки (НФО) взамен традиционной извлекаемой позволит существенно сократить затраты на производство дорогостоящей оснастки, сократить цикл изготовления ракетных двигателей на твердом топливе (РДТТ) и повысить безопасность производства за счет исключения операции распрессовки. Кроме того, использование НФО позволяет повысить коэффициент заполнения камеры сгорания.

Исследования, выполненные в работах [1, 2], показали, что достаточно перспективная конструкция НФО может состоять из пористой матрицы, пропитанной быстрогорящим составом, или тонкого монолита, на который быстрогорящее топливо наносится с использованием каких-либо адгезионных материалов.

Оптимальным вариантом, как и в случае пористых пластин из порошков титана, является наличие открытой пористости в образцах. Это позволяет пропитать пластины быстрогорящими составами на основе боридов алюминия.

Очевидно, что разработка и создание высокоэнергетических композитных структур сложной формы при относительно низких затратах возможны при использовании аддитивных технологий, поскольку сложность геометрии, толщины элементов «конструкции» и точность их изготовления вполне достижимы для высокоточных современных 3D-принтеров [3–5]. Большое значение при реализации аддитивных технологий имеет выбор материала и геометрии НФО для формирования сложнопрофильных высокоэнергетических композитных структур.

Из существующих способов объемной печати привлекательным для создания НФО является метод селективного лазерного спекания (SLS-method), прежде всего потому, что имеется возможность использования материалов (порошков), дающих дополнительную энергетику при своем сгорании. В работе [2] представлены достаточно хорошо отработанные методы получения необходимых элементов конструкции при использовании порошков алюминия со средним размером частиц порядка 10 мкм.

Оптимальной базовой системой для создания НФО может являться система $Ti + B$. Для этой системы достигнута максимальная скорость горения до 350 мм/с. Теплота сгорания диборида титана равна $\sim 5\,700$ кал/г при теплоте его образования $\sim 1\,030$ кал/г. Полученные в экспериментах значения температуры горения смесей системы $Ti + B$ варьируют в пределах $(2\,300 \div 3\,000)^\circ C$. Плотность титана (4.5 г/см^3) и диборида титана намного меньше плотности циркония (6.5 г/см^3), гафния (13.3 г/см^3) и их боридов.

Разработанный в ходе выполнения работ [2] количественный состав компонентов (69 мас. % $Ti + 31$ мас. % B), обеспечивающий стабильность горения, характеризуется скоростью горения 80 ± 10 мм/с. Для контролируемого повышения скорости горения до заданных 100 мм/с были разработаны составы, в которые помимо основных компонентов вводили порошки алюминия.

Для получения образцов, используемых в качестве основы для НФО, были разработаны элементы, общий вид которых представлен на рис. 1.

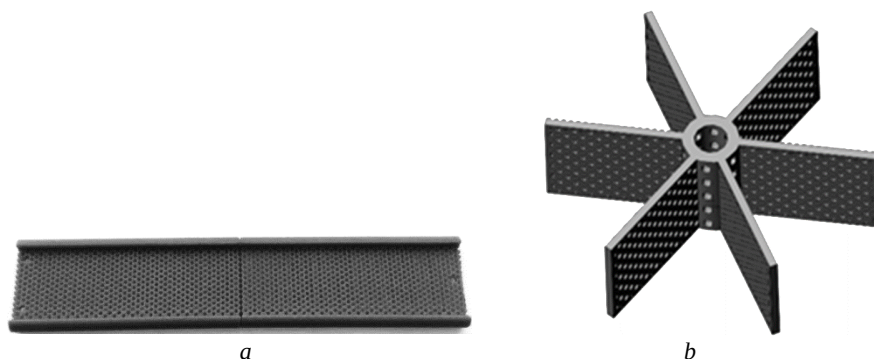


Рис. 1. Общий вид образцов матриц элементов НФО:

a – линейный элемент; *b* – звездообразный элемент

Fig. 1. General view of the samples of matrices of unextractable forming tool elements (UFT):
(*a*) linear element and (*b*) star element

Цель данной работы – исследование влияния быстрогорящей неизвлекаемой формообразующей оснастки на внутрибаллистические характеристики РДТТ с канально-щелевым зарядом, включающим НФО.

Постановка задачи

Для оценки развития внутрибаллистического процесса и, в частности, изменения поверхности горения канально-щелевого заряда вследствие его выгорания, использовалась математическая модель, учитывающая начальную локализацию места зажигания НФО-заряда, постепенное выгорание НФО-заряда, постепенное подключение к горению заряда двигателя по мере оголения рабочей поверхности, учет разной теплофизической природы продуктов сгорания состава НФО и основного заряда.

Для осредненных по камере сгорания со свободным внутрикамерным объемом W в условиях отсутствия теплообмена с конструктивными элементами камеры смесь продуктов горения можно считать идеальным газом, а его истечение из этого объема – квазистационарным изоэнтропическим. В рамках принятой модели для расчета изменений во времени t параметров газа в объеме W камеры сгорания математическая модель формулировалась следующими соотношениями.

Уравнение баланса массы газа в камере

$$\frac{d}{dt}(\rho W) = G_Z^+ + G_F^+ - G_*, \quad (1)$$

где ρ – плотность газа, G^+ – газоприход, G_* – расход газа через сопло. Индекс Z относится к заряду, индекс F – к неизвлекаемому элементу.

Для определения термодинамических параметров смеси продуктов сгорания заряда и неизвлекаемого элемента решаются уравнения изменения изобарической теплоемкости C_p и газовой постоянной R [6–9].

Уравнение изменения газовой постоянной R

$$\frac{d}{dt}(R\rho W) = R_{Z0}G_Z^+ + R_{F0}G_F^+ - RG_*, \quad (2)$$

где R_{Z0} , R_{F0} – индивидуальные свойства (газовые постоянные) поступающих продуктов сгорания.

Уравнение изменения изобарической теплоемкости газовой смеси C_p

$$\frac{d}{dt}(C_p \rho W) = C_{pZ0} G_Z^+ + C_{pF0} G_F^+ - C_p G_*, \quad (3)$$

где C_{pZ0} , C_{pF0} – индивидуальные свойства (изобарические теплоемкости) поступающих продуктов сгорания.

Закон сохранения внутренней энергии газовой смеси выражается через изменение давления:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{pW}{\gamma - 1} \right) = C_{pZ0} T_{pZ0} G_Z^+ + C_{pF0} T_{pF0} G_F^+ - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_*}{\rho_*} G_*, \quad (4)$$

где T_{pZ0} , T_{pF0} – изобарические температуры горения составов.

Уравнение изменения свободного объема камеры вследствие выгорания составов

$$\frac{d}{dt}(W) = \frac{G_Z^+}{\rho_Z} + \frac{G_F^+}{\rho_F}, \quad (5)$$

где ρ_Z , ρ_F – плотности основного и быстрогорящего составов.

Показатель адиабаты смеси газов определяется через значения теплоемкости и газовой постоянной в соответствии с законом Майера: $\gamma = C_p / (C_p - R)$. Для вычисления величина расхода $G_* = \rho_* u_* S_*$ через сопло определялась по соотношениям изэнтропического течения [2]:

$$\rho_* = \begin{cases} \rho \left(\frac{2}{\gamma - 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, & \text{если } \frac{p_e}{p} \leq \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \\ \rho \left(\frac{p_e}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, & \text{если } \frac{p_e}{p} > \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \end{cases}$$

$$u_* = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{p}{\rho}}, & \text{если } \frac{p_e}{p} \leq \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \\ \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]}, & \text{если } \frac{p_e}{p} > \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \end{cases}$$

$$p_* = \begin{cases} p \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, & \text{если } \frac{p_e}{p} \leq \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \\ p_e, & \text{если } \frac{p_e}{p} > \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \end{cases}.$$

S_* – площадь критического сечения сопла, p_e – давление снаружи сопла.

Газоприходы от заряда G_Z^+ и неизвлекаемого элемента G_F^+ определяются через соответствующие поверхности горения: $G_Z^+ = u_{Z0} \rho_Z S_Z(t)$, $G_F^+ = u_{F0} \rho_F S_F(t)$.

Линейные скорости горения составов рассчитываются посредством эмпирических степенных зависимостей от давления: $u_{Z0} = a_{Z0} p^{v_{Z0}}$, $u_{F0} = a_{F0} p^{v_{F0}}$.

Система уравнений (1)–(5) решается при следующих начальных условиях:

$$\rho(0) = \rho_{\text{возд}}; R(0) = R_{\text{возд}}; C_p(0) = C_{p, \text{возд}}; p(0) = p_0; W(0) = W_0.$$

Алгоритмически сложной задачей, которую приходится решать совместно с системой уравнений (1)–(5), является расчет геометрических характеристик заряда $S_Z(t)$ и $S_F(t)$ в процессе его выгорания для линейной скорости горения, определяемой из решения уравнений внутренней баллистики. К настоящему времени существует несколько подходов к решению данной задачи. Один из них основан на решении пространственного уравнения поверхности горения методом, построенном на вариационном принципе Ферма (принцип минимального времени выгорания заряда) [10, 11]. Другой подход основан на использовании метода уровней с привлечением разностных схем высокого порядка точности [12, 13].

В настоящей работе для программной реализации модели использовался алгоритм расчета изменения геометрии заряда, базирующийся на аналогии выгорания топлива (по геометрическому закону) с волновым принципом Гюйгенса (рис. 2).

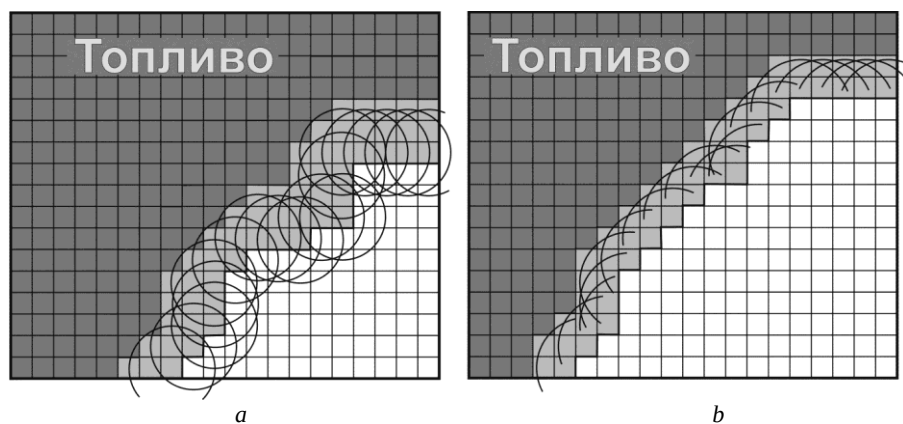


Рис. 2. Схема расчета выгорания топлива по геометрическому закону:

a – первый шаг по времени; *b* – следующий шаг по времени

Fig. 2. Scheme for calculating propellant burnout according to the geometric law:

(*a*) first time step and (*b*) next time step

Объем заряда представляется системой малых (конечных) объемов, которые либо пусты, либо заполнены топливом. В процессе вычислений от каждого объема, находящегося на фронте горения, строится «выжигающая» сфера радиуса, равного произведению линейной скорости горения в данной точке пространства на шаг по времени (см. рис. 2, *a*). Конечные и связанные с центральной точкой объемы топлива, попадающие внутрь данной сферы, считаются сгоревшими. На последующих шагах (см. рис. 2, *b*) алгоритм повторяется для новых значений скорости горения.

Результаты расчета

Система уравнений (1)–(5) решалась для модельных значений параметров, указанных в табл. 1–3. Пояснения к геометрическим параметрам приведены на рис. 3.

Таблица 1

Теплофизические и баллистические параметры

Параметр	Наполнитель	Материал НФО
Температура горения	$T_{p_{z0}} = 3\,000\text{ К}$	$T_{p_{F0}} = 4\,000\text{ К}$
Изобарическая теплоемкость продуктов сгорания	$C_{p_{z0}} = 2\,400\text{ Дж/(кг·К)}$	$C_{p_{F0}} = 2\,400\text{ Дж/(кг·К)}$
Газовая постоянная	$R_{z0} = 400\text{ Дж/(кг·К)}$	$R_{F0} = 400\text{ Дж/(кг·К)}$
Константа закона скорости горения	$a_{z0} = 2\text{ мм/с}$	$a_{F0} = 12\text{ мм/с}$
Показатель степени в законе горения	$v_{z0} = 0.3$	$v_{F0} = 0.3$
Плотность материала	$\varrho_{z0} = 1\,600\text{ кг/м}^3$	$\varrho_{F0} = 3\,000\text{ кг/м}^3$

Таблица 2

Геометрические параметры заряда

Длина заряда	100 мм
Радиус канала	10 мм
Радиус заряда	60 мм
Количество лучей	5
Полуширина щели приканальная	4 мм
Полуширина щели максимальная	6 мм
Длина прямой части щели	25 мм
Высота концевика щели	4 мм

Таблица 3

Геометрические параметры камеры сгорания

Начальный свободный объем	30 см ³
Площадь критического сечения сопла	38.5 мм ²

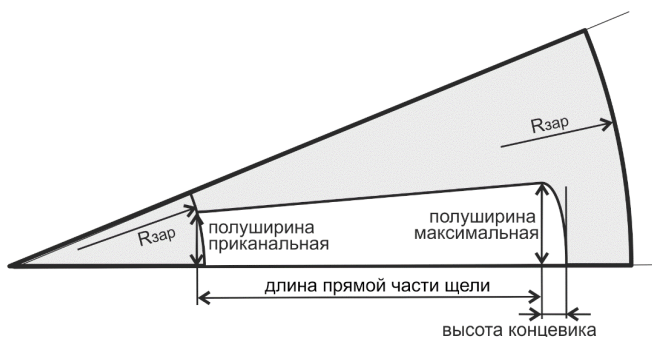


Рис. 3. Геометрические параметры щелевой области

Fig. 3. Geometrical parameters of the slit region

На рис. 4 представлена картина развития рабочей поверхности наполнителя и НФО вследствие дегрессии заряда. В рамках принципов, заложенных в алгоритм расчета поверхности, видно, что продвижение фронта горения по щелевой части достаточно быстро горящего материала НФО приводит к оголению поверхности

основного наполнителя. На рис. 5 показано развитие поверхности горения щелевой части заряда при отсутствии НФО при мгновенном подключении поверхности к горению.

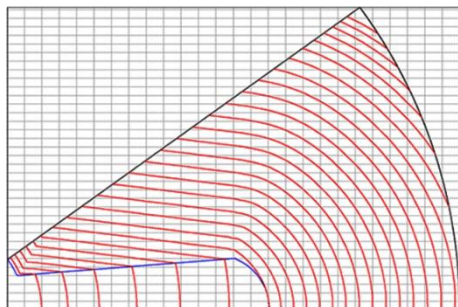


Рис. 4. Геометрия депрессии заряда с НФО
Fig. 4. Geometry of charge depressions with UFT

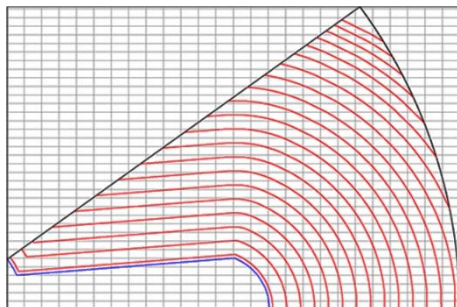


Рис. 5. Геометрия депрессии заряда без НФО
Fig. 5. Geometry of charge depressions without UFT

Сравнительный анализ динамики выгорания (см. рис. 4, 5) дает представление о качественном и количественном различии развития внутрибаллистического процесса при наличии НФО, а именно: при практически мгновенном зажигании щелевой части канала темп и уровень развитости суммарной для изделия поверхности горения существенно выше (рис. 6, кривая 2), чем при наличии НФО (рис. 6, кривая 1). Смещение по времени и наклонный характер зависимости $p(t)$ в заряде с НФО обусловлены тем, что зажигание быстрогорящего состава оснастки производилось с правого (соплового) конца заряда.

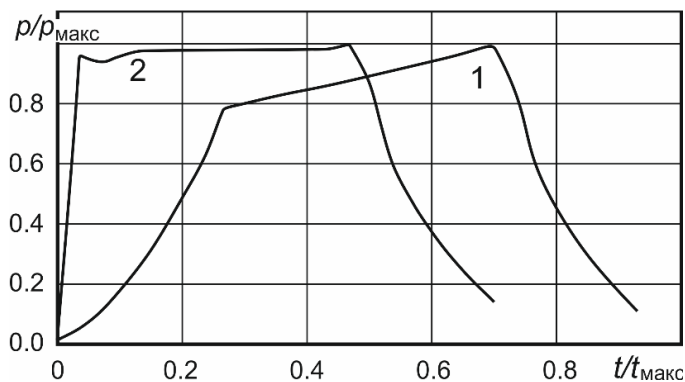


Рис. 6. Изменение давления в камере сгорания от времени:
1 – наличие НФО; 2 – отсутствие НФО
Fig. 6. Combustion chamber pressure vs. time
(1) presence of UFT; (2) absence of UFT

Из анализа приведенных на рис. 6 данных следует, что изменение поверхности горения существенным образом зависит от скорости горения НФО. Соответственно, зависимости давления в камере сгорания, тяги и времени функционирования изделия, существенным образом зависящие от динамики развития рабочей

поверхности заряда, будут определяться скоростью горения материала НФО, ее уровнем и стабильностью параметров. Указанное обстоятельство предъявляет специальные требования как к технологии и характеристикам горения НФО, так и к организации параметров стартового периода работы двигателя.

Заключение

В статье представлены результаты расчетно-теоретического исследования внутрибаллистических характеристик твердотопливного ракетного двигателя с зарядом сложной конфигурации, содержащим неизвлекаемую формообразующую оснастку (НФО).

Отмечается, что использование НФО позволяет существенно уменьшить затраты на производство дорогостоящей извлекаемой оснастки, сокращает цикл изготовления РДТТ и повышает безопасность производства. Предлагается использовать в качестве НФО пористые пластины, изготовленные из порошков титана с помощью аддитивных технологий и пропитанные быстрогорящим составом на основе боридов алюминия.

На основе выполненного численного моделирования внутрибаллистических характеристик РДТТ с НФО-зарядом канально-щелевой формы показано, что зависимость давления в камере сгорания, тяга и время функционирования изделия, существенным образом зависящие от динамики развития поверхности горения заряда, определяются скоростью горения материала НФО.

Список источников

1. Жуков И.А., Зиятдинов М.Х., Ворожцов А.Б., Жуков А.С., Ворожцов С.А., Промахов В.В. Самораспространяющийся высокотемпературный синтез боридов AL и TI // Известия вузов. Физика. 2016. Т. 59, № 8. С. 177–178.
2. Жуков И.А., Промахов В.В., Зиятдинов М.Х., Жуков А.С., Дубкова Я.А. Разработка порошковых композиций ВЭМ с высокой скоростью горения // Высокоэнергетические материалы: демилитаризация, антитерроризм и гражданское применение : тез. XII Междунар. конф. НЕМs-2016., 7–9 сентября 2016, Томск, Россия. Томск : Том. гос. ун-т, 2016. С. 140–141.
3. Chen J., Meng D., Deng J., Zhang P. Synthesis of unsaturated polyurethane oligomer and its application in the 3D printing of composite solid propellants // Materials & Design. 2024. V. 238. Art. 112675. P. 1–11. doi: 10.1016/j.matdes.2024.112675
4. Tan B., Dou J., Wen Y., Duan B., Mo H., Wei Z., Zhang J., Pan Y., Ding X., Liu N. 3D Printing for Explosives and Propellants Applications // Additive Manufacturing Frontiers. 2024. V. 3 (3). Art. 200151. P. 1–17. doi: 10.1016/j.amf.2024.200151
5. Kirby L., Lawrence A., Udaykumar H.S., Sippel T., Song X. Pressure-assisted binder jet additive manufacturing of solid propellants // Additive Manufacturing. 2023. V. 77. Art. 103808. P. 1–15. doi: 10.1016/j.addma.2023.103808
6. Соломонов Ю.С., Липанов А.М., Алиев А.В., Дорофеев А.А. Твердотопливные регулируемые двигательные установки. М. : Машиностроение, 2011.
7. Архипов В.А., Бондарчук С.С., Бондарчук И.С., Золоторёв Н.Н., Козлов Е.А., Орлова М.П. Математическое моделирование утилизации головного обтекателя ракеты-носителя после его отработки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 52–67. doi: 10.17223/19988621/84/5
8. Bondarchuk S.S., Vorozhtsov A.V., Kozlov E.A., Feshchenko Y.V. Analysis of Multidimensional and Two-Phase Flows in Solid Rocket Motors // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11 (4). P. 593–599. doi: 10.2514/3.23885

9. Бондарчук С.С., Борисов Б.В., Жуков А.С. Уравнения расчета параметров выхода РДТТ на стационарный режим для многокомпонентной смеси продуктов сгорания // Известия вузов. Физика. 2012. Т. 55, № 9-3. С. 24–26.
10. Милехин Ю.М., Медведев Г.Г., Воропаева И.Г. Тензорное представление скорости горения конденсированных систем. Вывод и анализ пространственного уравнения поверхности горения // Химическая физика и мезоскопия. 2006. Т. 8, № 1. С. 5–20.
11. Милехин Ю.М., Медведев Г.Г., Воропаева И.Г. Численный метод решения пространственного уравнения поверхности горения конденсированных систем // Химическая физика и мезоскопия. 2006. Т. 8, № 2. С. 209–219.
12. Кирюшкин А.Е., Миньков Л.Л. Моделирование внутрикамерных процессов в ракетном двигателе на твердом топливе с учетом движения поверхности горения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 71. С. 90–105. doi: 10.17223/19988621/71/8
13. Кирюшкин А.Е., Миньков Л.Л. Параллельная реализация решения сопряженной задачи определения внутрибаллистических характеристик двигателей на твердом топливе // Компьютерные исследования и моделирование. 2021. Т. 13, № 1. С. 47–65. doi: 10.20537/2076-7633-2021-13-1-47-65

References

1. Zhukov I.A., Ziatdinov M.K., Vorozhtsov A.B., Zhukov A.S., Vorozhtsov S.A., Promakhov V.V. (2016). Self-propagating high-temperature synthesis of Al and Ti borides. *Russian Physics Journal*. 59(8). pp. 1324–1326.
2. Zhukov I.A., Promakhov V.V., Ziatdinov M.K., Zhukov A.S., Dubkova Y.A. Razrabotka porshkovykh kompozitsiy VEM s vysokoy skorost'yu goreniya [Development of powder compositions of HEMs with high combustion rate]. *High Energy Materials: Demilitarization, Antiterrorism and Civil Application. Abstracts book of the XII International Workshop. HEMs-2016*. 7–9 September 2016. Tomsk, Russia. pp. 140–141.
3. Chen J., Meng D., Deng J., Zhang P. (2024) Synthesis of unsaturated polyurethane oligomer and its application in the 3D printing of composite solid propellants. *Materials & Design*. 238. 112675. pp. 1–11. DOI: 10.1016/j.matdes.2024.112675.
4. Tan B., Dou J., Wen Y., Duan B., Mo H., Wei Z., Zhang J., Pan Y., Ding X., Liu N. (2024) 3D Printing for Explosives and Propellants Applications. *Additive Manufacturing Frontiers*. 3 (3). 200151. pp. 1–17. DOI: 10.1016/j.amf.2024.200151.
5. Kirby L., Lawrence A., Udaykumar H.S., Sippel T., Song X. (2023) Pressure-assisted binder jet additive manufacturing of solid propellants. *Additive Manufacturing*. 77. 103808. pp.1–15. DOI: 10.1016/j.addma.2023.103808.
6. Solomonov Yu.S., Lipanov A.M., Aliev A.V., Dorofeev A.A. (2011). *Tvyordotoplivnyye reguliruemyye dvigatel'nyye ustanovki* [Solid propellant adjustable propulsion systems]. Moscow: Mashinostroenie.
7. Arkhipov V.A., Zolotarev E.A., Orlova M.P., Kozlov N.N., Bondarchuk I.S., Bondarchuk S.S. (2023) Matematicheskoye modelirovaniye utilizatsii golovnogo obelatelya rakety nositelya posle ego otrabotki [Mathematical modeling of disposal of the payload fairing of a launch vehicle after completion]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universi-teta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 52–67. DOI: 10.17223/19988621/84/5.
8. Bondarchuk S.S., Vorozhtsov A.V., Kozlov E.A., Feshchenko Y.V. (1995). Analysis of multi-dimensional and two-phase flows in solid rocket motors. *Journal of Propulsion and Power*. 11(4). pp. 593–599. DOI: 10.2514/3.23885.
9. Bondarchuk S.S., Borisov B.V., Zhukov A.S. (2012). Uravnenie raschyota parametrov vykhoda RDTT na statsionarnyy rezhim dlya mnogokomponentnoy smesi produktov sgoraniya [Equations for calculating the parameters of the SRM's exit to a steady state mode

- for a multicomponent mixture of combustion products]. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 55 (9-3). pp. 24–26.
10. Milekhin Yu.M., Medvedev G.G., Voropaeva I.G. (2006) Tenzornoye predstavleniye skorosti goreniya kondensirovannykh sistem. Vyvod i analiz prostranstvennogo uravneniya poverkhnosti goreniya [Tensor representation of combustion rate of condensed systems. Derivation and analysis of spatial equation of combustion surface]. *Khimicheskaya Fizika I Mezoskopiya*. 8(1). pp. 5–20.
 11. Milekhin Yu.M., Medvedev G.G., Voropaeva I.G. (2006) Chislennyy metod resheniya prostranstvennogo uravneniya poverkhnosti goreniya kondensirovannykh sistem [Numerical method for solving the spatial equation of the combustion surface of condensed systems]. *Khimicheskaya Fizika I Mezoskopiya*. 8(2). pp. 209–219.
 12. Kiryushkin A.E., Minkov L.L. (2021) Modelirovaniye vnutrikamernykh protsessov v raketnom dvigatele na tvyordom toplive s uchetom dvizheniya poverkhnosti goreniya [Numerical simulation of intrachamber processes in a solid rocket motor with account for burning surface motion]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. – *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 71. pp. 90–105. DOI: 10.17223/19988621/71/8.
 13. Kiryushkin A.E., Minkov L.L. (2021) Parallelnaya realizatsiya resheniya sopryazhyonnoi zadchi opredeleniya vnutriballisticheskikh kharakteristik dvigateley na tverdom toplive [Parallel implementation of numerical algorithm of solving coupled internal ballistics modelling problem for solid rocket motors]. *Komp'yuternyye issledovaniya i modelirovaniye – Computer Research and Modeling*. 13(1). pp. 47–65. DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-1-47-65.

Сведения об авторах:

Бондарчук Сергей Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник лаборатории высокоэнергетических и специальных материалов Томского государственного университета (Томск, Россия).

Жуков Александр Степанович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией высокоэнергетических систем и новых технологий Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: Zhuk_77@mail.ru

Зиятдинов Мансур Хузахметович – доктор технических наук, старший научный сотрудник лаборатории нанотехнологий металлургии Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ziatdinovm@mail.ru

Дубкова Яна Александровна – младший научный сотрудник лаборатории нанотехнологий металлургии Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kimberlyo.ohi@gmail.com

Миньков Леонид Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Крайнов Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

Information about the authors:

Bondarchuk Sergey S. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

Zhukov Alexander S. (Doctor of Physics and Mathematics, Head of Laboratory, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Zhuk_77@mail.ru

Ziatdinov Mansur Kh. (Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ziatdinovm@mail.ru

Dubkova Yana A. (Researcher, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kimberlyo.ohi@gmail.com

Minkov Leonid L. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Krainov Aleksey Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 24.09.2024; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 24.09.2024; accepted for publication 09.12.2024

Научная статья

УДК 531.3, 532.1

doi: 10.17223/19988621/92/9

Численное моделирование обтекания высокоскоростным потоком воды тела вращения с затупленным передним торцом

Александр Николаевич Ищенко¹, Андрей Александрович Аксенов²,
Владислав Сергеевич Акользин³, Илья Михайлович Бирюков⁴,
Андрей Владимирович Чупашев⁵, Алена Сергеева Шестопалова⁶,
Владимир Васильевич Шмелев⁷

^{1, 3, 4, 5, 6} Томский государственный университет, Томск, Россия

^{2, 7} ООО «ТЕСИС», Москва, Россия

¹ ichan@niipmm.tsu.ru

² andrey@tesis.com.ru

³ akolzin99@inbox.ru

⁴ ilya.biryukov.2072@mail.ru

⁵ chupashevav@niipmm.tsu.ru

⁶ shestopalova@ftf.tsu.ru

⁷ shvv@flowvision.ru

Аннотация. На примере квазистационарной задачи обтекания высокоскоростным потоком воды тела вращения с затупленным передним торцом проведено экспериментально-теоретическое исследование с целью выявить основные процессы и явления, оказывающие влияние на профиль суперкаверны вокруг тела при заданных условиях. Проведена верификация программного комплекса FlowVision в задаче высокоскоростного обтекания водой затупленных тел вращения при наличии развитых кавитационных явлений в потоке.

Ключевые слова: коэффициент сопротивления, вода, гидробаллистическая трасса, суперкавитация, каверна, ударник, FlowVision, численное моделирование

Благодарности: Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России, проект № FSWM-2020-0032.

Для цитирования: Ищенко А.Н., Аксенов А.А., Акользин В.С., Бирюков И.М., Чупашев А.В., Шестопалова А.С., Шмелев В.В. Численное моделирование обтекания высокоскоростным потоком воды тела вращения с затупленным передним торцом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 101–113. doi: 10.17223/19988621/92/9

Original article

Numerical modeling of high-speed water flow around a body of revolution with a blunt front end

Aleksandr N. Ishchenko¹, Andrey A. Aksenov², Vladislav S. Akol'zin³,
Il'ya M. Biryukov⁴, Andrey V. Chupashev⁵, Alena S. Shestopalova⁶,
Vladimir V. Shmelev⁷

^{1, 3, 4, 5, 6} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

^{2, 7} OOO "TESIS", Moscow, Russian Federation

¹ ichan@niipmm.tsu.ru

² andrey@tesis.com.ru

³ akolzin99@inbox.ru

⁴ ilya.biryukov.2072@mail.ru

⁵ chupashevav@niipmm.tsu.ru

⁶ shestopalova@ftf.tsu.ru

⁷ shvv@flowvision.ru

Abstract. In this paper, a quasi-stationary problem of high-speed water flow around a body of revolution with a blunt front end is solved theoretically and experimentally to identify the main processes and phenomena affecting the supercavity profile around the body under given conditions. It is shown that the considered problem can be reduced to a mechanical problem of determining the motion of an ideal incompressible fluid under the action of given forces. The FlowVision software package has been verified using the problem of high-speed water flow around blunt bodies of revolution in the presence of cavitation phenomena in the flow. The pressure and radial velocity distributions, as well as the supercavity profile shapes are obtained for free-stream flow velocities varying from 113 to 356 m/s. The average drag coefficient of the disk cavitator ($C_{x0} = 0.81$), which has been obtained numerically, complies with that obtained experimentally. Qualitative and quantitative agreement of the numerical and experimental results in terms of the supercavity profile around the projectile is derived within the accepted error of localization of the supercavity profile boundary from photographs..

Keywords: numerical modeling, drag coefficient, water, hydroballistic track, supercavitation, cavitation, cavity, projectile, FlowVision

Acknowledgments: These results were obtained within the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 0721-2020-0032).

For citation: Ishchenko, A.N., Aksenov, A.A., Akol'zin, V.S., Biryukov, I.M., Chupashev, A.V., Shestopalova, A.S., Shmelev, V.V. (2024) Numerical modeling of high-speed water flow around a body of revolution with a blunt front end. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 101–113. doi: 10.17223/19988621/92/9

Введение

Высокоскоростное движение в воде обычно сопровождается кавитационными явлениями и образованием свободных границ, усложняющих картину обтекания тела потоком. В случае больших скоростей (десятки метров в секунду и выше)

пузырьковая кавитация уступает место развитой кавитации с образованием свободных границ, образующих протяженную полость, в которую тело может полностью поместиться. Такой режим движения принято называть суперкавитирующим. Длина суперкаверны может на порядки превосходить длину кавернообразующего тела и составлять десятки и сотни метров. Но с точки зрения изучения движения по траектории наибольший интерес представляет профиль суперкаверны непосредственно вокруг тела, так как сложные нестационарные эффекты, связанные с закрытием суперкаверны, остаются далеко позади и не воздействуют на него.

Существуют различные подходы, позволяющие выяснить профиль образующейся суперкаверны. Для нестационарной суперкаверны используется подход, предложенный Г.В. Логвиновичем, в котором суперкаверна рассматривается в виде множества независимых сечений, развивающихся по одному закону [1]. Аналогичные результаты можно получить с помощью полуэмпирической аппроксимации для стационарных суперкаверн [2]. Такие подходы хорошо описывают профиль суперкаверны за кавитатором в невозмущенном потоке жидкости. Для построения профиля суперкаверны за сложными формами, учета влияния на суперкаверну различных возмущающих факторов в потоке или решения задач взаимодействия тела с поверхностью суперкаверны на передний план выходят методы на основе вычислительной гидродинамики, позволяющие наиболее полно рассмотреть картину протекающих при высокоскоростном суперкавитационном обтекании процессов [3–5].

Ввиду относительно высокой скорости звука в воде, высокой скорости потока и очень малого размера расчетных ячеек в области отрыва струй класс задач, связанный с прямым моделированием суперкавитирующего движения твердого тела, характеризуется существенными затратами реального времени на решение, особенно при использовании динамических сеток типа «химера». Для сокращения затрат времени на решение целесообразно обоснованно выявить наиболее значимые процессы в потоке, оказывающие основное влияние на результат моделирования, и использовать новые гибкие подходы для дискретизации непрерывно изменяющейся геометрии расчетной области. Например, оригинальный подход для построения сетки с учетом непрерывно меняющихся границ потока реализован на базе отечественного программного комплекса для междисциплинарного моделирования FlowVision [6], особенностью которого является применение структурированной локально-адаптивной сетки. Расчетная сетка строится в автоматическом режиме, а точность разрешения сеткой геометрической модели любой сложности обеспечивается с помощью технологии подсеточного разрешения геометрии [7].

В данной работе на примере квазистационарной задачи обтекания высокоскоростным потоком воды тела вращения с затупленным передним торцом проведено экспериментально-теоретическое исследование с целью выявить основные процессы и явления, оказывающие влияние на профиль суперкаверны вокруг тела при скоростях 113 и 356 м/с. Также проведена верификация программного комплекса FlowVision в задаче высокоскоростного обтекания водой затупленных тел вращения при наличии развитых кавитационных явлений в потоке.

Объект исследования

На базе Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета производятся экспериментально-

теоретические исследования высокоскоростного движения твердых тел в различных средах. В частности, рассматриваются вопросы, связанные с суперкавитирующим движением ударников в воде. Гидробаллистический комплекс института с длинной водного участка траектории более 10 м оснащен высокоскоростной видеоаппаратурой и лабораторными баллистическими установками, позволяющими ускорять ударники в широком диапазоне скоростей.

Рассматривается поступательное движение в воде инертного ударника с плоским дисковым кавитатором диаметром D . Движение происходит в горизонтальной плоскости на глубине $h_0 = 0.25$ м в покоящейся пресной воде при температуре $T_0 = 293$ К. По ходу перемещения по подводной траектории ударник преодолевает два участка, на которых производится видеосъемка и измерение средней скорости его движения. На рис. 1 показаны фотографии ударника и суперкаверны, образующейся при движении ударника в воде со скоростью $V = 113$ и 356 м/с.

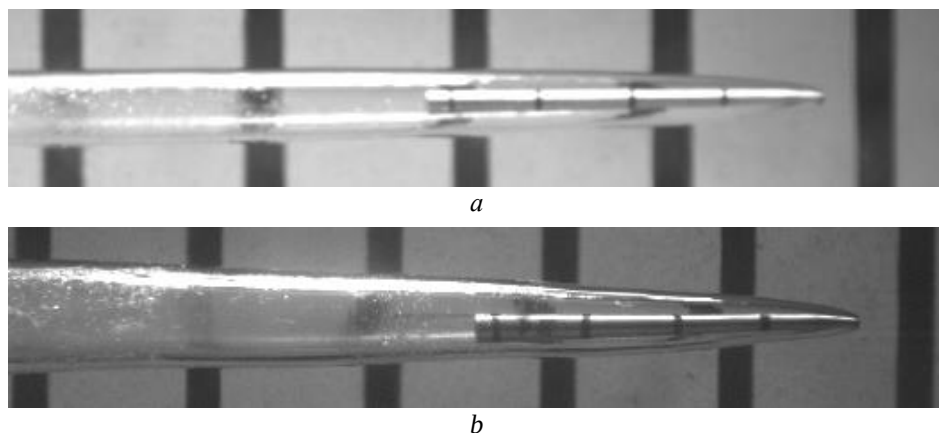


Рис. 1. Суперкавитирующее движение ударника в воде при скоростях:
 $a - 113$ м/с; $b - 356$ м/с

Fig. 1. Supercavitating motion of the projectile in water at a velocity of:
 (a) 113 and (b) 356 m/s

В ходе проведения эксперимента были получены высокоскоростные видеозаписи рассматриваемого процесса, из которых извлечены количественные характеристики профилей суперкаверн для указанных значений скоростей. Полученные данные использовались для оценки применимости теоретических подходов и верификации численных моделей, построенных в программном комплексе FlowVision для описания процессов высокоскоростного обтекания твердых тел в воде.

Физико-математическая постановка задачи

Для формирования системы уравнений математической модели исследуемого процесса необходимо обоснованно выделить круг значащих процессов и явлений, которые целесообразно учитывать при решении указанного круга задач.

В случае тел с плавной образующей в передней части (сферической, оживальной) линия отрыва струй (образования свободных границ) однозначно не фикси-

руется и может перемещаться в зависимости от значений параметров течения [8]. В этом случае для моделирования картины течения вокруг тела потребовалось бы учитывать турбулентные явления в прилегающем к телу пограничном слое [9], которые позволили бы правильно сформировать границу отрыва потока от тела. В данной работе рассматривается тело (ударник), переднему торцу которого специально придана форма диска (кавитатор), что служит однозначной фиксацией линии отрыва потока – образования свободной границы раздела сред на гранях кавитатора.

Как видно из приведенных на рис. 1 картин образования каверн, последние имеют гладкую и оптически прозрачную поверхность, без видимых следов турбулизации границ. Таким образом, в случае, когда ударник полностью погружен в суперкаверну, возможно моделирование процесса его обтекания без привлечения модели турбулентности. Важно подчеркнуть, что этот подход справедлив для отмеченного выше класса задач, в которых не учитываются такие процессы, как смыкание суперкаверны за ударником или глиссирование ударника частью боковой поверхности по границе суперкаверны.

Оценка температуры T_t торможения в точке нулевой скорости, расположенной в центре кавитатора [10], для случая на рис. 1, б дает следующий результат:

$$T_t = T_0 + \frac{V^2}{2c_p} \approx 308 \text{ К}, \quad (1)$$

где: c_p – удельная теплоемкость воды при постоянном давлении, T_0 , V – температура и скорость набегающего потока. Получаем, что в данном случае разница между температурой потока и температурой в пограничном слое жидкости в центре кавитатора составляет не более 15 К. В реальности данная величина будет еще меньше вследствие теплообмена с металлическим ударником. Это показывает, что изменение внутренней энергии в потоке мало и не повлияет на картину течения и образования каверны, что позволяет не учитывать влияние процессов теплопереноса на профиль суперкаверны вокруг ударника.

Одним из основных параметров, характеризующих суперкавитационные течения, является число кавитации

$$\sigma = \frac{2\Delta P}{\rho V^2}, \quad (2)$$

где: ΔP – разница между давлением на бесконечности и в каверне, ρ – плотность жидкости. Значения величины числа кавитации менее единицы указывают на наличие кавитационных явлений в потоке, а при $\sigma \rightarrow 0$ наблюдаются развитые кавитационные явления, такие как суперкаверны. Для приведенных на рис. 1 примеров суперкавитационного обтекания число кавитации равно $\sigma = 0.016$ (см. рис. 1, а) и 0.0016 (см. рис. 1, б). Для основных прочих критериев подобия течений жидкости – Рейнольдса, Фруда и Вебера – получается

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\eta} \approx 2 \cdot 10^5, \quad (3)$$

$$\text{Fr} = \frac{V^2}{g D} \approx 7 \cdot 10^5, \quad (4)$$

$$\text{We} = \frac{\rho D V^2}{\tau} \approx 4 \cdot 10^5. \quad (5)$$

Порядки величин Re , Fr и We на нижней границе рассматриваемого скоростного диапазона указывают на подавляющее преобладание сил инерции над вязкими силами, силой тяжести и поверхностным натяжением в жидкости, что существенно упрощает теоретическое изучение процесса и приводит к механической задаче определения движения идеальной несжимаемой жидкости под действием заданных сил [11]. В этом случае для численного моделирования течения жидкости вокруг ударника воспользуемся изотермической моделью идеальной несжимаемой жидкости в следующем виде:

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{V} = 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p, \\ \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где: t – время, $\mathbf{V}$ – вектор скорости, p – давление, T – температура, ρ – плотность жидкости, η – динамическая вязкость, g – ускорение свободного падения, τ – коэффициент поверхностного натяжения.

В программном комплексе FlowVision моделирование свободной поверхности производится модифицированным методом VoF, базовая идея которого приведена в [12]; уравнение переноса фазы имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla f = 0, \quad (7)$$

где: f – объемная доля фазы в ячейке: $f = 1$ – ячейка, полностью занятая жидкостью, $f = 0$ – «пустая» ячейка, $0.01 < f < 0.99$ соответствует поверхностной ячейке. В каждой поверхностной ячейке проводятся реконструкция и генерация 2 ячеек с $f = 1$ и $f = 0$ соответственно (рис. 2). Применение данной процедуры позволяет при всех равных условиях заметно повысить точность определения как границы раздела сред, так и физических параметров течения, связанных с последней.

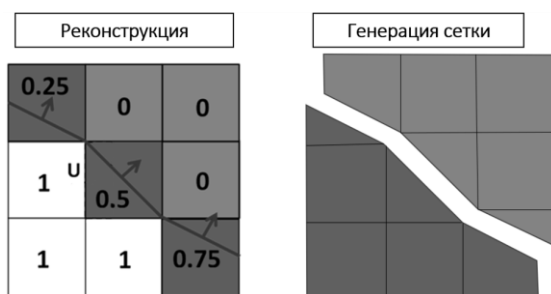


Рис. 2. Реконструкция границы раздела сред ($0.01 < f < 0.99$) в поверхностной ячейке и генерация сетки

Fig. 2. Reconstruction of the interface between the media ($0.01 < f < 0.99$) in the surface cell and generation of the grid

Математическая модель VoF реализована в рамках межфазового взаимодействия сред «сплошная среда–вакуум» [6]. Предполагается, что кинетическая энергия вещества внутри суперкаверны, имеющего значительно меньшую плотность,

пренебрежимо мала в сравнении с кинетической энергией жидкости, и на границу раздела сред (свободной поверхности) вокруг кавитирующего тела газодинамические процессы внутри полости влияют незначительно. Такой подход позволяет значительно сократить количество ячеек, в которых производится перерасчет газодинамических параметров течения, так как область внутри поверхности суперкаверны исключается из расчета. Моделирование образования суперкаверны выполнено с использованием модели пузырьковой кавитации, основанной на предположении об испарении некоторого объема жидкой части расчетных ячеек, в которых абсолютное статическое давление в жидкости опускается ниже величины давления насыщенного пара вещества [6]; базовая идея представлена в [13].

Задача решалась в двумерной осесимметричной постановке в виде сектора с углом 1° . На рис. 3 показаны схема расчетной области и расстановки граничных условий.

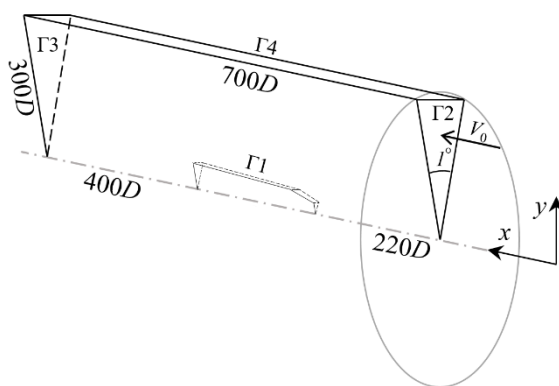


Рис. 3. Схема расчетной области и расстановки граничных условий

Fig. 3. The layout of the computational domain and boundary conditions

Граничные условия:

- поверхность ударника (Γ1) – условие непротекания.
- торцы цилиндра (Γ2, Γ3) – скорость потока ($V = V_0$) и давление ($P = P_\infty$).
- боковая поверхность цилиндра (Γ4) – свободный выход ($\partial/\partial n = 0$).
- на плоскостях, образующих сектор – симметрия.

В начальный момент времени $t = 0$ в объеме задаются скорость ($V = V_0$) и статическое давление ($P = P_\infty$).

Расчетная сетка – неструктурированная, шестигранная вдали от криволинейных поверхностей, с автоматической адаптацией по границе раздела сред и поверхности кавитатора. Критерием для обоснования сеточной сходимости был принят коэффициент сопротивления ударника, образованный избыточным давлением на кавитаторе. Согласно различным источникам, значение коэффициента сопротивления формы для дискового кавитатора при нулевом числе кавитации находится в диапазоне $C_{x0} = 0.79 \dots 0.82$ [14–16]. На рис. 4 представлена расчетная сетка в окрестности ударника (a) и кавитатора (b), при которой среднее значение коэффициента сопротивления составляет $C_{x0} = 0.81$. При этом шаг адаптированной сетки в долях диаметра кавитатора вблизи его и на границе каверны составил $1/18 d$.

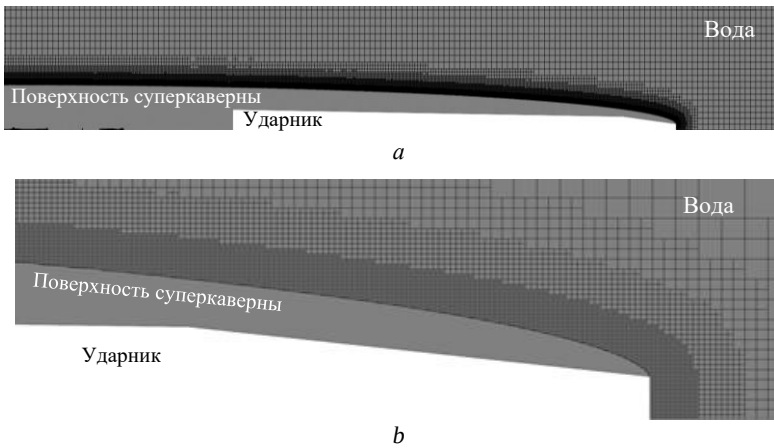


Рис. 4. Иллюстрация адаптации расчетной сетки к решению в окрестности ударника (а) и кавитатора (б)
Fig. 4. Illustration of the computational grid adjustment to the solution in the vicinity of the (a) projectile and (b) cavitator

Результаты расчетов, сравнение с экспериментом

Расчеты обтекания ударника проведены для скоростей набегающего потока 113 и 356 м/с при атмосферном давлении 10^5 Па. На рис. 5 изображены изолинии давления, в каждой точке которых величина давления имеет постоянное значение.

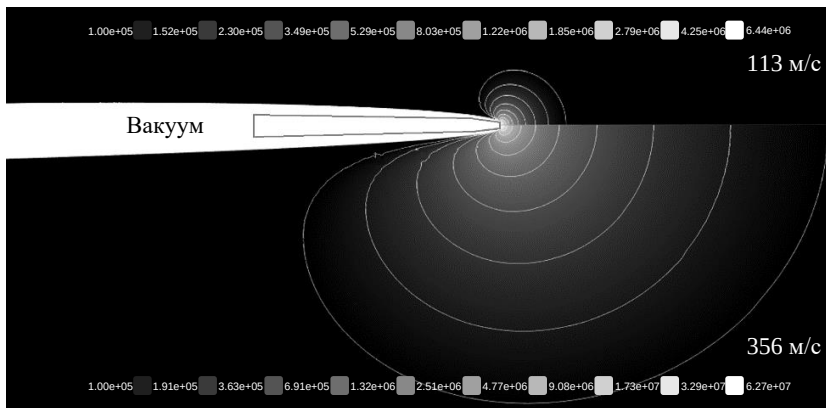


Рис. 5. Поле давления вокруг ударника при различных скоростях потока
Fig. 5. Pressure field around the projectile at various flow velocities

Верхняя часть рисунка соответствует полю давления вокруг ударника для скорости 113 м/с, нижняя часть – 356 м/с. С ростом скорости потока наблюдается радиальное расширение зоны повышенного давления: при скорости потока 113 м/с поле избыточного давления сосредоточено преимущественно в области кавитатора, а при скорости 356 м/с эта область соизмерима с длиной корпуса ударника. Согласно расчету, максимальное давление у поверхности кавитатора

сосредоточено в его центре и снижается по мере перемещения к кромке, у которой происходит интенсивный спад. В точке нулевой скорости, соответствующей центру кавитатора, реализуется максимальное давление $P_{\max}$, соответствующее давлению торможения P_t , величину которого можно выяснить аналитически:

$$P_t = P_0 + \frac{\rho V^2}{2}, \quad (8)$$

где P_0 – давление в набегающем потоке, принятое равным 10^5 Па. Давление торможения соответствует идеальному приближению, и отношение между аналитическим и численным расчетом можно охарактеризовать как ошибку полученного решения. В таблице приведено сравнение численной и аналитической величин давления торможения при рассматриваемых скоростях потока. Как видно из приведенных в таблице результатов, расхождение численного и аналитического решения составляет не более 1.3%, что говорит о хорошем их соответствии.

Аналитическое значение давления торможения в точке нулевой скорости и максимальное давление в области кавитатора, полученное в численном расчете

V , м/с	P_t , МПа	$P_{\max}$, МПа	$P_t/P_{\max}$, %
113 м/с	6.49	6.44	0.8
356 м/с	63.5	62.7	1.3

На рис. 6 приведены изолинии радиальной скорости (V_y) потока вокруг ударника при различных скоростях набегающего потока. Видно, что с увеличением скорости набегающего потока кратно возрастает область, в которой наблюдается радиальная составляющая течения жидкости вокруг ударника.

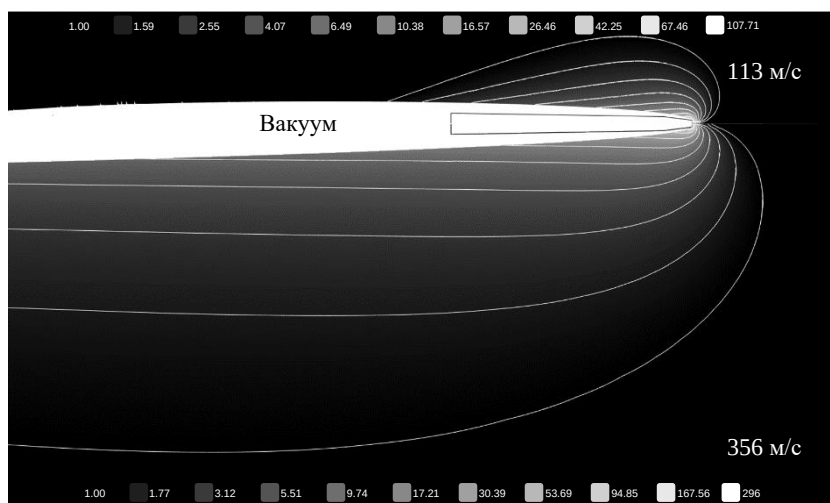


Рис. 6. Поле радиальной скорости вокруг ударника при различных скоростях потока

Fig. 6. Radial velocity field around the projectile at various flow velocities

На рис. 7 приведены расчетные и экспериментальные профили суперкаверн вокруг ударника при скорости движения 113 и 356 м/с; символами показаны результаты обработки фотографий (см. рис. 1), пунктирной линией – расчет по по-

луэмпирической аппроксимации [2], сплошными линиями показаны изолинии, соответствующие значению объемной доли фазы $f = 0.5$, что соответствует границе раздела сред.

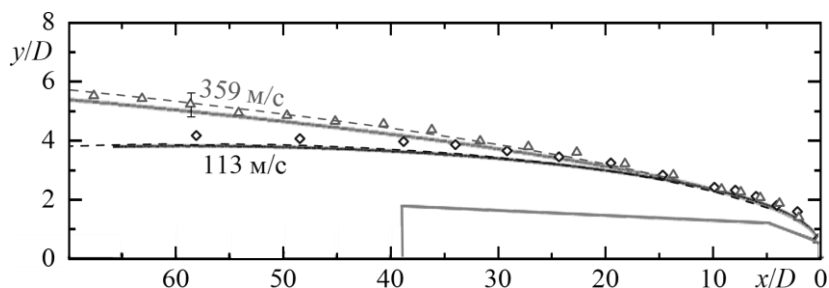


Рис. 7. Расчетные и экспериментальные профили суперкаверн вокруг ударника:
 $\diamond, \Delta$ – эксперимент; - - - - расчет согласно [2]; — – численный расчет

Fig. 7. Calculated and experimental profiles of the supercavities around the projectile:
 $\diamond, \Delta$ – experiment; - - - - calculation according to [2]; and — – numerical calculation

Полученная в численном расчете форма профиля суперкаверны вокруг ударника для обоих рассмотренных случаев демонстрирует хорошее количественное совпадение с экспериментальными данными НИИ ПММ ТГУ в пределах принятой погрешности локализации границы профиля суперкаверны по фотографиям ± 2 пикселя ($\approx \pm 0.8$ мм). Результаты также близко совпадают с данными сторонних авторов.

Соответствие результатов численного моделирования с физическим экспериментом и полуэмпирическими данными других авторов показывает хорошее соответствие построенной расчетной модели реальной картине физических процессов, происходящих при высокоскоростном квазистационарном обтекании ударника на рассмотренных скоростях.

Заключение

В работе показано, что задачи квазистационарного обтекания высокоскоростным дозвуковым потоком воды тела вращения с затупленным передним торцом в указанных случаях сводятся к механической задаче об определении движения идеальной несжимаемой жидкости под действием заданных сил.

Показано, что при движении ударника в воде при скорости 356 м/с температура торможения в точке нулевой скорости отличается от температуры среды не более чем на 15 К, что позволяет не учитывать процессы теплопереноса при решении задачи об установлении профиля суперкаверны за телом.

С учетом данных допущений на базе отечественного программного комплекса FlowVision построена расчетная модель и выполнено численное моделирование процесса обтекания высокоскоростным дозвуковым потоком воды тела вращения с затупленным передним торцом. Получены поля распределения давления и радиальной скорости для скоростей набегающего потока от 113 до 356 м/с, а также форма профиля суперкаверны.

Полученное в результате численного моделирования среднее значение коэффициента сопротивления дискового кавитатора ($C_{x0} = 0.81$) хорошо согласуется

с результатами физического эксперимента. Сравнение результатов расчета максимального давления на кавитаторе с аналитическим, которое соответствует давлению торможения, показало, что при скорости потока 113 м/с ошибка составила 0.8%, при скорости 356 м/с – 1.3%. Получено качественное и количественное согласование с экспериментами по профилю суперкаверны вокруг ударника в пределах принятой погрешности локализации границы профиля суперкаверны по фотографиям.

Достигнутые результаты хорошего и близкого соответствия результатов численного моделирования с физическим экспериментом и полужемпирическими данными других авторов показывают хорошее соответствие построенной расчетной модели реальной картине физических процессов, происходящих при высокоскоростном квазистационарном обтекании ударника на дозвуковых скоростях, что позволяет рекомендовать программный комплекс FlowVision для решения указанных задач.

Список источников

1. Логвинович Г.В. Некоторые вопросы глиссирования и кавитации // Труды ЦАГИ. 1980. № 2052. С. 250–270.
2. Савченко Ю.Н. Исследование суперкавитационных течений // Прикладна гідромеханіка. 2007. Т. 9, № 2. С. 150–158.
3. Lu R., Pan G., Tan K., Yin S. Numerical simulation of cavitation and damping force characteristics for a high-speed supercavitation vehicle // J. Mar. Sci. Eng. 2021. V. 9 (11). Art. 1171. doi: 10.3390/jmse9111171.
4. Zhang L., Zhang C., Jia H., Dong R. Effects of lateral flows on the supercavitation and hydrodynamic characteristics of underwater series and parallel high-speed projectiles // J. Mar. Sci. Eng. 2023. V. 11 (4). Art. 878. doi: 10.3390/jmse11040878
5. Chen J., Jia H., Zhang L., Wang Z., Xie R. Examining the Influence of the Water Entry Velocity of Projectiles on Supercavity Flow and Ballistic Characteristics under Wave Conditions // Journal of Applied Fluid Mechanics 2024, V. 17 (5). P. 967–979. doi: 10.47176/jafm.17.05.2330
6. FlowVision. Руководство пользователя. Версия 3.14.02. 2024. 346 с.
7. Аксёнов А.А. FlowVision: индустриальная вычислительная гидродинамика // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9, № 1. С. 5–20.
8. Буйвол В.Н. Тонкие каверны в течениях с возмущениями. Киев : Наук. думка, 1980. 296 с.
9. Kinzel M., Krane M., Kirschner I., Moeny M. A numerical assessment of the interaction of a supercavitating flow with a gas jet // Ocean Engineering. 2017. V. 136. P. 304–313. doi: 10.1016/j.oceaneng.2017.03.042
10. Краснов Н.Ф. Аэродинамика : учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Высш. школа, 1976. Ч. 1: Основы теории. Аэродинамика профиля крыла. 314 с.
11. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М. : Физматлит, 1963. Т. 2. 727 с.
12. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // J. Comput. Phys. 1981. V. 39 (1). P. 201–225. doi: 10.1016/0021-9991(81)90145-5
13. Sauer J., Schnerr G.H. Development of a new cavitation model based on bubble dynamics // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2001. V. 81. P. 561–562. doi: 10.1002/zamm.20010811559
14. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. М. : Мир, 1974. 688 с.
15. Klose G.J., Acosta A.J. Some new measurements on the drag of cavitating disks // J. Ship Res. 1965. V. 9 (2). P. 102–104. doi: 10.5957/jsr.1965.9.3.102
16. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости : пер. с англ. М. : Мир, 1973. 758 с.

References

1. Logvinovich G.V. (1969) *Gidrodinamika techeniy so svobodnymi granitsami* [Hydrodynamics of free-boundary flows]. Kyiv: *Naukova dumka*.
2. Savchenko Yu.N. (2007) Issledovanie superkavitatsionnykh techeniy [Study of supercavitating flows]. *Prikladnaya gidromekhanika*. 9(2). pp. 150–158.
3. Lu R., Pan G., Tan K., Yin S. (2021) Numerical simulation of cavitation and damping force characteristics for a high-speed supercavitation vehicle. *Journal of Marine Science and Engineering*. 9(11). Article 1171. pp. 1–15. doi: 10.3390/jmse9111171.
4. Zhang L., Zhang C., Jia H., Dong R. (2023) Effects of lateral flows on the supercavitation and hydrodynamic characteristics of underwater series and parallel high-speed projectiles. *Journal of Marine Science and Engineering*. 11(4). Article 878. pp. 1–22. doi: 10.3390/jmse11040878.
5. Chen J., Jia H., Zhang L., Wang Z., Xie R. (2024) Examining the Influence of the Water Entry Velocity of Projectiles on Supercavity Flow and Ballistic Characteristics under Wave Conditions. *Journal of Applied Fluid Mechanics*. 17(5). pp. 967-979. doi: 10.47176/jafm.17.05.2330.
6. *FlowVision. User Guide* (2024) Version 3.14.02. P. 346.
7. Aksenov A. (2017) FlowVision: Industrial computational fluid dynamics. *Computer Research and Modeling*. 9(1). pp. 5–20. doi: 10.20537/2076-7633-2017-9-5-20.
8. Buyvol V.N. (1980) *Tonkie kaverny v techeniyakh s vozmushcheniyami* [Thin cavities in disturbed flows]. Kyiv: *Naukova Dumka*.
9. Kinzel M.P., Krane M.H., Kirschner I.N., Moeny M.J. (2017) A numerical assessment of the interaction of a supercavitating flow with a gas jet. *Ocean Engineering*. 136. pp. 304–313. doi: 10.1016/j.oceaneng.2017.03.042
10. Krasnov N.F. (1976) *Aerodinamika. Chast' I. Osnovy teorii. Aerodinamika profilya kryla. Uchebnik dlya vuzov* [Aerodynamics. Part 1. Fundamentals of theory. Aerodynamics of wing profile. Textbook for higher technical schools]. Moscow: Vysshaya shkola.
11. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. (1963) *Teoreticheskaya gidromekhanika. Tom 2* [Theoretical hydrodynamics. Volume 2]. Moscow: Fizmatlit.
12. Hirt C.W., Nichols B.D. (1981) Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*. 39(1). pp. 201–225. doi: 10.1016/0021-9991(81)90145-5.
13. Sauer J., Schnerr G.H. (2001) Development of a new cavitation model based on bubble dynamics. *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik (ZAMM) – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 81(S3). pp. 561–562. doi: 10.1002/zamm.20010811559
14. Knapp R., Daily J., Hammitt F. (1970) *Cavitation*. New York: McGraw Book Company.
15. Klose G.J., Acosta A.J. (1965) Some new measurements on the drag of cavitating disks. *Journal of Ship Research*. 9(03). pp. 102–104. doi: 10.5957/jsr.1965.9.3.102
16. Batchelor G.K. (1967) *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Сведения об авторах:

Ищенко Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Аксенов Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, технический директор ООО «ТЕСИС» (Москва, Россия). E-mail: andrey@tesis.com.ru

Акозьин Владислав Сергеевич – инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: akolzin99@inbox.ru

Бирюков Илья Михайлович – техник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ilya.biryukov.2072@mail.ru

Чупашев Андрей Владимирович – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: chupashevav@niipmm.tsu.ru

Шестопалова Алена Сергеева – техник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: E-mail: shestopalova@ftf.tsu.ru

Шмелев Владимир Васильевич – кандидат физико-математических наук, ведущий инженер ООО «ТЕСИС» (Москва, Россия). E-mail: shvv@flowvision.ru

Information about the authors:

Ishchenko Aleksandr N. (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Aksenov Andrey A. (Candidate of Physics and Mathematics, Technical Director, ООО “ТЕСИС”, Moscow, Russian Federation). E-mail: andrey@tesis.com.ru

Akol'zin Vladislav S. (Research Engineer, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akolzin99@inbox.ru

Biryukov Il'ya M. (Laboratory Engineer, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ilya.biryukov.2072@mail.ru

Chupashev Andrey V. (Junior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: chupashevav@niipmm.tsu.ru

Shestopalova Alena S. (Laboratory Engineer, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shestopalova@ftf.tsu.ru

Shmelev Vladimir V. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Engineer, ООО “ТЕСИС”, Moscow, Russian Federation). E-mail: shvv@flowvision.ru

Статья поступила в редакцию 06.11.2024; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 06.11.2024; accepted for publication 09.12.2024

Научная статья

УДК 533.17

doi: 10.17223/19988621/92/10

Математическое моделирование натекания многоблочной сверхзвуковой струи на плоскую подвижную преграду

Ануар Магжанович Кагенов¹, Кирилл Владимирович Костюшин²,
Дмитрий Олегович Ларкин³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ anuar@ftf.tsu.ru

² kostushink@niipmm.tsu.ru

³ mister.larkin.dima@mail.ru

Аннотация. Представлены результаты математического моделирования нестационарного взаимодействия многоблочной (составной) сверхзвуковой струи с подвижной преградой. Методика расчета реализована в OpenFOAM. Использовался подход сеток типа «Химера». Выполнено тестирование методики расчета. Получено, что результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными других авторов. Проведено параметрическое исследование взаимодействия двух струй с подвижной преградой. Выявлено, что в критической точке до момента времени 0.018 с наблюдаются незначительные колебания давления, затем давление возрастает.

Ключевые слова: многоблочные сверхзвуковые струи, математическое моделирование, подвижная преграда, сетки типа «Химера», OpenFOAM

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-761.2022.1.1 и частично при поддержке Минобрнауки РФ (госзадание FSWM-2020-0032).

Для цитирования: Кагенов А.М., Костюшин К.В., Ларкин Д.О. Математическое моделирование натекания многоблочной сверхзвуковой струи на плоскую подвижную преграду // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 114–124. doi: 10.17223/19988621/92/10

Original article

Mathematical modeling of the interaction of a multiple supersonic jet with a moving obstacle

Anuar M. Kagenov¹, Kirill V. Kostyushin², Dmitry O. Larkin³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ anuar@ftf.tsu.ru

² kostushink@niipmm.tsu.ru

³ mister.larkin.dima@mail.ru

Abstract. This paper presents numerical modeling of the interaction of a multiple supersonic jet with a moving obstacle. For the mathematical description of the physical formu-

lation, the Navier–Stokes equations averaged by Favre in a non-stationary formulation were used. Chimera meshes were used for modeling of moving boundaries. The calculation method was implemented using the OpenFOAM open-source software. Testing of the calculation method showed good agreement with the experimental data of other authors and numerical data using a regular mesh. A conical nozzle with the Mach number of 4.5 at the outlet was used for the parametric study. The calculation was performed up to the time $t = 0.2$ s; the speed of the obstacle was 1 m/s. It is obtained that up to 0.01 s the maximum pressure on the barrier increases, then decreases. At the critical point up to the time of 0.018 s, there are insignificant pressure fluctuations. Then, there is an increase caused by a decrease in pressure at the intersection of the planes of symmetry of the propulsion system and the obstacle.

Keywords: multiple supersonic jet, mathematical modeling, moving obstacle, Chimera type mesh, OpenFOAM

Acknowledgments: The study was carried out with the financial support of the grant of the President of the Russian Federation MK-761.2022.1 and partially with the support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (state order FSWM-2020-0032).

For citation: Kagenov, A.M., Kostyushin, K.V., Larkin, D.O. (2024) Mathematical modeling of the interaction of a multiple supersonic jet with a moving obstacle. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 114–124. doi: 10.17223/19988621/92/10

Введение

В настоящее время актуальны исследования, связанные с моделированием взаимодействия многоблочных (составных) сверхзвуковых струй с подвижными преградами, положение которых динамично изменяется в пространстве. Экспериментальные и теоретические исследования в этой области сосредоточены преимущественно на изучении взаимодействия сверхзвуковых струй с неподвижными границами расчетной области [1–3]. Работ, изучающих особенности газодинамических процессов, происходящих при взаимодействии сверхзвуковых струй с подвижными границами, явно недостаточно. Для исследования газодинамических процессов с учетом подвижных границ в основном используются следующие методы изменения сеток: метод адаптивно перестраиваемых сеток [4], метод деформирующихся расчетных сеток с сохранением сеточной топологии [5] и перекрывающиеся расчетные сетки (сетки типа «Химера») [6, 7].

Первый метод позволяет получать хорошие результаты, но при этом для перестроения расчетной сетки на каждой итерации по времени требуются дополнительные вычислительные затраты. В работе [8] авторы применили данный подход для моделирования старта ракеты из шахты в двумерной постановке. Для описания течения газа использованы уравнения Эйлера, тепловым взаимодействием между газом и стенками шахты пренебрегали. При моделировании движения граничные ячейки растягивались в сторону движения до критического размера. После достижения этого размера каждая граничная ячейка делилась на две равные ячейки. В результате применения данного подхода были получены нестационарные зависимости газодинамических характеристик. В исследовании [9] использовался аналогичный подход перестроения сетки для моделирования нестационарных процессов, возникающих при старте твердотопливного ракетного двигателя в осесимметричной постановке. Проведенный автором анализ показал,

что на поверхности старта наблюдается несколько локальных пиков давления в различные моменты времени.

Метод деформирующихся расчетных сеток позволяет сохранить сеточную топологию без необходимости перестраивать сетку на каждом временном шаге, поскольку изменяется только положение узлов ячеек расчетной сетки, но при этом необходимо сохранение качества ячеек. Данный подход реализован в работе [10] при взаимодействии одиночной сверхзвуковой струи с подвижной преградой. Численное моделирование выполнялось с использованием схемы С.К. Годунова с ограничителем Б. Ван Лира в программном комплексе OpenFOAM. Скорость движения преграды составляла 1 м/с. В исследовании показана зависимость ударно-волновой картины течения от времени.

Расчет на перекрывающихся расчетных сетках лишен недостатков вышеописанных методов, так как объединяет несколько независимых расчетных сеток в одну общую с перекрытиями. Благодаря объединению сеток можно перемещать одну сетку относительно другой в произвольном направлении, тем самым повторяя движения реального объекта (например, посадку или старт космического аппарата). Реализация данного подхода показана на примере моделирования старта и посадки космического аппарата в работе [11], используя программный комплекс ANSYS Fluent (модуль Overset). Авторами были получены нестационарные зависимости всех газодинамических параметров для условий среды с низким значением давления. В работе [12] проведено численное моделирование нестационарного обтекания вертолета, несущего винта и исследовано влияние потока газа от винта на поведение ракет, выпускаемых с вертолета. Для этой цели авторы разработали трехмерный решатель невязких потоков, основанный на неструктурированных сетках с применением перекрывающихся расчетных сеток для моделирования относительного движения несущего винта, фюзеляжа и движущихся ракет. Решатель для потока они объединили с уравнениями движения ракеты, используя для этого шесть степеней свободы. В работе [13] рассмотрено истечение вязкой турбулентной сверхзвуковой струи из двухконтурного сопла. Расчетная область была поделена на подвижную и неподвижную части. Использовались уравнения Навье–Стокса в осесимметричной постановке. Было показано, что нестационарные процессы, связанные с изменением геометрии соплового блока, оказывают наибольшее влияние на структуру потока в начальной стадии раскрытия рабочей секции сопла.

Исходя из обзора литературы, для математического моделирования с использованием методов подвижных границ наиболее эффективным мы полагаем метод перекрывающихся расчетных сеток. Поэтому целью данного исследования является математическое моделирование натекания многоблочной сверхзвуковой струи на плоскую подвижную преграду с использованием сеток типа «Химера».

Физико-математическая постановка задачи и метод решения

Рассматривается задача натекания многоблочной сверхзвуковой струи, истекающей из многосопловой установки на плоскую подвижную преграду, расположенную перпендикулярно оси струи. В результате натекания формируется сложный поток с разветвленной системой скачков уплотнения, содержащий области местного дозвукового течения, контактные разрывы и участки течения

с большими градиентами параметров газа [14]. В зависимости от условий среды, физических свойств газа, геометрического расположения преграды, расстояния между срезом сопел и преградой, а также расположения сопел относительно друг друга структура газодинамической картины меняется. Некоторые примеры ударно-волновых структур описаны в работе [1].

Для математического описания течения газа использовалась система уравнений Навье–Стокса, осредненная по Фавру [15], в трехмерной постановке для вязкого сжимаемого идеального газа. Для замыкания системы использовалась модель турбулентности $k-\omega$ SST [16]. Полная система уравнений с постановкой начальных и граничных условий показана в работе [2]. Реализация физико-математической модели и проведение параметрических исследований выполнены в свободно распространяемом программном обеспечении OpenFOAM [17]. Использовался решатель `overRhoPimpleDyMFoam`, который основан на итерационном алгоритме PIMPLE [18]. Уравнения для каждой переменной, характеризующей систему (давление, скорость, температура и переменные используемой модели турбулентности), решаются последовательно. Благодаря библиотеке `overset` решение можно производить на множестве сеток, имеющих разную топологию без общих граней. Связь между сетками осуществляется за счет неявной интерполяции первого порядка. Для дискретизации по времени использовалась неявная схема Рунге–Кутты первого порядка, а дискретизация конвективных членов выполнялась с использованием схемы LimitedLinear с ограничителем Sweby [19] второго порядка. Интерполяция между сетками выполнялась с использованием метода обратных взвешенных расстояний [20]. На рис. 1, *a* показана основная сетка, а на рис. 1, *b* приведена перекрывающаяся сетка, результат наложения двух сеток показан на рис. 2.

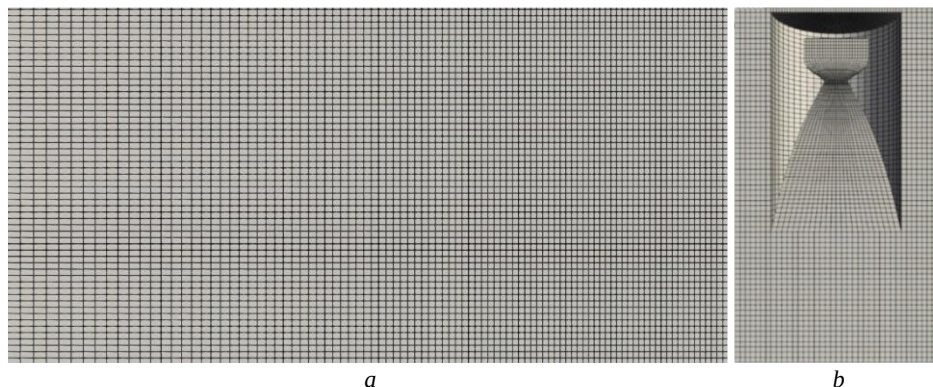


Рис. 1. Примеры сеток: *a* – основная сетка, *b* – перекрывающаяся сетка

Fig. 1. Examples of meshes: (a) the main grid and (b) the overlapping grid

В объединенной сетке ячейки делятся на несколько типов (см. рис. 2):

1. Ячейки, находящиеся в непроницаемой области – данные ячейки в расчетах не учувствуют.
2. Ячейки, находящиеся на границе сеток, в которых происходит интерполяция (интерфейс).
3. Расчетные ячейки.

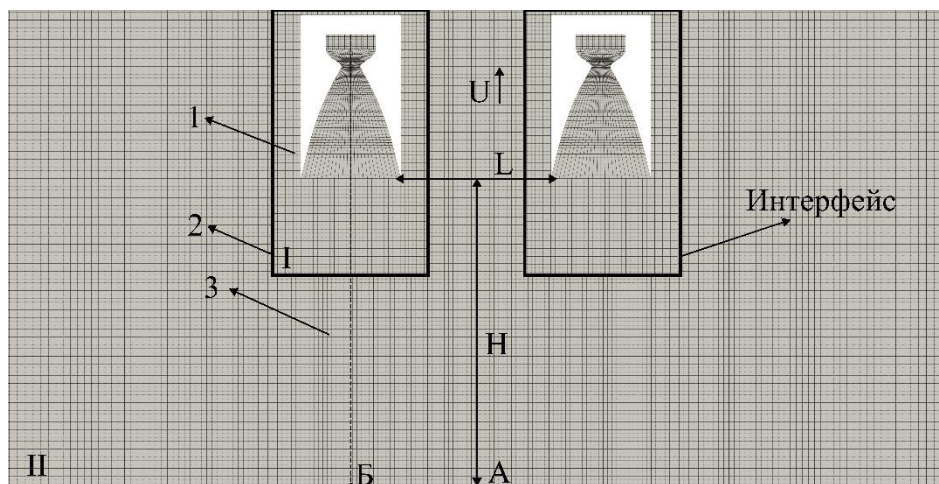


Рис. 2. Результат наложения двух сеток

Fig. 2. The result of merging two grids

При расчете на сетках типа «Химера» к граничным условиям, приведенным в работе [2], добавляется условие на границе между основной и перекрывающей сетками – интерфейс (см. рис. 2).

Результаты численных исследований

В работе было выполнено тестирование методики расчета с использованием сеток типа «Химера». Для этого проведено сравнение экспериментальных данных авторов работы [21] с результатами расчетов, полученных с использованием перекрывающихся сеток и без учета перекрывающихся сеток (решатель rhoPimpleFoam). Для получения сверхзвуковой струи использовалось коническое сопло [21]. Среднее число Маха на выходном сечении составляло $M = 2.52$, степень нерасчетности $n = 0.46$, угол раствора $\alpha = 7^\circ 15'$. Расстояние от выходного сечения сопла до преграды составляло $H = 1.84 \cdot R_a$, где $R_a = 1$ см – радиус выходного сечения сопла. На рис. 3 показано распределение относительного давления P/P_a , где $P_a = 46\,600$ Па – давление на срезе сопла. Для варианта расчета с сеткой типа «Химера» перекрывающая сетка была неподвижной.

По результатам сравнения видно хорошее согласование распределения относительного давления P/P_a для сетки типа «Химера» с экспериментальными данными и численными расчетами без учета подвижных границ (решатель rhoPimpleFoam).

При проведении параметрических исследований использовалось профилированное сопло. Радиус минимального сечения составлял $R^* = 0.018$ м, а радиус выходного сечения $R_e = 0.097$ м. Расстояние между соплами $L = 0.291$ м. Скорость отдаления сопла от преграды $U = 1$ м/с. Среднее число Маха в выходном сечении обоих сопел составляло $M = 4.5$. В качестве рабочего тела использовался гидразин [22] (молярная масса $M_r = 14.53$ кг/(кмоль), показатель адиабаты $k = 1.292$). Параметры во входном сечении сопла были следующими: $P_0 = 1.962$ МПа, $T_0 = 1\,336$ К, $U_z = 0$, $U_y = 0$, $U_x = U_0$. В начальный момент времени среда покоилась, $P_a = 650$ Па, $T_a = 250$ К. Пример расчетной сетки приведен на рис. 2. Число

ячеек основной сетки $N_o = 794\,028$, перекрывающей сетки $N_n = 41\,352$, общее число ячеек $N = N_o + N_n = 835\,380$. Шаг по времени составлял $\Delta t = 10^{-7}$. Физическое время расчета 0.02 с, что соответствует пройденному расстоянию 0.02 м.

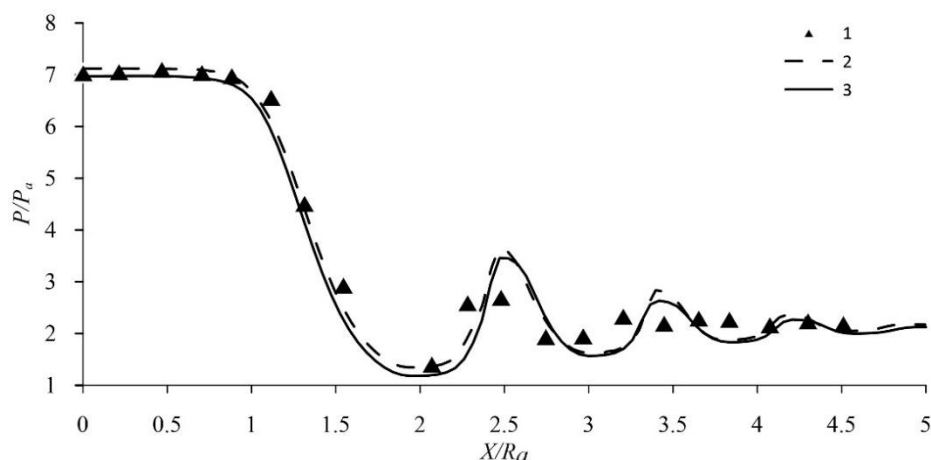


Рис. 3. Изменение распределения давления по преграде:

1 – эксперимент [21], 2 – расчет на обычной сетке, 3 – расчет на перекрывающихся сетках

Fig. 3 Changing the pressure distribution along the obstacle:

(1) experiment [21], (2) calculation on a conventional mesh, and (3) calculation on overlapping meshes

Расчет проводился в два этапа:

1. В начальный момент времени перекрывающая (сетка I на рис. 2) и основная (сетка II на рис. 2) сетки неподвижны, расчет выполняется до установления.

2. Перекрывающая сетка начинает отдаляться со скоростью $U = 1$ м/с от преграды. Начальное распределение параметров газа соответствует данным, полученным на этапе 1.

Результаты расчетов приведены на рис. 4–7. На рис. 4 показан градиент плотности газа для установившегося течения (этап 1). На рис. 5 показано распределение градиента плотности газа в моменты времени $t_1 = 0.005$ с, $t_2 = 0.01$ с, $t_3 = 0.02$ с (этап 2). Давление в точке пересечения плоскостей симметрии двигательной установки и преграды (точка A на рис. 2), а также давление в критической точке (точка B на рис. 2) в зависимости от времени показаны на рис. 6. Распределение давления на преграде вдоль линии, проходящей под двумя соплами, в моменты времени $t = 0.005$ с, $t = 0.01$ с, $t = 0.02$ с приведено на рис. 7.



Рис. 4. Градиент плотности

Fig. 4. Density gradient

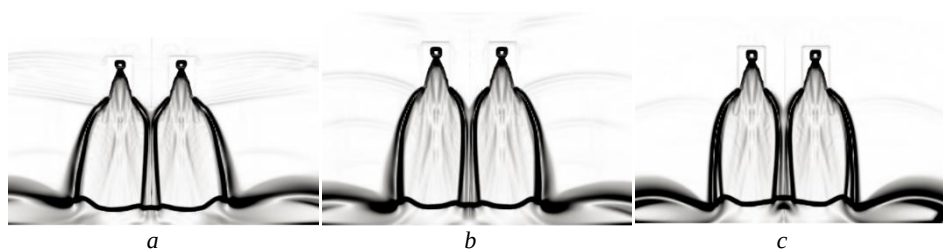


Рис. 5. Градиент плотности в моменты времени: $a - 0.005$ с, $b - 0.01$ с, $c - 0.02$ с

Fig. 5. Density gradient at time points: (a) 0.005, (b) 0.01, and (c) 0.02 s

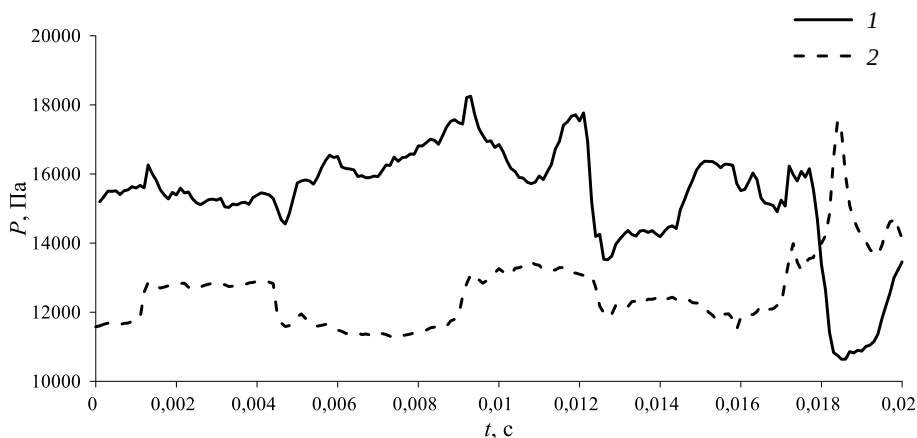


Рис. 6. Характер изменения давления на поверхности от времени:

1 – в точке пересечения плоскостей симметрии двигательной установки и преграды,
2 – в критической точке

Fig. 6. Pressure on the surface as a function of time:

(1) at the intersection of the planes of symmetry of the propulsion system and the obstacle
and (2) at the critical point

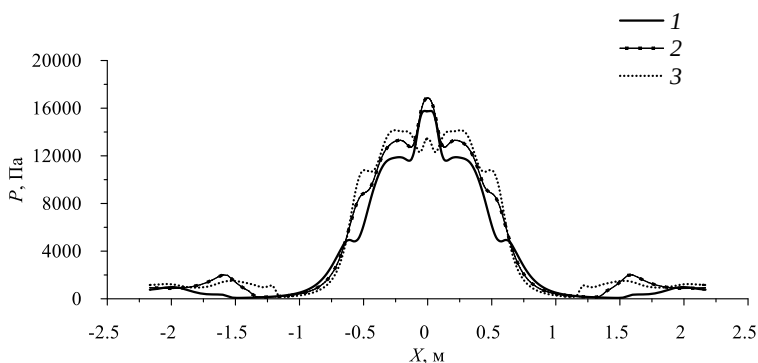


Рис. 7. Распределение давления на преграде в фиксированные моменты времени:

1 – 0.005 с, 2 – 0.01 с, 3 – 0.02 с

Fig. 7. Pressure distribution on the obstacle at fixed points in time:

(1) 0.005, (2) 0.01, and (3) 0.02 s

По мере отдаления сопел от преграды многоблочная струя перестраивается. Движение преграды сказывается на скачке, который образуется в результате взаимодействия центральных скачков каждой струи. Давление на преграде в центральной точке расчетной области, которая располагается в области данного скачка, меняется от 11 до 18 кПа в различные моменты времени (см. рис. 2 (1)). До 0.01 с давление возрастает до 18 кПа, затем падает до 11 кПа. Максимум давления вдоль преграды до момента времени расчета 0.01 с возрастает, затем уменьшается до 13 кПа (см. рис. 7). Давление в критической точке изменяется в диапазоне от 11.5 до 17.5 кПа (см. рис. 6 (2)). До 0.018 с давление изменяется незначительно, в пределах 2 кПа, затем происходит увеличение до 17.5 кПа, которое вызвано понижением давления в точке пересечения плоскостей симметрии двигательной установки с преградой.

Заключение

В работе проведено математическое моделирование нестационарного взаимодействия вязкой, турбулентной многоблочной (составной) сверхзвуковой струи с подвижной преградой. В расчетах применялся подход перекрывающихся сеток типа «Химера» с использованием открытого программного обеспечения OpenFOAM. Проведено тестирование методики расчета на перекрывающихся сетках применительно к взаимодействию сверхзвуковых струй с преградой. Получено хорошее согласование результатов расчетов с экспериментальными и численными данными других авторов. Проведено параметрическое исследование для взаимодействия двух струй с подвижной преградой для профилированного сопла в пространственной постановке. Получено, что при отдалении преграды со скоростью 1 м/с до момента времени расчета 0.01 с максимум давления в точке пересечения плоскостей симметрии двигательной установки с преградой возрастает. Показано, что в критической точке давление изменяется незначительно до момента времени 0.018 с, далее происходит увеличение до 17.5 кПа, вызванное понижением давления в точке пересечения плоскостей симметрии двигательной установки и преграды.

Список источников

1. Кагенов А.М., Костюшин К.В., Алигасанова К.Л., Котоногов В.А. Математическое моделирование взаимодействия составной сверхзвуковой струи с преградой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 71–79. doi: 10.17223/19988621/68/7
2. Глазунов А.А., Кагенов А.М., Костюшин К.В., Еремин И.В., Котоногов В.А., Алигасанова К.Л. Математическое моделирование взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с преградами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 87–101. doi: 10.17223/19988621/63/8
3. Запрягаев В.И., Солотчин А.В., Кавун И.Н., Яровский Д.А. Натекание сверхзвуковой недорасширенной струи на преграды различной проницаемости // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52, № 5. С. 60–67.
4. Мажукин В.И., Самарский А.А., Кастельянос О., Шапранов А.В. Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами // Математическое моделирование. 1993. Т. 5, № 4. С. 32–56.
5. Годунов С.К., Прокопов Г.П. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 429–440.

6. Benek J.A., Buning P.G., Steger J.L. A 3-D Chimera Grid Embedding Technique // AIAA Paper. 1985. № 85. P. 322–331.
7. Benek J.A., Donegan T.L., Suhs N.E. Extended Chimera Grid Embedding Scheme With Application to Viscous Flow // AIAA Paper. 1987. № 87. P. 238–291.
8. Козлов Е.А., Абанеев Э.Р. Пример численного решения двухмерной газодинамической задачи в геометрически изменяющейся расчетной области // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2006. Вып. 6 (57). С. 98–100.
9. Костюшин К.В. Численное исследование нестационарных газодинамических процессов при старте твердотопливных ракет // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 67. С. 127–143. doi: 10.17223/19988621/67/12
10. Еремин И.В., Кагенов А.М., Костюшин К.В., Червакова А.В. Математическое моделирование взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с подвижной преградой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 146–156. doi: 10.17223/19988621/85/10
11. Жильцов К.Н., Тырышкин И.М., Глазунов А.А., Еремин И.В. Моделирование процессов нестационарной газодинамики при взлете и посадке космических аппаратов в условиях разреженной атмосферы // Тезисы докладов XXVI Всероссийского семинара с международным участием по струйным, отрывным и нестационарным течениям, С.-Петербург, 2022. СПб. : Балтийский гос. техн. ун-т «Военмех», 2022. С. 85–86.
12. Lee B.S., Choi J.H., Kwon O.J. Numerical Simulation of Free-Flight Rockets Air-Launched From a Helicopter // Journal of Aircraft. 2011. V. 48 (5). P. 1766–1775. doi: 10.2514/1.c031365
13. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Яковчук М.С. Нестационарное течение в двухконтурном сопле с учетом перемещения его выдвижной секции из сложенного в рабочее положение // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2018. Т. 19, № 1.
14. Сизов А.М. Составные сверхзвуковые струи // Сверхзвуковые газовые струи : сб. ст. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1983. С. 85–102.
15. Солодов В.Г. Моделирование турбулентных течений. Расчет больших вихрей. Харьков : ХНАДУ, 2011. 168 с.
16. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer. West Redding : Begell House, Inc., 2003. P. 625–632.
17. OpenFOAM. URL: <http://openfoam.com> (accessed: 08.12.2023).
18. Holzmann T. Mathematics, numerics, derivations and OpenFOAM. Holzmann CFD, Inc., 2019. 155 p.
19. Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1984. V. 21. P. 995–1011.
20. Franke R. Scattered data interpolation: tests of some methods // Mathematics of Computation. 1982. V. 38 (157). P. 181–181. doi: 10.1090/s0025-5718-1982-0637296-4
21. Мельникова М.Ф., Нестеров Ю.Н. Воздействие сверхзвуковой нерасчетной струи на плоскую преграду, перпендикулярную оси струи // Ученые записки ЦАГИ. 1971. Т. 2, № 5. С. 44–58.
22. Кагенов А.М. Математическое моделирование взаимодействия сверхзвуковых многоблочных струй посадочного модуля с поверхностями : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2017. 155 с.

References

1. Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Aligasanova K.L., Kotonogov V.A. (2020) Matematicheskoye modelirovaniye vzaimodeystviya sostavnoy sverkhzvukovoy strui s pregradoy [Mathematical modeling of a supersonic twin jet interaction with an obstacle]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 72–79. DOI: 10.17223/19988621/68/7.

2. Glazunov A.A., Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Eremin I.V., Kotonogov V.A., Aligasanova K.L. (2020) Matematicheskoye modelirovaniye vzaimodeystviya odinochnoy sverkhzvukovoy strui s pregradami [Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with obstacles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp. 87–101. DOI: 10.17223/19988621/63/8.
3. Zapryagaev V.I., Solotchin A.V., Kavun I.N., Yarovskiy D.A. (2011) Natekaniye sverkhzvukovoy nedorasshirennoy strui na pregrady razlichnoy pronitsayemosti [Leakage of a supersonic underexpanded jet on obstacles of various permeability]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 52. pp. 60–67.
4. Mazhukin V.I., Samarskii A.A., Kastel'yanos O., Shapranov A.V. (1993) Metod dinamicheskoi adaptatsii dlya nestatsionarnykh zadach s bol'shimi gradientami [Method of dynamic adaptation for nonstationary problems with large gradients]. *Matematicheskoye Modelirovaniye*. 5(4). pp. 32–56.
5. Godunov S.K., Prokopov G.P. (1972) The use of moving meshes in gas-dynamical computations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 12(2). pp. 182–195.
6. Benek J.A., Buning P.G., Steger J.L. (1985) A 3-D chimera grid embedding technique. *AIAA Paper*. 85. pp. 322–331.
7. Benek J.A., Donegan T.L., Suhs N.E. (1987) Extended chimera grid embedding scheme with application to viscous flow. *AIAA Paper*. 87. pp. 238–291.
8. Kozlov E.A., Abaneev E.R. (2006) Primer chislennogo resheniya dvuhmernoy gazodinamicheskoy zadachi v geometricheski izmenyayushchey raschetnoy oblasti [An example of a numerical solution of a two-dimensional gas dynamic problem in a geometrically varying computational domain]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta – Tomsk State Pedagogical University Bulletin*. 6. pp. 98–100.
9. Kostyushin K.V. (2020) Chislennoye issledovaniye nestatsionarnykh gazodinamicheskikh protsessov pri starte tverdotoplivnykh raket [Numerical investigation of unsteady gasdynamic processes at the launch of solid-propellant rockets]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 67. pp. 127–143. DOI: 10.17223/19988621/67/12.
10. Eremin I.V., Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Chervakova A.V. (2023) Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with a moving barrier. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 146–156. DOI: 10.17223/19988621/85/10.
11. Zhil'cov K.N., Tyryshkin I.M., Glazunov A.A., Eremin I.V. (2022) Modelirovaniye protsessov nestatsionarnoy gazodinamiki pri vzlete i posadke kosmicheskikh apparatov v usloviyakh razrezhennoy atmosfery [Modeling of nonstationary gas dynamics processes during takeoff and landing of spacecraft in a rarefied atmosphere]. *Tezisy dokladov XXVI Vserossiyskogo seminar s mezhdunarodnym uchastiyem po struynym, otryvnym i nestatsionarnym techeniyam. Sankt-Peterburg: Baltiyskiy gosudarstvennyi tekhnicheskiiy universitet*. pp. 85–86.
12. Lee B.S., Choi J.H., Kwon O.J. (2011) Numerical simulation of free-flight rockets air-launched from a helicopter. *Journal of Aircraft*. 48(5). pp. 1766–1775. DOI: 10.2514/1.c031365.
13. Volkov K.N., Emelyanov V.N., Yakovchuk M.S. (2018) Nestatsionarnoye techeniye v dvukhkonturnom soople s uchetom peremeshcheniya ego vydvizhnoy seksii iz slozhennogo v rabocheye polozheniye [Unsteady flow in dual-bell nozzle with movement of extendible section from initial to working position]. *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*. 19(1).
14. Sizov A.M. (1983) Multiple supersonic jets, in *Supersonic gas jets. Collection of articles. Nauka, Novosibirsk*. pp. 85–102.
15. Solodov V.G. (2011) *Modelirovaniye turbulentnykh techeniy. Raschet bol'shikh vikhrey* [Modeling of turbulent flows. Calculation of large vortices]. Kharkov: Kharkov National Automobile and Highway University.

16. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. (2003). Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model. *Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*. Begell House Inc., West Redding. pp. 625–632.
17. OpenFOAM. URL: <http://openfoam.com>
18. Holzmann T. (2019) *Mathematics, Numerics, Derivations and OpenFOAM*. Holzmann CFD.
19. Sweby P.K. (1984). High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 21. pp. 995–1011.
20. Franke R. (1982). Scattered data interpolation: tests of some methods. *Mathematics of Computation*. 38(157). pp 181–181. DOI: 10.1090/s0025-5718-1982-0637296-4.
21. Mel'nikova M.F., Nesterov Yu.N. (1971) Vozdeystviye sverkhzvukovoy neraschetnoy strui na ploskuyu pregradu, perpendikulyarnuyu osi strui [Effect of a supersonic noncalculated jet on a flat obstacle perpendicular to the axis of the jet]. *Uchenye zapiski TSAGI – TsAGI Science Journal*. pp. 44–58.
22. Kagenov A.M. (2017) *Matematicheskoye modelirovaniye vzaimodeystviya sverkhzvukovykh mnogoblochnykh struy posadochnogo modulya s poverkhnostyami* [Mathematical modeling of the interaction of supersonic multiblock jets of the lander with surfaces]. Dissertation. Tomsk State University.

Сведения об авторах:

Кагенов Ануар Магжанович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: anuar@ftf.tsu.ru

Костюшин Кирилл Владимирович – младший научный сотрудник лаборатории математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

Ларкин Дмитрий Олегович – инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: mister.larkin.dima@mail.ru

Information about the authors:

Kagenov Anuar M. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anuar@ftf.tsu.ru

Kostyushin Kirill V. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

Larkin Dmitry O. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mister.larkin.dima@mail.ru

Статья поступила в редакцию 18.12.2023; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 18.12.2023; accepted for publication 09.12.2024

Научная статья

УДК 536.46

doi: 10.17223/19988621/92/11

Экспериментальное исследование и моделирование горения металлизированного смесового твердого топлива с учетом распределения агломератов по размерам.

I. Эксперимент: методика, обработка, результаты

Василий Андреевич Порязов¹, Олег Григорьевич Глотов²,
Алексей Юрьевич Крайнов³, Дмитрий Алексеевич Крайнов⁴,
Иван Викторович Сорокин⁵, Григорий Сергеевич Суродин⁶

^{1,3} Томский государственный университет, Томск, Россия

^{2,5,6} Институт химической кинетики и горения им. В.В. Воеводского
Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия

⁴ Томский политехнический университет, Томск, Россия

¹ poryazov@ftf.tsu.ru

² glotov@kinetics.nsc.ru

³ a.krainov@ftf.tsu.ru

⁴ kraynov@tpu.ru

⁵ sorokin@kinetics.nsc.ru

⁶ surodin83@yandex.ru

Аннотация. Представлены результаты экспериментального исследования горения модельных смесовых твердых топлив с порошками алюминия различной дисперсности. При трех уровнях давления (2, 4, 8 МПа) измерены скорости горения, проведены отборы конденсированных продуктов горения вблизи поверхности горения и определены их морфологические и гранулометрические характеристики, а также полнота сгорания алюминия; вычислена эффективность энергосвечения металлического горючего в составе топлива.

Ключевые слова: смесовое топливо, алюминий, конденсированные продукты горения, частицы, функция распределения, полнота сгорания, скорость горения

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 19-79-10054. Авторы благодарят Н.А. Осипову за помощь в подготовке образцов, О.Н. Житническую, Е.А. Притчину, А.В. Ластовку за помощь в обработке экспериментов.

Для цитирования: Порязов В.А., Глотов О.Г., Крайнов А.Ю., Крайнов Д.А., Сорокин И.В., Суродин Г.С. Экспериментальное исследование и моделирование горения металлизированного смесового твердого топлива с учетом распределения агломератов по размерам. I. Эксперимент: методика, обработка, результаты // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 125–143. doi: 10.17223/19988621/92/11

Experimental investigation and modeling of metallized composite solid propellant combustion with allowance for the size distribution of agglomerates. I. Experiment: methodology, processing, results

Vasiliy A. Poryazov¹, Oleg G. Glotov², Aleksey Yu. Krainov³,
Dmitriy A. Krainov⁴, Ivan V. Sorokin⁵, Grigory S. Surodin⁶

^{1,3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

^{2,5,6} Voevodsky Institute of Chemical Kinetics and Combustion Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

⁴ Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

¹ poryazov@ftf.tsu.ru

² glotov@kinetics.nsc.ru

³ a.krainov@ftf.tsu.ru

⁴ kraynov@tpu.ru

⁵ sorokin@kinetics.nsc.ru

⁶ surodin83@yandex.ru

Abstract. Characteristics of condensed combustion products (CCPs) of propellants based on AP, aluminum, and the inert binder SKDM-80 with a variation in the dispersion of aluminum were studied by the sampling method. The experiments were carried out in the pressure range of 2–8 MPa in argon, the particles were quenched near the combustion surface. The data on burning rate, morphological and granulometric composition of CCPs, incompleteness of metal combustion and heat release efficiency of metallic fuel are presented. Some empirical factors indicate that the pathways of chemical reactions change with an increase in pressure. In particular, the amount of acidic products in the combustion products increases, and incompleteness of metal combustion also decreases. This leads to an increase in the energy efficiency of metallic fuel at a pressure of about 9 MPa for both propellants; however, propellant with Alex is inferior in this parameter to fuel with ASD-4 due to the higher initial oxidation of Alex powder as compared to ASD-4. The obtained set of experimental data can be used to validate the developed combustion models of aluminized propellants in the second paper of the cycle.

Keywords: composite propellant, aluminum, condensed combustion products, particle, size distribution, combustion completeness, combustion rate

Acknowledgments: This work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 19-79-10054. The authors thank N.A. Osipova for help in sample preparation, O.N. Zhitnitskaya, A.V. Lastovka for help in processing the experiments.

For citation: Poryazov, V.A., Glotov, O.G., Krainov, A.Yu., Krainov, D.A., Sorokin, I.V., Surodin, G.S. (2024) Experimental investigation and modeling of metallized composite solid propellant combustion with allowance for the size distribution of agglomerates. I. Experiment: methodology, processing, results. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 125–143. doi: 10.17223/19988621/92/11

Введение

Контактные методы диагностики дисперсной фазы горящего топлива, или методики отбора, общепризнанно считаются наиболее информативными с точки зрения получения практически востребованной информации [1]. Одна из лучших методик отбора разработана в ИХКГ СО РАН в 1980-х гг. Ее подробное описание представлено в [2–4]. Гашение частиц, покидающих поверхность горения образца топлива, горящего в сосуде высокого давления (СВД), осуществляется на заданном расстоянии от образца путем смешения струи продуктов горения образца со спутным потоком инертного газа, непрерывно продувающего сосуд. Погашенные частицы улавливаются пакетом металлических ситовых сеток и аналитическим аэрозольным фильтром типа АФА [5]. Преимуществами методики являются «мягкое» замораживание инертным газом и высокая представительность отбора частиц любых размеров, включая субмикронные.

По завершении серии экспериментов пакет сит и другие элементы внутренней оснастки СВД промывают в ацетоне, фильтры АФА также растворяют в ацетоне. В результате получается суспензия частиц конденсированных продуктов горения (КПГ). Суспензия делится на фракции с использованием мокрого и сухого просеивания через сита. Затем фракции подвергаются гранулометрическому и химическому анализу. Фракционирование позволяет с адекватной точностью провести анализ частиц любых размеров, применяя для каждой фракции наиболее подходящие методы гранулометрического анализа. В частности, крупные агломераты с размерами в сотни микрометров могут быть измерены под оптическим микроскопом, мелкие оксидные частицы – с использованием автоматических гранулометров. Технология отбора и препарирования частиц подробно описана в [3, 6, 7]. Совокупная функция распределения частиц КПГ по размерам вычисляется с использованием распределения частиц во фракциях и массовых вкладов фракций.

Цель работы – получение набора экспериментальных данных для валидации разработанной физико-математической модели горения смесевых металлизированных твердых топлив.

Методика проведения эксперимента

Эксперименты проведены с образцами топлив, состав которых приведен в табл. 1.

Таблица 1

Компонентный состав (мас. %) и обозначение модельных топлив

Топливо	Связующее	АСД-4	Alex	ПХА
555	19.7	15.7		64.6
560	19.7	10.7	5	64.6

Были использованы следующие компоненты: связующее – горючее-связующее СКДМ-80 – раствор дивинилового каучука в трансформаторном масле в соотношении 20/80 [8], связующее не имеет в своем составе кислорода; ПХА – перхлорат аммония – смесь двух размерных фракций, мельче 50 мкм и 160–315 мкм, в соот-

ношении 40:60; АСД-4 – алюминий сферический дисперсный с удельной поверхностью около $4\,000\text{ см}^2/\text{г}$; Alex – наноразмерный порошок алюминия, полученный методом электровзрыва проволок. Рецептуры всех топлив содержат отверждающий агент в количестве 0.5% сверх 100%. Идентификаторы (номера) топлив условные и не содержат информации о составе. Образцы имели форму цилиндров диаметром 1 см и длиной около 3 см (в точности такие же, как в [7]). Боковую поверхность бронировали несколькими слоями термостойкого каучука Solprene®, растворенного в четыреххлористом углероде. В такой постановке опытов образец в сторающей бронировке горит в потоке инертного газа, так что гашение частиц, покидающих поверхность горения, происходит непосредственно вблизи образца. Дистанция гашения, оцененная как начальный участок смешения турбулентных спутных струй продуктов горения и инертного газа, составляет 2–3 см. Дисперсионный состав порошкообразных компонентов был предварительно охарактеризован подходящими методами гранулометрического анализа.

Эксперименты проводили в аргоне при начальном давлении $p = 2, 4$ и 8 МПа. В результате горения образца давление повышалось, и давлением в опыте считали среднее, равное полусумме начального и конечного давлений, плюс атмосферное 0.1 МПа. Типичные давления в опытах составляли около $2.5, 4.5$ и 8.8 МПа, при каждом уровне давления проводили три дублирующих опыта.

Скорость горения образца оценивали по его измеренной до опыта длине и времени горения, определяемому по сигналу от датчика давления в СВД в процессе горения. Давление газа в СВД контролировали образцовым манометром и тензометрическим датчиком давления типа ЛХ-412 и регистрировали с использованием АЦП L-Card E140 и ноутбука. Результаты представлены на рис. 1 и в табл. 2.

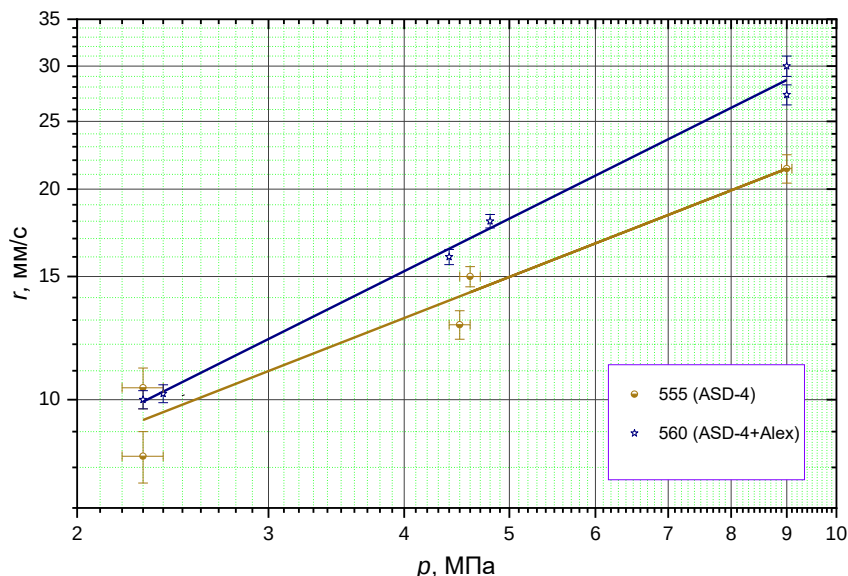


Рис. 1. Экспериментальные зависимости скорости горения от давления
Fig. 1. Experimental burning rates as functions of pressure

Таблица 2

Экспериментальные данные по скоростям горения в диапазоне давлений 2.3–9 МПа

Топливо	Горючее	Параметры аппроксимации вида $r = Br^n$		R^2	Значения скорости горения (мм/с) при трех характерных давлениях (МПа), вычисленные по аппроксимирующим зависимостям		
		B	n		$r@2$	$r@4$	$r@8$
555	АСД-4	5.6 ± 1.0	0.6 ± 0.1	0.96	8.6	13.1	19.9
560	АСД-4 + Alex мод	5.2 ± 0.8	0.8 ± 0.1	0.98	8.9	15.3	26.1

Дисперсный анализ металлического горючего

В табл. 3 приведены средние размеры частиц D_{mn} , основанные на моментах дифференциальной функции распределения частиц по размерам, и указаны методы гранулометрического анализа. Определение и свойства средних D_{mn} см.: [3, 4].

Таблица 3

Средние размеры D_{mn} (мкм) порошкообразных компонентов топлив и метод анализа

Компоненты	D_{10}	D_{30}	D_{32}	D_{43}	Методы
Alex	1.1	1.9	3.9	15.1	BCou
АСД-4	4.6	5.7	7.1	8.9	Mlv
АСД-4 + Alex	1.4	2.8	5.6	10.9	Calc
ПХА < 50 мкм	3.3	8.6	24.7	42.9	Mlv
ПХА 160–315	286	299	312	323	Opt

Примечание. Обозначения методов гранулометрического анализа расшифрованы в тексте.

Для методов анализа приняты обозначения: Mlv – автоматический гранулометр Малверн 3600Е. Режим работы прибора: максимальное разрешение (16 размерных интервалов в диапазоне 0.5–118 мкм), ультразвук до измерения в течение 30 с, механическая мешалка во время измерения включена, несущая жидкость – ацетон (за исключением порошка ПХА < 50 мкм ($S_{\text{вет}} = 5\,400\text{ см}^2/\text{г}$), который анализировали в гексане). Каждую пробу анализировали дважды с интервалом 3 мин, результаты усредняли. BCou – лазерный анализатор частиц Beckman Coulter LS 13 320. Далее обозначения Mlv и BCou будут использоваться для указания соответствующих приборов-гранулометров. Режим работы прибора BCou: максимальное разрешение (116 размерных интервалов в диапазоне 0.04–2 000 мкм), ультразвук до измерения в течение 30 с, несущая жидкость – ацетон. Заданная математическая модель обработки – оксид алюминия. Поскольку анализатор BCou – проточный, повторение и усреднение измерений не проводили. Opt – оптический проекционный микроскоп Carl Zeiss Pictoval с полуавтоматическим 23-канальным счетным устройством (ПСУ) [9] был использован для анализа порошка ПХА фракции 160–315 мкм. Calc – для смеси (АСД-4 + Alex) приведены расчетные значения, вычисленные с учетом распределений и массовых долей АСД-4 и Alex. Отметим, что порошок Alex в процессе гранулометрического анализа, по-видимому, находится в агрегированном состоянии, поскольку его средний размер D_{43} больше, чем у АСД-4.

Химический анализ металлического горючего

В табл. 4 представлены результаты химического анализа металлического горючего (МГ) в виде значения измеренного восстановительного числа RN_{mf} . Восстановительное число RN количественно характеризует способность материала присоединять кислород. Для исходного МГ это потенциальная способность материала к окислению. Для продуктов горения восстановительное число характеризует количество еще неокисленного, т.е. активного, материала. Отношение RN после горения (для КПП) и RN до горения (для МГ) служит мерой неполноты сгорания МГ. В табл. 4 также приведено теоретическое восстановительное число для металлического горючего RN_{mft} , которое вычисляется по стехиометрии реакции окисления. Отношение (RN_{mf}/RN_{mft}) измеренного и теоретического значений характеризует «начальную окисленность» МГ, т.е. его деградацию в процессе хранения. Для Al отношение RN_{mf}/RN_{mft} можно выразить в процентах и интерпретировать как процентное содержание металлического неокисленного Al в МГ.

Таблица 4

Восстановительное число и удельная теплота сгорания металлических горючих

Горючее	Топливо	RN_{mf} (измерено)	RN_{mft} (расчет)
АСД-4	555	10.2 ± 0.3 (% Al 92.1 ± 1.8)	11.1
Alex	–	8.8 ± 0.2 (% Al 78.8 ± 1.8)	11.1
АСД-4 + Alex	560	9.8 (аддитивный расчет)	11.1

Восстановительное число определяется в результате прямого химического анализа цериметрическим методом [6]. Справочное значение удельной теплоты сгорания металлического горючего Q 30.98 кДж/г [10].

Гранулометрический анализ КПП

Гранулометрический анализ КПП проводили с использованием сит с ячейкой 120 и 250 мкм, выделяя фракции мельче 120 и 120–250 мкм. По своим морфологическим характеристикам частицы КПП топлив 555 и 560 относятся к типам «попкорн» (PopC) и «сферы» (S). Описание и типичные фотографии этих типов частиц даны в [7]. Вкратце, тип PopC – разрушившиеся агломераты, тип S – классические алюминиевые агломераты и оксидные частицы. Основное содержание фракций КПП обоих топлив – частицы типа PopC. В случае топлива 555 количество неразрушенных сферических частиц во фракции 120–250 мкм было крайне мало, поэтому их гранулометрический анализ не проводили, а фракцию 120–250 мкм учитывали по массе. Относительное количество сферических частиц во всех фракциях КПП топлива 560 больше, что позволило провести гранулометрический анализ частиц типа S во фракции 120–250 мкм методом Opt. Погрешность определения размеров частиц соответствует половине ширины гистограммного интервала и типично составляет ± 8.5 мкм. В КПП фракции < 120 мкм также имеются различные белые сферы (рис. 2), однако выделить их из основной массы КПП не представляется возможным. Поэтому их распределение по размерам «спрятано» в распределении фракции < 120 мкм, которую анализировали на гранулометре Mlv. Отметим факт наличия в КПП едкой жидкости с резким кислотным запа-

хом. Ее количество увеличивается с давлением для обоих топлив 555 и 560, и относительно больше у топлива 560. Капли, попавшие на фильтр, могут вызывать его локальные повреждения. Степень «целостности» фильтра в процентах оценена кортежами чисел: 100, 100, 90% для топлива 555 и 98, 95, 80% для топлива 560. Последовательность чисел в кортеже соответствует уровням давления 2, 4 и 8 МПа, и 100% означает безукоризненно целый фильтр.

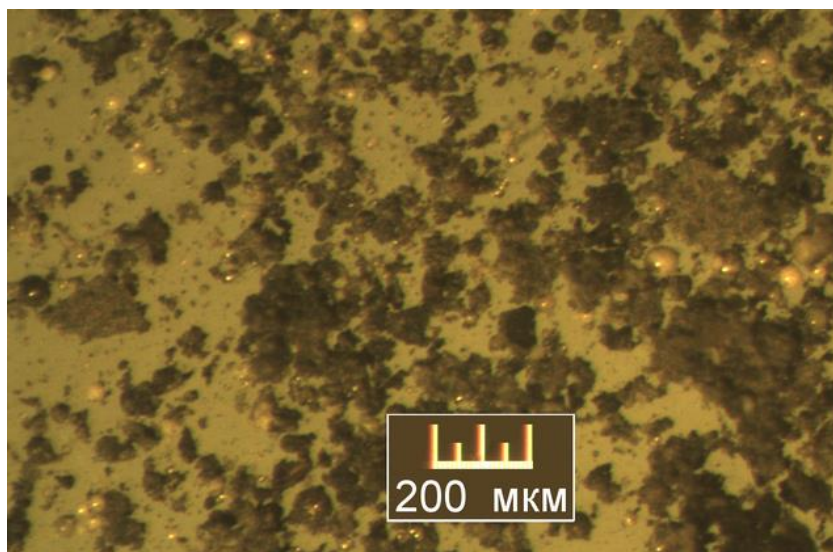


Рис. 2. Фракция частиц КПП мельче 120 мкм для топлива 560 при давлении 8.9 МПа. Иллюстрация наличия белых оксидных сфер
Fig. 2. Fraction of CCP particles smaller than 120 microns for propellant 560 at a pressure of 8.9 MPa. Illustration of the presence of white oxide spheres

Рассмотрим гранулометрические характеристики КПП. Как и в других наших работах [2, 3, 7], результаты гранулометрического частиц представлены графически в виде гистограммы $g(D)$ *плотности распределения относительной массы частиц КПП по размерам*, которую определяли следующим образом:

$$g_i(D) = m_i / (M_{prop} \Delta D_i),$$

где D – размер (диаметр) частиц, m_i – масса частиц в i -м гистограммном интервале, M_{prop} – масса топлива (суммарная величина для серии образцов, сжигаемых в одинаковых условиях), ΔD_i – ширина i -го гистограммного интервала. В линейных координатах площадь (произведение ширины на высоту) каждого гистограммного интервала пропорциональна массе, а общая площадь под кривой соответствует суммарной массе КПП.

Количественно массовые функции распределения частиц по размерам характеризовали набором средних диаметров D_{10} , D_{30} , D_{32} , D_{43} , D_{53} , основанных на моментах дифференциальной функции распределения. Средний D_{53} был введен в [11] при решении задачи об осаждении k -фазы в канале сложной геометрической формы.

На рис. 3 и 4 представлены массовые функции распределения частиц КПП топлив 555 и 560 при вариации давления, а также использованного в этих топливах металлического горючего АСД-4 и смеси (АСД-4 + Alex). В обозначениях кри-

вых для КПП содержится информация о топливе, металлическом горючем и давлении при проведении экспериментов с отбором КПП. Так, например, обозначение 555(ASD-4)23 означает: топливо 555, горючее АСД-4, отбор при давлении 23 атм. Для исходного МГ в обозначении кривой использованы буквы *ini*, например, кривая ASD-4ini – массовое распределение горючего АСД-4. Графики приведены в линейной и полулогарифмической системах координат. В линейных координатах площадь (произведение ширины на высоту) каждого гистограммного интервала пропорциональна массе, а общая площадь под кривой соответствует суммарной массе КПП. В случае исходного горючего площадь под кривой равна 0.157 и соответствует массовой доле МГ в топливе. Сопоставление графиков для исходного МГ и КПП позволяет оценить прирост массы за счет окисления МГ и перераспределение массы в результате горения. Полулогарифмическое представление позволяет лучше рассмотреть график массового распределения в области малых размеров частиц. В табл. 5–7 представлены средние размеры частиц, в том числе в табл. 7 для сферических частиц КПП топлива 560. В табл. 8 для трех уровней давления *p* приведены основные параметры, характеризующие горение и КПП топлив 555 и 560, такие как скорость горения *r*, неполнота сгорания η , средний размер D_{43} , безразмерная масса КПП m_{csp} , отношение реально собранной массы КПП к ее теоретическому значению $CCP/CCPt$, а также эффективность энергосодержания *E*.

Приведем определения параметров (как в [7]):

$m_{mf} \equiv mf$ – безразмерная масса металлического горючего в топливе, совпадает с массовой долей МГ в топливе *mf*. Во всех случаях обезразмеривание производится путем деления на массу топлива.

$m_{csp} \equiv CCP$ – безразмерная масса КПП. *CCP* – альтернативное обозначение, используемое наравне с m_{csp} .

m_{120} – безразмерная масса КПП во фракции частиц крупнее 120 мкм. Эта фракция выделяется на сите с размером ячейки 120 мкм и обозначается как фракция 120–250 мкм, даже если сито 250 мкм реально не использовалось, а правая граница фракции назначена 250 мкм для единообразия.

$CCPt$ – общая безразмерная *теоретическая* масса КПП. Рассчитывается в предположении полного превращения активного алюминия в МГ в высший оксид $Al \rightarrow Al_2O_3$ в соответствии со стехиометрическим коэффициентом 102/54.

$CCP/CCPt$ – отношение реально собранной массы КПП к ее теоретическому значению.

RN – *восстановительное число*, которое определяется методом цериметрического анализа [12].

RN_{mf} – восстановительное число для металлического горючего. В случае смешанного горючего вычисляется посредством аддитивного расчета по *RN* компонентов (см. табл. 3).

RN_{prop} – восстановительное число для топлива. Вычисляется с использованием восстановительного числа RN_{mf} для МГ и доли МГ в топливе: $RN_{prop} = RN_{mf}m_{mf}$.

RN_{csp} – восстановительное число для КПП, определяется в результате химического анализа как $RN_{csp} = (RN \text{ для частиц КПП})m_{csp}$.

Если фракций КПП несколько, то формула имеет вид суммы по фракциям:

$$RN_{csp} = \sum (RN \text{ для частиц КПП } i\text{-й фракции})m_{cspi},$$

где m_{cspi} – безразмерная масса *i*-й фракции КПП.

Зная значение восстановительного числа RN_{mf} для горючего, входящего в состав топлива до горения, и значение $RN_{ссп}$ для КПП после горения, определим неполноту сгорания: $\eta = RN_{ссп}/RN_{prop}$.

При таком определении неполнота сгорания изменяется от 1 до 0, где 1 – ничего не сгорело, 0 – все сгорело.

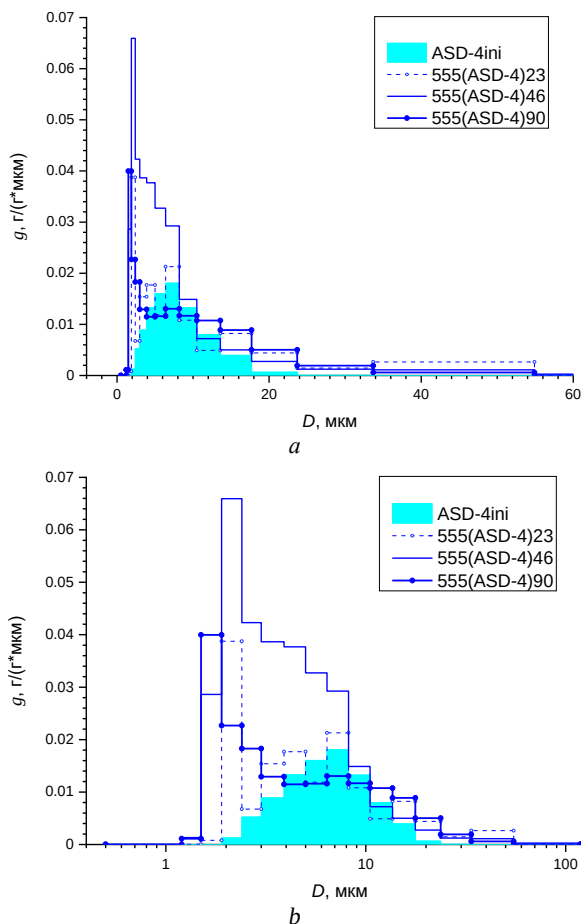


Рис. 3. Массовые распределения частиц КПП топлива 555 и исходного алюминия АСД-4 в топливе 555 в линейной (а) и полулогарифмической системах координат (b)

Fig. 3. Mass distributions of CCP particles of propellant 555 and initial aluminum ASD-4 in propellant 555 in (a) linear and (b) semi-logarithmic coordinate system

Таблица 5

Средние размеры D_{mn} (мкм) частиц КПП топлива 555 и МГ АСД-4

Давление (МПа)	D_{10}	D_{30}	D_{32}	D_{43}	D_{53}
2.3	2.9	4.6	7.9	19.7	31.2
4.6	2.2	3.2	5.0	13.1	23.9
9.0	2.3	3.6	6.4	16.5	29.8
Горючее АСД-4	4.6	5.7	7.1	8.9	9.8

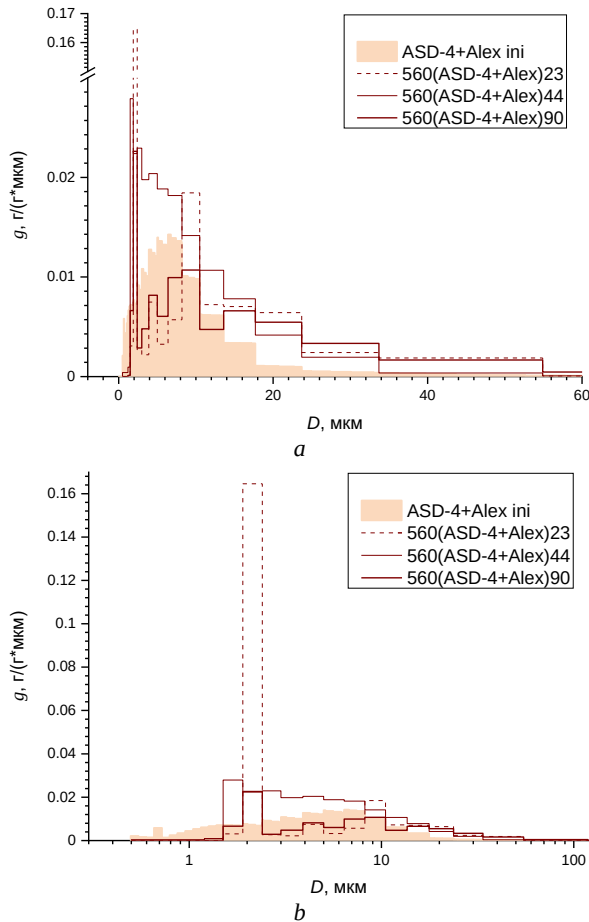


Рис. 4. Массовые распределения частиц КПП топлива 560 и исходного МГ в топливе 560 в линейной (a) и полулогарифмической системе координат (b)

Fig. 4. Mass distributions of CCP particles of propellant 560 and initial aluminum particles in propellant 560 in (a) linear and (b) semilogarithmic coordinate system

Таблица 6

Средние размеры D_{mn} (мкм) частиц КПП топлива 560 и МГ

Давление (МПа)	D_{10}	D_{30}	D_{32}	D_{43}	D_{53}
2.3	2.3	3.3	5.6	18.2	30.2
4.4	2.4	3.7	6.2	13.7	23.0
9.0	2.7	4.9	10.6	28.6	41.0
Горючее АСД-4+Alex	1.4	2.8	5.6	10.9	15.5

Эффективность энергосвободения – интегральный параметр, определяемый по формуле

$$E = (1 - \eta)m_{mf}(RN_{mf}/RN_{mft})Q,$$

где множитель (RN_{mf}/RN_{mft}) характеризует «начальную окисленность» металлического горючего, Q – удельная теплота сгорания горючего в кДж/г. Параметр E

имеет размерность кДж/г и характеризует количество теплоты, выделившееся при сгорании 1 г топлива *в условиях эксперимента*. В данной работе гашение частиц дисперсной фазы проводили вблизи поверхности горения, поэтому параметр E характеризует выделение теплоты вблизи поверхности горения, которое существенно для скорости горения.

Анализ графиков функций распределения (ФР) и величин средних размеров для топлива 555 показывает следующее:

- Масса КПП намного превышает массу МГ. При этом прирост массы обеспечивается частицами с размерами в диапазоне 1.2–10.5 мкм, т.е. в диапазоне, характерном для оксидных частиц, образующихся при горении алюминия как по механизму парофазного горения, так и по механизму образования финальных оксидных частиц, образующихся при полном выгорании из частицы активного алюминия [13]. Здесь и далее границы приводимых диапазонов размеров соответствуют гистограммным интервалам гранулометра Mlv. Судя по размерам оксидных частиц, существенная доля алюминия выходит в газовую фазу в исходном виде (не в составе агломератов). Вместе с тем агломерация алюминия, очевидно, имеет место, что проявляется в увеличении массы КПП в диапазоне 8.2–54.9 мкм по сравнению с массой исходного МГ и проявляется в увеличении средних размеров высоких порядков. Так, например, средний размер D_{43} в большинстве случаев увеличивается с ~ 9 до 13–20 мкм, средний D_{53} увеличивается с ~ 10 до 24–31 мкм. При этом монотонного изменения средних размеров при вариации давления не замечено.

Результаты проведенного анализа данных для топлива 555 свидетельствуют: (1) о слабой, но заметной агломерации алюминия; (2) об образовании существенного количества (и массы) оксидных частиц в диапазоне 1.2–10.5 мкм по двум известным механизмам; (3) о слабом влиянии давления на указанные процессы и характеристики.

Аналогичный анализ для топлива 560 показывает следующее:

- ФР частиц исходного материала, кривая (ASD-4 + Alex ini), имеет «хвост», простирающийся до 111 мкм, в то время ФР для порошка АСД-4 заканчивается на размере 33.7 мкм. Предположительно, это обусловлено ФР порошка Alex и связано с агрегацией его частиц. Соответственно, МГ (АСД-4 + Alex) характеризуется довольно большими величинами средних размеров высоких порядков, обусловленными наличием крупных частиц. Так, например, у (АСД-4 + Alex) средний $D_{43} = 10.9$ мкм, для сравнения: у АСД-4 $D_{43} = 8.9$ мкм, а у Alex $D_{43} = 15.1$ мкм. По-видимому, это означает, что исходные частицы Alex агрегированы. Часть агрегатов не разрушается при перемешивании топливной массы в процессе приготовления состава, и это приводит к образованию сравнительно крупных сферических частиц-агломератов. На рис. 5 и в табл. 8 представлены данные о сферических частицах КПП крупнее 120 мкм. Предполагается, что за эти частицы КПП ответственны именно крупные агломераты, появившиеся при введении в МГ порошка Alex.

- В ФР КПП при всех давлениях очень мало частиц в интервале 1.2–1.5 мкм, а частицы мельче 1.2 мкм вообще отсутствуют, в то время как у исходного МГ соответствующие частицы имеются. Присутствие мелких частиц вплоть до 0.4 мкм в исходном МГ обеспечивается вкладом порошка Alex. Можно предполагать, что частицы исходного МГ с размерами от 0.4 до 1.5 мкм или агломерируют, или

присоединяются к более крупным частицам. Иными словами, такие частицы не выходят в газовую фазу в своем первоначальном виде. Поэтому в ФР КПП отсутствуют оксидные частицы соответствующего размера. Вместе с тем в КПП имеется мода большой амплитуды в интервале 1.9–2.4 мкм. Согласно результатам [14] имеются следующие соотношения между размером частицы алюминия D_{Al} и размером частицы оксида D_{ox} , образованного при полном при полном сгорании алюминиевой частицы: $D_{ox} = 0.55D_{Al}$, или $D_{Al} = 1.8D_{ox}$. Соответственно, частицы оксида 1.9–2.4 мкм могут быть образованы из частиц алюминия с размерами 3.4–4.3 мкм. Этот интервал не совпадает ни с основной модой порошка Alex (1.5–1.7 мкм), ни с основной модой порошка АСД-4 (6.4–8.2 мкм). Поэтому можно предположить, что частицы с размерами в интервале 3.2–4.1 мкм и есть «мелкие агломераты», образованные в результате слияния частиц исходного МГ с размерами от 0.4 до 1.5 мкм, а также частицы оксида, образованные при сгорании частиц с размерами 3.4–4.3 мкм. Здесь мы вводим понятие «мелких агломератов» как частиц, имеющих агломерационное происхождение, но при этом микронные размеры (в отличие от традиционных агломератов, которые обычно имеют размеры более 40–60 мкм). Следует заметить, что при увеличении давления амплитуда моды 1.9–2.4 мкм уменьшается. Возможно, это связано с уменьшением вклада «мелких агломератов» и увеличением вклада «традиционных агломератов».

- В ФР КПП при всех давлениях масса частиц в диапазоне размеров 8.2–54.9 мкм заметно превышает массу исходного горючего в этом диапазоне. Это значит, что при горении топлива 560 также имеет место агломерация металлического горючего в традиционном понимании, т.е. с образованием частиц-агломератов крупнее 30–40 мкм. Представляет интерес сравнить размеры частиц КПП топлив 555 и 560 с учетом влияния частичной замены АСД-4 на Alex. Можно видеть, что средние размеры D_{43} КПП топлив 555 и 560 сопоставимы, за исключением случая давления около 9 МПа. В этом случае топливо 560 демонстрирует более сильную агломерацию, $D_{43} = 28.6$ мкм для топлива 560 и $D_{43} = 16.5$ мкм для топлива 555. Конечно, указанный факт опосредован процедурой выделения фракции КПП 120–250 мкм, вклад которой может давать заметный разброс в средних размерах высоких порядков. Тем не менее само наличие сравнительно крупных сферических частиц крупнее 120 мкм в КПП топлива 560 заставляет сделать вывод, что введение Alex не приводит к снижению агломерации, несмотря на увеличение скорости горения (см. рис. 1). Гранулометрические характеристики сферических частиц КПП крупнее 120 мкм представляют интерес с точки зрения развития моделей агломерации, поскольку в совокупности с данными о скоростях горения дают базовую информацию для разработки моделей. Массовые функции распределения сферических частиц КПП крупнее 120 мкм при трех уровнях давления представлены на рис. 5 и в табл. 8. Измерения частиц проведены методом Орт, типичная погрешность определения размеров частиц составляет ± 8.5 мкм. В обозначениях кривых на рис. 5 содержится информация о топливе и давлении, буква S стоит для напоминания о том, что это именно сферические частицы. Например, подпись кривой t560S44 означает: топливо 560, сферические частицы крупнее 120 мкм, давление 44 атм. В табл. 7 приведены средние размеры сферических частиц во фракции > 120 мкм и значения m_{120} . Следует отметить, что измеренные частицы «условно круглые», так что сравнение их размеров не совсем корректно. Частицы, отобранные при давлении 4.4 МПа, по-видимому,

трансформировались при хранении («распухли» в процессе перехода $S \rightarrow \text{PorC}$), отсюда появление особо крупных частиц и частичная потеря массы фракции (за счет прохода через сито 120 мкм). Отметим двухмодовый характер распределения в случае давления 9 МПа. Мода в районе 100 мкм может быть образована крупными финальными частицами оксида, образованными при полном сгорании агломератов с размером около 170 мкм.

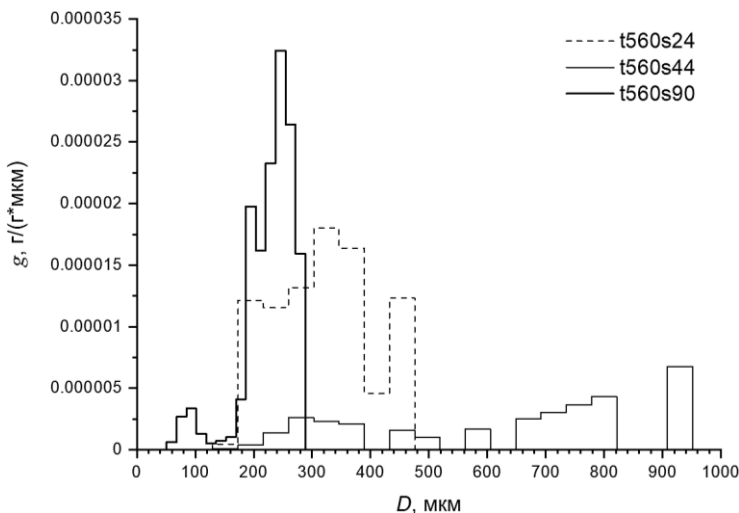


Рис. 5. Массовые распределения сферических частиц КПГ топлива 560 при вариации давления

Fig. 5. Mass distributions of spherical CCP particles for propellant 560 under pressure variations

Таблица 7

Средние размеры D_{mn} (мкм) сферических частиц во фракции крупнее 120 мкм в КПГ топлива 560 и безразмерная масса этой фракции

Давление (МПа)	D_{10}	D_{20}	D_{30}	D_{21}	D_{32}	D_{43}	D_{53}	m_{120}
2.4	255	264	274	274	296	319	329	0.00383
4.4	331	369	414	410	521	636	678	0.00144
9.0	145	164	178	184	212	228	232	0.00251

Таблица 8

Основные характеристики горения топлив 555 и 560

Топливо	Горючее	p , МПа	D_{43} , мкм	r , мм/с	η	$m_{ср}$	$CCP/CCPt$	E
555	АСД-4	2.3	19.7	9.4 ± 0.7	0.23 ± 0.02	0.29 ± 0.02	1.00 ± 0.02	3.5 ± 0.2
555	АСД-4	4.6	13.1	13.9 ± 0.6	0.28 ± 0.04	0.29 ± 0.04	1.02 ± 0.04	3.2 ± 0.1
555	АСД-4	9.0	16.5	21.4 ± 1.0	0.11 ± 0.04	0.27 ± 0.04	0.94 ± 0.04	4.0 ± 0.4
560	АСД-4 + Alex	2.4	18.2	10.1 ± 0.3	0.23 ± 0.01	0.31 ± 0.02	1.12 ± 0.02	3.3 ± 0.3
560	АСД-4 + Alex	4.4	13.7	17.0 ± 0.4	0.21 ± 0.05	0.29 ± 0.02	1.05 ± 0.02	3.4 ± 0.1
560	АСД-4 + Alex	8.9	28.6	28.7 ± 1.0	0.11 ± 0.01	0.26 ± 0.02	0.91 ± 0.02	3.8 ± 0.3

Анализируя данные табл. 8 заметим, что, несмотря на повышение скорости горения при частичной замене АСД-4 на Alex в топливе 560, поведение параметров η , $m_{ср}$, $CCP/CCPt$ и E для топлив 555 и 560 мало отличается (практически в пределах погрешности, за исключением величины η на уровне давления около 9 МПа). Имеет место снижение неполноты сгорания при давлении около 9 МПа по сравнению с давлениями около 2 и 4 МПа, при этом средние размеры D_{43} демонстрируют обратную тенденцию. А именно, при давлениях около 2 и 4 МПа средние D_{43} выше у топлива 555 в 1.1–1.7 раза, а при давлении около 9 МПа выше у топлива 560 в 1.7 раза. Наблюдаются близкие значения параметров $m_{ср}$ и $CCP/CCPt$ для обоих топлив при всех давлениях. Параметр E для обоих топлив несколько выше при давлении около 9 МПа, что обусловлено снижением неполноты сгорания η при высоком давлении. В целом в случае топлива 560 эффективность энергоснабжения ниже, что связано с изначально меньшей теплотворной способностью горючего из-за большей начальной окисленности металла. А именно, значение RN_{mf} для горючего АСД-4+Alex в 1.05 раза меньше, чем для АСД-4 (см. табл. 4). Примерно так же соотносятся между собой величины параметра E .

Горение при атмосферном давлении

Дополним приведенную информацию данными, полученными при атмосферном давлении. Горение аналогичных образцов (диаметр 1 см, бронировка Solprene) осуществляли в воздухе в комнатных условиях и проводили видеосъемку со скоростью 24 кадра в секунду. Ось образца располагали вертикально, факел образца был направлен вверх. Регистрировали время горения и параметры факела пламени. По измеренной до опыта длине образца и измеренному по видеозаписям времени горения вычисляли среднюю скорость горения. В табл. 9 приведены скорости горения, высота факела и качественные особенности горения. В качестве высоты факела принимали наибольшее значение, на которое поднималось пламя в течение всего времени горения образца. На рис. 6 показана фотография факела образца топлива 555. Факел топлива 560 имеет несколько большую высоту (см. табл. 9), но выглядит аналогично и потому не приводится.

Таблица 9

Параметры горения в воздухе при 1 атм

Топливо	Горючее	Скорость горения, мм/с	Высота факела, см	Особенности
555	15.7% АСД-4	0.6 ± 0.1	$(11.7\text{--}15.0) \pm 0.5$	Пульсации
560	10.7% АСД-4 + 5% Alex	0.6 ± 0.1	$(19.5\text{--}25.5) \pm 0.5$	Пульсации Погасание

Горение топлив 555 и 560 протекает с образованием яркого белого пламени с большим выходом светящихся частиц. Некоторые треки имеют излом, свидетельствующий о резком изменении направления движения горячей частицы. Подобные аномалии движения связаны с асимметрией процесса горения, которая развивается вследствие увеличения оксидного колпачка, покрывающего часть поверхности частицы [15]. Пока колпачок невелик, картина горения частицы

практически симметрична. Когда колпачок становится достаточно большим, начинается стадия асимметричного горения. Пламя вокруг частицы приобретает асимметричную форму, выбросы струй из-под колпачка приводят к излому траектории и / или вращению частицы.



Рис. 6. Горение топлива 555 в комнатных условиях (воздух, 1 атм)

Fig. 6. Combustion flame of propellant 555 under room conditions (air, 1 atm)

При горении топлив 555 и 560 также наблюдается *фрагментация* вылетевших с поверхности частиц, которая может происходить как в режиме «звездообразного взрыва», так и в режиме «еловой ветви». Треки фрагментирующих с разрывом частиц алюминия зачастую по форме напоминают кипсеты (семена) одуванчика с парашютиком. Процесс горения топлив 555 и 560 сопровождается пульсацией пламени и периодическим изменением его яркости. В случае топлива 560 наблюдалось даже погасание образца.

Заключение

Частичная замена АСД-4 на Alex в топливе 560 по сравнению с топливом 555 приводит к увеличению скорости горения в 1.1–1.3 раза. Вместе с тем агломерационные параметры топлива 560 с горючим АСД-4 + Alex *не улучшаются*. Значения параметров $m_{ср}$, $ССР/ССРt$ и η для обоих топлив при всех давлениях попарно близки, средние размеры D_{43} ведут себя по-разному при вариации давления.

На уровнях давления 2 и 4 МПа топливо 560 имеет в 1.1–1.7 раза меньший размер D_{43} , чем топливо 555 (положительный эффект введения Alex), однако при давлении около 9 МПа картина меняется, и теперь уже топливо 555 имеет в 1.7 раза меньший D_{43} , чем топливо 560. Некоторые эмпирические факторы свидетельствуют, что при повышении давления изменяются пути реакций. В частности, в продуктах горения увеличивается количество кислотных продуктов, а также уменьшается неполнота сгорания металла η . Это приводит к увеличению эффективности энергосвечения E при давлении около 9 МПа для обоих топлив, однако топливо 560 уступает по этому параметру топливу 555 вследствие большей начальной окисленности порошка Alex в сравнении с АСД-4. Несмотря на негативное влияние добавки Alex на параметры агломерации в проведенных экспериментах, не следует торопиться с окончательным выводом о бесполезности Alex. Можно надеяться на его положительный эффект в случае обеспечения деконтации частиц в топливной массе. Так, например, известны приемы обработки поверхности частиц бора, нацеленные на улучшение его «расходимости» в связующем на основе НТРВ [16]. Возможно, нечто подобное можно сделать с частицами алюминия. Поэтому исследования необходимо продолжить.

Полученный набор экспериментальных данных может быть использован для валидации разрабатываемых моделей горения алюминизированных топлив. При этом следует помнить о «неидеальности» реальных экспериментов. Опыт показывает, что образцы топлив, особенно содержащие такой «неудобный» в технологическом плане компонент, как высокодисперсный алюминиевый порошок Alex, могут иметь дефекты в форме каверн, непромесов, трещин и других неоднородностей, влияющих на скорость горения. Поэтому при валидации моделей следует стремиться воспроизвести не столько уровень скорости горения, сколько качественные закономерности поведения скорости горения топлив. Для рассматриваемых топлив такими качественными особенностями являются изменения характера реагирования (т.е. компонентов, путей и продуктов химических реакций) при увеличении давления, приводящие к повышению полноты сгорания металла и повышению скорости горения. Эффекты Alex'a для рассматриваемых топлив тривиальны и проявляются в увеличении скорости горения за счет более высокой удельной поверхности порошка и в снижении эффективности энергосвечения из-за начальной окисленности порошка. Представляется, что для топлив со слабой агломерацией модель должна уловить связь между начальными параметрами частиц порошка металла и скоростями реагирования и движения частиц в потоке газов, оттекающих от поверхности горения. Иерархия времен упомянутых процессов будет управлять реализацией тепловыделения на определенном расстоянии от поверхности горения, соответственно, управлять градиентом температуры и тепловым потоком из газовой фазы к поверхности топлива и в итоге скоростью газификации (она же скорость горения). Весьма полезны для валидации моделей критические эффекты горения, например погасание. Однако в настоящее время соответствующие экспериментальные данные крайне скудны.

Список источников

1. Иванов Н.Н., Иванов А.Н. Приборы и установки контактной диагностики и их использование в исследовании высокотемпературных двухфазных потоков // Физика горения и взрыва. 1991. Т. 27, № 6. С. 87–101.

2. Глотов О.Г., Зарко В.Е., Карасев В.В. Проблемы и перспективы изучения агломерации и эволюции агломератов методом отборов // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 1. С. 161–172.
3. Глотов О.Г., Зырянов В.Я. Конденсированные продукты горения алюминизированных топлив. I. Методика исследования эволюции частиц дисперсной фазы // Физика горения и взрыва. 1995. Т. 31, № 1. С. 74–80.
4. Korotkikh A.G., Glotov O.G., Arkhipov V.A., Zarko V.E., Kiskin A.B. Effect of iron and boron ultrafine powders on combustion of aluminized solid propellants // Combustion and Flame. 2017. V. 178. P. 195–204.
5. Петрянов И.В., Козлов В.И., Басманов П.И., Огородников Б.И. Волокнистые фильтрующие материалы ФП. М. : Знание, 1968. 78 с.
6. Pang W., De Luca L.T., Fan X., Glotov O.G., Zhao F. Boron-Based Fuel-Rich Propellant: Properties, Combustion, and Technology Aspects. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2019. 323 p.
7. Glotov O.G., Poryazov V.A., Surodin G.S., Sorokin I.V., Krainov D.A. Combustion features of boron-based composite solid propellants // Acta Astronaut. 2022. V. 204. P. 11–24. doi: 10.1016/j.actaastro.2022.12.024 2023.
8. Попок В.Н., Вандель А.П., Колесников А.Ю. Исследование горения перхлоратных металлизированных композиций, содержащих соли динитрамида // Бутлеровские сообщения. 2013. Т. 36, № 11. С. 58–66.
9. Куценогий К.П. Изучение физико-химических характеристик мощного аэрозольного облака : дис. ... канд. техн. наук. Новосибирск, 1970. 144 с.
10. Теплотворная способность горючих материалов // Studme.org. 2021. URL: https://studme.org/35536/tovarovedenie/teplotvornaya_sposobnost_goryuchih_materialov (дата обращения: 22.04.2024).
11. Бобрышев В.П., Лисица В.Д., Спиридонов Ф.Ф. Двухфракционная модель слабонервновесного двухфазного течения. Качественная теория коагуляции и осаждения *k*-фазы // Макроскопическая кинетика, химическая и магнитная газодинамика : тез. докл. всесоюз. школы-семинара. Томск–Красноярск : Изд-во Том. ун-та, 1991. Т. 1. С. 11–12.
12. Fedotova T.D., Glotov O.G., Zarko V.E. Application of Cerimetric Methods for Determining the Metallic Aluminum Content in Ultrafine Aluminum Powders // Propellants, Explosives, Pyrotechnics. 2007. V. 32 (2). P. 160–164.
13. Zarko V.E., Glotov O.G. Formation of Al oxide particles in combustion of aluminized condensed systems (Review) // Science and Technology of Energetic Materials. 2013. V. 74 (6). P. 139–143.
14. Глотов О.Г., Белоусова Н.С., Сурудин Г.С. Горение крупных частиц-агломератов алюминия в воздухе. I. Методика исследования, времена горения и характеристики финальных оксидных частиц // Физика горения и взрыва. 2025. Т. 61. (В печати).
15. Dreizin E.L. On the Mechanism of Asymmetric Aluminum Particle Combustion // Combust. Flame. 1999. V. 117. P. 841–850.
16. Jiang Y., Yilmaz N.E.D., Barker K.P., Baek J., Xia Y., Zheng X. Enhancing Mechanical and Combustion Performance of Boron/Polymer Composites via Boron Particle Functionalization // ACS Applied Materials and Interfaces. 2021. V. 13 (24). P. 28908–28915. doi: 10.1021/acsami.1c06727.

References

1. Ivanov N.N., Ivanov A.N. (1991) Instruments and apparatus for contacting diagnostics and their application in the investigation of high-temperature two-phase flows. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 27(6). pp. 729–741.

2. Glotov O.G., Zarko V.E., Karasev V.V. (2000) Problems and prospects of investigating the formation and evolution of agglomerates by the sampling method. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 36(1). pp. 146–156.
3. Glotov O.G., Zyryanov V.Ya. (1995) Condensed combustion products of aluminized propellants. I. A technique for investigating the evolution of disperse-phase particles. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 31(1). pp. 72–78.
4. Korotkikh A.G., Glotov O.G., Arkhipov V.A., Zarko V.E., Kiskin A.B. (2017) Effect of iron and boron ultrafine powders on combustion of aluminized solid propellants. *Combustion and Flame*. 178. pp. 195–204.
5. Petryanov I.V., Kozlov V.I., Basmanov P.I., Ogorodnikov B.I. (1968) *Voloknistyye fil'truyushchiye materialy FP* [Fibrous filtering materials FP]. Moscow: Znanie.
6. Pang W., De Luca L.T., Fan X., Glotov O.G., Zhao F. (2019) *Boron-Based Fuel-Rich Propellant: Properties, Combustion, and Technology Aspects*. CRC Press, Taylor & Francis Group.
7. Glotov O.G., Poryazov V.A., Surodin G.S., Sorokin I.V., Krainov D.A. (2022) Combustion features of boron-based composite solid propellants. *Acta Astronautica*. 204. DOI: 10.1016/j.actaastro.2022.12.024 2023.
8. Popok V.N., Vandel' A.P., Kolesnikov A.Yu. (2013) Issledovaniye goreniya perkhloratnykh metallizirovannykh kompozitsiy, soderzhashchikh soli dinitramida [Investigation of the combustion of perchlorate metallized compositions containing dinitramide salts.]. *Butlerovskkiye soobshcheniya*. 36(11). pp. 58–66.
9. Kutsenogii K.P. (1970) *Izucheniye fiziko-khimicheskikh kharakteristik moshchnogo aerol'noy oblaka* [Study of the physico-chemical characteristics of a powerful aerosol cloud]. Dissertation. Voevodsky Institute of Chemical Kinetics and Combustion, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences.
10. Teplotvornaya sposobnost' goryuchikh materialov [Calorific value of combustible materials]. URL: https://studme.org/35536/tovarovedenie/teplotvornaya_sposobnost_goryuchih_materialov (date of application: 19.05.2024).
11. Bobryshev V.P., Lisitsa V.D., Spiridonov F.F. (1991) Dvukhfrazionnaya model' slabone-ravnovesnogo dvukhfaznogo techeniya. Kachestvennaya teoriya koagulyatsii i osazhdeniya k-fazy [A two-fraction model of a weakly nonequilibrium two-phase flow. Qualitative theory of coagulation and condensed-phase deposition]. *Abstracts of the All-Union School-Seminar. Tomsk–Krasnoyarsk. Tomsk: Tomsk State University*. pp. 11–12.
12. Fedotova T.D., Glotov O.G., Zarko V.E. (2007) Application of cerimetric methods for determining the metallic aluminum content in ultrafine aluminum powders. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*. 32(2). pp. 160–164.
13. Zarko V.E., Glotov O.G. (2013) Formation of Al oxide particles in combustion of aluminized condensed systems (Review). *Science and Technology of Energetic Materials*. 74(6). pp. 139–143.
14. Glotov O.G., Belousova N.S., Surodin G.S. (2025) Combustion of large particles-agglomerates of aluminum in the air. I. Research methodology, burning times and characteristics of final oxide particles. *Combustion, Explosion, and Shock Waves* (in print).
15. Dreizin E.L. (1999) On the mechanism of asymmetric aluminum particle combustion. *Combustion and Flame*. 117. pp. 841–850.
16. Jiang Y., Yilmaz N.E.D., Barker K.P., Baek J., Xia Y., Zheng X. (2021) Enhancing mechanical and combustion performance of boron/polymer composites via boron particle functionalization. *ACS Applied Materials and Interfaces*. 13(24). pp. 28908–28915. DOI: 10.1021/acsami.1c06727.

Сведения об авторах:

Порязов Василий Андреевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

Глотов Олег Григорьевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института химической кинетики и горения им. В.В. Воеводского Сибирского отделения РАН (Новосибирск, Россия). E-mail: glotov@kinetics.nsc.ru

Крайнов Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: a.krainov@ftf.tsu.ru

Крайнов Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: kraynov@tpu.ru

Сорокин Иван Владимирович – кандидат физико-математических наук, ведущий специалист Института химической кинетики и горения им. В.В. Воеводского Сибирского отделения РАН (Новосибирск, Россия). E-mail: sorokin@kinetics.nsc.ru

Суродин Григорий Сергеевич – специалист Института химической кинетики и горения им. В.В. Воеводского Сибирского отделения РАН (Новосибирск, Россия). E-mail: surodin83@yandex.ru

Information about the authors:

Poryazov Vasily A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

Glotov Oleg G. (Candidate of Physics and Mathematics, Voevodsky Institute of Chemical Kinetics and Combustion Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: glotov@kinetics.nsc.ru

Krainov Aleksey Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: a.krainov@ftf.tsu.ru

Krainov Dmitriy A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kraynov@tpu.ru

Sorokin Ivan V. (Candidate of Physics and Mathematics, Voevodsky Institute of Chemical Kinetics and Combustion Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: sorokin@kinetics.nsc.ru

Surodin Grigory S. (Voevodsky Institute of Chemical Kinetics and Combustion Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: surodin83@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 06.05.2024; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 06.05.2024; accepted for publication 09.12.2024

Научная статья

УДК 533.6.011.5

doi: 10.17223/19988621/92/12

Слияние жидких капель в процессе агломерации на поверхности горения

Сергей Александрович Рашковский¹,
Кирилл Владимирович Костюшин²,
Константин Николаевич Жильцов³, Иван Владимирович Еремин⁴

¹ *Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

^{1, 2, 3, 4} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *rash@ipmnet.ru*

² *kostushink@niipmm.tsu.ru*

³ *konstantin@niipmm.tsu.ru*

⁴ *iveremin@niipmm.tsu.ru*

Аннотация. При горении высокоэнергетических смесевых композиций на их поверхности образуются конгломераты из спекшихся частиц алюминия. В случае плавления контактирующие частицы сливаются, образуя агломерат. В работе предложена методика моделирования слияние жидких капель на основе метода SPH. Проведено численное моделирования процессов слияния 2, 3 и 2 000 сферических капель. Получены функции плотности распределения агломератов по размерам. Показано, что сначала сливаются капли, имеющие точки контакта с другими каплями. Далее важную роль играют нестационарные процессы, описывающие динамику изменения свободной поверхности.

Ключевые слова: математическое моделирование, поверхность горения, жидкие частицы, конгломераты, агломерация

Благодарности: Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект № 21-19-00541).

Для цитирования: Рашковский С.А., Костюшин К.В., Жильцов К.Н., Еремин И.В. Слияние жидких капель в процессе агломерации на поверхности горения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 144–158. doi: 10.17223/19988621/92/12

Original article

Merging of liquid droplets during agglomeration on a combustion surface

Sergei A. Rashkovskiy¹, Kirill V. Kostyushin²,
Konstantin N. Zhiltsov³, Ivan V. Eremin⁴

¹ *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation*

^{1, 2, 3, 4} *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ rash@ipmnet.ru

² kostushink@niipmm.tsu.ru

³ konstantin@niipmm.tsu.ru

⁴ iveremin@niipmm.tsu.ru

Abstract. When burning high-energy mixed compositions, conditions may arise under which the particles included in the conglomerate melt. In this case, the contacting molten particles merge under the action of surface tension forces and form an agglomerate. The paper proposes a technique for modeling the merging of liquid droplets during the process of agglomeration on the combustion surface. The technique is based on the use of the smoothed particle method (SPH). Problem similarity criteria are presented. Numerical modeling of the processes of merging 2, 3, and 2000 spherical drops was carried out. Mass distribution functions have been obtained. It is shown that the process of agglomeration of large structures consists of two stages. At the first stage, the merging of liquid drops occurs, which at the initial moment of time have points of contact with other drops. At the second stage, an important role is played by nonstationary processes that describe the dynamics of changes in the free surface, which in the general case depend on surface tension, viscosity, and density of the liquid.

Keywords: mathematical modeling, combustion products, boron particles, conglomerates, agglomeration

Acknowledgments: This work was partially supported by the Russian Scientific Foundation (project No. 21-19-00541).

For citation: Rashkovskiy, S.A., Kostyushin, K.V., Zhiltsov, K.N. Eremin, I.V. (2024) Merging of liquid droplets during agglomeration on a combustion surface. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 144–158. doi: 10.17223/19988621/92/12

Введение

Смесевые высокоэнергетические композиции (ВЭК) представляют собой высоконаполненные композиты, содержащие до 90 мас. % порошкообразных компонентов (горючих и окислителей). Горючим в таких составах служит также полимерное связующее, которое одновременно придает ВЭК необходимые физико-механические свойства. Для повышения энергетических характеристик ВЭК в их состав вводят алюминий, что приводит к существенному изменению процесса горения и структуры зоны горения, разделяющей исходное конденсированное вещество от двухфазных продуктов сгорания.

Эксперименты показывают, что процесс горения металлизированных ВЭК сопровождается интенсивным укрупнением частиц алюминия (агломерацией) в зоне горения ВЭК, толщина которой может достигать нескольких миллиметров. В результате поверхность горения покидают частицы, в десятки и сотни раз превышающие по размерам исходные частицы алюминия, входящие в состав ВЭК. Агломераты, обладая большой инерционностью, приводят к росту двухфазных потерь удельного импульса, а также могут выпадать на стенки камеры сгорания, увеличивая пассивную массу энергетической установки, а в некоторых случаях могут даже приводить к ее разрушению. По этой причине агломерация алюминия является важным процессом при горении металлизированных ВЭК.

В настоящее время накоплен большой экспериментальный материал по агломерации частиц алюминия и влиянию на этот процесс как параметров ВЭК, так и условий горения [1–7]. Агломерация связана с наличием в топливе и на его поверхности горения контактирующих частиц алюминия, которые при определенных условиях могут плавиться и объединяться в крупные капли – агломераты. Процесс агломерации алюминия является многостадийным; он начинается в конденсированной фазе ВЭК с инертного прогрева исходных частиц алюминия в тепловой волне и заканчивается горением агломератов в газовом потоке после их отрыва от поверхности горения топлива.

При нагреве k -фазы топлива происходит термическое разложение связующего и дисперсных компонентов, например перхлората аммония (ПХА). Одновременно с этим происходит плавление частиц алюминия, что приводит к образованию расплавленных контактирующих частиц (капель) алюминия. Под действием сил поверхностного натяжения эти капли сливаются, образуя более крупные капли – агломераты. Наряду с силами поверхностного натяжения, обеспечивающими связь между расплавленными частицами, на них действует отрывающая сила со стороны газообразных продуктов разложения компонентов ВЭК, оттекающих от поверхности горения. Если отрывающая сила становится больше силы, связывающей каплю с поверхностью горения (это происходит при увеличении размера агломерата и скорости оттекающих от поверхности горения газов), происходит отрыв капли (агломерата) от поверхности горения и ее унос в поток продуктов сгорания.

В отличие от экспериментальных работ, количество теоретических исследований, посвященных агломерации алюминия, значительно меньше. Сложность моделирования агломерации связана с большим количеством конкурирующих эффектов, оказывающих соизмеримое влияние на процесс, что не позволяет выделить какой-либо один ведущий механизм, управляющий процессом.

Существующие модели агломерации можно разделить на три группы:

1. Геометрические модели [8–12]. В основе этих моделей лежит исторически первая модель агломерации – «модель карманов» [8, 9], т.е. некоторых структурных единиц ВЭК, в пределах которых происходит слияние исходных частиц алюминия в агломераты. Хотя модель карманов предсказывает наблюдаемую экспериментально корреляцию размеров образующихся агломератов и размеров частиц ПХА, она не может объяснить зависимость размеров агломератов от скорости горения, давления и других факторов.

2. Статистические модели агломерации [13], в основе которых лежит метод Монте-Карло для моделирования структуры зоны горения ВЭК и процессов, происходящих в этой зоне. Хотя такие модели рассматривают процесс агломерации в динамике и позволяют получить зависимость агломератов от скорости горения и давления, они существенно упрощают происходящий процесс.

3. Метод прямого численного моделирования агломерации и процесса горения ВЭК [14–16], в основе которого лежит моделирование исходной структуры ВЭК [17] и последующее детальное описание поведения каждой отдельной частицы алюминия, начиная с k -фазы и заканчивая отрывом агломератов или конгломератов (не до конца слившихся частиц) от поверхности горения.

Как отмечено выше, первичным процессом образования агломератов является слияние расплавленных частиц алюминия под действием сил поверхностного натяжения. Этот процесс существенно зависит от структуры топлива, т.е. от дис-

персности порошкообразных компонентов (алюминия, ПХА и др.), а также от взаимного расположения частиц дисперсных компонентов и свойств расплава алюминия (вязкости и поверхностного натяжения).

Цель настоящей работы – моделирование начальной стадии агломерации – процесса слияния расплавленных частиц алюминия вблизи поверхности горения ВЭК с учетом ее структуры.

Физико-математическая постановка задачи

В начальный момент времени $t = 0$ расчетная область заполнена сферическими частицами диаметром d_i , где $i = 1, 2, \dots, N$, N – число исходных частиц алюминия в расчетной области. Диаметры частиц и координаты их центров $\mathbf{X}_i = [x, y, z]^T$ в общем случае задаются, исходя из реального состава ВЭК [17].

Предполагается, что процесс выгорания связующего и других горючих твердых компонентов ВЭК (например, ПХА и др.) прошел, а частицы алюминия под действием температуры перешли в жидкое состояние; таким образом, в области остаются только жидкие частицы алюминия. За счет влияния сил поверхностного натяжения контактирующие частицы сливаются друг с другом. Возникающий нестационарный колебательный процесс при слиянии контактирующих капель приводит к захвату близлежащих покоящихся частиц, что впоследствии приводит к образованию крупного агломерата. Необходимо рассчитать процесс слияния расплавленных частиц и определить спектр размеров образующихся агломератов.

Принимая расплав частиц алюминия несжимаемой жидкостью и пренебрегая влиянием массовых сил, задачу образования агломератов можно описывается системой уравнений, которая состоит из уравнения неразрывности и уравнения момента импульса:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}, \quad (2)$$

где μ – динамическая вязкость жидкости.

В качестве граничного условия на свободной поверхности жидкой частицы в начальный момент времени задаются динамические условия равенства нормального напряжения сумме внешнего и капиллярного давлений, а также отсутствия касательных напряжений. На границах расчетной области ставятся периодические граничные условия, что позволяет переносить результаты расчетов системы с конечным числом частиц на систему с очень большим (теоретически бесконечным) числом частиц.

В качестве начальных условий во всей расчетной области задается нулевое распределение скорости

$$\vec{v} = 0. \quad (3)$$

Методика расчета

Для моделирования процесса агломерации жидких частиц применяется бессеточный лагранжевый метод SPH (метод сглаженных частиц) [18–22]. При проведении параметрических численных исследований использован программный пакет PreonLab [23].

Характерные времена протекающих в системе процессов и реальные размеры дисперсных частиц в составе высокоэнергетических смесевых композиций достаточно малы (миллисекунды, десятки микрон). Известно, что в процессе численного моделирования таких задач в размерных параметрах возникает ряд вычислительных трудностей, связанных с ошибками округления. В связи с этим расчеты проводились в безразмерной постановке.

В общем случае задача характеризуется следующими параметрами: ρ – плотность жидкости (кг/м^3); μ – вязкость жидкости (кг/(м·с)); σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости (кг/с^2); L – характерный пространственный масштаб задачи. Из этих параметров можно построить следующий безразмерный критерий:

$$K = \frac{\sigma \rho L}{\mu^2}.$$

Использование безразмерного критерия K позволяет свести задачу с очень малым характерным пространственным масштабом L для жидкости, характеризуемой параметрами (ρ, μ, σ) , к задаче с другим (большим) характерным пространственным масштабом L_1 , выбрав новые параметры жидкости $(\rho_1, \mu_1, \sigma_1)$ таким образом, чтобы сохранялось значение критерия:

$$\frac{\sigma_1 \rho_1 L_1}{\mu_1^2} = K.$$

При этом характерные безразмерные масштабы времени в исходной задаче (τ) и в моделируемой задаче с увеличенным пространственным масштабом (τ_1) будут одинаковыми ($\tau_1 = \tau$), а размерные масштабы времени t и t_1 (в секундах) связаны соотношениями

$$t = \frac{\rho L^2}{\rho_1 L_1^2} \frac{\mu_1}{\mu} t_1 \quad \text{или} \quad t = \frac{\mu \sigma_1}{\mu_1 \sigma} \frac{L}{L_1} t_1.$$

Результаты моделирования

На основе предложенной методики проведено численное моделирование процессов слияния двух и трех жидких капель диаметром 0.01 м. Размер дискретных SPH-частиц составлял 0.00015 м. В расчетах варьировали значения параметров вязкости, поверхностного натяжения и плотности жидкости: поверхностное натяжение вода–воздух = 0.072 Н/м, сдвиговая вязкость жидкости = 0.001 Па·с, объемная вязкость жидкости = 0.003 Па·с, плотность жидкости = 998.2 кг/м^3 . Необходимость задания значений сдвиговой и объемной вязкости связана с особенностью программного пакета PreonLab. Начальная конфигурация и эволюция формы двух жидких капель для одного из вариантов расчета показана на рис. 1. Результаты исследования процесса слияния двух жидких капель показали, что в процессе слияния наблюдаются колебания в направлении оси, проходящей через центры исходных капель. Амплитуда и частота таких колебаний, а также длительность процесса слияния зависят от вязкости жидкости. Аналогичные расчеты для двух капель неньютоновой жидкости были выполнены в работе [24]. Сравнение результатов рис. 1 с данными работы [24] показывает, что качественно они согласуются. Однако количественное сравнение этих результатов невозможно ввиду того, что в данной работе рассматривается ньютонова жидкость, а в работе [24] – неньютонова в приближении сплошной среды.

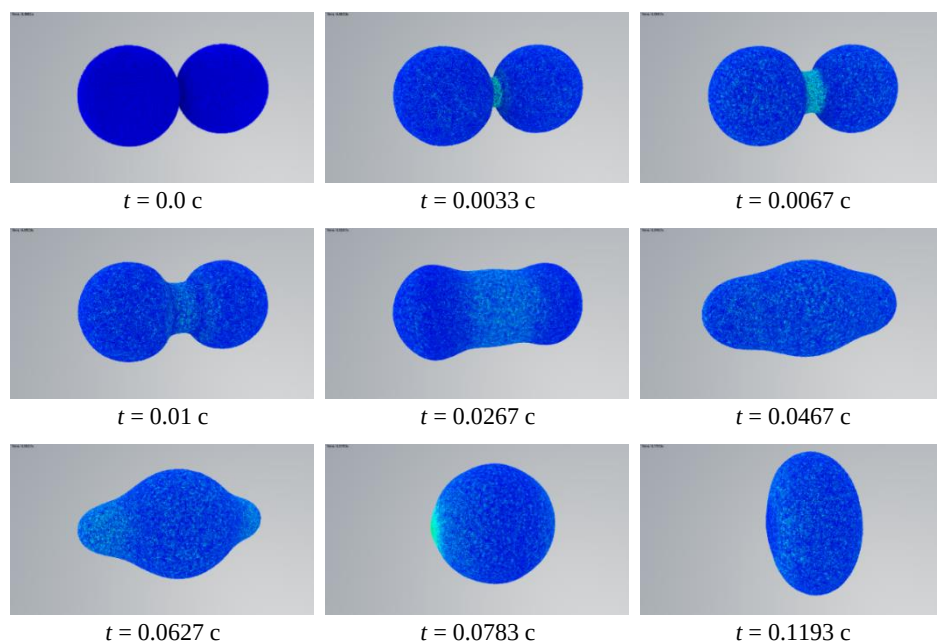


Рис. 1. Процесс слияния двух жидких капель диаметром 0.01 м
Fig. 1. Merging process for two liquid droplets with a diameter of 0.01 m

На рис. 2 показаны начальная конфигурация и эволюция формы в процессе агломерации трех жидких капель. Диаметр капель – 0.01 м., размер дискретных SPH-частиц – 0.00015 м, жидкость – вода. В данном случае наблюдается более сложная картина взаимодействия. На начальном этапе процесс изменения поверхности жидких частиц происходит аналогично процессу слияния двух жидких капель. Затем, с момента времени $t = 0.05$ с, центральная частица поглощается двумя крайними частицами с возникновением вектора скорости, направленного по диагонали относительно осей, проходящих через центры исходных капель. По мере объединения трех капель в одну колебательный процесс в жидкости приобретает хаотичный характер. Этот процесс сопровождается активным изменением формы свободной поверхности жидкости.

На рис. 3 представлены результаты численного моделирования агломерации 2 000 жидких капель одинакового начального диаметра 0.01 м. Размер расчетной области составлял $0.2 \times 0.2 \times 0.2$ м. Исходные капли случайным образом размещались в этом объеме. Часть частиц располагалась отдельно от других, а часть контактировала друг с другом. Для этого использовался алгоритм распределения из [17]. Размер частиц (в решателе SPH) составлял 0.00015 м. Свойства частиц аналогичны предыдущим расчетам.

Как показал анализ результатов моделирования, в общем случае процесс агломерации таких структур можно разделить на два этапа. На первом этапе происходит слияние жидких капель, имеющих в начальный момент времени точки контакта с другими каплями. В процессе слияния этих капель наблюдается образование протяженных жидких структур, в которых происходят колебания жидкости. Такие колебания создают новые точки контакта и включают в процесс агломера-

ции новые капли. На этом этапе важную роль играют нестационарные процессы, связанные с изменением формы жидких капель, которые в общем случае зависят от поверхностного натяжения, вязкости и плотности жидкости.

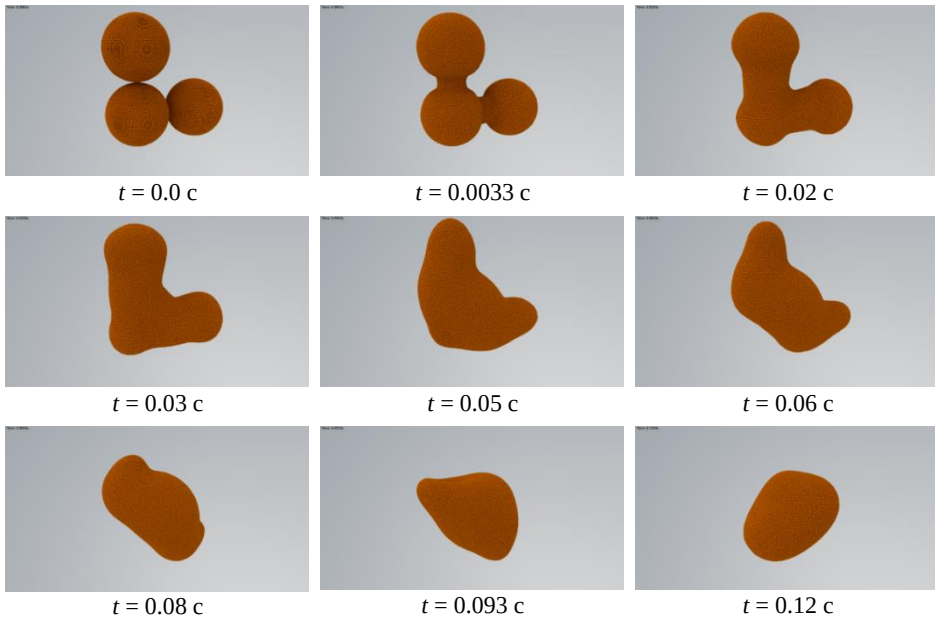


Рис. 2. Процесс слияния трех жидких капель диаметром 0.01 м
Fig. 2. Merging process for three liquid droplets with a diameter of 0.01 m

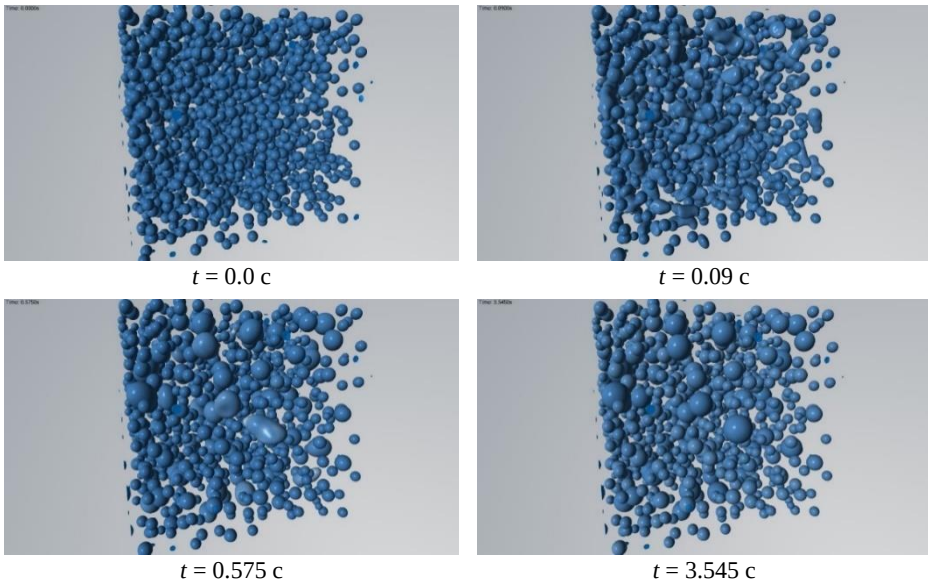


Рис. 3. Процесс слияния 2 000 жидких капель с начальным диаметром 0.01 м
Fig. 3. Merging process for 2000 liquid droplets with a diameter of 0.01 m

В дальнейшем происходит утончение перемычек, связывающих отдельные элементы жидкой структуры, их разрыв и образование новой системы капель – агломератов, которые не взаимодействуют друг с другом, а их поверхности совершают затухающие колебания, в результате которых капли приобретают сферическую форму.

После завершения расчетов был проведен анализ образовавшихся агломератов, определены их размеры и построена функция плотности распределения агломератов по размерам (рис. 4). На графиках рис. 4 также представлены результаты дополнительных расчетов с целью выяснения влияния свойств жидкости на спектр размеров образующихся агломератов для разных жидкостей (с разными вязкостями, плотностями и коэффициентами поверхностного натяжения) при одинаковых размерах исходных частиц и одинаковой исходной структуре смеси. В частности, были проведены расчеты с жидкостями, базовые свойства которых соответствовали свойствам воды, но у которых изменялся только параметр вязкости в сторону увеличения в 10 и в 100 раз, а также с расплавом алюминия при температурах 800°C и 1 000°C. Определялись две функции распределения – числовая и массовая. Числовая функция распределения вычислялась по формуле

$$f_N = \frac{\Delta N(D, D + \Delta D)}{N_{\Sigma} \Delta D},$$

а массовая – по формуле

$$f_M = \frac{\sum_{D < D_i < D + \Delta D} D_i^3}{\Delta D \sum_{D_i=0}^{\infty} D_i^3},$$

где $\Delta N(D, D + \Delta D)$ – число частиц (агломератов), имеющих диаметр в диапазоне $[D, D + \Delta D)$; ΔD – шаг по диаметру, который выбирался, как $\Delta D = (D_{max} - D_{min})/M$; D_{max} и D_{min} – максимальный и минимальный диаметры частиц соответственно, полученные в данном расчете; M – число отрезков, на которые разбивается весь диапазон диаметров (параметр дискретизации, обычно $M = 10 \dots 20$); N_{Σ} – общее число полученных частиц (агломератов); D_i – диаметр i -й частицы (агломерата).

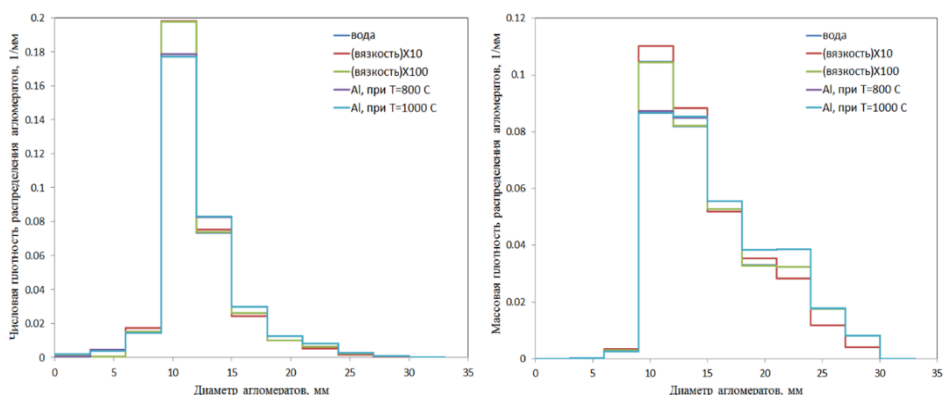


Рис. 4. Функции плотности распределения по размерам агломератов, образующихся при слиянии системы одинаковых капель, случайно распределенных в пространстве с объемной концентрацией 13%

Fig. 4. Density functions of the size distribution of agglomerates forming by merging of a system of similar droplets randomly distributed in the space with a volume concentration of 13%

Из рис. 4 видно, что образующиеся агломераты имеют широкий спектр размеров, несмотря на то что все исходные частицы в смеси имели одинаковый начальный размер. Таким образом, в процессе агломерации происходит случайное слияние различного числа исходных капель, которое определяется структурой исходной смеси, т.е. случайным взаимным расположением исходных капель в пространстве. Таким образом, утверждение о том, что агломерация алюминия при горении ВЭК происходит внутри некоторых «карманов», образованных частицами ПХА, оказывается неверным: агломерация и формирование широкого спектра размеров агломератов происходит даже при отсутствии частиц ПХА, т.е. при отсутствии «карманов». Добавление частиц ПХА в исходную смесь приведет к изменению ее структуры, а значит, к изменению количества контактирующих частиц, что может дополнительно повлиять на спектр размеров образующихся агломератов. Как видно из рис. 4, для всех рассмотренных вариантов качественный вид функции распределения агломератов по размерам не отличается, а количественные отличия незначительны. Это свидетельствует, что вид жидкости (ее плотность, вязкость и поверхностное натяжение) слабо влияет на спектр размеров образующихся агломератов, но существенно – на продолжительность процесса формирования агломератов.

На следующем этапе исследований моделирование образования агломератов проводилось с учетом начального распределения жидких частиц алюминия по методике [17], в которой моделировалась структура ВЭК: задавались содержание в ВЭК алюминия и ПХА и распределение их частиц по размерам, а затем проводилось размещение частиц алюминия и ПХА в заданной области пространства. Полученные координаты распределения частиц алюминия использовались в качестве начального распределения при расчете образования агломератов. Далее приведены результаты расчетов агломерации для ВЭК, построенной по модели [17], в которой использовались монодисперсные порошки алюминия и ПХА.

На рис. 5 показаны начальное распределение частиц алюминия в объеме ВЭК и процесс агломерации жидких частиц алюминия диаметром $d_{Al} = 30$ мкм. На основании предварительного расчета расположения частиц алюминия по модели [17] частицы ПХА имели размеры $d_{ПХА} = 150$ мкм, объемная доля частиц ПХА в ВЭК составляла 58%, а объемная доля частиц алюминия – 12%. Размер расчетной области составлял $750 \times 750 \times 750$ мкм. Расчеты проведены для расплава алюминия при температуре 800 К (поверхностное натяжение среды алюминий–воздух – 0.85 Н/м, вязкость – 0.002 Па·с, плотность – 2 700 кг/м³). По результатам расчетов определялась функция плотности распределения по размерам образовавшихся агломератов. Для варианта расчета, показанного на рис. 5, функция плотности распределения по размерам образовавшихся агломератов приведена на рис. 6.

Для сравнения на рис. 7 показаны начальное распределение и процесс агломерации жидких частиц алюминия для монодисперсных порошков алюминия и ПХА в ВЭК при $d_{Al} = 30$ мкм, $d_{ПХА} = 100$ мкм и тех же объемных долях порошков в ВЭК. В данном случае размер расчетной области составлял $700 \times 700 \times 700$ мкм. Соответствующие числовая и массовая функции плотности распределения по размерам образовавшихся агломератов приведены на рис. 8.

Сравнение рис. 4, 6 и 8 показывает, что при той же объемной доле порошкообразного алюминия наличие частиц ПХА принципиально изменяет функцию плотности распределения по размерам образующихся агломератов.

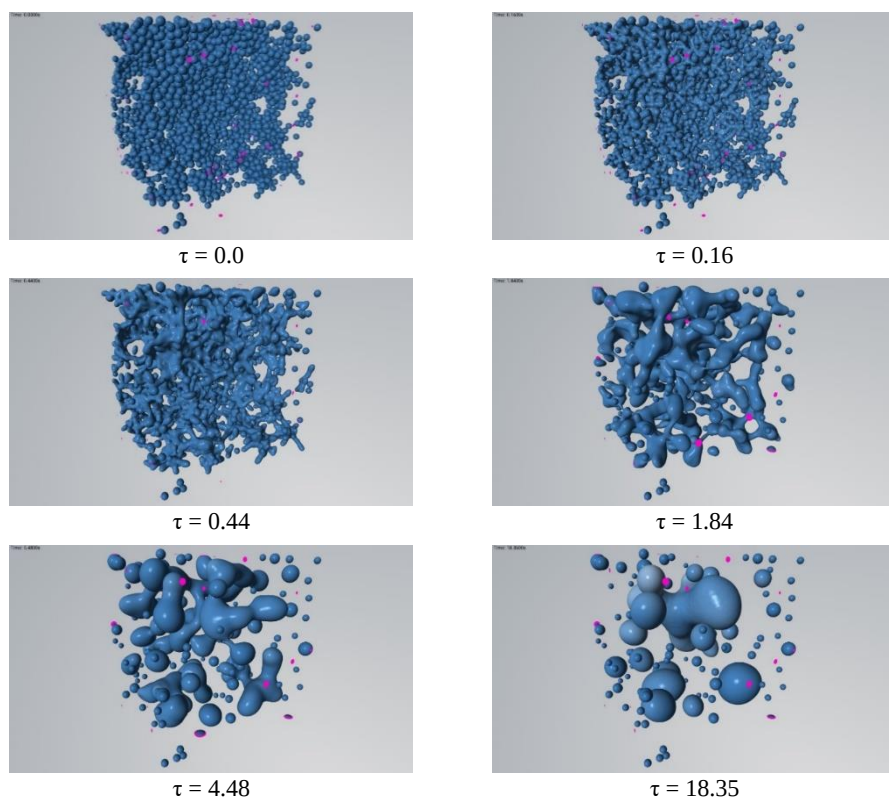


Рис. 5. Процесс слияния жидких капель алюминия на поверхности горения ВЭК, время обезразмерено

Fig. 5. Merging process for liquid droplets of aluminum on the surface of high-energy composition burning, the time is nondimensionalized

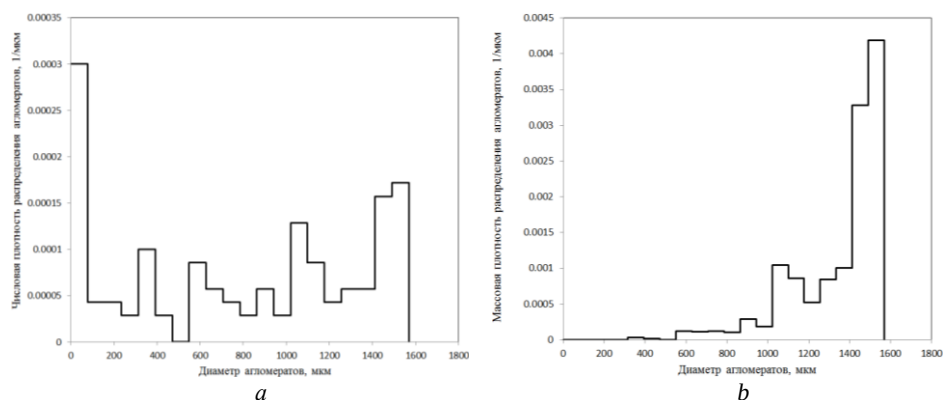


Рис. 6. Функции плотности распределения по размерам агломератов, образующихся на поверхности горения ВЭК: *a* – числовая функция плотности распределения, *b* – массовая функция плотности распределения

Fig. 6. Density functions of the size distribution of agglomerates forming on the surface of high-energy composition burning; (a) numerical density function and (b) mass density function

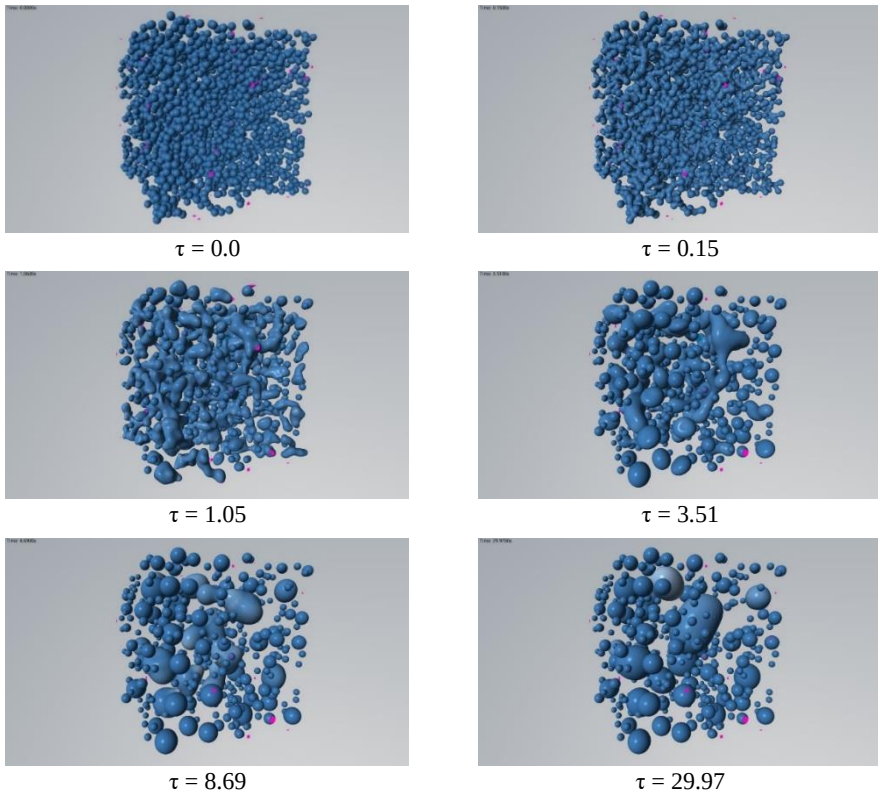


Рис. 7. Процесс слияния жидких капель алюминия на поверхности горения ВЭК, время обезразмерено

Fig. 7. Merging process for liquid droplets of aluminum on the surface of high-energy composition burning, the time is nondimensionalized

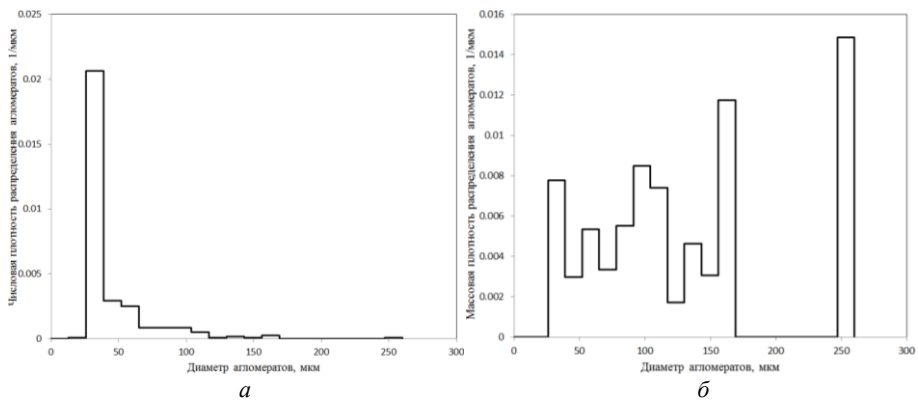


Рис. 8. Функции плотности распределения по размерам агломератов, образующихся на поверхности горения ВЭК, *a* – числовая функция плотности распределения, *b* – массовая функция плотности распределения

Fig. 8. Density functions of the size distribution of agglomerates forming on the surface of high-energy composition burning; (*a*) numerical density function and (*b*) mass density function

Более того, как следует из рис. 6 и 8, изменение размеров частиц ПХА в ВЭК также приводит к существенному изменению распределения агломератов по размерам, а следовательно, и к изменению среднемассового размера агломератов. Так, среднемассовые размеры агломератов, рассчитанные по функциям распределения составляют $D_{43} = 1\,350$ мкм для $d_{\text{ПХА}} = 150$ мкм и $D_{43} = 130$ мкм для $d_{\text{ПХА}} = 100$ мкм. Отметим, что в данной работе не учитывались отрывающие аэродинамические силы, действующие на агломераты, находящиеся на поверхности горения ВЭК, со стороны оттекающих газообразных продуктов горения ВЭК, которые уносят крупные агломераты быстрее, чем мелкие, и тем самым ограничивают рост агломератов. Поэтому с учетом отрывающей аэродинамической силы размеры отрывающихся от поверхности горения агломератов будут меньше, чем приведенные выше, особенно для первого варианта, что несколько уменьшит разницу между рассмотренными вариантами расчета.

Заключение

В настоящей работе впервые выполнено численное моделирование процесса формирования агломератов в системе, состоящей из большого числа контактирующих жидких частиц (капель). Предложена методика моделирования слияния жидких капель в процессе агломерации. Методика основана на использовании метода сглаженных частиц (SPH). Представлены критерии подобия задачи. Проведено численное моделирования процессов слияния 2, 3 и 2 000 сферических капель, а также агломерации частиц алюминия. Получены функции распределения агломератов по размерам. Показано, что процесс агломерации крупных структур состоит из двух этапов. На первом этапе происходит слияние жидких капель, имеющих в начальный момент времени точки контакта с другими каплями. На втором этапе важную роль играют нестационарные процессы, описывающие динамику изменения свободной поверхности, которые в общем случае зависят от поверхностного натяжения, вязкости и плотности жидкости.

Отметим, что предложенная модель является неким промежуточным вариантом между геометрическими моделями (моделью карманов) и методом прямого численного моделирования агломерации [14, 15]. Рассмотренная модель учитывает структуру ВЭК в качестве определения начального распределения расплавленных частиц алюминия. Течение расплавленных контактирующих частиц под действием сил поверхностного натяжения в ней рассматривается в динамике, что приводит к формированию широкого спектра размеров образующихся агломератов. Однако данная модель не учитывает отрывающие аэродинамические силы, что может приводить к некоторому завышению среднемассовых размеров агломератов по сравнению с реальными. Этот вопрос предполагается рассмотреть в дальнейших работах.

Список источников

1. Григорьев В.Г., Зарко В.Е., Куценогий К.П. Экспериментальное исследование агломерации частиц алюминия при горении конденсированных систем // Физика горения и взрыва. 1981. Т. 17, № 3. С.3–10.
2. Готов О.Г., Зырянов В.Я. Конденсированные продукты горения алюминизированных топлив. I. Методика исследования эволюции частиц дисперсной фазы // Физика горения и взрыва. 1995. Т. 31, № 1. С. 74–80.

3. Babuk V.A., Vasilyev V.A., Malakhov M.S. Condensed combustion products at the burning surface of aluminized solid propellant // *Journal of Propulsion and Power*. 1999. V. 15 (6). P. 783–793. doi: 10.2514/2.5497
4. Глотов О.Г. Конденсированные продукты горения алюминизированных топлив. IV. Влияние природы нитраминов на агломерацию и эффективность горения алюминия // *Физика горения и взрыва*. 2006. Т. 42, № 4. С. 78–92.
5. Бабук В.А. Свойства поверхностного слоя и закономерности горения металлизированных твердых топлив // *Физика горения и взрыва*. 2009. Т. 45, № 4. С. 156–165.
6. DeLuca L., Marchesi E., Spreafico M., Reina A., Maggi F., Rossettini L., ... & Kosowski B.M. Aggregation versus agglomeration in metallized solid rocket propellants // *International Journal of Energetic Materials and Chemical Propulsion*. 2010. V. 9 (1). P. 91–105. doi: 10.1615/IntJEnergeticMaterialsChemProp.v9.i1.60
7. Maggi F., Bandera A., De Luca L.T., Thoorens V., Trubert J.F., Jackson T.L. Agglomeration in solid rocket propellants: novel experimental and modeling methods // *Progress in propulsion Physics*. 2011. № 2. P. 81–98. doi: 10.1051/eucass/201102081
8. Григорьев В.Г., Зарко В.Е., Куценогий К.П. Модель агломерации алюминия при горении смесевых композиций // *Физика горения и взрыва*. 1981. Т. 17, № 4. С. 9–17.
9. Cohen N.S. A Pocket model for aluminum agglomeration in composite propellants // *AIAA Journal*. 1983. V. 21 (5). P. 720–725. doi: 10.2514/3.8139
10. Gallier S., Yiao M. Aluminum agglomeration model calibration with improved experimental data // *Journal of Propulsion and Power*. 2013. V. 29 (5). P. 1252–1255. doi: 10.2514/1.B34738
11. Maggi F., DeLuca L.T., Bandera A. Pocket model for aluminum agglomeration based on propellant microstructure // *AIAA Journal*. 2015. V. 53 (11). P. 3395–3403. doi: 10.2514/1.J053992
12. Глотов О.Г., Сорокин И.В., Черемисин А.А. Карманная модель агломерации алюминия с тетраэдрической ячейкой для смесевых топлив // *Физика горения и взрыва*. 2023. Т. 59, № 6. С. 91–97. doi: 10.15372/FGV2022.9258
13. Рашковский С.А. Статистическое моделирование агломерации алюминия при горении гетерогенных конденсированных смесей // *Физика горения и взрыва*. 2005. Т. 41, № 2. С. 62–74.
14. Rashkovskiy S.A. Direct Numerical Simulation of Boron Particle Agglomeration in Combustion of Boron-Containing Solid Propellants // *Combustion Science and Technology*. 2017. V. 189 (8). P. 1277–1293. doi: 10.1080/00102202.2017.1294586
15. Rashkovskiy S.A. Direct numerical simulation of nano and conventional aluminum agglomeration in composite solid propellant combustion // *International Journal of Energetic Materials and Chemical Propulsion*. 2009. V. 8 (1). P. 1–17. doi: 10.1615/IntJEnergeticMaterialsChemProp.v8.i1.10
16. Jackson T.L., Buckmaster J. Heterogeneous propellant combustion // *AIAA Journal*. 2002. V. 40 (6). P. 1122–1130. doi: 10.2514/2.1761
17. Рашковский С.А. Структура гетерогенных конденсированных смесей // *Физика горения и взрыва*. 1999. Т. 35, № 5. С. 65–74.
18. Koschier D. et al. Smoothed particle hydrodynamics techniques for the physics based simulation of fluids and solids // *Eurographics. Tutorial*, 2019. 41 p.
19. Monaghan J., Thompson M., Hourigan K. Simulation of free surface flows with SPH // *J. of Comput. Phys*. 1994. V. 110. P. 399–406. doi: 10.1006/jcph.1994.1034
20. Solenthaler B., Pajarola R. Predictive-corrective incompressible SPH // *ACM Transactions on Graphics*. 2009. V. 28 (3). P. 1–6. doi: 10.1145/1531326.1531346
21. Peer A., Ihmsen M., Cornelis J., Teschner M. An Implicit Viscosity Formulation for SPH Fluids // *ACM Transactions on Graphics*. 2015. V. 34 (4). P. 1–10. doi: 10.1145/2766925
22. Becker M., Teschner M. Weakly compressible SPH for free surface flows // *ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*. 2007. P. 1–8, 18, 25, 26, 37.
23. PreonLab 4.2.4. Manual // FIFTY2 Technology GmbH. August, 2020. 179 p.

24. Bazesefidpar K., Brandt L., Tammisola O. Numerical simulation of the coalescence-induced polymeric droplet jumping on superhydrophobic surfaces // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2022. V. 307. Art. 104872. doi: 10.1016/j.jnnfm.2022.104872

References

1. Grigor'ev V.G., Zarko V.E., Kutsenogii K.P. (1981) Experimental investigation of the agglomeration of aluminum particles in burning condensed systems. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 17. pp. 245–251. DOI: 10.1007/BF00751292.
2. Glotov O.G., Zyryanov V.Y. (1995) Condensed combustion products of aluminized propellants. 1. A technique for investigating the evolution of disperse-phase particles. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 31. pp. 72–78. DOI: 10.1007/BF00755960.
3. Babuk V.A., Vasilyev V.A., Malakhov M.S. (1999) Condensed combustion products at the burning surface of aluminized solid propellant. *Journal of Propulsion and Power*. 15(6). pp.783–793. DOI: 10.2514/2.5497.
4. Glotov O.G. (2006) Condensed combustion products of aluminized propellants. IV. Effect of the nature of nitramines on aluminum agglomeration and combustion efficiency. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 42. pp.436–449. DOI: 10.1007/s10573-006-0073-z.
5. Babuk V.A. (2009) Properties of the surface layer and combustion behavior of metallized solid propellants. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 45. pp.486–494. DOI: 10.1007/s10573-009-0059-8.
6. DeLuca L., Marchesi E., Spreafico M., Reina A., Maggi F., Rossetini L., ... Kosowski B.M. (2010) Aggregation versus agglomeration in metallized solid rocket propellants. *International Journal of Energetic Materials and Chemical Propulsion*. 9(1). pp. 91–105. DOI: 10.1615/IntJEnergeticMaterialsChemProp.v9.i1.60.
7. Maggi F., Bandera A., De Luca L.T., Thoorens V., Trubert, J.F., Jackson T.L. (2011) Agglomeration in solid rocket propellants: novel experimental and modeling methods. *Progress in Propulsion Physics*. 2. pp.81–98. DOI: 10.1051/eucass/201102081.
8. Grigor'ev V.G., Kutsenogii K.P., Zarko V.E. (1981) Model of aluminum agglomeration during the combustion of a composite propellant. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 17. pp. 356–363. DOI: 10.1007/BF00761200.
9. Cohen N.S. (1983) A pocket model for aluminum agglomeration in composite propellants. *AIAA Journal*. 21(5). pp.720–725. DOI: 10.2514/3.8139.
10. Gallier S., Yiao M. (2013) Aluminum agglomeration model calibration with improved experimental data. *Journal of Propulsion and Power*. 29(5). pp. 1252–1255. DOI: 10.2514/1.B34738.
11. Maggi F., DeLuca L.T., Bandera A. (2015) Pocket model for aluminum agglomeration based on propellant microstructure. *AIAA Journal*. 53(11). pp. 3395–3403. DOI: 10.2514/1.J053992.
12. Glotov O.G., Sorokin I.V. & Cheremisin A.A. (2023) Pocket model with a tetrahedral cell for aluminum agglomeration in composite propellants. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 59. pp.752–758. DOI: 10.1134/S0010508223060114.
13. Rashkovskii S.A. (2005) Statistical simulation of aluminum agglomeration during combustion of heterogeneous condensed mixtures. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 41. pp. 174–184. DOI: 10.1007/s10573-005-0020-4.
14. Rashkovskiy S.A. (2017) Direct numerical simulation of boron particle agglomeration in combustion of boron-containing solid propellants. *Combustion Science and Technology*. 189(8). pp.1277–1293. DOI: 10.1080/00102202.2017.1294586.
15. Rashkovskiy S.A. (2009) Direct numerical simulation of nano and conventional aluminum agglomeration in composite solid propellant combustion. *International Journal of Energetic Materials and Chemical Propulsion*. 8(1). pp.1–17. DOI: 10.1615/IntJEnergeticMaterialsChemProp.v8.i1.10.
16. Jackson T.L., Buckmaster J. (2002) Heterogeneous propellant combustion. *AIAA Journal*. 40(6). pp. 1122–1130. DOI: 10.2514/2.1761.

17. Rashkovskii S.A. (1999) Structure of heterogeneous condensed mixtures. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 35. pp. 523–531. DOI: 10.1007/BF02674497.
18. Koschier D. et al. (2019) Smoothed particle hydrodynamics techniques for the physics based simulation of fluids and solids. *Eurographics*. Tutorial. p. 41
19. Monaghan J., Thompson M., Hourigan K. (1994) Simulation of free surface flows with SPH. *The Journal of Computational Physics*. 110. pp. 399–406. DOI: 10.1006/jcph.1994.1034.
20. Solenthaler B., Pajarola R. (2009) Predictive-corrective incompressible SPH. *ACM Transactions on Graphics*. 28(3). pp.1–6. DOI: 10.1145/1531326.1531346.
21. Peer A., Ihmsen M., Cornelis J., Teschner M. (2015) An Implicit Viscosity Formulation for SPH Fluids. *ACM Transactions on Graphics*. 34(4). pp.1–10. DOI: 10.1145/2766925
22. Becker M., Teschner M. (2007) Weakly compressible SPH for free surface flows. *ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*. pp. 1–8, 18, 25, 26, 37.
23. PreonLab 4.2.4. Manual // *FIFTY2 Technology GmbH*. August, 2020.
24. Bazesefidpar K., Brandt L., Tammisola O. (2022) Numerical simulation of the coalescence-induced polymeric droplet jumping on superhydrophobic surfaces. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 307. pp. 104872. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2022.104872.

Сведения об авторах:

Рашковский Сергей Александрович – главный научный сотрудник лаборатории термодинамики и горения Института проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия), ведущий научный сотрудник лаборатории проектирования рабочих элементов ракетно-космической техники Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: rash@ipmnet.ru

Костюшин Кирилл Владимирович – младший научный сотрудник лаборатории 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

Жильцов Константин Николаевич – научный сотрудник лаборатории 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: konstantin@niipmm.tsu.ru

Еремин Иван Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Rashkovskiy Sergei A. (Doctor of Physics and Mathematics, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation; Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rash@ipmnet.ru

Kostyushin Kirill V. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

Zhiltsov Konstantin N. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Konstantin@niipmm.tsu.ru

Eremin Ivan V. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 07.12.2023; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 07.12.2023; accepted for publication 09.12.2024

Научная статья

УДК 533.95, 533.9.072, 536.46

doi: 10.17223/19988621/92/13

Определение условий для формирования устойчивого дугового разряда в электроплазменном устройстве при вторичном пробое разрядного промежутка

Евгений Юрьевич Степанов¹, Александр Николаевич Ищенко²,
Виктор Владимирович Буркин³, Егор Романович Метелица⁴,
Илья Михайлович Бирюков⁵, Антон Юрьевич Саммель⁶

^{1, 2, 3, 4, 5, 6} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ stepanov_eu@mail.ru

² ichan@niipmm.tsu.ru

³ v.v.burkin@mail.ru

⁴ 44metelitsa@gmail.com

⁵ ilya.biryukov.2072@mail.ru

⁶ anton_sammel@mail.ru

Аннотация. Представлены результаты серии экспериментов с применением электроплазменного устройства. Описана методика изготовления экспериментальных образцов. Рассмотрены особенности образования вторичного пробоя в продуктах электрического взрыва медной проволоочки длиной от 10 до 50 мм. Проведена серия экспериментальных исследований по поиску минимального зарядного напряжения емкостного накопителя энергии, при котором возникает вторичный пробой разрядного промежутка при электрическом взрыве медной проволоочки.

Ключевые слова: электрический взрыв проволоочки, вторичный пробой, электроплазменное устройство

Благодарности: Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России FSWM-2020-0032.

Для цитирования: Степанов Е.Ю., Ищенко А.Н., Буркин В.В., Метелица Е.Р., Бирюков И.М., Саммель А.Ю. Определение условий для формирования устойчивого дугового разряда в электроплазменном устройстве при вторичном пробое разрядного промежутка // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 159–168. doi: 10.17223/19988621/92/13

Original article

Specification of conditions for stable arc discharge formation in an electro-plasma device during secondary breakdown in a discharge gap

Evgeniy Yu. Stepanov¹, Aleksandr N. Ishchenko², Viktor V. Burkin³,
Egor R. Metelitsa⁴, Il'ya M. Biryukov⁵, Anton Yu. Sammel⁶

^{1, 2, 3, 4, 5, 6} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ stepanov_eu@mail.ru

² ichan@niipmm.tsu.ru

³ v.v.burkin@mail.ru

⁴ 44metelitsa@gmail.com

⁵ ilya.biryukov.2072@mail.ru

⁶ anton_sammel@mail.ru

Abstract. This paper discusses the features of the occurrence of secondary breakdown in the products of electrical explosion of copper wires of different lengths in an electro-plasma device. The experiments are performed using a high-voltage electrical installation at the Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University. The design and overall scheme of the high-voltage installation are described in this paper. The methodology for producing a set of experimental samples with copper wires of different lengths and the results of experiments involving the produced samples are presented. The analysis of the obtained electrophysical parameters of the operating electro-plasma device with and without secondary breakdown is performed on the basis of the products of the wire explosion. The analysis of the experimental results allowed one to determine the minimum values of charging voltage of the capacitive energy storage device which are required for the occurrence of secondary breakdown with arc formation in discharge gaps of different lengths. The determined characteristics is experimentally studied depending on the parameters of the high-voltage installation. The obtained dependences can be used when developing new electro-plasma devices employed under cramped conditions in the charging chambers of ballistic installations using electrothermal-chemical throwing technology.

Keywords: electrical explosion of wires, secondary breakdown, electro-plasma device

Acknowledgments: These results were obtained within the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation FSWM-2020-0032.

For citation: Stepanov, E.Yu., Ishchenko, A.N., Burkin, V.V., Metelitsa, E.R., Biryukov, I.M., Sammel', A.Yu. (2024) Specification of conditions for stable arc discharge formation in an electro-plasma device during secondary breakdown in a discharge gap. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 159–168. doi: 10.17223/19988621/92/13

Введение

Одним из эффективных способов инициирования зарядов баллистических установок является электротермохимическая (ЭТХ) технология. В основе ЭТХ тех-

нологии лежит применение электроплазменного воздействия на метательные заряды баллистических установок [1–4]. Высокая температура электроразрядной плазмы ($\sim 10^4$ К) позволяет существенно сократить период зажигания зарядов и, что наиболее важно, компенсировать их температурный градиент. Для реализации ЭТХ технологии разработано несколько вариантов электроплазменных устройств (ЭПУ) [5, 6]. Ключевым узлом ЭПУ является электровзрыв проводника или системы проводников, инициирующих разряд емкостного источника энергии, с последующим вторичным пробоем разрядного промежутка и образованием дугового разряда. Образующиеся при этом высокотемпературные продукты разряда воздействуют на заряд установленной в камере баллистической установки и инициируют его.

Цель настоящей работы – определение минимального уровня зарядного напряжения емкостного источника энергии, необходимого для устойчивого формирования дугового разряда ЭПУ, установленного в камере баллистической установки, в зависимости от длины разрядного промежутка.

Экспериментальная установка

Эксперименты проводились на высоковольтной электрической установке НИИ ПММ ТГУ. Принципиальная схема и внешний вид высоковольтной установки представлены на рис. 1.

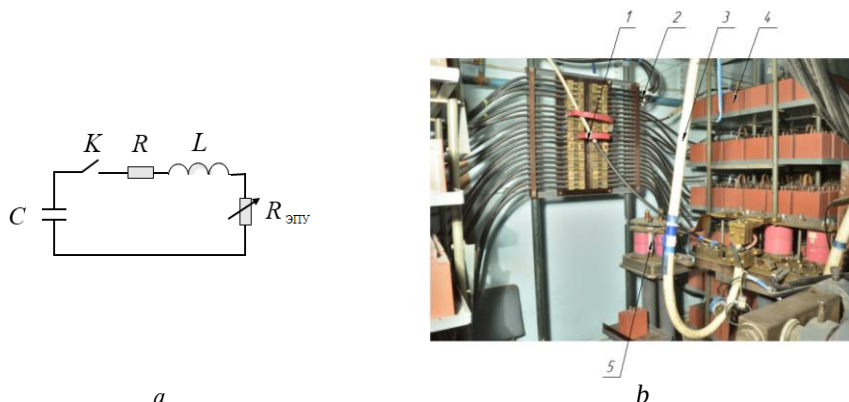


Рис. 1. Принципиальная схема (а) и общий вид (б) высоковольтной электрической установки: C – ЕНЭ, K – коммутатор, R – омическое сопротивление цепи, L – индуктивность цепи, $R_{\text{ЭПУ}}$ – омическое сопротивление ЭПУ; 1 – силовой коллекторный узел, 2 – коаксиальный кабель, 3 – силовой коаксиальный кабель, соединяющий ЭПУ, 4 – секции ЕНЭ, 5 – вакуумный управляемый разрядник РВУ 47

Fig. 1. (a) Schematic diagram and (b) general view of a high-voltage electrical installation; C is the capacitive energy storage device, K is the commutator, R is the ohmic resistance of the circuit, L is the inductance of the circuit, $R_{\text{ЭПУ}}$ is the ohmic resistance of the electro-plasma device; 1, power collector unit; 2, coaxial cable; 3, coaxial power cable connecting the electro-plasma device; 4, sections of the capacitive energy storage device; and 5, controlled vacuum arrester RVU-47

В электрической установке в качестве накопителя энергии используется емкостной накопитель энергии (ЕНЭ), состоящий из отдельных секций конденсаторов типа К75-40, соединенных параллельно. Емкость каждой секции составляет 0.96 мФ.

Каждая секция может соединяться с остальными секциями с помощью коаксиального кабеля через силовой коллекторный узел. Соединяя нужное количество секций конденсаторов, можно формировать накопитель емкостью до 31.6 мФ с шагом 0.96 мФ. Заряжается сформированный емкостной накопитель с помощью зарядного блока до 5 000 В. Коммутация обеспечивается с использованием вакуумного управляемого разрядника РВУ 47. При проведении экспериментов измерялись следующие электрофизические параметры: ток в цепи и напряжение в разрядном промежутке. Ток в цепи измерялся с поясом Роговского (CWT-600) с относительной погрешностью измерения до 5%. Напряжения измерялись с помощью нескольких резистивно-емкостных делителей напряжения. Погрешность измерения делителей напряжения была определена с использованием импульсного лабораторного генератора напряжения и составляет не более 5%.

Подготовка исследуемых образцов

В качестве образцов, имитирующих ЭПУ, использовались медные проволоочки разной длины, припаянные к медным электродам. Каждый образец представлял собой медную проволоочку диаметром 0.29 мм с припаянными к обоим концам медными электродами диаметром 2.65 мм (рис. 2). Подготовка образцов с применением пайки позволяла лучше контролировать длину проволоочек и, соответственно, начальную длину формирующейся электроразрядной дуги. Электроды в дальнейшем закреплялись в ЭПУ винтовыми зажимами.

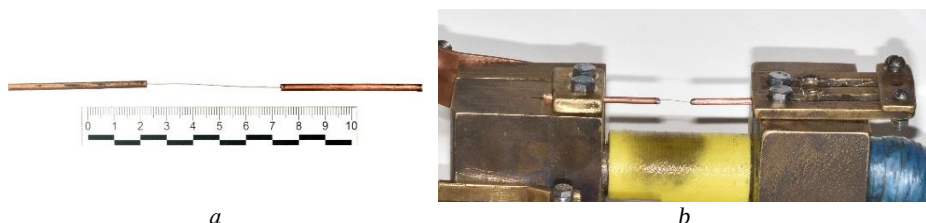


Рис. 2. Экспериментальный образец (а) установленный в ЭПУ (б)
Fig. 2. (a) Experimental sample installed in the (b) electro-plasma device

Методика припайки проволоочек к электродам заключалась в следующем. В медном электроде диаметром 2.65 мм высверливалось отверстие диаметром 1.5 мм. В образующуюся полость вставлялась проволоочка и заливалась припоем. Такой способ позволял сформировать на торце электрода практически плоскую поверхность (рис. 3).

Для анализа повторяемости измеряемых электрофизических параметров в экспериментах по описанной выше технологии было изготовлено 2 партии образцов по 10 штук образцов в каждой: 10 образцов с длиной проволоочек 10 мм и 10 образцов с длиной проволоочек 50 мм. Выбор таких длин обусловлен предварительными экспериментами и геометрическими размерами камеры баллистического установи, применяемой при проведении испытаний на электро-баллистическом стенде НИИ ПММ ТГУ. Были измерены длины всех образцов и установлена средняя длина образцов, которая составила $L_{cp} = 9.98$ мм и $L_{cp} = 49.88$ мм для партий 10 мм и 50 мм длины проволоочек соответственно. Эксперименты прово-

дидлись при следующих параметрах электрической установки: емкость накопителя $C = 17.28$ мФ, зарядное напряжение емкостного накопителя $U_3 = 428$ В.

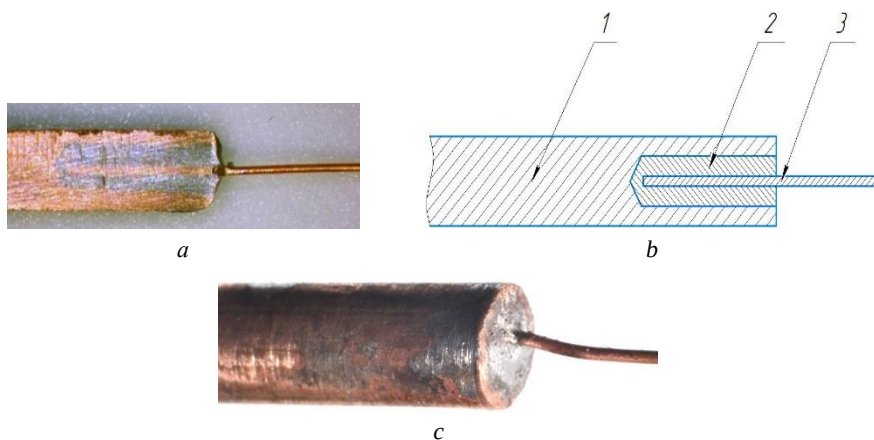


Рис. 3. Фотография центрального продольного разреза электрода с припаянной проволочкой (а). Схема припаянной проволочки (b). Фотография торца электрода в изометрии (с)

Fig. 3. (a) Photograph of the central longitudinal section of the electrode with a soldered wire, (b) design of the soldered wire, and (c) photograph of the end face of the electrode in isometric view

Экспериментальные результаты измеренных напряжений на разрядном промежутке для серии с проволочками длиной 50 мм представлены на рис. 4.

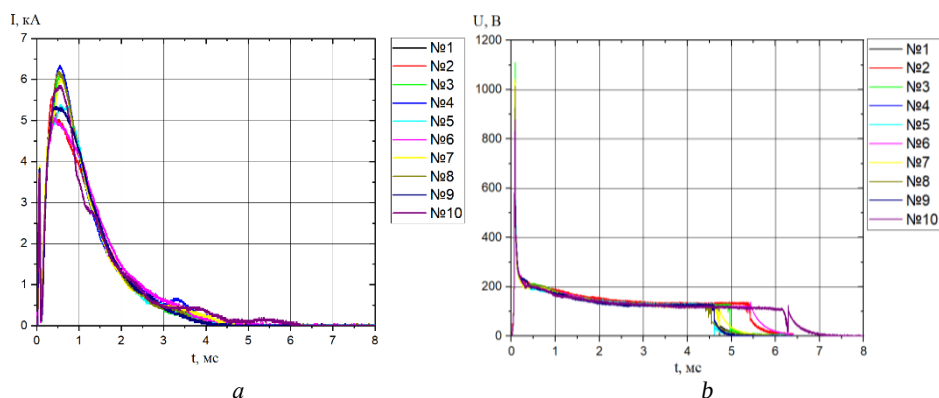


Рис. 4. Электрофизические характеристики функционирования 10 образцов с проволочками длиной 50 мм: а – токи в цепи, б – напряжения на разрядных промежутках

Fig. 4. Electrophysical characteristics of the application of 10 samples with 50 mm long wires: (a) currents in the circuit and (b) voltages in the discharge gaps

Как видно из графиков, напряжения на разрядном промежутке и величина токов в цепи практически на протяжении всего процесса разряда достаточно близки. Разброс по амплитуде перенапряжения составляет до 300 В. Разброс по амплитуде силы тока в цепи составляет до 1.2 кА.

Экспериментальные исследования

Электровзрыв проводника или системы проводников состоит из двух этапов, следующих друг за другом. На первом этапе при пропускании через проволоочку импульсного тока большой плотности происходит фазовый переход от твердого состояния проволоочки в жидкое и газообразное, при этом резко изменяется сопротивление разрядного промежутка. Реакция электрической цепи на резкое увеличение сопротивления взрываемой проволоочки выражается в формировании на разрядном промежутке импульса перенапряжения, который выше зарядного напряжения конденсаторной батареи в несколько раз, и уменьшается ток, протекающий в цепи. В течении второго этапа по образовавшимся продуктам электровзрыва происходит вторичный пробой разрядного промежутка с образованием дугового разряда. При этом основная часть энергии, накопленной в емкостном накопителе, вводится в разрядный промежуток на втором этапе. Однако переход процесса из первого этапа во второй не всегда выполняется. Для определения минимального уровня зарядного напряжения емкостного накопителя, необходимого для формирования вторичного пробоя разрядного промежутка с образованием дугового разряда, выполнена серия экспериментов с различной длиной: 10, 20, 30, 40, 50 мм. Для каждой длины были проведены эксперименты по определению величины зарядного напряжения, при котором произойдет вторичный пробой.

На рис. 5 приведены экспериментальные результаты по электровзрыву образцов с длиной проволоочки 10 мм. Эксперименты проводились при следующих параметрах электрического устройства: емкостной накопитель суммарной емкостью 17.28 мФ заряжался до напряжения 64, 85, 97, 112, 115, 167, 220 В.

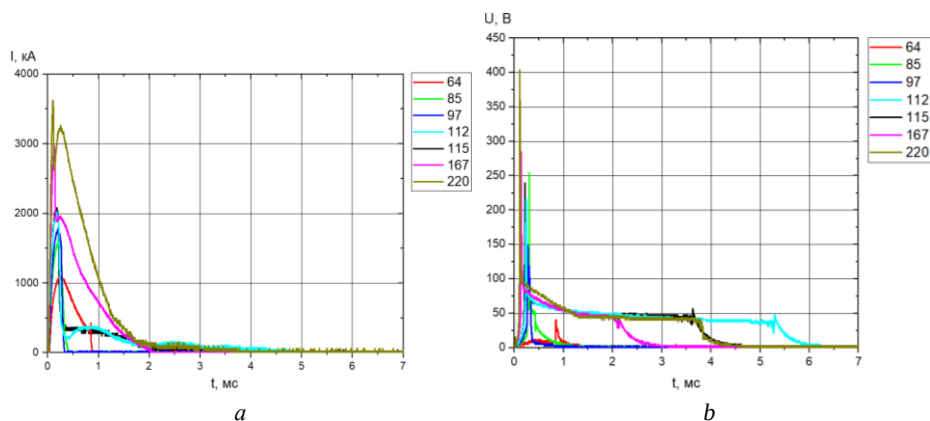


Рис. 5. Электрофизические характеристики функционирования ЭПУ с проволочками 10 мм:

a – токи в цепи, *b* – напряжения на разрядных промежутках

Fig. 5. Electrophysical characteristics of the operation of electro-plasma device with 10 mm wires:
(*a*) currents in the circuit and (*b*) voltages in the discharge gaps

Как видно по графикам тока и напряжения на разрядных промежутках, после резкого роста тока и напряжения происходит их снижение. И в случаях, когда

зарядные напряжения емкостного накопителя составляли 64, 85 и 97 В, токи и напряжения прекращаются практически сразу после первого этапа. В таких случаях не происходит вторичного пробоя по продуктам электровзрыва проволоочки. Начиная с зарядного напряжения 112 В и выше происходит вторичный пробой, и остатки накопленной энергии накопителя вводятся в образовавшуюся плазменную среду. Зарядное напряжение 112 В является нижним порогом, при котором при текущих параметрах системы электропитания реализуется режим ЭВП со вторичным пробоем.

Таким же образом были проведены серии испытаний образцов с длинами проволоочки 20, 30, 40 и 50 мм. Результаты представлены на рис. 6.

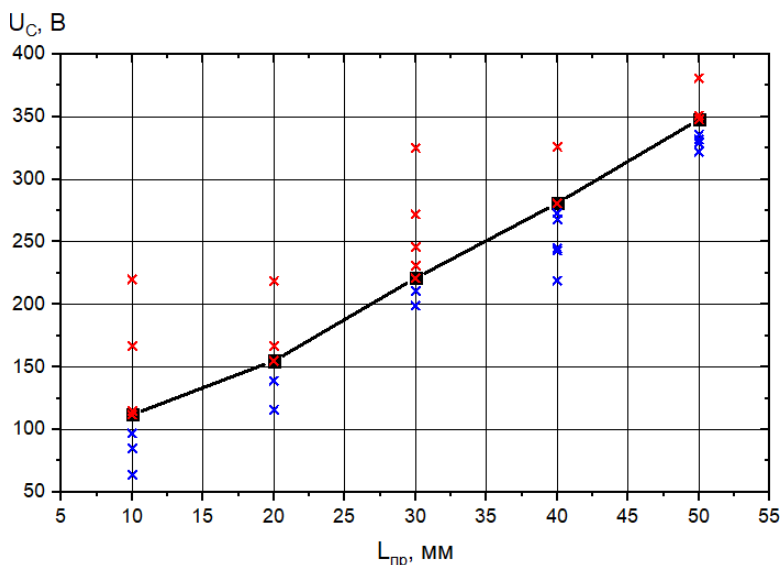


Рис. 6. Зависимость минимального зарядного напряжения емкостного накопителя от длины проволоочки: $\times$ – электрический взрыв проволоочки с образованием вторичным пробоя, $\times$ – электрический взрыв проволоочки без формирования вторичного пробоя, $\blacksquare$ – минимальное зарядное напряжение емкостного накопителя

Fig. 6. Minimum charging voltage of the capacitive energy storage device as a function of the wire length: $\times$ – electrical explosion of the wire with the formation of secondary breakdown, $\times$ – electrical explosion of the wire without the formation of secondary breakdown, $\blacksquare$ – minimum charging voltage of the capacitive energy storage device

На рис. 6 представлена экспериментальная зависимость минимального зарядного напряжения емкостного накопителя от длины проволоочки. Как видно из графика, зависимость является практически линейной. Область графика под линией – это область, в которой реализуется одноэтапный режим ЭВП без вторичного пробоя. В области графика над линией реализуется режим ЭВП со вторичным пробоем.

Полученные зависимости относительно слабо зависят от величины емкости ЕНЭ. Для подтверждения этого рассматривались варианты, в которых суммарная емкость ЕНЭ составляла 7.68, 17.28 и 31.6 мФ (рис. 7).

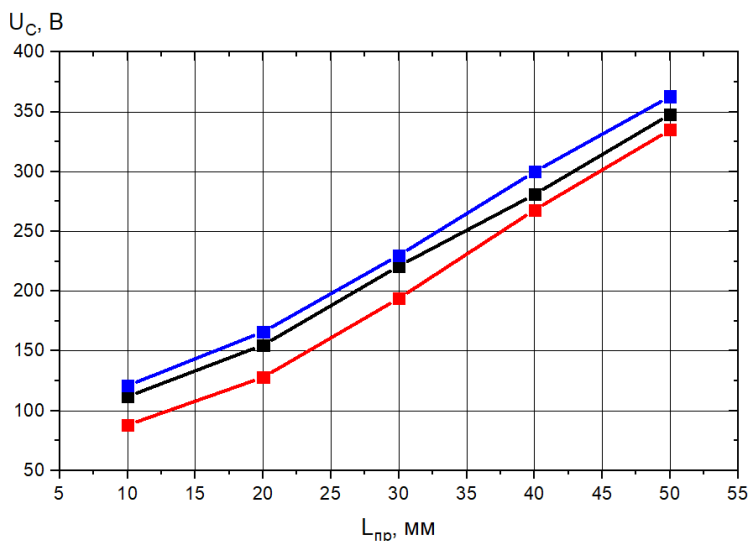


Рис. 7. Зависимости минимального зарядного напряжения емкостного накопителя от длины проволоочки: —■— 7.68 мФ, —■— 17.28 мФ, —■— 31.6 мФ

Fig. 7. Minimum charging voltage of the capacitive energy storage device as a function of the wire length: —■— 7.68 mF —■— 17.28 mF —■— 31.6 mF

Зависимость минимального зарядного напряжения для исследованных вариантов емкостного накопителя практически линейна. Смещение происходит за счет увеличения емкости накопителя. Чем выше емкость, тем меньше минимальное зарядное напряжение, необходимое для реализации вторичного пробоя при ЭВП с образованием дугового разряда.

Заключение

В результате выполненного исследования определены минимальные значения зарядного напряжения емкостного накопителя, необходимые для формирования вторичного пробоя с образованием дуги в разрядных промежутках различной длины. Полученные зависимости могут использоваться при разработке ЭПУ, ориентированных на применение в стесненных условиях зарядных камер баллистических установок.

Список источников

1. Muller G.M., Moore D.B., Bernstein D. Growth of explosion in electrically initiated. RDX // J. Applied Physics. 1961. V. 32 (6). P. 1065–1075.
2. Trebinski R., Leciejewski Z., Surma Z., Michalski J. Comparative analysis of the effects of gunpowder and plasma ignition in closed vessel tests // Defence Technology. 2019. V. 15 (5). P. 668–673.
3. Michalski J., Leciejewski Z. Closed Vessel Investigation of Propellant Ignition Process with Using Capillary Plasma Generator // Problems of mechatronics armament, aviation, safety engineering. 2015. V. 6, № 1 (19). P. 19–26.
4. Буркин В.В., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Касимов В.З., Саморокова Н.М., Сидоров А.Д., Степанов Е.Ю. Исследование возможностей повышения скорости поршня

- в условиях электротермохимической технологии воспламенения применительно к установке среднего калибра // Вестник Южно-Уральского университета. Сер. Математика. Механика. Физика. 2021. Т. 13, вып. 4. С. 37–43.
5. Барышев М.С., Бураков В.А., Буркин В.В., Ищенко А.Н., Касимов В.З., Саморокова Н.М., Хоменко Ю.П., Широков В.М. Разработка импульсных плазмотронов и опыт их применения для инициирования насыпных зарядов в баллистических экспериментах // Химическая физика и мезоскопия. 2009. Т. 11, № 2. С. 147–152.
6. Ищенко А.Н., Буркин В.В., Корольков Л.В., Степанов Е.Ю., Чупашев А.В. Электроплазменное устройство инициирования зарядов баллистических установок с многоканальным режимом дугового разряда // Известия высших учебных заведений. Физика. 2014. Т. 57, № 3-3, С. 52–55.

References

1. Muller G.M., Moore D.B., Bernstein D. (1961) Growth of explosion in electrically initiated RDX. *Journal of Applied Physics*. 32(6). pp. 1065–1075. doi: 10.1063/1.1736161
2. Trebinski R., Leciejewski Z., Surma Z., Michalski J. (2019) Comparative analysis of the effects of gunpowder and plasma ignition in closed vessel tests. *Defence Technology*. 15(5). pp. 668–673. doi: 10.1016/j.dt.2019.05.007
3. Michalski J., Leciejewski Z. (2015) Closed vessel investigation of propellant ignition process with using capillary plasma generator. *Problems of Mechatronics Armament, Aviation, Safety Engineering*. 6(1). pp. 19–26. doi: 10.5604/20815891.1149753
4. Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Samorokova N.M., Sidorov A.D., Stepanov E.Yu. (2021) Issledovanie vozmozhnostey povysheniya skorosti porshnya v usloviyakh elektrottermokhimicheskoy tekhnologii vosplamneniya primenitel'no k ustanovke srednego kalibra [Investigation of the possibilities of increasing the projectile velocity under the conditions of electrothermal-chemical ignition technology as applied to a medium-caliber installation]. *Vestnik YUUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika» – Bulletin of the South Ural State University Series “Mathematics. Mechanics. Physics”*. 13(4). pp. 37–43. doi: 10.14529/mmph210405
5. Baryshev M.S., Burakov V.A., Burkin V.V., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Samorokova N.M., Khomenko Yu.P., Shirokov V.M. (2009) Razrabotka impul'snykh plazmotronov i opyt ikh primeneniya dlya initsirovaniya nasypnykh zaryadov v ballisticheskikh eksperimentakh [Development of pulse plasma injectors and the experience of their application for initiation of bulk charges in ballistic experiments]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya – Chemical Physics and Mesoscopics*. 11(2). pp. 147–152.
6. Ishchenko A.N., Burkin V.V., Korol'kov L.V., Stepanov E.Yu., Chupashev A.V. (2014) Elektroplazmennoye ustroystvo initsirovaniya zaryadov ballisticheskikh ustanovok s mnogo-kanal'nym rezhimom dugovogo razryada [Electro-plasma device for initiating charges of ballistic installations with a multi-channel arc discharge mode]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 57(3/3). pp. 52–55.

Сведения об авторах:

Степанов Евгений Юрьевич – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: stepanov_eu@mail.ru

Ищенко Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Буркин Виктор Владимирович – старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

Метелица Егор Романович – студент бакалавриата физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: 44metelitsa@gmail.com

Бирюков Илья Михайлович – техник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ilya.biryukov.2072@mail.ru

Саммель Антон Юрьевич – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: anton_sammel@mail.ru

Information about the authors:

Stepanov Evgeniy Yu. (Junior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: stepanov_eu@mail.ru

Ishchenko Aleksandr N. (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Burkin Viktor V. (Senior Researcher, Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

Metelitsa Egor Romanovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 44metelitsa@gmail.com

Biryukov Il'ya M. (Laboratory Engineer, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ilya.biryukov.2072@mail.ru

Sammel' Anton Yu. (Junior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anton_sammel@mail.ru

Статья поступила в редакцию 01.11.2024; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 01.11.2024; accepted for publication 09.12.2024

Научная статья

УДК 531.2

doi: 10.17223/19988621/92/14

Расчетно-экспериментальные исследования прочностных свойств и долговечности имплантатов из никелида титана и костных тканей позвонков при замещении межпозвоночного диска сегмента шейного отдела позвоночника

**Татьяна Витальевна Чайковская¹, Екатерина Сергеевна Марченко²,
Анна Викторовна Ветрова³**

^{1,2,3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ kolmakova@ftf.tsu.ru

² 89138641814@mail.ru

³ aniuta-vetrova@mail.ru

Аннотация. Представлены результаты компьютерного исследования долговечности никелидтитановых имплантатов и костных тканей позвонков при замещении межпозвоночного диска шейного сегмента позвоночника. Получены экспериментальные кривые нагружения имплантатов одноосным сжатием. Оценка долговечности при наклоне сегмента вперед проводилась на основе расчетов напряженного состояния сегмента с протезами, выражений, аппроксимирующих экспериментальные данные по циклическому нагружению имплантатов и костных тканей. Результаты исследования показывают возможность длительной эксплуатации имплантатов и отсутствие разрушения костных тканей позвонков с модулем упругости выше 44 МПа в течение жизни человека.

Ключевые слова: расчетно-экспериментальные исследования, имплантаты из пористого никелида титана, сегмент шейного отдела позвоночника, напряженно-деформированное состояние, костная ткань, долговечность

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда по гранту № 22-72-10037.

Для цитирования: Чайковская Т.В., Марченко Е.С., Ветрова А.В. Расчетно-экспериментальные исследования прочностных свойств и долговечности имплантатов из никелида титана и костных тканей позвонков при замещении межпозвоночного диска сегмента шейного отдела позвоночника // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 169–185. doi: 10.17223/19988621/92/14

Original article

Computational and experimental studies of strength properties and durability of implants made of titanium nickelide and vertebral bone tissue during intervertebral disc replacement in a segment of the cervical spine

Tat'yana V. Chaykovskaya¹, Ekaterina S. Marchenko², Anna V. Vetrova³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ kolmakova@ftf.tsu.ru

² 89138641814@mail.ru

³ aniuta-vetrova@mail.ru

Abstract. The paper presents the results of a computer study of the durability of cylindrical endoprostheses made of titanium nickelide, porosity of 60–67%, and vertebral bone tissue of different densities when replacing the intervertebral disc of the cervical segment of the spine. Implants of different sizes were obtained by self-propagating high-temperature synthesis. Loading curves for the porous prostheses under consideration under uniaxial compression were experimentally obtained, from which the mechanical characteristics used in modeling were determined. The assessment of durability when the segment is tilted forward was carried out on the basis of calculations of the stress state of the segment with prostheses and expressions approximating experimental data on cyclic loading of porous samples made of titanium nickelide and bone tissue. As a result of the study, it has been established that the service life of the endoprostheses under consideration is at least 35 years. After the service life of the endoprostheses under consideration, fatigue failure can begin mainly in the outer parts of the prosthesis adjacent to the vertebrae of the segment. Installation of porous endoprostheses made of titanium nickelide will not entail fatigue destruction of the bone tissue of the vertebrae of the segment throughout a person's life.

Keywords: computational and experimental studies, implants made of porous titanium nickelide, segment of the cervical spine, stress-strain state, bone tissue, durability

Acknowledgments: The research was carried out with financial support of the Russian Science Foundation under the Grant No. 22-72-10037, <https://rscf.ru/project/22-72-10037/>

For citation: Chaykovskaya, T.V., Marchenko, E.S., Vetrova, A.V. (2024) Computational and experimental studies of strength properties and durability of implants made of titanium nickelide and vertebral bone tissue during intervertebral disc replacement in a segment of the cervical spine. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 169–185. doi: 10.17223/19988621/92/14

Введение

Дегенеративные изменения позвоночника – это процессы, приводящие к деградации хрящевой и костной ткани его сегментов [1]. Теряется эластичность межпозвоночных дисков, ослабевает костная структура позвонков и происходят

изменения структуры позвоночного столба. Пожилые люди в особой мере подвержены развитию различных заболеваний позвоночника, однако существуют болезни, часто наследственные, которые могут возникнуть в любом возрасте.

Остеохондроз в зоне межпозвоночных дисков является, несомненно, наиболее важным в смысле клинических последствий дегенеративным изменением позвоночного столба. Это заболевание напрямую связано с истончением межпозвоночных дисков, которое может привести к инвалидности [2]. Внутренняя часть межпозвоночного диска теряет влагу, наружная часть трескается и слоится. Позвонки постепенно сближаются и травмируют друг друга при каждом движении, перенапрягаются мышцы и связки, формируются различные грыжи и протрузии. Более всего предрасположены к патологическим изменениям поясничные и шейные позвонки, так как они в большей степени испытывают нагрузки [2, 3].

При таких серьезных дегенеративных заболеваниях следует проводить полную или частичную замену межпозвоночного диска на эндопротез. Только в этом случае пациент сможет избавиться от боли и вернуться к нормальному образу жизни. На сегодняшний день существуют разнообразные подвижные протезы межпозвоночного диска [4, 5] и кейджи [6, 7], используемые для восстановления межпозвоночного пространства при полном отсутствии межпозвоночного диска. Среди материалов для протезов межпозвоночных дисков выступают титан [7], разнообразная керамика [8], биоинертные полимеры [7], никелид титана [6].

Имплантируемый протез должен соответствовать требованиям биохимической и биомеханической совместимости [6, 9]. В этом плане никелид титана является наиболее подходящим для использования его в качестве материала для эндопротезирования структур позвоночника, поскольку он является биоинертным, обладает высоким уровнем прочностных свойств и благодаря эффекту памяти формы уже давно используется в медицине в качестве стентов [10], скоб для фиксации костных обломков [11]. Имплантаты из никелида титана применяются при лечении обширных постэксцизионных дефектов грудной клетки у онкологических больных [12], в качестве имплантатов для эндопротезирования костей лицевого скелета [13], зубов и т.д. [6]. В вертебологии скобы, стержни, пластины, цилиндры, конусы из монолитного и пористого никелида титана используются как средство для коррекции и замещения структур позвоночника [6]. Пористо-проницаемый никелид титана, полученный в лаборатории сверхэластичных биоинтерфейсов Томского государственного университета методом СВС, обладает рядом преимуществ перед монолитным при использовании его в качестве заменителя межпозвоночного диска. Одним из преимуществ является более низкий модуль упругости, приближенный к модулю упругости костных тканей для обеспечения их хорошей механической совместимости. Высокая биохимическая совместимость обеспечивается специфическими поверхностными слоями пористого сплава, образующимися в процессе его получения, не требующими дополнительной модификации поверхности [14]. Благодаря шероховатости пористой поверхности обеспечивается хорошая фиксация протеза на начальной стадии его функционирования, а наличие сквозной пористости дает возможность прорастанию костной ткани и полной фиксации протеза [6].

Использование методов компьютерного моделирования для изучения механического поведения биоконструкций играет важную роль в плане анализа взаимодействия их структурных составляющих, в том числе взаимодействия с искус-

ственными протезами. На сегодняшний день существуют публикации по исследованию напряженного и деформированного состояния сегментов позвоночника, взаимодействующих с имплантатами из различных материалов [15–17]. В этих исследованиях проводится оценка прочности структурных составляющих сегмента в основном только поясничного отдела позвоночника при одном цикле нагружения и отсутствует какая-либо информация по оценке долговечности рассматриваемых протезов при циклической нагрузке, реализуемой в процессе жизнедеятельности человека.

В настоящей работе с помощью методов компьютерного моделирования проведена оценка параметров долговечности никелидтитановых пористых протезов межпозвоночного диска разных размеров, полученных методом СВС, установленных в сегмент шейного отдела позвоночника, и их влияния на долговечность костных тканей позвонков. Экспериментально получены кривые нагружения рассматриваемых пористых протезов при одноосном сжатии, по которым определены механические характеристики, используемые при моделировании напряженного состояния сегмента шейного отдела позвоночника с протезами.

Материалы и методы

В качестве эндопротезов для замещения межпозвоночного диска позвоночника были выбраны образцы в виде цилиндров с пористостью 60–67%, полученные методом самораспространяющегося высокотемпературного синтеза. Размеры эндопротезов (табл. 1) определялись исходя из литературных данных о размерах позвонков и межпозвоночного диска [9, 18].

Таблица 1

Размеры эндопротезов межпозвоночного диска

Диаметр D	Высота H
12 мм	6 мм
12 мм	7 мм
14 мм	7 мм
14 мм	8 мм

Для получения имплантатов порошки никеля марки ПНК ОТ-4 и титана марки ПТОМ-2 смешивали в стехиометрическом соотношении Ti – 50 ат. % Ni и добавляли к полученной смеси 5 об. % порошка никелида титана марки ПН45Т55ОМ. Полученную трехкомпонентную смесь порошков засыпали в кварцевую трубу и уплотняли на вибростоле с частотой 5 колебаний/мин до окончания процесса уплотнения, который контролировали визуально. Нагрев порошковой заготовки до температуры 520°C, синтез пористого сплава и его охлаждение до комнатной температуры проводили в реакторе в среде аргона.

Для определения механических характеристик имплантатов проводилось их нагружение сжатием на испытательной машине Instron 8800. Количество образцов одного размера для проведения механических испытаний составляло 5 шт. Скорость деформации сжатием составляла 1 мм/мин. Предел прочности при сжатии определяли автоматически по алгоритму программы Bluehill универсальной испытательной машины Instron 8800. В программу Bluehill машины Instron 8800

закладываются размеры испытываемых образцов. Программа определяет предел прочности на сжатие, который соответствует максимальному значению напряжения, после которого идет регистрируемое снижение нагрузки.

Для оценки напряженного состояния сегмента шейного отдела позвоночника с эндопротезом использовалась компьютерная модель сегмента (рис. 1) [19].

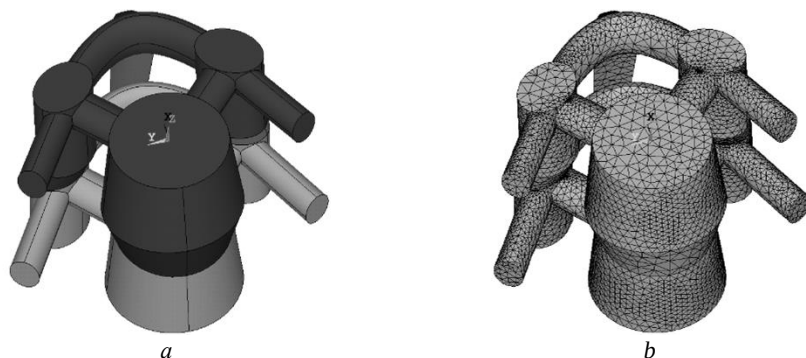


Рис. 1. Модель сегмента шейного отдела позвоночника: *a* – геометрическая модель сегмента, *b* – конечно-элементная модель сегмента

Fig. 1. The cervical spine segment model: (*a*) geometric model of a segment and (*b*) finite element model of a segment

Геометрическая модель включает в себя два позвонка, межпозвоночный диск, фасеточные суставы, межостистую связку, задние дуги позвонков, остистые, поперечные и суставные отростки. В модели межпозвоночный диск замещается пористыми никелидтитановыми эндопротезами разных размеров. В позвонках учитывается наличие компактной (кортикальной) и губчатой костной ткани. Считается, что задние дуги позвонков, остистые, поперечные и суставные отростки образованы только компактной костной тканью. Материал структурных составляющих сегмента считается однородным и изотропным. Пористость в костных тканях и эндопротезе учитывается неявным образом через заданные соответствующие механические характеристики.

Таблица 2

Механические характеристики костных тканей

Тип костной ткани	Плотность ρ , г/см ³	Массовая доля минералов α_b	Модуль упругости E_b , МПа	Коэффициент Пуассона ν_b	Предел прочности σ_{rb} , МПа
Остеопорозная губчатая костная ткань	0.06	0.55	1.66	0.2	0.160
Здоровая губчатая костная ткань	0.46	0.55	318.4	0.2	7.98
Компактная (кортикальная) костная ткань	1.8	0.65	14597.8	0.3	155.78

Механические характеристики костных тканей (табл. 2) задаются в зависимости от их плотности и массовой доли минералов согласно модели Эрнандеса [20]. Значения плотности губчатой костной ткани позвонков $\rho = 0,46 \text{ г/см}^3$ и $\rho = 0,06 \text{ г/см}^3$ соответствуют нормальному состоянию губчатой ткани и остеопорозному состоянию соответственно. Механические характеристики других структурных составляющих сегмента (табл. 3) задаются в соответствии с литературными данными [21].

Таблица 3

Механические характеристики составляющих сегмента

Структурная составляющая	Модуль упругости E_s , МПа	Коэффициент Пуассона ν_s
Фасеточные суставы	1.5	0.3
Межостистая связка	3.5	0.3

Механические характеристики эндопротезов определяются из диаграмм нагружения, полученных экспериментально при осевом сжатии.

Исследуется напряженное состояние сегмента с эндопротезами при наклоне головы вперед, что является самым распространенным движением шейного отдела позвоночника. Нижняя поверхность тела нижнего позвонка была жестко закреплена. Верхняя поверхность верхнего позвонка нагружалась силой, равной 50 Н, прикладывался момент на сгибание в отрицательном направлении оси X, равный 7.5 Н·мм. Заданные нагрузки соответствуют физиологическому сгибанию сегмента вперед [22]. Расчеты проводились с использованием метода конечных элементов в программном комплексе ANSYS в рамках линейной теории упругости.

Результаты и обсуждение

Осредненные механические характеристики эндопротезов для проведения компьютерного моделирования, такие как модуль упругости E_{imp} и предел прочности σ_c , определялись из представленных на рис. 2 экспериментальных диаграмм нагружения в пересчете на единицы измерения мегапаскалей (табл. 4).

Результаты компьютерного моделирования поведения сегмента с имплантатом при наклоне вперед представлены на рисунках ниже.

На рис. 3 и 4 показаны распределения напряжений по Мизесу в эндопротезах различных размеров при нагружении сегментов, позвонки которых имеют разную плотность губчатой костной ткани.

Результаты моделирования взаимодействия позвонков с протезами разного размера показывают, что наименьшие напряжения по Мизесу расположены в центре эндопротеза, а наибольшие – по его краю в области прилегания протеза к нижнему позвонку (см. рис. 3, 4), где, возможно, и будет начинаться усталостное разрушение эндопротеза. Уменьшение плотности губчатой костной ткани тел позвонков / в результате остеопороза приводит к увеличению значений наибольших напряжений по Мизесу (табл. 5) и существенно не влияет на характер распределения напряжений (см. рис. 3, 4).

Значения максимальных напряжений по Мизесу для рассматриваемых эндопротезов, представленные в табл. 5, показывают, что реализующиеся напряжения существенно ниже предела прочности материала эндопротеза. Так, для эндопротеза диаметром 12 мм и высотой 6 мм максимальные напряжения по Мизесу

(в случае $\rho = 0.06 \text{ г/см}^3$) меньше предела прочности в 1 055 раз, для эндопротеза высотой 7 мм и диаметром 12 мм – меньше в 947 раз, для эндопротеза диаметром 14 мм и высотой 7 мм – меньше в 30 раз, для эндопротеза с высотой 8 мм и диаметром 14 мм – меньше в 32 раза. Из табл. 5 также видно, что увеличение высоты протеза приводит к увеличению максимальных напряжений по Мизесу в среднем примерно в 1.1 раза. Увеличение диаметра эндопротеза приводит к снижению реализующихся максимальных напряжений по Мизесу примерно в 1.2 раза.

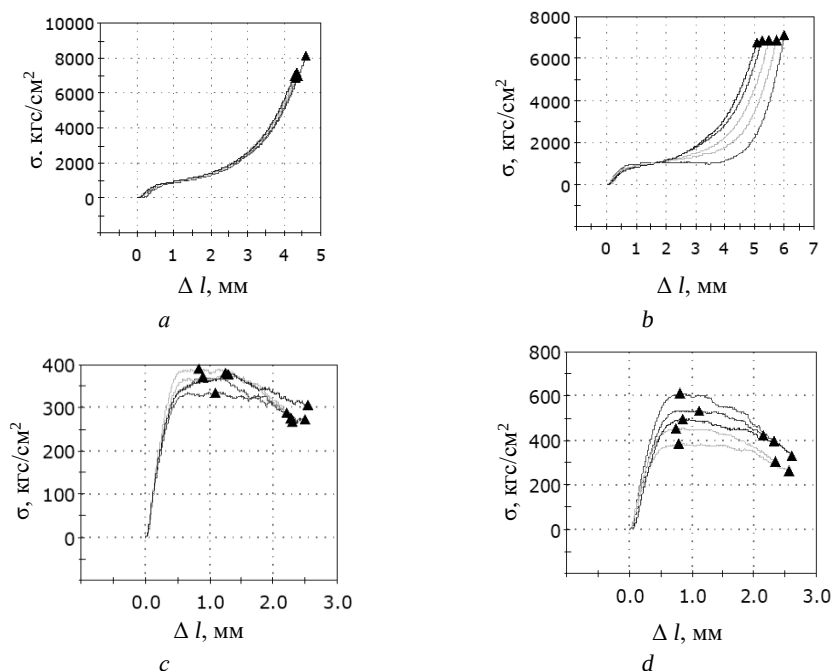


Рис. 2. Экспериментальные диаграммы осевого сжатия цилиндрических образцов с размерами $D = 12 \text{ мм}$, $H = 6 \text{ мм}$ (a), $D = 12 \text{ мм}$, $H = 7 \text{ мм}$ (b), $D = 14 \text{ мм}$, $H = 7 \text{ мм}$ (c), $D = 14 \text{ мм}$, $H = 8 \text{ мм}$ (d)

Fig. 2. Experimental diagrams of axial compression of cylindrical samples with dimensions (a) $D = 12 \text{ мм}$, $H = 6 \text{ мм}$, (b) $D = 12 \text{ мм}$, $H = 7 \text{ мм}$, (c) $D = 14 \text{ мм}$, $H = 7 \text{ мм}$, and (d) $D = 14 \text{ мм}$, $H = 8 \text{ мм}$

Таблица 4

Механические характеристики эндопротезов

Размер эндопротеза	Модуль упругости E_{imp} , МПа	Коэффициент Пуассона ν	Предел прочности σ_c , МПа
$D = 12 \text{ мм}$, $H = 6 \text{ мм}$	2 083.6	0.3	1 751.6
$D = 12 \text{ мм}$, $H = 7 \text{ мм}$	2 381.0	0.3	1 751.6
$D = 14 \text{ мм}$, $H = 7 \text{ мм}$	1 189.8	0.3	45.97
$D = 14 \text{ мм}$, $H = 8 \text{ мм}$	1 776.2	0.3	55.2

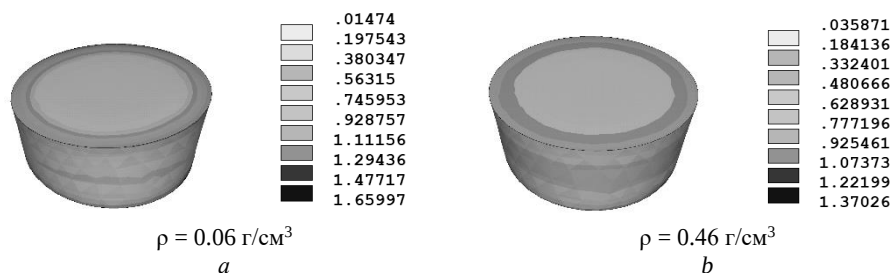


Рис. 3. Распределение напряжений по Мизесу σ_{eqv} (МПа) в эндопротезе с размерами $D = 12$ мм, $H = 6$ мм при наклоне вперед сегмента с плотностью губчатой костной ткани позвонков 0.06 г/см³ (a) и 0.46 г/см³ (b) (вид сверху и спереди)

Fig. 3. Von Mises stress distribution σ_{eqv} (MPa) in an endoprosthesis with dimensions $D = 12$ mm, $H = 6$ mm when the segment is tilted forward with a density of cancellous bone tissue of the vertebrae of (a) 0.06 and (b) 0.46 g/cm³ (top and front view)

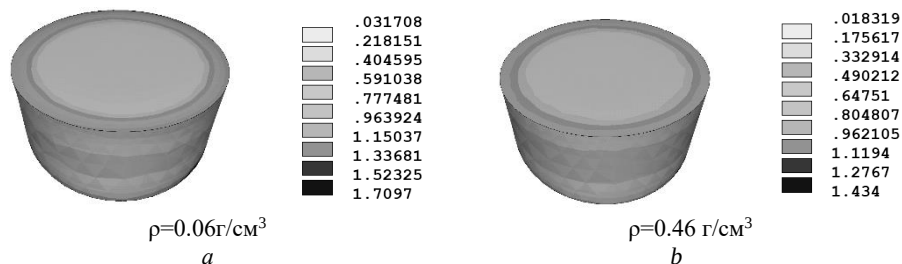


Рис. 4. Распределение напряжений по Мизесу σ_{eqv} (МПа) в эндопротезе с размерами $D = 14$ мм, $H = 8$ мм при наклоне вперед сегмента с плотностью губчатой костной ткани позвонков 0.06 г/см³ (a) и 0.46 г/см³ (b) (вид сверху и спереди)

Fig. 4. Von Mises stress distribution σ_{eqv} (MPa) in an endoprosthesis with dimensions $D = 14$ mm, $H = 8$ mm when the segment is tilted forward with a density of cancellous bone tissue of the vertebrae of (a) 0.06 and (b) 0.46 g/cm³ (b) (top and front view)

Таблица 5

Максимальные значения напряжений в эндопротезах

Размер эндопротеза	$\rho = 0.46$ г/см ³	$\rho = 0.06$ г/см ³
	max σ_{eqv} , МПа	max σ_{eqv} , МПа
$D = 12$ мм, $H = 6$ мм	1.37	1.66
$D = 12$ мм, $H = 7$ мм	1.47	1.78
$D = 14$ мм, $H = 7$ мм	1.2	1.51
$D = 14$ мм, $H = 8$ мм	1.43	1.71

На рис. 5–8 представлены распределения напряжений по Мизесу отдельно в губчатой костной ткани разной плотности и в кортикальной костной ткани позвонков сегмента при его нагружении с эндопротезами разного размера.

В табл. 6, 7 приведены наибольшие значения напряжений по Мизесу в губчатой (см. табл. 6) и кортикальной (см. табл. 7) костных тканях, возникающие при наклоне сегмента с имплантатами разного размера.

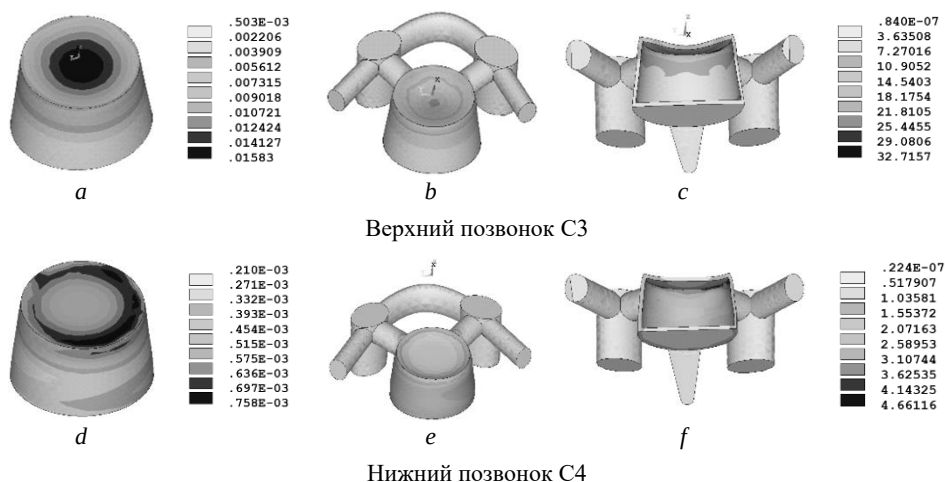


Рис. 5. Распределение напряжений по Мизесу (МПа) отдельно в губчатой костной ткани с плотностью 0.06 г/см^3 (a), (d) и кортикальной костной ткани (вид сверху и спереди) (3D изображение – (b), (e), изображение в разрезе – (c), (f) верхнего (a), (b), (c) и нижнего (d), (e), (f) позвонков при нагружении сегмента с эндопротезом с размерами $H = 6 \text{ мм}$, $D = 12 \text{ мм}$

Fig. 5. Von Mises stress distribution (MPa) separately in a spongy bone tissue with a density of 0.06 g/cm^3 (a, d) and cortical bone tissue (top and front view) (3D image – (b, e), sectional image – (c, f) of the upper (a–c) and lower (d–f) vertebrae when loading a segment with an endoprosthesis with dimensions $H = 6 \text{ mm}$, $D = 12 \text{ mm}$

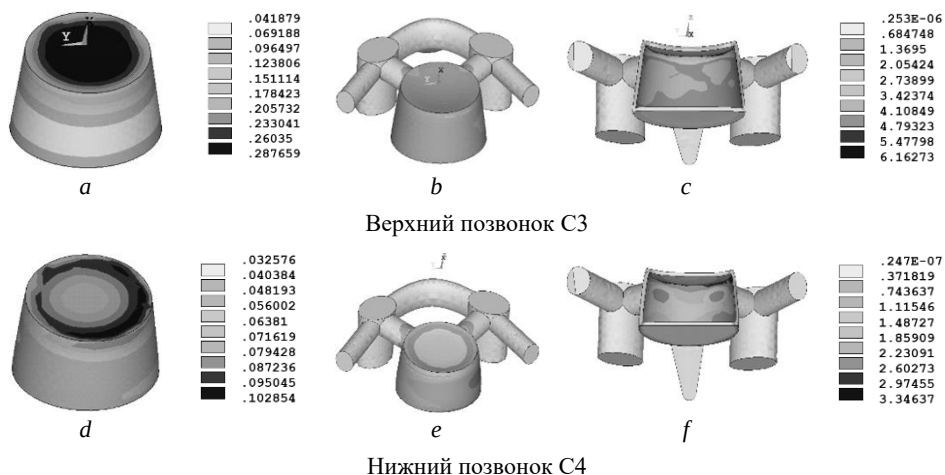


Рис. 6. Распределение напряжений по Мизесу (МПа) отдельно в губчатой костной ткани с плотностью 0.46 г/см^3 (a), (d) и кортикальной костной ткани (вид сверху и спереди) (3D изображение – (b), (e), изображение в разрезе – (c), (f) верхнего (a), (b), (c) и (d), (e), (f) позвонков при нагружении сегмента с эндопротезом с размерами $H = 6 \text{ мм}$, $D = 12 \text{ мм}$

Fig. 6. Von Mises stress distribution (MPa) separately in spongy bone tissue with a density of 0.46 g/cm^3 (a, d) and cortical bone tissue (top and front view) (3D image – (b, e), sectional image – (c, f) of the upper (a–c) and lower (d–f) vertebrae when loading a segment with an endoprosthesis with dimensions $H = 6 \text{ mm}$, $D = 12 \text{ mm}$

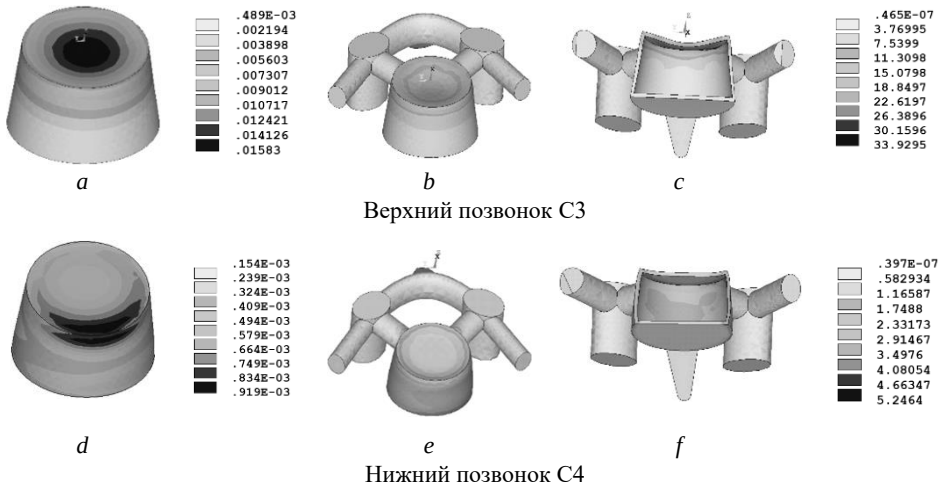


Рис. 7. Распределение напряжений по Мизесу (МПа) отдельно в губчатой костной ткани с плотностью 0.06 г/см^3 (a), (d) и кортикальной костной ткани (вид сверху и спереди) (3D изображение – (b), (e), изображение в разрезе – (c), (f) верхнего (a), (b), (c) и нижнего (d), (e), (f) позвонков при нагружении сегмента с эндопротезом с размерами $H = 8 \text{ мм}$, $D = 14 \text{ мм}$

Fig. 7. Von Mises stress distribution (MPa) separately in spongy bone tissue with a density of 0.06 g/cm^3 (a, d) and cortical bone tissue (top and front view) (3D image – (b, e), sectional image – (c, f) of the upper (a–c) and lower (d–f) vertebrae when loading a segment with an endoprosthesis with dimensions $H=8 \text{ mm}$, $D=14 \text{ mm}$

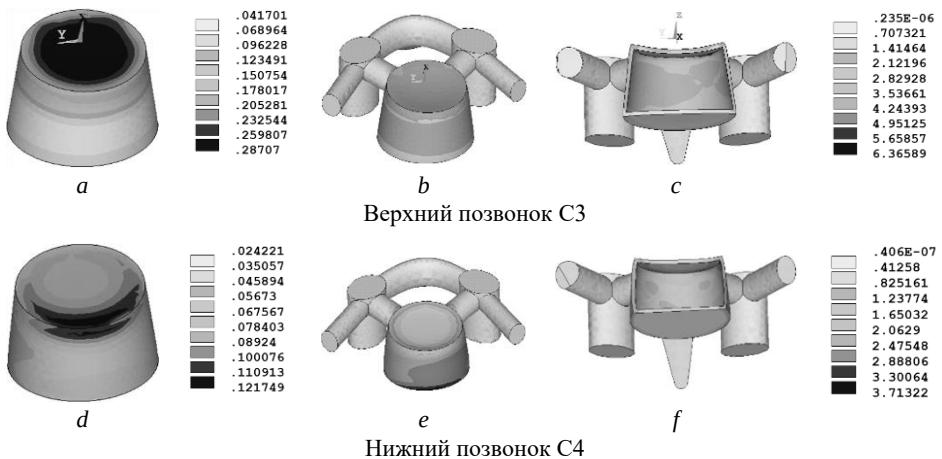


Рис. 8. Распределение напряжений по Мизесу (МПа) отдельно в губчатой костной ткани с плотностью 0.46 г/см^3 (a), (d) и кортикальной костной ткани (вид сверху и спереди) (3D изображение – (b), (e), изображение в разрезе – (c), (f) верхнего (a), (b), (c) и (d), (e), (f) позвонков при нагружении сегмента с эндопротезом с размерами $H = 8 \text{ мм}$, $D = 14 \text{ мм}$

Fig. 8. Von Mises stress distribution (MPa) separately in spongy bone tissue with a density of 0.46 g/cm^3 (a, d) and cortical bone tissue (top and front view) (3D image – (b), (e), sectional image – (c), (f) of the upper (a–c) and lower (d, e), (f) vertebrae when loading a segment with an endoprosthesis with dimensions $H = 8 \text{ mm}$, $D = 14 \text{ mm}$

Таблица 6

**Наибольшие значения напряжений по Мизесу (МПа)
в губчатой костной ткани**

Размер эндопротеза	$\rho = 0.46 \text{ г/см}^3$		$\rho = 0.06 \text{ г/см}^3$	
	Верхний позвонок	Нижний позвонок	Верхний позвонок	Нижний позвонок
$D = 12 \text{ мм}, H = 6 \text{ мм}$	0.288	0.103	0.0158	0.000758
$D = 12 \text{ мм}, H = 7 \text{ мм}$	0.288	0.110	0.0158	0.000802
$D = 14 \text{ мм}, H = 7 \text{ мм}$	0.288	0.133	0.0158	0.00111
$D = 14 \text{ мм}, H = 8 \text{ мм}$	0.288	0.122	0.0158	0.000919

Таблица 7

**Максимальные значения напряжений по Мизесу (МПа)
в кортикальной костной ткани**

Размер эндопротеза	$\rho = 0.46 \text{ г/см}^3$		$\rho = 0.06 \text{ г/см}^3$	
	Верхний позвонок	Нижний позвонок	Верхний позвонок	Нижний позвонок
$D = 12 \text{ мм}, H = 6 \text{ мм}$	6.16	3.34	32.72	4.66
$D = 12 \text{ мм}, H = 7 \text{ мм}$	6.3	3.4	33.49	4.67
$D = 14 \text{ мм}, H = 7 \text{ мм}$	6.25	3.67	33.6	5.73
$D = 14 \text{ мм}, H = 8 \text{ мм}$	6.37	3.71	33.93	5.25

Изображения распределения напряжений по Мизесу в губчатой костной ткани различной плотности и кортикальной костной ткани позвонков при нагружении сегмента с эндопротезами разных размеров (см. рис. 5–8) показывают, что в губчатой костной ткани верхнего позвонка наибольшие напряжения по Мизесу расположены в ее центральной части (см. рис. 5–8, *a*), область их расположения и значения уменьшаются с понижением плотности губчатой ткани (см. рис. 5, 6, *a*, рис. 7, 8, *a*). В губчатой костной ткани нижнего позвонка наибольшие напряжения по Мизесу расположены преимущественно в ее передней части (см. рис. 5–8, *d*), значения напряжений также снижаются с понижением плотности губчатой ткани (см. рис. 5, 6, *d*; рис. 7, 8, *d*; табл. 6). При фиксированной плотности губчатой костной ткани наибольшие напряжения по Мизесу реализуются в губчатой ткани верхнего позвонка по сравнению с нижним (см. табл. 6).

Анализ распределения максимальных напряжений по Мизесу в кортикальной костной ткани показал, что они локализуются преимущественно в верхней части задней поверхности позвонков, прилегающей к губчатой костной ткани (см. рис. 5–8, *c*, *f*). Снижение плотности губчатой костной ткани приводит к увеличению напряжений в кортикальной ткани верхнего позвонка примерно в 5.3 раза (см. табл. 7).

Для расчета количества циклов до разрушения губчатой костной ткани при циклическом нагружении использовалось значение максимального напряжения по Мизесу для губчатой костной ткани верхнего позвонка с плотностью 0.46 г/см^3 (см. табл. 6). Для расчета количества циклов до разрушения кортикальной костной ткани использовалось среднее по образцам значение максимального напряжения по Мизесу кортикальной костной ткани верхнего позвонка при плотности губчатой ткани 0.06 г/см^3 (см. табл. 7).

Известно, что движения человека в процессе жизнедеятельности – это циклические движения. В связи с этим оценка долговечности костных тканей и эндопротезов осуществлялась на основе литературных данных по их циклическому нагружению сжатием.

Для оценки долговечности костных тканей, взаимодействующих с эндопротезами, использовалась зависимость, аппроксимирующая экспериментальные данные работы [23] для губчатой костной ткани позвонков человека и определяющая количество циклов до разрушения N_b по величине модуля упругости E_0 кости и реализующегося максимального напряжения $\sigma_{\max}$:

$$N_b = (\sigma_{\max}/0.0121E_0)^{-12.38}. \quad (1)$$

Считается, что формула (1) справедлива также для кортикальной костной ткани человека и для количества циклов нагружения $N_b > 1\,000\,000$.

Полученные результаты для губчатой и кортикальной костной ткани представлены в табл. 8; также представлены данные для губчатой костной ткани с плотностью 0.215 г/см^3 и модулем упругости 44.75 МПа , встречающейся в позвонках человека по данным работы [23].

Таблица 8

Параметры оценки долговечности костных тканей

Тип костной ткани	E_0 , МПа	$\sigma_{\max}$, МПа	N_b	K_b , лет
Здоровая губчатая костная ткань	318.4	0.288	$8.7E+13$	$8.0E+6$ лет
Губчатая костная ткань	44.75	0.0944	$2.4\text{ E}+9$	225 лет
Остеопорозная губчатая костная ткань	1.66	0.0158	19.5	меньше 1 мин
Кортикальная костная ткань	14 597.8	33.4	$9.0E+8$	82 года

Представленные в табл. 8 результаты по оценке долговечности костных тканей тел позвонков сегмента позволяют сделать вывод, что установка рассматриваемых эндопротезов в межпозвоночное пространство позвонков с модулем упругости костной ткани выше 44 МПа , по видимому, не вызовет усталостное разрушение костных тканей в течение всей жизни человека в отличие от костной ткани поздней стадии остеопороза.

На основании экспериментальных данных по усталостному разрушению эндопротезов из никелида титана с пористостью 64% , модулем упругости $2\,930\text{ МПа}$ при сжатии [24] была получена аппроксимирующая функция, описывающая зависимость количества циклов до разрушения N_{imp} от отношения максимального напряжения $\sigma_{\max}$ к пределу текучести материала σ_y :

$$N_{imp} = \exp(-9.1278768 \cdot (\sigma_{\max}/\sigma_y)) \cdot 449572121. \quad (2)$$

Для расчета количества циклов до разрушения N_{imp} рассматриваемых протезов межпозвоночного диска при циклическом наклоне сегмента использовалось значение максимального напряжения по Мизесу, реализуемое в эндопротезах при установке их в сегмент с плотностью губчатой костной ткани позвонков 0.06 г/см^3 (см. табл. 5). Значения предела текучести эндопротезов определялись из диаграмм нагружения, представленных на рис. 2 в пересчете на единицы измерения в мегапаскалях.

Полученные параметры оценки долговечности эндопротезов разных размеров представлены в табл. 9.

Таблица 9

Параметры оценки долговечности эндопротезов

Размер эндопротеза	σ_y , МПа	$\sigma_{\max}$, МПа	N_{imp}	K_{imp} , лет
$D = 12$ мм, $H = 6$ мм	298.05	1.66	427 320 747.47206	39.0
$D = 12$ мм, $H = 7$ мм	278.7	1.78	424 112 352.58859	38.7
$D = 14$ мм, $H = 7$ мм	94.76	1.51	388 713 912.34069	35.4
$D = 14$ мм, $H = 8$ мм	122.6	1.7	396 123 897.20299	36.2

Величины K_b (см. табл. 8) и K_{imp} (см. табл. 9) показывают, сколько лет до разрушения выдержат костная ткань и эндопротез соответственно, они рассчитаны из условия, что человек в год совершает наклон головы вперед в среднем 10 950 000 раз [25].

Представленные в табл. 9 результаты по оценке долговечности эндопротезов разных размеров позволяют сделать вывод, что продолжительность работы эндопротезов с размерами $D = 12$ мм, $H = 6$ мм и $H = 7$ мм составляет в среднем 39 лет, с размерами $D = 14$ мм $H = 7$ мм и $H = 8$ мм – в среднем 36 лет.

Заключение

В работе проведены исследования долговечности в сегменте шейного отдела позвоночника цилиндрических эндопротезов межпозвоночного диска из никелида титана с пористостью 60–67% и разными размерами, полученных с помощью самораспространяющегося высокотемпературного синтеза. Результаты проведенного исследования показывают, что срок службы рассматриваемых эндопротезов составляет не менее 35 лет. По истечении срока службы эндопротезов усталостное разрушение может начаться преимущественно в наружных частях протеза, примыкающих к позвонкам сегмента. Установка пористых эндопротезов из никелида титана в межпозвоночное пространство позвонков с модулем упругости костной ткани выше 44 МПа, по нашим оценкам, по-видимому, не повлечет за собой усталостное разрушение костных тканей позвонков сегмента в течение всей жизни человека в отличие от костной ткани поздней стадии остеопороза.

Список источников

1. Kushchayev S.V., Glushko T., Jarraya M. et al. ABCs of the degenerative spine // *Insights Imaging*. 2018. № 9. P. 253–274. doi: 10.1007/s13244-017-0584-z
2. Kaiser J., Allaire B., Fein P.M., Lu D., Jarraya M., Guermazi A., Demissie S., Samelson E.J., Bouxsein M.L., Morgan E.F. Correspondence between bone mineral density and intervertebral disc degeneration across age and sex // *Arch Osteoporos*. 2018. V. 13 (1). Art. 123. doi: 10.1007/s11657-018-0538-1. PMID: 30421154; PMCID: PMC6291246.
3. Verkhozina T.K., Ippolitova E.G., Tsyslyak E.S., Sklyarenko O.V., Koshkareva Z.V. Changes in bone density in patients with osteochondrosis of the cervical spine // *Acta Biomedica Scientifica*. 2019. V. 4 (6). P. 26–31. doi: 10.29413/ABS.2019-4.6.4
4. Formica M., Divano S., Cavagnaro L. et al. Lumbar total disc arthroplasty: outdated surgery or here to stay procedure? A systematic review of current literature // *Journal of Orthopaedics and Traumatology*. 2017. № 18. P. 197–215.
5. Holeyijn R.M., de Kleuver M., van der Veen A.J. et al. A novel spinal implant for fusionless scoliosis correction: a biomechanical analysis of the motion preserving properties of a posterior periapical concave distraction device // *Global Spine Journal*. 2017. № 7. Art. 400-9.

6. Gunther V.E., Khodorenko V.N. Development of biocompatible superelastic materials and shape memory implants based on titanium nickelide for the creation of highly effective medical technologies // *Issues of Reconstructive and Plastic Surgery*. 2022. V. 25 (2). P. 45–56. doi: 10.52581/1814-1471/81/05
7. Seaman S., Kerezoudis P., Bydon M. et al. Titanium vs. polyetheretherketone (PEEK) interbody fusion: meta-analysis and review of the literature // *Journal of Clinical Neuroscience*. 2017. № 44. Art. 23–9.
8. Warburton A., Girdler S.J., Mikhail Ch.M., Ahn A., Cho S.K. Biomaterials in spinal implants: a review // *Neurospine*. 2020. V. 17 (1). P. 101–110. doi: 10.14245/ns.1938296.148
9. Panzer M.B. Numerical modeling of the human cervical spine in frontal impact : dissertation for the degree of master of applied science in mechanical engineering. Waterloo, Ontario, Canada, 2006. 248 p.
10. Ивченко О.А., Гюнтер В.Э., Дамбаев Г.Ц. и др. Медицинские материалы и имплантаты с памятью формы : в 14 т. Томск : Изд-во МИЦ, 2012. Т. 10.
11. Ланишаков В.А., Гюнтер В.Э., Плуткин Г.Л. и др. Медицинские материалы и имплантаты с памятью формы : в 14 т. Томск : Изд-во МИЦ, 2012. Т. 2.
12. Topolnitsky E., Chekalkin T.L., Marchenko E.S., Yasenchuk Y.F. et al. Combination of solid and porous nitinol implants in surgical treatment of extensive post-excision thoracic defects in cancer patients // *International conference on shape memory and superelastic technologies (SMST 2022)*. 2022. P. 79–80. doi: 10.31399/asm.cp.smst2022p0079
13. Сысолятин П.Г., Гюнтер В.Э., Миргазизов М.З. и др. Медицинские материалы и имплантаты с памятью формы : в 14 т. Томск : Изд-во МИЦ, 2012. Т. 4.
14. Gunther V.E., Yasenchuk Yu.F., Gyunter S.V., Marchenko E.S., Iuzhakov M.M. Biocompatibility of porous shs-tini // *Materials Science Forum*. 2019. V. 970. P. 320–327.
15. Wang W., Kong C., Pan F. et al. Effects of dynamic and rigid implantation on biomechanical characteristics of different sagittal alignment lumbar after single- or double-level spinal fixations: a finite-element modeling study // *European Journal of Medical Research*. 2023. № 28. Art. 583. doi: 10.1186/s40001-023-01475-y
16. Biswas J.K., Rana M., Malas A., Roy S., Chatterjee S., Choudhury S. Effect of single and multilevel artificial inter-vertebral disc replacement in lumbar spine: A finite element study // *The International Journal of Artificial Organs*. 2022. V. 45 (2). P. 193–199. doi: 10.1177/03913988211001875
17. Zhang W., Zhao J., Li L., Yu C., Zhao Y., Si H. Modelling tri-cortical pedicle screw fixation in thoracic vertebrae under osteoporotic condition: A finite element analysis based on computed tomography // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2020. V. 187. Art. 105035.
18. Rohlmann A. et al. Comparison of the effects of bilateral posterior dynamic // *European Spine Journal*. 2007. V. 16 (8). P. 1223–1231.
19. Kolmakova T.V. Study of the influence of degenerative intervertebral disc changes on the deformation behavior of the cervical spine segment in flexion // *AIP Conference Proceedings*. 2016. V. 1783. Art. 020095. doi: 10.1063/1.4966388
20. Hernandez C.J., Beaupré G.S., Keller T.S., Carter D.R. The influence of bone volume fraction and ash fraction on bone strength and modulus // *Bone*. 2001. V. 29 (1). P. 74–78. doi: 10.1016/s8756-3282(01)00467-7
21. Ng H.W., Teo E.C., Lee V.S. Statistical factorial analysis on the material property sensitivity of the mechanical responses of the C4–C6 under compression, anterior and posterior shear // *Journal of Biomechanics*. 2004. V. 37. P. 771–777.
22. Hueston S., Makola M., Mabe I., Goswami T. Cervical spine anthropometric and finite element biomechanical analysis // *Human Musculoskeletal Biomechanics*. Wright State University, 2012. P. 107–158. doi: 10.5772/35524
23. Rapillard L., Charlebois M., Zysset P.K. Compressive fatigue behavior of human vertebral trabecular bone // *Journal of Biomechanics*. 2006. V. 39. P. 2133–2139. doi: 10.1016/j.jbiomech.2005.04.033

24. Yuan B., Zhu M., Chung C.Y. Biomedical porous shape memory alloys for hard tissue replacement materials // *Materials*. 2018. V. 11. Art. 1716. P. 1–53.
25. Cobian D.G., Sterling A.C., Anderson P.A., Heiderscheit B.C. Task specific frequencies of neck motion measured in healthy young adults over a 5 day period // *Spine*. 2009. V. 34 (6). P. E202–E207. doi: 10.1097/BR5.0b013e3181908c7b

References

1. Kushchayev S.V., Glushko T., Jarraya M. et al. (2018) ABCs of the degenerative spine. *Insights Imaging*. 9. pp. 253–274. DOI: 10.1007/s13244-017-0584-z.
2. Kaiser J., Allaire B., Fein P.M., Lu D., Jarraya M., Guermazi A., Demissie S., Samelson E.J., Bouxsein M.L., Morgan E.F. (2018) Correspondence between bone mineral density and intervertebral disc degeneration across age and sex. *Archives of Osteoporosis*. 13(1). Article 123. DOI: 10.1007/s11657-018-0538-1. PMID: 30421154; PMCID: PMC6291246.
3. Verkhozina T.K., Ippolitova E.G., Tsyslyak E.S., Sklyarenko O.V., Koshkareva Z.V. (2019) Changes in bone density in patients with osteochondrosis of the cervical spine. *Acta Biomedica Scientifica*. 4(6). pp. 26–31. DOI: 10.29413/ABS.2019-4.6.4.
4. Formica M., Divano S., Cavagnaro L., et al. (2017) Lumbar total disc arthroplasty: outdated surgery or here to stay procedure? A systematic review of current literature. *Journal of Orthopaedics and Traumatology*. 18. pp. 197–215.
5. Holewijn R.M., de Kleuver M., van der Veen A.J., et al. (2017) A novel spinal implant for fusionless scoliosis correction: a biomechanical analysis of the motion preserving properties of a posterior periapical concave distraction device. *Global Spine Journal*. 7. Article 400-9.
6. Gunther V.E., Khodorenko V.N. (2022) Development of biocompatible superelastic materials and shape memory implants based on titanium nickelide for the creation of highly effective medical technologies. *Issues of Reconstructive and Plastic Surgery*. 25(2). pp. 45–56. DOI: 10.52581/1814-1471/81/05.
7. Seaman S., Kerezoudis P., Bydon M., et al. (2017) Titanium vs. polyetheretherketone (PEEK) interbody fusion: meta-analysis and review of the literature. *Journal of Clinical Neuroscience*. 44. Article 23-9.
8. Warburton A., Girdler S.J., Mikhail Ch.M., Ahn A., Cho S.K. (2020) Biomaterials in Spinal Implants: A Review. *Neurospine*. 17(1). pp. 101–110. DOI: 10.14245/ns.1938296.148.
9. Panzer M.B. (2006) *Numerical modeling of the human cervical spine in frontal impact*. Dissertation for the degree of master of applied science in mechanical engineering. Canada.
10. Ivchenko O.A., Gunther V.E., Dambayev G.Ts. et al. (2012) *Meditsinskiye materialy i implantaty s pamyat'yu formy. Implantaty s pamyat'yu formy v sosudistoy khirurgii* [Medical materials and shape memory implants. Shape memory implants in vascular surgery]. Tomsk, MITS Publ., Vol. 10.
11. Lanshakov V.A., Gunther V.E., Plotkin G.L. et al. (2010) *Meditsinskiye materialy i implantaty s pamyat'yu formy. Implantaty s pamyat'yu formy v travmatologii i ortopedii* [Medical materials and shape memory implants. Shape memory implants in traumatology and orthopedics]. Tomsk, MITS Publ., Vol. 2.
12. Topolnitsky E., Chekalkin T.L., Marchenko E.S., Yasenichuk Y.F. et al. (2022) Combination of Solid and Porous Nitinol Implants in Surgical Treatment of Extensive Post-Excision Thoracic Defects in Cancer Patients. *International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies (SMST 2022)*. pp. 79–80. DOI: 10.31399/asm.cp.smst2022p0079.
13. Sysolyatin P.G., Gunther V.E., Sysolyatin S.P. et al. (2012) *Meditsinskiye materialy i implantaty s pamyat'yu formy. Implantaty s pamyat'yu formy v chelyustno-litsevoy khirurgii* [Medical materials and shape memory implants. Shape memory implants in maxillofacial surgery]. Tomsk, MITS Publ., Vol. 4.
14. Gunther V.E., Yasenichuk Yu.F., Gyunter S.V., Marchenko E.S., Iuzhakov M.M. (2019) Biocompatibility of porous shs-tini. *Materials Science Forum*. 970. pp. 320-327.

15. Wang W., Kong C., Pan F. et al. (2023) Effects of dynamic and rigid implantation on biomechanical characteristics of different sagittal alignment lumbar after single- or double-level spinal fixations: a finite-element modeling study. *European Journal of Medical Research*. 28. Article 583. DOI: 10.1186/s40001-023-01475-y.
16. Biswas J.K., Rana M., Malas A., Roy S., Chatterjee S., Choudhury S. (2022) Effect of single and multilevel artificial inter-vertebral disc replacement in lumbar spine: A finite element study. *The International Journal of Artificial Organs*. 45(2). pp. 193–199. DOI: 10.1177/03913988211001875.
17. Zhang W., Zhao J., Li L., Yu C., Zhao Y., Si H. (2020) Modelling tri-cortical pedicle screw fixation in thoracic vertebrae under osteoporotic condition: A finite element analysis based on computed tomography. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 187. Article 105035.
18. Rohlmann A. et al. (2007) Comparison of the effects of bilateral posterior dynamic. *European Spine Journal*. 16(8). pp. 1223–1231.
19. Kolmakova T.V. (2016) Study of the influence of degenerative intervertebral disc changes on the deformation behavior of the cervical spine segment in flexion. *AIP Conference Proceedings*. 1783. Article 020095. DOI: 10.1063/1.4966388.
20. Hernandez C.J., Beaupré G.S., Keller T.S., Carter D.R. (2001) The influence of bone volume fraction and ash fraction on bone strength and modulus. *Bone*. 29(1). pp. 74–78. DOI: 10.1016/s8756-3282(01)00467-7.
21. Ng H.W., Teo E.C., Lee V.S. (2004) Statistical factorial analysis on the material property sensitivity of the mechanical responses of the C4–C6 under compression, anterior and posterior shear. *Journal of Biomechanics*. 37. pp. 771–777.
22. Hueston S., Makola M., Mabe I., Goswami T. (2012) Cervical spine anthropometric and finite element biomechanical analysis. *Human Musculoskeletal Biomechanics*. United States of America: Wright State University. pp. 107–158. DOI: 10.5772/35524.
23. Rapillard L., Charlebois M., Zysset P.K. (2006) Compressive fatigue behavior of human vertebral trabecular bone. *Journal of Biomechanics*. 39. pp. 2133–2139. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2005.04.033.
24. Yuan B., Zhu M., Chung C.Y. (2018) Biomedical porous shape memory alloys for hard tissue replacement materials. *Materials*. 11. 1716. pp. 1–53.
25. Cobian D.G., Sterling A.C., Anderson P.A., Heiderscheit B.C. (2009) Task specific frequencies of neck motion measured in healthy young adults over a 5 day period. *Spine*. 34(6). pp. E202–E207. DOI: 10.1097/BRS.0b013e3181908c7b.

Сведения об авторах:

Чайковская Татьяна Витальевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kolmakova@ftf.tsu.ru

Марченко Екатерина Сергеевна – доктор физико-математических наук, доцент, заведующая лабораторией медицинских материалов и имплантатов с памятью формы Сибирского физико-технического института, заведующая кафедрой прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: 89138641814@mail.ru

Ветрова Анна Викторовна – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, инженер-исследователь лаборатории медицинских материалов и имплантатов с памятью формы Сибирского физико-технического института (Томск, Россия). E-mail: aniuta-vetrova@mail.ru

Information about the authors:

Chaykovskaya Tat'yana V. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kolmakova@ftf.tsu.ru

Marchenko Ekaterina S. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 89138641814@mail.ru

Vetrova Anna V. (Graduate Student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aniuta-vetrova@mail.ru

Статья поступила в редакцию 08.02.2024; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 08.02.2024; accepted for publication 09.12.2024

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2024. № 92

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 25.12.2024 г. Формат 70×100^{1/16}.
Печ. л. 11,6; усл. печ. л. 10,8. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 6182.

Дата выхода в свет 15.01.2025 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru