

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2025

№ 93

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36
Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>
Контактный тел./факс: (3822) 529-740
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Ворожцов А.Б., Бондарчук И.С., Прокопчук А.О., Марченко Е.С., Соколов С.Д. Идентификация кинетических параметров процесса инактивации бактерий в присутствии паров йода	5
Зубов Н.Е., Лапин А.В. Явные аналитические формулы псевдообращения произвольных матриц	19
Королева А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М.В. Идемпотентные и ниль-чистые формальные матрицы второго порядка над кольцами вычетов	30
Цыденов Б.О., Деги Д.В., Барт А.А., Трунов Н.С., Чуруксаева В.В. Математическая модель динамики биогеохимических процессов в пресноводном озере с учетом кислорода при развитии термобара	41
Тожиев И.Т. Задача нахождения собственных значений и собственных функций краевых задач для уравнения смешанного типа	58

МЕХАНИКА

Глушков С.П., Молокова Н.В., Проворная Д.А. Динамические режимы виброзащитных систем	67
Гордеев К.А., Цвик Л.Б. О методике выбора рациональной формы роликов подшипников по критерию их усталостной долговечности	79
Ищенко А.Н., Акользин В.С., Буркин В.В., Бирюков И.М., Дьячковский А.С., Шестопалова А.С., Чупашев А.В. Подводный старт суперкавитирующих ударников из лабораторных метательных установок различной длины	96
Казанцева Н.В., Онищенко А.О., Зелепугин С.А., Черепанов Р.О., Иванова О.В. Деформация и разрушение сетчатых PLA образцов при динамическом нагружении	106
Кузнецов Э.Д., Смагина Е.С., Жмакин И.С., Уразаев Т.Р. Исследование стохастических свойств средневысотной области движения спутников глобальных навигационных систем	117
Липанов А.М. О влиянии конусности канала заряда на величины внутрибаллистических параметров РДТТ	131
Оберемок А.А., Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л. Численное исследование тепловентиляционного состояния припортового тамбура тоннеля в зимнее время года	140
Рогасев К.С., Дьячковский А.С., Саморокова Н.М., Ищенко А.Н., Сидоров А.Д., Саммель А.Ю., Бураков В.А., Шестопалова А.С. Исследование горения высокоплотного топлива в условиях комбинированной схемы заряжания	160
Скрипник В.В., Скрипник Е.Г., Скрипник В.А. Механическое поведение трехслойных структур из алюминиевого сплава со слоями аустенитического метаматериала при динамических воздействиях в диапазоне температур от 153 до 473 К	172

CONTENTS

MATHEMATICS

Vorozhtsov A.B., Bondarchuk I.S., Prokopchuk A.O., Marchenko E.S., Sokolov S.D. Experimental study and identification of kinetic parameters of the process of bacterial inactivation in the presence of iodine vapor	5
Zubov N.E., Lapin A.V. Explicit analytical formulas of arbitrary matrices pseudoinverse	19
Koroleva A.M., Norbosambuev T.D., Podkorytov M.V. Idempotent and nil-clean formal matrices of order 2 over residue class rings	30
Tsydenov B.O., Degi D.V., Bart A.A., Trunov N.S., Churuksaeva V.V. A mathematical model of the dynamics of biogeochemical processes in a freshwater lake including oxygen circulation with the development of the thermal bar	41
Tojiboev I.T. The problem of finding eigenvalues and eigenfunctions of boundary value problems for mixed-type equations	58

MECHANICS

Glushkov S.P., Molokova N.V., Provornaya D.A. Dynamic modes of a vibration isolation system	67
Gordeev K.A., Tsvik L.B. On the methodology of choosing rational shape of bearing rollers based on their fatigue durability criterion	79
Ishchenko A.N., Akol'zin V.S., Burkin V.V., Biryukov I.M., D'yachkovskiy A.S., Shestopalova A.S., Chupashev A.V. Underwater launching of supercavitating projectiles from laboratory bores of different lengths	96
Kazantseva N.V., Onishchenko A.O., Zelepugin S.A., Cherepanov R.O., Ivanova O.V. Deformation and fracture of PLA honeycomb samples under dynamic loading	106
Kuznetsov E.D., Smagina E.S., Zhmakin I.S., Urazaev T.R. A study of stochastic properties of the mid-altitude region of motion of global navigation system satellites	117
Liparov A.M. On the effect of charge channel conicity on the internal ballistic parameters of a solid-propellant rocket motor	131
Oberemok A.A., Krainov A.Yu., Min'kov L.L. A numerical study of the heat-ventilation state of a portal tambour of a tunnel in winter	140
Rogaev K.S., D'yachkovskiy A.S., Samorokova N.M., Ishchenko A.N., Sidorov A.D., Sammel' A.Yu., Burakov V.A., Shestopalova A.S. A study of high-density propellant combustion in the framework of a combined loading scheme	160
Skipnyak V.V., Skipnyak E.G., Skipnyak V.A. Mechanical behavior of three-layer structures made of aluminum alloy with layers of auxetic metamaterial under dynamic impacts in the temperature range of 153–473 K	172

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 51-76

MSC: 92-08, 92-10

doi: 10.17223/19988621/93/1

**Идентификация кинетических параметров процесса
инактивации бактерий в присутствии паров йода**

**Александр Борисович Ворожцов¹, Иван Сергеевич Бондарчук²,
Анна Олеговна Прокопчук³, Екатерина Сергеевна Марченко⁴,
Сергей Дмитриевич Соколов⁵**

1, 2, 3, 4, 5 Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ abv1953@mail.ru

² ivanich_91@mail.ru

³ bio_1979@mail.ru

⁴ 89138641814@mail.ru

⁵ sokolovsd95@yandex.ru

Аннотация. Представлены результаты экспериментального исследования процесса инактивации модельного штамма бактерий *Lactobacillus casei* ATCC 393 с использованием паров йода при различных температурах ($T = 27, 37, 40$ и 42°C). Проведена идентификация кинетических параметров на основе нелинейной модели инактивации Вейбулла изменения численности модельного штамма бактерий от времени инкубации в присутствии паров йода при температурах $T = 27, 37, 40, 42^\circ\text{C}$. Задача идентификации требуемых кинетических параметров математической модели ставится как задача оптимизации, в ходе выполнения которой проводится последовательное решение обратной и прямой кинетических задач с целью подтверждения адекватности модели. Представлены результаты численных расчетов в соответствии с предлагаемым подходом на основе уравнения Вейбулла.

Ключевые слова: биокинетика, математическая модель, кинетические параметры, модель Вейбулла, коэффициент детерминации R^2

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № РНФ 22-69-00108, <https://rscf.ru/project/22-69-00108/>.

Для цитирования: Ворожцов А.Б., Бондарчук И.С., Прокопчук А.О., Марченко Е.С., Соколов С.Д. Идентификация кинетических параметров процесса инактивации бактерий в присутствии паров йода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 5–18. doi: 10.17223/19988621/93/1

Original article

Experimental study and identification of kinetic parameters of the process of bacterial inactivation in the presence of iodine vapor

Alexander B. Vorozhtsov¹, Ivan S. Bondarchuk², Anna O. Prokopchuk³, Ekaterina S. Marchenko⁴, Sergey D. Sokolov⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ abv1953@mail.ru

² ivanich_91@mail.ru

³ bio_1979@mail.ru

⁴ 89138641814@mail.ru

⁵ sokolovsd95@yandex.ru

Abstract. The article presents results of an experimental study of the inactivation process of the model bacterial strain *L. casei* ATCC 393 in the presence of iodine vapor at temperatures of $T = 27, 37, 40$ and 42°C .; kinetic curves of survival under the influence of iodine vapor at the given temperatures have been obtained. The results of the experimental study demonstrate the high efficiency of iodine vapor against the model bacterial strain. A non-linear Weibull model is proposed to describe the inactivation process of the model bacterial strain *L. casei* ATCC 393 under the influence of iodine vapor at different temperatures ($T = 27, 37, 40$, and 42°C). The problem of identifying the model parameters is set as an optimization problem in order to minimize the spread of one of the determined parameters. The identification process includes a sequential solution of the inverse and direct kinetic problems and subsequent comparison of the calculated values with the experimental data, which confirms the adequacy of the model. Microsoft Excel software is used for the kinetic analysis and evaluation of the model parameters. The criterion for selecting the optimal parameters of the mathematical model of the process is the minimum value of the statistical functional in the form of the variation coefficient and the maximum value of the nonlinear determination coefficient R^2 . High values of the determination coefficient R^2 from 0.94 to 0.99 confirm the adequacy of the model. It is shown that the Weibull model is suitable for the qualitative and quantitative analysis of the inactivation process of the model bacterial strain *L. casei* ATCC 393 under the influence of iodine vapor at different temperatures $T = 27, 37, 40$, and 42°C).

Keywords: biokinetics, mathematical model, kinetic parameters, Weibull model, determination coefficient R^2

Acknowledgments: This study was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 22-69-00108), <https://rscf.ru/project/22-69-00108/>)

For citation: Vorozhtsov, A.B., Bondarchuk, I.S., Prokopchuk, A.O., Marchenko, E.S., Sokolov, S.D. (2025) Experimental study and identification of kinetic parameters of the process of bacterial inactivation in the presence of iodine vapor. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 5–18. doi: 10.17223/19988621/93/1

Введение

Прогностическая микробиология – относительно новая область прикладных исследований в микробиологии, которая использует математические модели и методы для описания процессов роста и выживания микроорганизмов, претерпевающих сложные изменения в окружающей среде под воздействием внешних условий (температура, уровень pH, влажность). Она превратилась в самостоятельную область исследований с начала 1990-х гг., когда микробиологи начали использовать эмпирические модели для количественного описания процессов роста и снижения численности микроорганизмов. С тех пор математические модели, используемые в прогностической микробиологии, обычно группируются в три категории и подразделяются на три уровня. К первой группе относятся первичные модели. Они используются для описания скорости роста и уменьшения численности микроорганизмов в постоянных условиях окружающей среды (например, изотермических). Первичные модели обычно содержат фундаментальные кинетические параметры, которые определяют количественные характеристики роста или выживания биологических патогенов (бактерий, штаммов, вирусов) в конкретных условиях эксперимента. Вторичные модели используются для описания влияния условий окружающей среды, в частности температуры, влажности, уровня pH, воздействия дезинфицирующего средства, на кинетические параметры первичной модели. Температура обычно является одним из основных физических факторов, влияющих на рост и выживание микроорганизмов. После процедуры построения вторичной модели последнюю можно использовать совместно с первичной моделью для прогнозирования роста или снижения численности микроорганизмов. Комплекс, который объединяет первичную и вторичную модели для прогнозирования поведения конкретных биологических патогенов, называется третичной моделью [1–3].

Разработка математических моделей прогнозирования численности микроорганизмов, основанная на анализе кинетики химических реакций, следует трехэтапной процедуре. Первый этап состоит в постановке и проведении серии экспериментальных исследований процессов роста или выживания микроорганизмов в конкретных условиях внешней среды. Данные о кинетике роста или выживания анализируются для поиска и выбора наиболее подходящих первичных моделей, которые могут описывать процессы роста или снижения численности микроорганизмов, а также для определения соответствующих кинетических параметров. Второй этап заключается в анализе кинетических параметров, полученных из первичной модели, для поиска подходящей вторичной модели, которая строится для достаточного количества экспериментальных точек в различных условиях внешней среды. На третьем этапе первичные и вторичные модели объединяются в форме электронных таблиц Excel для прогнозирования процессов роста или уменьшения численности разнообразных биологических патогенов (бактерий, вирусов, спор) [4–6].

С математической точки зрения первые два этапа являются обратными задачами, что означает, что исходные данные эксперимента должны быть аппроксимированы с использованием кинетических моделей роста или инактивации, проведена идентификация кинетических параметров, которые отражают влияние времени и температуры на процессы роста или выживания целевых патогенов.

Третий этап представляет собой решение прямой кинетической задачи, что означает, что численные значения кинетических параметров, определенные в ходе решения обратной кинетической задачи, подставляются в исходное уравнение модели процесса; получается ряд расчетных значений, который сравнивается с исходными экспериментальными данными [5]. Таким образом, точность аппроксимации и степень адекватности модели процесса могут быть количественно оценены путем сопоставления исходных данных эксперимента и результатов решения прямой задачи кинетики при известных параметрах модели процесса, полученных из решения обратной задачи. Только после выполнения этого этапа кинетическая модель может считаться верифицированной и использоваться для прогнозирования процессов роста или снижения численности микроорганизмов [7–9].

Одна из ключевых проблем при оценке применимости биоцидного энергетического материала возникает при измерении бактерицидной активности в процессе инактивации биологических патогенов, которые могут использоваться в качестве компонентов биологической оружия. Конечно, экспериментальные исследования с использованием чрезвычайно опасных патогенов не могут быть проведены по очевидным причинам, связанным с безопасностью. Как альтернативный вариант в качестве целевых клеток могут быть выбраны различные модельные микроорганизмы со схожими биохимическими свойствами [10]. Математическое моделирование кинетики микробного роста или инактивации является одним из основных элементов количественной оценки степени воздействия дезинфицирующего средства на микроорганизмы. Кроме того, прогностическое моделирование может использоваться для сравнения эффективности различных технологий нейтрализации в снижении численности микробных популяций. В линейных моделях инактивации микробная популяция демонстрирует схожую устойчивость к дезинфицирующему средству, тогда как нелинейные модели учитывают, что микробная популяция демонстрирует различную устойчивость, что будет проявляться в различных формах кривых инактивации [11]. Однако, принимая во внимание различную восприимчивость микроорганизмов к парам дезинфицирующего вещества, которая может зависеть от нескольких факторов, включая целевой микроорганизм, начальный уровень численности микробов, физиологическое состояние бактериальных клеток, физическое состояние дезинфектанта, очень важно количественно оценить дозу дезинфицирующего вещества, достаточную для достижения требуемого уровня численности микроорганизмов.

Цель данной работы – идентификация параметров функции распределения $S(t)$ в форме кинетической модели инактивации Вейбулла модельного штамма бактерий *L. casei* ATCC 393 с использованием галогенсодержащих паров при температурах $T = 27, 37, 40, 42^\circ\text{C}$ результате последовательного решения обратной и прямой кинетических задач.

Методика экспериментального исследования

Оценка антибактериального воздействия проводилась через 48 ч визуальным методом подсчета колонии образующих единиц (КОЕ) в чашках Петри. Индекс антибактериальной активности Z подсчитывали по формуле

$$Z = \frac{K - O}{K} \cdot 100\%, \quad (1)$$

где K – количество бактерий в отрицательном контроле, O – количество бактерий в опытном образце.

Результаты экспериментального исследования и их анализ

Результаты экспериментального исследования процесса инактивации на примере модельного штамма в присутствии паров йода при различных температурах приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения индекса антибактериальной активности при воздействии паров йода на клетки бактерий при различных температурах.

Время t , мин	Температура T , °C			
	27	37	40	42
3	60.69	67.35	88.13	83.07
5	77.24	82.35	94.04	97.35
10	96.90	92.94	95.87	99.79
15	98.34	96.47	96.30	99.89
20	99.17	98.24	99.18	99.95

Результаты экспериментального исследования показывают высокую эффективность паров йода против модельного штамма *L. casei* ATCC 393. При воздействии паров йода с концентрацией 13.36 моль/л в течение 20 мин почти во всех случаях наблюдалась гибель практически 99.0% бактерий, за исключением температуры $T = 37^\circ\text{C}$. Нарастание индекса антибактериальной эффективности происходит с увеличением времени обработки от 3 до 20 мин независимо от значения температуры. При длительности воздействия от 10 до 20 мин индекс антибактериальной активности остается выше 90%, а при температурах 27, 40, 42°C индекс антибактериальной активности показывает наивысшие значения на уровне около 99%. Исследования антибактериального воздействия паров йода при температуре 37°C в условиях влажности 56 и 99% показали 100%-ный антибактериальный эффект. Таким образом, эксперимент показал, что обработка парами йода в течение 20 мин успешно подавляет рост модельного штамма бактерий *L. casei* ATCC 393 независимо от изменения влажности воздуха.

Поскольку инактивацию или гибель отдельного микроба в ходе процесса дезинфекции можно рассматривать как неспособность последнего преодолеть какое-либо физическое или химическое воздействие, выбор распределения Вейбулла в данном случае является вполне естественным [12, 13]. Двумя параметрами функции распределения $f(t)$, названной в честь Валодди Вейбулла, детально охарактеризовавшего его в 1951 г. (хотя впервые его определил Фреше в 1927 г., а применено оно было еще в 1933 г. для описания распределения размеров частиц), являются α , известный как параметр формы, и β , известный как коэффициент масштаба:

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]. \quad (2)$$

Для целей настоящего исследования, поскольку проводится изучение кинетики процесса, используется версия модели, известная как распределение Розина-Раммлера, которая была предложена за три года до того, как оно было выдвинуто Вейбуллом [14].

Если кинетика процесса исследуется в статических условиях, т.е. при постоянной концентрации дезинфицирующего средства $C = \text{const}$ (и при постоянных температуре, pH и т.д.), модель Вейбулла может быть представлена как [15, 16]

$$\lg[S(t)] = -b(C) \cdot t^{m(C)}, \quad (3)$$

где $S(t)$ – функция выживаемости, $b(C)$ – параметр скорости, зависящий от концентрации, связанный с обратным коэффициентом масштаба Вейбулла, $m(C)$ – показатель степени, параметр формы распределения Вейбулла. Если показатель степени $m(C)$ не зависит от концентрации или имеет слабую зависимость, его можно считать практически постоянным [17]. Тогда для описания кривых выживания в статических условиях модель Вейбулла принимает следующий вид:

$$\lg S = -b \cdot t^m. \quad (4)$$

Выражение (4) оценивает текущее количественное содержание микроорганизмов S_i в момент времени t_i при неизменной температуре (изотермические условия). Если $m > 1$, кривая выживания имеет вогнутость вниз; если $m < 1$ – вогнутость вверх. Если $m = 1$, кривая выживания соответствует кинетике первого порядка и является логарифмически линейной.

Для математических моделей анализ линейной корреляции между результатами решения прямой кинетической задачи и экспериментальными данными является мощным инструментом исследования этих моделей [18]. Параметры математической модели реакции определяются путем решения обратной задачи химической кинетики на основе полученных экспериментальных данных. Адекватность модели реакции может быть оценена по совпадению исходных экспериментальных данных и результатов решения прямой кинетической задачи при известных параметрах модели процесса, полученных из решения обратной задачи кинетики. Чаще всего критерием выступает либо квадрат разницы между расчетными и экспериментальными значениями концентраций, либо максимальное значение нелинейного коэффициента детерминации R^2 . Результаты, полученные при определенных значениях кинетических параметров, необходимо сравнивать с исходными экспериментальными данными для подтверждения фактического применения на основе принятых допущений.

За основу был взят подход, приведенный в работе [19]. В указанной работе представлена кинетическая модель термической инактивации вегетативных бактериальных клеток и их спор, а также приведены метод решения и простой алгоритм численной реализации предложенного подхода к расчету параметров модели. Задача идентификации требуемых искомым параметров математической модели процесса ставится как задача оптимизации, чтобы минимизировать разброс одного из определяемых параметров математической модели, который по своей сути является постоянным [20]. Реализация алгоритма может быть выполнена посредством нескольких Excel-формул в виде короткого программного кода, который может быть легко воспроизведен и верифицирован. Обычно последовательность действий при верификации кинетических моделей такова: на первом этапе выполняется решение обратной кинетической задачи для оценки параметров модели, а затем на основе полученных численных значений проводится решение прямой задачи; в конце происходит сравнение полученных расчетных значений с исходными экспериментальными данными, проверяется адекватность модели. Применительно к задачам бактерицидной инактивации кинетический

анализ кривых выживания с целью оценки параметров математической модели процесса и оценки степени соответствия проводился инструментарием электронных таблиц Microsoft Excel с применением надстройки «Поиск решения». Эффективность Microsoft Excel при решении кинетических задач обеспечивается надстройкой «Поиск решения» – мощной программой оптимизации, позволяющей находить решения сложных проблем, которые в альтернативном случае требуют достаточно обширных высокоуровневых знаний в областях математического анализа, численных методов и программирования. При реализации решения обратной кинетической задачи с применением надстройки «Поиск решения» используется метод обобщенного понижающего градиента (ОПГ) для нелинейных функций. В своей основе этот инструмент базируется на анализе градиента целевой функции при изменении (вариациях) входных значений (или переменных решения) и оценивает достижение оптимального решения, когда частные производные равны нулю [20].

Для описания процесса инактивации используется математическая модель, описывающая скорость изменения некоторой безразмерной величины S , представляющей собой относительное количество живых клеток как кинетическую зависимость m -го порядка от времени t , где константа скорости инактивации b определяется через уравнение (4). Исходные экспериментальные данные могут быть представлены в виде таблицы $\{t_i, S_i\}$ ($i = 0, \dots, N$) как зависимость безразмерного числа живых бактериальных клеток S_i в различные моменты времени t_i при постоянной температуре T . По физическому смыслу анализируемые данные должны начинаться со значений $S_0 = 1$. Зависимость безразмерного числа живых микроорганизмов от времени описывается соотношением (4), из которого можно выразить значение кинетического параметра b , принимая во внимание, что при постоянной температуре коэффициент скорости $b = \text{const}$:

$$b = -\lg(S)/t^m, \quad (5)$$

где $i = 0, \dots, N$ – количество экспериментальных точек. Таким образом, в соответствии с уравнением (5) для каждого диапазона значений t_0 – t_i исходной таблицы данных $\{t_i, S_i\}$ ($i = 0, \dots, N$) для конкретной температуры эксперимента T можно рассчитать набор констант b_i :

$$b_i = -\lg(S_i)/t_i^m. \quad (6)$$

Предполагается, что оптимальные значения кинетических параметров b , m достигаются, когда набор вычисленных значений b_i имеет минимальный разброс, так как b является постоянным по своей сути. Это предположение можно математически выразить с помощью функционала F , который является статистической функцией коэффициента вариации [20]:

$$F = \frac{1}{b} \cdot \left[\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (b_i - b)^2 \right]^{0,5}, \quad b = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N b_i. \quad (7)$$

Другими словами, неизвестные значения параметра m выбираются таким образом, что для набора констант b_i рассчитанное по формуле (7) суммарное отклонение должно минимально отличаться от среднего значения b . Полученные в результате минимизации функционала (7) кинетические параметры b и m позволяют определить их оптимальные численные значения для функции $S(t)$ при

конкретной температуре T . Несомненным преимуществом предлагаемого подхода является процесс поиска оптимальных значений b и m , где варьирует только переменная m . Функционал F соответствует коэффициенту вариации, который можно легко рассчитать с помощью статистических функций Excel.

Изложенный подход был применен при решении задачи идентификации кинетических параметров по экспериментальным данным процесса инактивации при воздействии паров йода на бактерии *L. casei* ATCC 393 при температурах $T = 27, 37, 40, 42^\circ\text{C}$. Решение задачи было выполнено средствами электронных таблиц MS Excel, не требующими опыта программирования на языках высокого уровня. Для нахождения оптимальных значений кинетических параметров b и m была использована надстройка «Поиск решения».

В результате проведения экспериментального исследования получены кинетические кривые выживания при воздействии паров йода на бактерии *L. casei* ATCC 393 при температурах $T = 27, 37, 40, 42^\circ\text{C}$. На рис. 1 приведены исходные экспериментальные данные, представлены результаты численных расчетов в соответствии с предлагаемым подходом на основе уравнения Вейбулла (4).

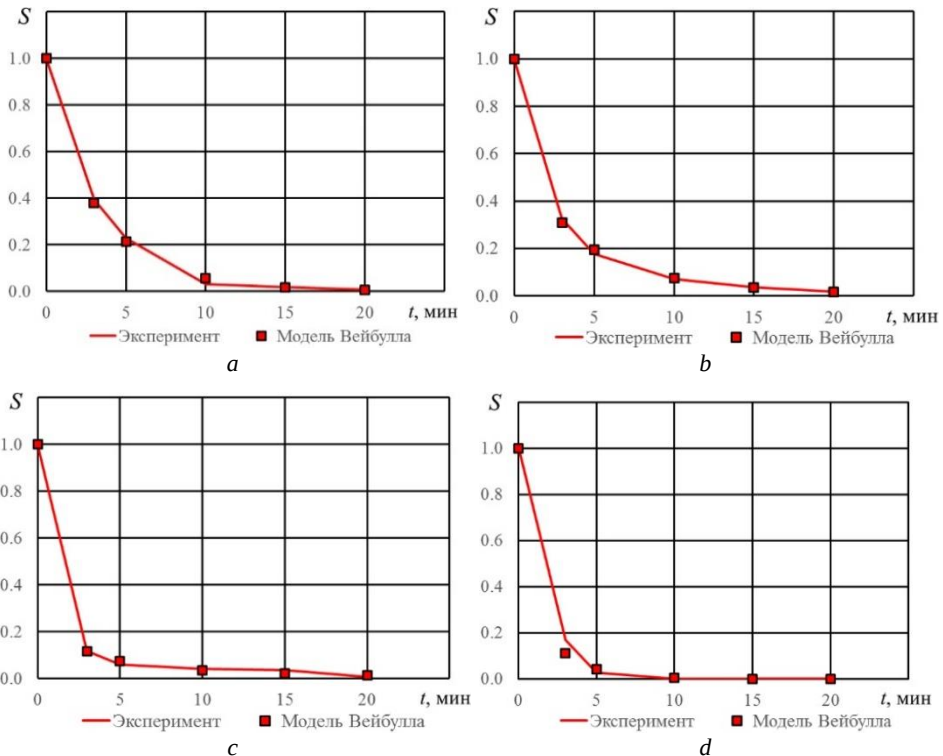


Рис. 1. Графическая иллюстрация точности приближения исходных экспериментальных данных в рамках нелинейной модели Вейбулла при воздействии паров йода на бактерии *L. casei* ATCC 393 при температурах: $T = 27^\circ\text{C}$ (a); $T = 37^\circ\text{C}$ (b); $T = 40^\circ\text{C}$ (c); $T = 42^\circ\text{C}$ (d)
Fig. 1. Graphic illustration of the accuracy of the initial experimental data approximation within the framework of the nonlinear Weibull model for the effect of iodine vapor on *L. casei* ATCC 393 bacteria at temperatures $T =$ (a) 27; (b) 37; (c) 40; and (d) 42°C

Была проведена идентификация кинетических параметров на основе нелинейной модели инактивации Вейбулла изменения численности бактерий *L. casei* ATCC 393 от времени инкубации в присутствии паров йода при температурах $T = 27, 37, 40, 42^\circ\text{C}$. Обратная кинетическая задача была решена на основе использования модели Вейбулла (4) в соответствии с подходом, который базируется на минимизации функционала оптимизации [19, 20]. В табл. 2 приведены результаты решения обратной и прямой кинетических задач на основе уравнения (4) при аппроксимации исходных экспериментальных данных.

Таблица 2

Результаты решения обратной и прямой кинетических задач на основе уравнения (4) при аппроксимации исходных экспериментальных данных

Время t , мин	Результаты эксперимента, $T = 27^{\circ}\text{C}$		Расчет по уравнению (4)				Средняя ошибка ε , %	R^2
	S_i	$\lg S_i$	$\hat{S}_i$	$\lg \hat{S}_i$	b	m		
0	1.00	0.00	1.00	0.00	0.16	0.91	7.81	0.9604
3	0.39	-0.41	0.38	-0.42				
5	0.23	-0.64	0.21	-0.67				
10	0.03	-1.51	0.06	-1.25				
15	0.02	-1.78	0.02	-1.81				
20	0.01	-2.08	0.00	-2.35				
Время t , мин	Результаты эксперимента, $T = 37^{\circ}\text{C}$		Расчет по уравнению (4)				Средняя ошибка, ε , %	R^2
	S_i	$\lg S_i$	$\hat{S}_i$	$\lg \hat{S}_i$	b	m		
0	1.00	0.00	1.00	0.00	0.25	0.66	3.02	0.9982
3	0.33	-0.49	0.31	-0.51				
5	0.18	-0.75	0.19	-0.71				
10	0.07	-1.15	0.07	-1.13				
15	0.04	-1.45	0.03	-1.47				
20	0.02	-1.75	0.02	-1.78				
Время t , мин	Результаты эксперимента, $T = 40^{\circ}\text{C}$		Расчет по уравнению (4)				Средняя ошибка, ε , %	R^2
	S_i	$\lg S_i$	$\hat{S}_i$	$\lg \hat{S}_i$	b	m		
0	1.00	0.00	1.00	0.00	0.63	0.36	8.42	0.9471
3	0.12	-0.93	0.12	-0.94				
5	0.06	-1.22	0.07	-1.13				
10	0.04	-1.38	0.04	-1.45				
15	0.04	-1.43	0.02	-1.68				
20	0.01	-2.09	0.01	-1.87				
Время t , мин	Результаты эксперимента, $T = 42^{\circ}\text{C}$		Расчет по уравнению (4)				Средняя ошибка, ε , %	R^2
	S_i	$\lg S_i$	$\hat{S}_i$	$\lg \hat{S}_i$	b	m		
0	1.00	0.00	1.00	0.00	0.43	0.72	13.47	0.9475
3	$1.7 \cdot 10^{-1}$	-0.77	$1.1 \cdot 10^{-1}$	-0.95				
5	$2.6 \cdot 10^{-2}$	-1.58	$4.2 \cdot 10^{-2}$	-1.37				
10	$2.1 \cdot 10^{-3}$	-2.67	$5.4 \cdot 10^{-3}$	-2.26				
15	$1.1 \cdot 10^{-3}$	-2.98	$9.3 \cdot 10^{-4}$	-3.03				
20	$5.3 \cdot 10^{-4}$	-3.28	$1.9 \cdot 10^{-4}$	-3.73				

Численные значения параметров нелинейной модели инактивации были рассчитаны с использованием модели Вейбулла (4) при указанных значениях темпе-

ратуры. Проведено сравнение результатов, рассматриваемых в рамках модели инактивации на базе распределения Вейбулла [15], с результатами экспериментов, полученными в процессе инактивации штамма бактерий *L. casei* ATCC 393 под воздействием паров йода при температурах $T = 27, 37, 40, 42^\circ\text{C}$. Точность аппроксимации при описании процесса инактивации при указанных температурах была подтверждена с помощью расчетных значений относительного логарифмического снижения численности микроорганизмов $\lg \hat{S}_i$. Численные значения $\lg \hat{S}_i$, рассчитанные из параметров математической модели процесса с использованием уравнения Вейбулла (4) для конкретных значений температуры, также приведены в табл. 2.

Для проверки точности полученного решения была решена прямая кинетическая задача. Для этого рассчитанные при решении обратной кинетической задачи величины b и m были подставлены в исходное выражение для текущей концентрации микроорганизмов (4). Величины относительных ошибок для каждой пары исходных значений $\{t_i, S_i\}$ рассчитываются по формуле

$$|\varepsilon_i| = \left| 1 - \frac{S_i}{\hat{S}_i} \right| \cdot 100\%, \quad (8)$$

где $\hat{S}_i$ – расчетное в соответствии с моделью Вейбулла текущее (относительно исходного) значение количества живых клеток в момент времени t_i .

Количественная адекватность метода характеризовалась коэффициентом детерминации R^2 по доле дисперсии ошибки модели:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (S_i - \hat{S}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (S_i - \bar{S}_i)^2}, \quad \bar{S}_i = \frac{\sum_{i=1}^N S_i}{N}, \quad (9)$$

где $\bar{S}_i$ – среднее значение текущего количества (относительно исходного) живых клеток к моменту времени t_i .

Принятая при описании исходных экспериментальных данных нелинейная модель Вейбулла базируется на уравнении процесса, где порядок m может принимать произвольное значение. Хорошее соответствие между результатами расчетов (см. рис. 1, табл. 2) и данными эксперимента объясняется, в частности, тем, что в предлагаемом подходе порядок процесса m может иметь любое значение, а не принимать только целое значение. Соответственно, предлагаемый подход на основе использования нелинейной модели Вейбулла при описании процесса инактивации штамма бактерий *L. casei* ATCC 393 под воздействием паров йода при температурах $T = 27, 37, 40, 42^\circ\text{C}$ обладает более высокой точностью при аппроксимации исходных данных эксперимента, чем традиционно используемое логарифмически-линейное уравнение, когда порядок процесса принимает фиксированное значение $m = 1$. Относительно высокие значения коэффициентов детерминации R^2 , которые находятся между 0.94 и 0.99 (см. рис. 1, табл. 2) для полученных в процессе анализа экспериментальных данных по инактивации модельного штамма бактерий *L. casei* ATCC 393 под воздействием паров йода при указанных температурах, также подтверждают высокую степень адекватности предлагаемой модели процесса. Из рис. 1 и табл. 2 видно, что предлагаемый подход на основе нелинейной модели Вейбулла обеспечивает корректные параметры по точности аппроксимации при описании исходных экспериментальных данных. Приведенные выше результаты по инактивации штамма бактерий *L. casei* ATCC 393

под воздействием паров йода при указанных температурных условиях и результаты численных расчетов с использованием нелинейной модели Вейбулла подтверждаются результатами других экспериментальных исследований [21, 22].

Таким образом, было показано, что кинетическая модель на основе уравнения Вейбулла является адекватной для описания инактивации штамма бактерий *L. casei* ATCC 393 под воздействием паров йода при температурах $T = 27, 37, 40, 42^{\circ}\text{C}$.

Заключение

Приведены результаты экспериментального исследования процесса инактивации модельного штамма бактерий *L. casei* ATCC 393 в присутствии паров йода при температурах $T = 27, 37, 40, 42^{\circ}\text{C}$. Получены кинетические кривые выживания при воздействии паров йода при температурах $T = 27, 37, 40, 42^{\circ}\text{C}$. Результаты экспериментального исследования показывают высокую эффективность паров йода против модельного штамма бактерий. Проведена идентификация кинетических параметров на основе нелинейной модели инактивации Вейбулла изменения численности бактерий *L. casei* ATCC 393 от времени инкубации в присутствии паров йода при температурах $T = 27, 37, 40, 42^{\circ}\text{C}$. Приведены результаты решения обратной и прямой кинетических задач на основе уравнения Вейбулла, количественного сравнения относительно точности приближений при аппроксимации исходных экспериментальных данных. Адекватность предлагаемой модели процесса подтверждается относительно высокими значениями коэффициентов детерминации R^2 , полученными в результате анализа исходных экспериментальных данных. Показано, что предлагаемый подход на основе нелинейной модели Вейбулла обеспечивает корректные параметры по точности аппроксимаций при описании исходных данных эксперимента.

Список источников

1. Pérez-Rodríguez F. Development and application of predictive microbiology models in foods // Mathematical and Statistical Methods in Food Science and Technology / D. Granato, G. Ares (eds.). New York: John Wiley & Sons, 2014. P. 321-362. doi: 10.1002/9781118434635.ch18
2. Akkermans S., Smet C., Valdramidis V., Van Impe J. Microbial Inactivation Models for Thermal Processes // Food Safety Engineering / A. Demirci, H. Feng, K. Krishnamurthy (eds.). New York: Springer, 2020. P 399-420. (Food Engineering Series). doi: 10.1007/978-3-030-42660-6_15
3. da Silva A.K., Perim M.D., Brito L.M., Alvarenga V.O. Basic Concepts for Predictive Microbiology // Basic Protocols in Predictive Food Microbiology. Methods and Protocols in Food Science / V.O. Alvarenga (ed.). New York: Humana, 2023, P. 1-31. doi: 10.1007/978-1-0716-3413-4_1
4. Van Boekel M.A.J.S. Kinetic Modeling of Food Quality: A Critical Review // Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety. 2008. V. 7, № 1. P. 144–158. doi: 10.1111/j.1541-4337.2007.00036.x
5. Huang L. Dynamic identification of growth and survival kinetic parameters of microorganisms in foods // Current Opinion in Food Science. 2017. V. 14. P. 85–92. doi: 10.1016/j.cofs.2017.01.013
6. Psomas A.N., Nychas G.J., Haroutounian S.A., Skandamis P.N. Development and validation of a tertiary simulation model for predicting the growth of the food microorganisms under dynamic and static temperature conditions // Computers and Electronics in Agriculture. 2011. V. 76, № 1. P. 119–129. doi: 10.1016/j.compag.2011.01.013

7. Dolan K.D., Mishra D.K. Parameter estimation in food science // Annual Review of Food Science and Technology. 2013. V. 4. P. 401–422. doi: 10.1146/annurev-food-022811-101247
8. Clermont G., Zenker S. The inverse problem in mathematical biology // Mathematical Biosciences. 2015. V. 260. P. 11–15. doi: 10.1016/j.mbs.2014.09.001
9. Penalver-Soto J.L., Garre A., Esnoz A., Fernández P.S., Egea J.A. Guidelines for the design of (optimal) isothermal inactivation experiments // Food Research International. 2019. V. 126. Art. 108714. doi: 10.1016/j.foodres.2019.108714
10. Reverberi A.P., Meshalkin V.P., Butusov O.B., Chistyakova T.B., Ferretti M., Cardinale A.M., Fabiano B. Organic and Inorganic Biocidal Energetic Materials for Agent Defeat Weapons: An Overview and Research Perspectives // Energies. 2023. V. 16, № 2. Art. 675. doi: 10.3390/en16020675
11. Bevilacqua A., Speranza B., Sinigaglia M., Corbo M.R. A Focus on the Death Kinetics in Predictive Microbiology: Benefits and Limits of the Most Important Models and Some Tools Dealing with Their Application in Foods // Foods. 2015. V. 4, № 4. P. 565–580. doi: 10.3390/foods4040565
12. Corradini M.G., Peleg M. A model of microbial survival curves in water treated with a volatile disinfectant // Journal of Applied Microbiology. 2003. V. 95, № 6. P. 1268–1276. doi: 10.1046/j.1365-2672.2003.02104.x
13. Peleg M. Modeling the dynamic kinetics of microbial disinfection with dissipating chemical agents – a theoretical investigation // Applied Microbiology and Biotechnology. 2021. V. 105, № 2. P. 539–549. doi: 10.1007/s00253-020-11042-8
14. Brown W.K., Wohletz K.H. Derivation of the Weibull distribution based on physical connection to the Rosin-Rammler and lognormal distributions // Journal of Applied Physics. 1995. V. 78, № 4. P. 2758–2763. doi: 10.1063/1.360073
15. peleg m. advanced quantitative microbiology for foods and biosystems: models for predicting growth and inactivation. Boca Raton, FL: CRC Press, 2006. doi: 10.1201/9781420005370
16. Aragao G.M.F., Corradini M.G., Normand M.D., Peleg M. Evaluation of the Weibull and log-normal distribution functions as survival models of *Escherichia coli* under isothermal and non-isothermal conditions // International Journal of Food Microbiology. 2007. V. 19, № 3. P. 243–257. doi: 10.1016/j.ijfoodmicro.2007.08.004
17. Van Boekel M.A.J.S. On the use of the Weibull model to describe thermal inactivation of microbial vegetative cells // International Journal of Food Microbiology. 2002. V. 74, № 1-2. P. 139–159. doi: 10.1016/S0168-1605(01)00742-5
18. Pearce J.A. Comparative Analysis of Mathematical Models of Cell Death and Thermal Damage Processes // International Journal of Hyperthermia. 2013. V. 29, № 4. P. 262–280. doi: 10.3109/02656736.2013.786140
19. Bondarchuk I., Perevozkin V., Bondarchuk S., Vorozhtsov A. Identification of the Kinetic Parameters of Thermal Micro-Organisms Inactivation // Applied Sciences. 2022. V. 12, № 22. Art. 11505. doi: 10.3390/app122211505
20. Бондарчук И.С., Бондарчук С.С. Кинетика гомогенных химических реакций: методы решения в Excel. Томск: Изд-во Том. гос. пед. ун-та, 2018. 263 с.
21. Mahmoud B.S.M., Bhagat A.R., Linton R.H. Inactivation kinetics of inoculated *Escherichia coli* O157:H7, *Listeria monocytogenes* and *Salmonella enterica* on strawberries by chlorine dioxide gas // Food Microbiology. 2007. V. 24, № 7-8. P. 736–744. doi: 10.1016/j.fm.2007.03.006
22. Mahmoud B.S.M., Linton R.H. Inactivation kinetics of inoculated *Escherichia coli* O157:H7 and *Salmonella enterica* on lettuce by chlorine dioxide gas // Food Microbiology. 2008. V. 25, № 2. P. 244–252. DOI: 10.1016/j.fm.2007.10.015

References

1. Pérez-Rodríguez F. (2014) *Mathematical and Statistical Methods in Food Science and Technology*. New York: John Wiley & Sons. DOI: 10.1002/9781118434635.ch18.

2. Akkermans S., Smet C., Valdramidis V., Van Impe J. (2020) *Food Safety Engineering (Food Engineering Series)*. New York: Springer. DOI: 10.1007/978-3-030-42660-6_15.
3. da Silva A.K., Perim M.D., Brito L.M., Alvarenga, V.O. (2023) *Basic Protocols in Predictive Food Microbiology*. New York: Humana. DOI: 10.1007/978-1-0716-3413-4_1.
4. Van Boekel M.A.J.S. (2008) Kinetic Modeling of Food Quality: A Critical Review. *Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety*. 7(1). pp. 144–158. DOI: 10.1111/j.1541-4337.2007.00036.x.
5. Huang L. (2017) Dynamic identification of growth and survival kinetic parameters of microorganisms in foods. *Current Opinion in Food Science*. 14. pp. 85–92. DOI: 10.1016/j.cofs.2017.01.013.
6. Psomas A.N., Nychas G.J., Haroutounian S.A., Skandamis P.N. (2011) Development and validation of a tertiary simulation model for predicting the growth of the food microorganisms under dynamic and static temperature conditions. *Computers and Electronics in Agriculture*. 76(1). pp. 119–129. DOI: 10.1016/j.compag.2011.01.013.
7. Dolan K.D., Mishra D.K. (2013) Parameter estimation in food science. *Annual Review of Food Science and Technology*. 4. pp. 401–422. DOI: 10.1146/annurev-food-022811-101247.
8. Clermont G., Zenker S. (2015) The inverse problem in mathematical biology. *Mathematical Biosciences*. 260. pp. 11–15. DOI: 10.1016/j.mbs.2014.09.001.
9. Penalver-Soto J.L., Garre A., Esnoz A., Fernández P.S., Egea J.A. (2019) Guidelines for the design of (optimal) isothermal inactivation experiments. *Food Research International*. 126. 108714. DOI: 10.1016/j.foodres.2019.108714.
10. Reverberi A.P., Meshalkin V.P., Butusov O.B., Chistyakova T.B., Ferretti M., Cardinale A.M., Fabiano B. (2023) Organic and Inorganic Biocidal Energetic Materials for Agent Defeat Weapons: An Overview and Research Perspectives. *Energies*. 16(1). 675. DOI: 10.3390/en16020675.
11. Bevilacqua A., Speranza B., Sinigaglia M., Corbo M.R. (2015) A Focus on the Death Kinetics in Predictive Microbiology: Benefits and Limits of the Most Important Models and Some Tools Dealing with Their Application in Foods. *Foods*. 4(4). pp. 565–580.
12. Corradini M.G., Peleg M. (2003) A model of microbial survival curves in water treated with a volatile disinfectant. *Journal of Applied Microbiology*. 95(6). pp. 1268–1276. DOI: 10.1046/j.1365-2672.2003.02104.x.
13. Peleg M. (2021) Modeling the dynamic kinetics of microbial disinfection with dissipating chemical agents—a theoretical investigation. *Applied Microbiology and Biotechnology*. 105(2). pp. 539–549. DOI: 10.1007/s00253-020-11042-8.
14. Brown W.K., Wohletz K.H. (1995) Derivation of the Weibull distribution based on physical connection to the Rosin-Rammler and lognormal distributions. *Journal of Applied Physics*. 78(4). pp. 2758–2763. DOI: 10.1063/1.360073.
15. Peleg M. (2006) *Advanced quantitative microbiology for foods and biosystems: models for predicting growth and inactivation*. Boca Raton, FL: CRC Press. DOI: 10.1201/9781420005370.
16. Aragao G.M.F., Corradini M.G., Normand M.D., Peleg M. (2007) Evaluation of the Weibull and log-normal distribution functions as survival models of *Escherichia coli* under isothermal and non-isothermal conditions. *International Journal of Food Microbiology*. 19(3). pp. 243–257. DOI: 10.1016/j.ijfoodmicro.2007.08.004.
17. Van Boekel M.A.J.S. (2002) On the use of the Weibull model to describe thermal inactivation of microbial vegetative cells. *International Journal of Food Microbiology*. 74(1–2). pp. 139–159. DOI: 10.1016/S0168-1605(01)00742-5.
18. Pearce J.A. (2013) Comparative Analysis of Mathematical Models of Cell Death and Thermal Damage Processes. *International Journal of Hyperthermia*. 29(4). pp. 262–280. DOI: 10.3109/02656736.2013.786140.
19. Bondarchuk I, Perevozkin V, Bondarchuk S, Vorozhtsov A. (2022) Identification of the Kinetic Parameters of Thermal Micro-Organisms Inactivation. *Applied Sciences*. 12(22). 11505. DOI: /10.3390/app122211505.

20. Bondarchuk I.S., Bondarchuk S.S. (2018) *Kinetika gomogennykh khimicheskikh reaktsiy: metody resheniya v Excel* [Kinetics of Homogeneous Chemical Reactions: Solution Methods in Excel]. Tomsk: Tomsk State Pedagogical University.
21. Mahmoud B.S.M., Bhagat A.R., Linton R.H. (2007) Inactivation kinetics of inoculated *Escherichia coli* O157:H7, *Listeria monocytogenes* and *Salmonella enterica* on strawberries by chlorine dioxide gas. *Food Microbiology*. 24(7–8). pp. 736–744. DOI: 10.1016/j.fm.2007.03.006.
22. Mahmoud B.S.M., Linton R.H. (2008) Inactivation kinetics of inoculated *Escherichia coli* O157:H7 and *Salmonella enterica* on lettuce by chlorine dioxide gas. *Food Microbiology*. 25(2). pp. 244–252. DOI: 10.1016/j.fm.2007.10.015.

Сведения об авторах:

Ворожцов Александр Борисович – доктор физико-математических наук, заведующий научно-исследовательской лабораторией высокоэнергетических и специальных материалов физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: abv1953@mail.ru

Бондарчук Иван Сергеевич – инженер-исследователь лаборатории проблем опасных космических объектов физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ivanich_91@mail.ru

Прокопчук Анна Олеговна – кандидат биологических наук, старший научный сотрудник отдела инновационных программ и проектов Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bio_1979@mail.ru

Марченко Екатерина Сергеевна – доктор физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: 89138641814@mail.ru

Соколов Сергей Дмитриевич – младший научный сотрудник лаборатории нанотехнологий металлургии физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: sokolovsd95@yandex.ru

Information about the authors:

Vorozhtsov Alexander B. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: abv1953@mail.ru

Bondarchuk Ivan S. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ivanich_91@mail.ru

Prokopchuk Anna O. (Candidate of Biological Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bio_1979@mail.ru

Marchenko Ekaterina S. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 89138641814@mail.ru

Sokolov Sergey D. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: sokolovsd95@yandex.ru

The article was submitted 02.12.2024; accepted for publication 07.02.2025

Статья поступила в редакцию 02.12.2024; принята к публикации 07.02.2025

Научная статья

УДК 512.643

MSC: 15-XX

doi: 10.17223/19988621/93/2

Явные аналитические формулы псевдообращения произвольных матриц

Николай Евгеньевич Зубов¹, Алексей Владимирович Лапин²

^{1,2} *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия*

¹ *Nik.Zubov@gmail.com*

² *AlexeyPoeme@yandex.ru*

Аннотация. В явном виде получены компактные аналитические формулы псевдообращения на основе аннуляторов, применимые к любым матрицам независимо от размерности и ранга. Формулы упрощают существующий общий алгоритм псевдообращения, основанный на расширении матрицы за счет аннуляторов и обращении расширенной матричной конструкции. Снижается вычислительная сложность псевдообращения, а его явный вид позволяет наглядно анализировать результаты. Преимущества предлагаемых формул показаны на примерах псевдообращения матриц неполного ранга.

Ключевые слова: псевдообратная матрица, матрица неполного ранга, аналитические формулы псевдообращения, матричные аннуляторы, вычислительная сложность алгоритмов

Для цитирования: Зубов Н.Е., Лапин А.В. Явные аналитические формулы псевдообращения произвольных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 19–29. doi: 10.17223/19988621/93/2

Original article

Explicit analytical formulas of arbitrary matrices pseudoinverse

Nikolay E. Zubov¹, Alexey V. Lapin²

^{1,2} *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

¹ *Nik.Zubov@gmail.com*

² *AlexeyPoeme@yandex.ru*

Abstract. In this paper, we have obtained concise explicit analytical formulas for matrix pseudoinversion that are applicable to any matrices, regardless of their dimension and

rank. These formulas may be considered as a generalization of the known analytical formulas for complete-rank matrix pseudoinversion to incomplete-rank matrices. The generalization consists in the use of left-side and right-side zero divisors existing for incomplete-rank matrices. In contrast to uniqueness of the known formulas of pseudoinversion for cases with complete rank equal to the number of rows or columns, this paper shows that pseudoinversion of any matrix may be performed by means of two different analytical formulas, one with a left-side zero divisor, and the other with a right-side one. From a computational point of view, the obtained formulas significantly simplify the existing general algorithm of pseudoinversion based on extending the original matrix by its zero divisors, followed by inverting the extended matrix-construction. The simplification is due to the fact that when using the proposed formulas it is not necessary to invert matrix constructions the dimensions of which are larger than those of the original matrix. Besides, each formula uses only one zero divisor (a left-side one or a right-side one), but not both of them as in the existing extended algorithm, so it is not necessary to calculate the other zero divisor.

The explicit form of the proposed analytical formulas allows visual analyzing the results of pseudoinversion. This is important, for example, when the desired pseudoinverse matrix is a multiplier in some product and we need to show that the product is zero. When isolating a pseudoinverse matrix from an inverted block-matrix construction (as in the existing algorithm), in the general case, it is sufficiently difficult or even impossible to analyze properties of the desired pseudoinverse matrix without additional transformations.

As specific examples of incomplete-rank matrices, the paper shows the advantages of the proposed explicit analytical formulas over the existing general algorithm with extended matrix-construction. The advantages involve both decreasing the computing time and simplifying the form of pseudoinversion results.

Keywords: pseudoinverse matrix, incomplete-rank matrix, analytical formulas of pseudoinversion, matrix zero divisors, computational complexity of algorithms

For citation: Zubov, N.E., Lapin, A.V. (2025) Explicit analytical formulas of arbitrary matrices pseudoinverse. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 19–29. doi: 10.17223/19988621/93/2

Введение

Псевдообращение матриц является одной из важных и распространенных операций в современной линейной алгебре [1]. Оно имеет большое прикладное значение, поскольку используется при решении систем линейных алгебраических уравнений [2], линейных матричных уравнений [3], в методе наименьших квадратов [4], аналитических методах модального синтеза [5], инвариантного управления [6], идентификации систем [7], реконфигурации управления [8], теории оптимальных процессов [9].

Псевдообратной матрицей по Муру–Пенроузу [10] (далее – «псевдообратная матрица») называется матрица A^+ , удовлетворяющая двум условиям регулярности

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+$$

и двум условиям симметричности

$$(A^+A)^T = A^+A, \quad (AA^+)^T = AA^+.$$

Доказано, что у любой матрицы независимо от ее размерности и ранга существует псевдообратная матрица, и притом только одна [11]. Однако в явном виде

аналитические формулы псевдообращения известны только для матриц полного ранга [12].

Если полный ранг равен числу строк (у такой матрицы нет левых аннуляторов [5]), псевдообратная матрица рассчитывается из явного левостороннего соотношения

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}. \quad (1)$$

Если полный ранг равен числу столбцов (у такой матрицы нет правых аннуляторов [13]), псевдообратная матрица рассчитывается из явного правостороннего соотношения

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T. \quad (2)$$

Если ранг одновременно равен числу строк и числу столбцов (это квадратная неособенная матрица, у нее нет ни левых, ни правых аннуляторов), псевдообратная матрица совпадает с обратной матрицей:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}. \quad (3)$$

Неполный ранг могут иметь как прямоугольные, так и вырожденные квадратные матрицы. У таких матриц всегда найдутся и левые, и правые аннуляторы. Существующий метод псевдообращения матриц неполного ранга [14] основан на расширении матрицы за счет ее левого и правого аннуляторов с последующим обращением расширенной блочной конструкции:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^+ & \bar{\mathbf{A}}^R \\ \bar{\mathbf{A}}^L & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $\bar{\mathbf{A}}^L$ и $\bar{\mathbf{A}}^R$ – соответственно левый и правый аннуляторы максимального ранга, $\mathbf{L} = \bar{\mathbf{A}}^{L+}$ и $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{A}}^{R+}$ – их псевдообратные матрицы, $\mathbf{0}$ – нулевая матрица подходящей размерности. Псевдообращение левого и правого аннуляторов максимального (полного) ранга выполняется соответственно по формулам (1) и (2):

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{A}}^{LT} (\bar{\mathbf{A}}^L \bar{\mathbf{A}}^{LT})^{-1}, \quad (5)$$

$$\mathbf{R} = (\bar{\mathbf{A}}^{RT} \bar{\mathbf{A}}^R)^{-1} \bar{\mathbf{A}}^{RT}. \quad (6)$$

У метода псевдообращения, основанного на равенстве (4), можно отметить как минимум два существенных недостатка:

1. Из-за расширения матрицы за счет аннуляторов приходится всегда рассчитывать и псевдообращать как левый, так и правый аннулятор (а не только один из них), а также выполнять обращение матричной конструкции большей размерности, чем исходная матрица $\mathbf{A}$. Таким образом, алгоритм характеризуется избыточной вычислительной сложностью.

2. Из правой части равенства (4) необходимо специально выделять блок, соответствующий требуемой псевдообратной матрице $\mathbf{A}^+$. Отсутствие явного аналитического вида не позволяет в полной мере анализировать структуру и свойства получаемой матрицы $\mathbf{A}^+$.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы, обобщив соотношения (1) и (2) на матрицы неполного ранга, получить явные аналитические формулы псевдообращения произвольной матрицы.

1. Теорема о псевдообращении произвольной матрицы

Теорема. Псевдообращение произвольной матрицы $\mathbf{A}$ может быть выполнено по любой из следующих формул:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}, \quad (7)$$

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T, \quad (8)$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$ – псевдообратные матрицы соответственно левого и правого аннуляторов максимального ранга матрицы $\mathbf{A}$. Если какого-либо из аннуляторов (или их обоих) не существует, соответствующая(-ие) матрица(-ы) $\mathbf{L}$ или (*и*) $\mathbf{R}$ обнуляется(-ются).

Доказательство. На основании соотношений (5) и (6) можно убедиться, что для матриц $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$ справедливы обратные операции

$$\underbrace{(\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T}_{\mathbf{L}^+} = \bar{\mathbf{A}}^L, \quad (9)$$

$$\underbrace{\mathbf{R}^T (\mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1}}_{\mathbf{R}^+} = \bar{\mathbf{A}}^R, \quad (10)$$

а также нулевые равенства, вытекающие из определений аннуляторов

$$\mathbf{A}^T \mathbf{L} = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{A}}^{LT} (\bar{\mathbf{A}}^L \bar{\mathbf{A}}^{LT})^{-1} = \underbrace{(\bar{\mathbf{A}}^L \mathbf{A})^T}_0 (\bar{\mathbf{A}}^L \bar{\mathbf{A}}^{LT})^{-1} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{L}^T \mathbf{A} = (\mathbf{A}^T \mathbf{L})^T = \mathbf{0}, \quad (11)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{A}^T = (\bar{\mathbf{A}}^{RT} \bar{\mathbf{A}}^R)^{-1} \bar{\mathbf{A}}^{RT} \mathbf{A}^T = (\bar{\mathbf{A}}^{RT} \bar{\mathbf{A}}^R)^{-1} \underbrace{(\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}^R)^T}_0 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{R}^T = (\mathbf{R}\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{0}. \quad (12)$$

Рассмотрим левую часть равенства (4). В работе [14] показано, что это неособенная квадратная матрица. Поэтому ее обращение, согласно тождеству (3), можно выполнять по любой из формул псевдообращения (1) или (2).

Для доказательства тождества (7) воспользуемся формулой псевдообращения (1):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{L}\mathbf{L}^T & \mathbf{A}\mathbf{R}^T \\ \mathbf{R}\mathbf{A}^T & \mathbf{R}\mathbf{R}^T \end{bmatrix}^{-1}.$$

Во втором множителе в силу нулевых равенств (12) имеем блочно-диагональную матрицу, которая инвертируется поблочно [15]. Поэтому

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1} & \mathbf{R}^T (\mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1} \\ \mathbf{L}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь правый верхний блок упрощается согласно формуле (10), а левый нижний блок – путем последовательного умножения слева на квадратную неособенную матрицу $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$ и на ее инверсию:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} (\mathbf{L}^T \mathbf{L}) \mathbf{L}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \mathbf{L} \mathbf{L}^T)^{-1} &= \underbrace{(\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T}_{\bar{\mathbf{A}}^L} (\mathbf{L} \mathbf{L}^T + \mathbf{A} \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \mathbf{A}^T) (\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \mathbf{L} \mathbf{L}^T)^{-1} = \\ &= \bar{\mathbf{A}}^L \left(\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \mathbf{L} \mathbf{L}^T)^{-1} \right) = \bar{\mathbf{A}}^L - \underbrace{\bar{\mathbf{A}}^L \mathbf{A} \mathbf{A}^T}_{\mathbf{0}} (\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \mathbf{L} \mathbf{L}^T)^{-1} = \bar{\mathbf{A}}^L. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \mathbf{L} \mathbf{L}^T)^{-1} & \bar{\mathbf{A}}^R \\ \bar{\mathbf{A}}^L & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Соответствие результатов этой формулы и формулы (4) в части верхнего левого блока доказывает формулу (7).

Для доказательства тождества (8) воспользуемся формулой псевдообращения (2):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R} & \mathbf{A}^T \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T \mathbf{A} & \mathbf{L}^T \mathbf{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Во втором множителе в силу нулевых равенств (11) имеем блочно-диагональную матрицу, которая инвертируется поблоку [15]. Поэтому

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T & (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \\ (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь левый нижний блок упрощается согласно формуле (9), а правый верхний блок – путем последовательного умножения справа на квадратную неособенную матрицу $\mathbf{R} \mathbf{R}^T$ и на ее инверсию:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T (\mathbf{R} \mathbf{R}^T) (\mathbf{R} \mathbf{R}^T)^{-1} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R} - \mathbf{A}^T \mathbf{A}) \underbrace{\mathbf{R}^T (\mathbf{R} \mathbf{R}^T)^{-1}}_{\bar{\mathbf{A}}^R} = \\ &= \left(\mathbf{I} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right) \bar{\mathbf{A}}^R = \bar{\mathbf{A}}^R - \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{A}}^R}_{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{A}}^R. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T & \bar{\mathbf{A}}^R \\ \bar{\mathbf{A}}^L & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Соответствие результатов этой формулы и формулы (4) в части верхнего левого блока доказывает формулу (8).

Теорема доказана.

Следствие 1. Для матрицы, имеющей полный ранг, равный числу строк, формула (7) упрощается до вида (1), а формула (8) является альтернативой стандартному расчету (1).

Следствие 2. Для матрицы, имеющей полный ранг, равный числу столбцов, формула (8) упрощается до вида (2), а формула (7) является альтернативой стандартному расчету (2).

2. Примеры эффективного использования аналитических формул псевдообращения

Покажем на примерах псевдообращения матриц неполного ранга, как доказанные аналитические формулы (7) и (8) устраняют названные выше недостатки алгоритма, основанного на равенстве (4).

Пример 1. Сравнить затраты вычислительного времени на работу различных алгоритмов псевдообращения (формулы (4), (7) и (8)) в MATLAB на примере следующей матрицы в символьном виде:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & a & a+b \\ 0 & c & 0 & c \\ d & e & d & d+e \\ 0 & f & 0 & f \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Рассматриваемая квадратная матрица (13) имеет неполный ранг $\text{rank } \mathbf{A} = 2$. Ее левый и правый аннуляторы максимального ранга соответственно имеют вид:

$$\bar{\mathbf{A}}^L = \begin{bmatrix} -d/a & (bd - ae)/(ac) & 1 & 0 \\ 0 & -f/c & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}}^R = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Процедуры, реализующие различные алгоритмы псевдообращения (формулы (4), (7) и (8)) в MATLAB, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Реализация различных алгоритмов псевдообращения в MATLAB

Алгоритм (4)	Формула (7)	Формула (8)
<pre>function Ap = func_pinv_AA(A) [n,m] = size(A); AL = null(A.').'; L = AL./(AL*AL.');</pre> <pre>AR = null(A); R = (AR.*AR)\AR.;</pre> <pre>Ap = (A.*A + L*L.');</pre> <pre>end</pre>	<pre>function Ap = func_pinv_AL(A) AL = null(A.').'; L = AL./(AL*AL.');</pre> <pre>Ap = A./(A*A.' + L*L.');</pre> <pre>end</pre>	<pre>function Ap = func_pinv_AR(A) AR = null(A); R = (AR.*AR)\AR.;</pre> <pre>Ap = (A.*A + R.*R)\A.;</pre> <pre>end</pre>

Затраты вычислительного времени на работу процедур `func_pinv_AA`, `func_pinv_AL` и `func_pinv_AR` применительно к матрице (13) определялись с по-

мощью встроенной функции MATLAB `timeit` [16] на стандартном офисном ПК по 10 независимым замерам. Результаты замеров приведены в табл. 2.

Таблица 2

Вычислительные затраты (в секундах) на псевдообращение матрицы (13) в MATLAB

№ замера	Алгоритм (4)	Формула (7)	Формула (8)
1	0.3646	0.2284	0.0386
2	0.3573	0.2202	0.0386
3	0.3633	0.2236	0.0405
4	0.3597	0.2227	0.0395
5	0.3582	0.2269	0.0385
6	0.3643	0.2222	0.0385
7	0.3606	0.2269	0.0376
8	0.3525	0.2152	0.0418
9	0.3513	0.2289	0.0397
10	0.3549	0.2256	0.0391

Из табл. 2 видно, что алгоритмы, построенные по предлагаемым аналитическим формулам (7) и (8), работают быстрее, чем существующий алгоритм, основанный на формуле (4). Выигрыш в быстродействии объясняется тем, что в формуле (4) выполняется обращение матрицы шестого порядка, а в формулах (7) и (8) – четвертого порядка. Кроме того, в алгоритме (7) рассчитывается только левый аннулятор, в алгоритме (8) – только правый аннулятор, а в алгоритме (4) – оба аннулятора.

Преимущество по быстродействию алгоритма (8) относительно алгоритма (7) обусловлено тем, что для матрицы (13) правый аннулятор $\bar{\mathbf{A}}^R$ оказался по своей форме существенно проще левого аннулятора $\bar{\mathbf{A}}^L$. Это наглядно видно из представленных выше значений (14).

Таким образом, данный пример демонстрирует устранение первого недостатка алгоритма (4) с помощью явных аналитических формул (7) или (8). Выбор в пользу той или иной аналитической формулы с точки зрения вычислительной простоты осуществляется, исходя из вида аннуляторов.

Пример 2. Задана пара матриц состояния $\mathbf{A}$ и управления $\mathbf{B}$. Известно, что матрица $\mathbf{B}$ имеет неполный ранг. Пусть $\mathbf{U}$ – матрица, составленная из первых двух блочных столбцов матрицы управляемости Калмана. Требуется доказать, что какова бы ни была матрица $\mathbf{A}$, справедливо тождество

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}^{RT} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{B}}^{RT} \end{bmatrix} \underbrace{[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}]}_{\mathbf{U}}^+ = \mathbf{0},$$

где $\bar{\mathbf{B}}^R$ – правый аннулятор матрицы $\mathbf{B}$.

Если ранг блочной матрицы $\mathbf{U}$ равен числу строк, псевдообращение можно выполнить по стандартной аналитической формуле (1):

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}]^+ = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}]^T (\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \end{bmatrix} (\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^{-1}.$$

В этом случае требуемое тождество легко доказываются по свойству $\bar{\mathbf{B}}^{RT} \mathbf{B}^T = (\mathbf{B}\bar{\mathbf{B}}^R)^T = \mathbf{0}$ правого аннулятора.

Однако матрица $\mathbf{A}$ может оказаться такой, что ранг блочной матрицы $\mathbf{U}$ останется меньше числа строк. Тогда появится левый аннулятор (максимального ранга) $\bar{\mathbf{U}}^L$, и формула (1) станет неприменимой. В то же время при использовании конструкции (4) *неочевидно*, что обе блочные строки псевдообратной матрицы $\mathbf{U}^+$ раскладываются на множители, причем крайним левым множителем в обоих случаях является матрица $\mathbf{B}^T$.

Применяя общую аналитическую формулу (7)

$$[\mathbf{B} \ ; \ \mathbf{AB}]^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \left(\mathbf{U} \mathbf{U}^T + \bar{\mathbf{U}}^L + (\bar{\mathbf{U}}^L)^T \right)^{-1},$$

независимо от значений матрицы $\mathbf{A}$ приходим к нужному результату.

Таким образом, данный пример демонстрирует устранение второго недостатка алгоритма (4) с помощью формулы (7).

Пример 3. *Задана пара матриц состояния $\mathbf{A}$ и наблюдения $\mathbf{C}$. Известно, что матрица $\mathbf{C}$ имеет неполный ранг. Пусть $\mathbf{N}$ – матрица, составленная из первых двух блочных строк матрицы наблюдаемости Калмана. Требуется доказать, что какова бы ни была матрица $\mathbf{A}$, справедливо тождество*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}^{LT} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \vdots & \bar{\mathbf{C}}^{LT} \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

$\mathbf{N}$

где $\bar{\mathbf{C}}^L$ – левый аннулятор матрицы $\mathbf{C}$.

Если ранг блочной матрицы $\mathbf{N}$ равен числу столбцов, псевдообращение можно выполнить по стандартной аналитической формуле (2):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^+ = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^T = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} [\mathbf{C}^T \ ; \ \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T].$$

В этом случае требуемое тождество легко доказываются по свойству $\mathbf{C}^T \bar{\mathbf{C}}^{LT} = (\bar{\mathbf{C}}^L \mathbf{C})^T = \mathbf{0}$ левого аннулятора.

Однако матрица $\mathbf{A}$ может оказаться такой, что ранг блочной матрицы $\mathbf{N}$ останется меньше числа столбцов. Тогда появится правый аннулятор (максимального ранга) $\bar{\mathbf{N}}^R$, и формула (2) станет неприменимой. В то же время при использовании конструкции (4) *неочевидно*, что оба блочные столбца псевдообратной матрицы $\mathbf{N}^+$ раскладываются на множители, причем крайним правым множителем в обоих случаях является матрица $\mathbf{C}^T$.

Применяя общую аналитическую формулу (8)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^+ = \left(\mathbf{N}^T \mathbf{N} + (\bar{\mathbf{N}}^{R+})^T \bar{\mathbf{N}}^{R+} \right)^{-1} [\mathbf{C}^T \ ; \ \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T],$$

независимо от значений матрицы $\mathbf{A}$ приходим к нужному результату.

Таким образом, данный пример демонстрирует устранение второго недостатка конструкции (4) с помощью формулы (8).

Выводы

В работе в явном виде получены и доказаны две взаимно дуальные аналитические формулы псевдообращения произвольных матриц с использованием левого

или правого матричного аннулятора. Данные формулы выводятся из существующего аналитического алгоритма псевдообращения, основанного на инвертировании расширенной матричной конструкции с последующим выделением из нее искомой псевдообратной матрицы. Доказательство осуществляется с помощью формул Фробениуса инвертирования блочных матриц.

Полученные формулы являются обобщением и расширением известных аналитических формул псевдообращения, справедливых только для матриц полного ранга. Обобщение распространяется на все без исключения матрицы, полного и неполного ранга, в том числе на вырожденные квадратные матрицы. Явный аналитический вид доказанных формул дает возможность наглядно анализировать результаты псевдообращения, что в общем случае затруднительно сделать при выделении псевдообратной матрицы из расширенной блочной конструкции. К любой матрице применимы обе доказанные формулы, что позволяет наглядно представлять структуру получаемой псевдообратной матрицы в виде правостороннего или левостороннего матричного произведения.

Благодаря отсутствию повышения размерности инвертируемых матриц и использованию только левого или только правого аннулятора (а не обоих сразу) каждая из двух доказанных формул оказывается проще в вычислительном плане по сравнению с существующим аналитическим алгоритмом. В существенной мере это проявляется при псевдообращении матриц большой размерности и в символьном виде.

В работе приведены примеры, подтверждающие эффективность применения обобщенных аналитических формул псевдообращения как по затратам вычислительного времени, так и по форме получаемых результатов.

Список источников

1. Ben-Israel A., Greville T.N. Generalized Inverses: Theory and Applications. New York : Springer, 2003. 420 p. (CMS Books in Mathematics; vol. 15). doi: 10.1007/b97366
2. Карелин А.Е., Светлаков А.А. Скелетные разложения прямоугольных матриц и их применение в структурной регуляризации плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 51–60.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. : Физматлит, 2010. 560 с.
4. Penrose R. On Best Approximate Solutions of Linear Matrix Equations // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1956. Vol. 52, is. 1. P. 17–19. doi: 10.1017/s0305004100030929
5. Зубов Н.Е., Лапин А.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Управление по выходу спектром линейной динамической системы на основе подхода Ван дер Вуда // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476, № 3. С. 260–263.
6. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Условия инвариантности динамической системы на основе регуляризации // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465, № 1. С. 20–22. doi: 10.7868/s0869565215310084
7. Мелешко В.И. Применение рекуррентных оптимальных оценок с псевдообращением в задачах идентификации // Автоматика и телемеханика. 1978. № 9. С. 79–89.
8. Желтов С.Ю., Каляев И.А., Косьянчук В.В. и др. Реконфигурация систем управления воздушных судов. М. : РАН, 2021. 204 с.
9. Погодаев А.К., Блюмин С.Л., Миловидов С.П. и др. Оптимизация. Псевдообращение. Итерации и рекурсии : учеб. пособие. Липецк : Изд-во ЛГТУ, 2015. 193 с.
10. Penrose R. A Generalized Inverse for Matrices // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1955. Vol. 51, is. 3. P. 406–413. doi: 10.1017/S0305004100030401

11. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М. : Наука, 1996. 304 с.
12. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М. : Наука, 1983. 336 с.
13. Zubov N.E., Lapin A.V., Ryabchenko V.N. Аналитический синтез модального регулятора по выходу для управления ориентацией спускаемого аппарата при спуске в атмосфере Земли // Известия вузов. Авиационная техника. 2019. № 3. С. 46–59.
14. Zubov N.E., Ryabchenko V.N. О вычислении псевдообратной матрицы. Общий случай // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 1. С. 16–25. doi: 10.18698/1812-3368-2018-1-16-25
15. Буков В.Н., Горюнов С.В. Обращение и канонизация блочных матриц // Математические заметки. 2006. Т. 79, № 5. С. 662–673. doi: 10.4213/mzm2738
16. Дьяконов В.П. MATLAB : полный самоучитель. М. : ДМК Пресс, 2012. 768 с.

References

1. Ben-Israel A., Greville T.N. (2003) *Generalized Inverses: Theory and Applications*. New York: Springer. DOI: 10.1007/b97366.
2. Karelin A.E., Svetlakov A.A. (2013) Skeletnyye razlozheniya pryamougol'nykh matrity i ikh primeneniye v strukturnoy regularizatsii plokho obuslovlennykh sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy [Skeleton decompositions of rectangular matrices and its application for structural regularization of ill-conditioned systems of linear algebraic equations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25), pp. 51–60.
3. Gantmacher F.R. (1980) *The Theory of Matrices*. New York: Chelsea Publishing Company.
4. Penrose R. (1956). On best approximate solutions of linear matrix equations. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 52(1), pp. 17–19. DOI: 10.1017/S0305004100030929.
5. Zubov N.E., Lapin A.V., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. (2017) Output control of the spectrum of a linear dynamic system in terms of the Van der Woude method. *Doklady Mathematics*. 96(2), pp. 457–460. DOI: 10.1134/S1064562417050179.
6. Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V.N. (2015) Invariance conditions for MIMO systems based on regularization. *Doklady Mathematics*. 92(3), pp. 664–666. DOI: 10.1134/S106456241506006X.
7. Meleshko V.I. (1978) Primeneniye rekurrentnykh optimal'nykh otsenok s psevdooobrashcheniyem v zadachakh identifikatsii [The use of recurrence optimal estimates with pseudoinversion in identification problems]. *Avtomatika i Telemekhanika*. 9, pp. 79–89.
8. Zheltov S.Yu., Kalyaev I.A., V.V. Kos'yanchuk et al. (2021) Rekonfiguratsiya sistem upravleniya vozдушnykh sudov [Reconfiguration of Aircraft Control Systems]. Moscow: Russian Academy of Sciences.
9. Pogodaev A.K., Blyumin S.L., Milovidov S.P. et al. (2015) Optimizatsiya. Psevdooobrashcheniye. Iteratsii i rekursii: uchebnoye posobiye. [Optimization. Pseudoinverse. Iterations and recursions: a study guide]. Lipetsk: Lipetsk State Technical University.
10. Penrose R. (1955) A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3), pp. 406–413. DOI: 10.1017/S0305004100030401.
11. Prasolov V.V. (1996) *Problems and Theorems in Linear Algebra*. American Mathematical Society.
12. Beklemishev D.V. (1983) *Dopolnitel'nyye glavy lineynoy algebrы* [Advanced linear algebra]. Moscow: Nauka.
13. Zubov N.E., Lapin A.V., Ryabchenko V.N. (2019) Analytical synthesis of a modal controller by output vector for attitude control of a descent module during its descent in the Earth's atmosphere. *Russian Aeronautics*. 62(3), pp. 401–416. DOI: 10.3103/S1068799819030073.
14. Zubov N.E., Ryabchenko V.N. (2018) O vychislenii psevdooobratnoy matrity. Obshchiy sluchay [On calculation of the pseudoinverse matrix. General case]. *Vestnik MGTU imeni N.E. Bauman. Seriya «Estestvennyye nauki» – Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*. 1, pp. 16–25. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-16-25.

15. Bukov V.N., Goryunov S.V. (2006) Inversion and canonization of block matrices. *Mathematical Notes*. 79. pp. 614–624. DOI: 10.1007/s11006-006-0070-2.
16. D'yakonov V.P. (2012) MATLAB. Polnyy samouchitel' [MATLAB. Complete tutorial]. Moscow: DMK Press.

Сведения об авторах:

Зубов Николай Евгеньевич – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры систем автоматического управления Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия) E-mail: Nik.Zubov@gmail.com

Лапин Алексей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры систем автоматического управления Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия) E-mail: AlexeyPoeme@yandex.ru

Information about the authors:

Zubov Nikolay E. (Prof., Dr. Sci. (Eng.), Professor of Automatic Control Systems Department at Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: Nik.Zubov@gmail.com

Lapin Alexey V. (Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor of Automatic Control Systems Department at Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: AlexeyPoeme@yandex.ru

The article was submitted 08.12.2023; accepted for publication 07.02.2025

Статья поступила в редакцию 08.12.2023; принята к публикации 07.02.2025

Научная статья

УДК 512.552

MSC: 08A35, 15B99, 16S50

doi: 10.17223/19988621/93/3

Идемпотентные и ниль-чистые формальные матрицы второго порядка над кольцами вычетов

Анастасия Максимовна Королева¹,
Цырендоржи Дашацыренович Норбосамбуев²,
Максим Вадимович Подкорытов³

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

³ Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

¹ elfimova.nastya@bk.ru

² nstsddts@yandex.ru

³ maximthegreat@yandex.ru

Аннотация. Найдены необходимые и достаточные условия идемпотентности формальной матрицы второго порядка над кольцами вычетов по модулям степеней простого числа p , при этом выявилась интересная связь таких идемпотентных формальных матриц с числами Каталана. Также показано, что кольцо таких формальных матриц для всякого натурального числа k , меньшего $p - 1$, не является k -ниль-чистым. Ранее нами же было показано, что это кольцо формальных матриц является $(p - 1)$ -ниль-чистым.

Ключевые слова: кольцо формальных матриц, идемпотентная формальная матрица, ниль-чистое кольцо, кольцо контекста Мориты

Благодарности: Работа второго автора выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2024-1437).

Для цитирования: Королева А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М.В. Идемпотентные и ниль-чистые формальные матрицы второго порядка над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 30–40. doi: 10.17223/19988621/93/3

Original article

Idempotent and nil-clean formal matrices of order 2 over residue class rings

Anastasia M. Koroleva¹, Tsyrendorzhi D. Norbosambuev²,
Maxim V. Podkorytov³

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

³ Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

¹ elifimova.nastya@bk.ru

² nstsddts@yandex.ru

³ maximthegreate@yandex.ru

Abstract. Let us consider the set of formal matrices

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\}$$

over residue class rings $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$ and $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, where p is a prime, m and n are natural numbers, $m > n > 0$. For any matrices $A, A' \in K$, we define multiplication as follows:

$$\begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbf{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

With entrywise addition and multiplication introduced as above, the set K forms a ring.

It is known that a formal matrix from K is invertible if and only if its elements on the main diagonal are not multiples of p . It is also known that a formal matrix from K is nilpotent if and only if its elements on the main diagonal are multiples of p .

We call the sequence of natural numbers defined as follows Catalan numbers: $C_1 = 1$,

$$C_{k+1} = \sum_{i=1}^k C_i C_{k-i+1}, \text{ i.e. } C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 2, C_4 = 5, C_5 = 14, C_6 = 42 \text{ and so on.}$$

The following theorem is the main result of our paper.

Theorem 1.2. Matrix A is a nontrivial idempotent of K if and only if A has the form

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{v+1} + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & \sigma_v + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ or } A = \begin{pmatrix} \sigma_{v+1} + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & 1 - \sigma_v + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

where $b, c \in \mathbf{Z}$, $v = \left\lceil \frac{n-1}{m-n} \right\rceil$, $\sigma_v = \sum_{k=1}^v C_k (p^{m-n}bc)^k$, where C_i are Catalan numbers.

Note that v here can be equal to 0 (then $\sigma_v = 0$).

Corollary 2.2. The ring K is not a k -nil-clean ring for any natural number k such that $k < p - 1$.

Keywords: formal matrix ring, idempotent formal matrix, nil-clean ring, Morita context ring

Acknowledgments: The work of the second author was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2024-1437) (Norbosambuev T.D.).

For citation: Koroleva, A.M., Norbosambuev, T.D., Podkorytov, M.V. (2025) Idempotent and nil-clean formal matrices of order 2 over residue class rings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 30–40. doi: 10.17223/19988621/93/3

Введение

Данная работа является продолжением статьи [1], и обе они развивают идеи, изложенные в статьях [2] и [3].

Как обычно, через $E(G)$ обозначаем кольцо эндоморфизмов абелевой группы G , через $U(R)$ – группу обратимых элементов кольца R , через $M(n, R)$ – кольцо всех

квадратных матриц порядка n над кольцом R , через $\mathbf{Z}$ – кольцо (и группу) целых чисел, через $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ – кольцо (и группу) вычетов по модулю p^n , символ ■ означает конец доказательства или его отсутствие.

Напомним кратко о том, как устроены интересующие нас кольца формальных матриц. Пусть p – некоторое простое число, m и n – натуральные числа и $m > n > 0$. Рассмотрим множество формальных матриц

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Для любых $A, A' \in K$ зададим умножение по правилу

$$\begin{aligned} A \cdot A' &= \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbf{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Можно проверить, что относительно поэлементного сложения и умножения, введенного выше, множество K образует кольцо. Его называют кольцом формальных матриц второго порядка над кольцами вычетов $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ и обозначают

$$K = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \text{ Подробнее см.: [1–4].}$$

Справедлив следующий критерий обратимости в кольце K : матрица

$$A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in K \text{ обратима в том и только в том случае, когда } a \text{ и } d \text{ не}$$

кратны p .

Вдохновляясь работами А.Ю. Степановой, Е.А. Тимошенко [3] и П.А. Крылова, А.А. Туганбаева [4, 5], мы в предыдущей своей статье [1] показали, что матрица $A \in K$ нильпотентна тогда и только тогда, когда числа a и d делятся на p . То есть нильпотентные формальные матрицы образуют идеал в K , что, вообще говоря, нехарактерно для некоммутативных колец. Используя критерий нильпотентности, мы показали, что K является $(p-1)$ -ниль-чистым кольцом. Еще одно очевидное замечание: если матрица $A \in K$ не нильпотентна и необратима, то один из ее элементов на главной диагонали должен быть кратен p , а другой – не кратен.

Центральный результат этой работы – теорема 1.2, дающая полное описание идемпотентных матриц в кольце K . Из нее вытекает следствие 2.2 о том, что кольцо K не является k -ниль-чистым ни для какого k такого, что $0 < k < p-1$.

1. Идемпотентные матрицы над кольцами вычетов

Определение 1.1. Элемент e кольца R называется идемпотентным (или просто идемпотентом), если $e^2 = e$. Идемпотент, отличный от 0 и 1, называем нетривиальным идемпотентом.

Ранее нами была поставлена задача нахождения необходимых и достаточных условий идемпотентности формальных матриц в K [1. Проблема 3.8]. При ее решении выявилась очень интересная связь идемпотентных формальных матриц второго порядка над кольцами вычетов с числами Каталана.

Мы называем числами Каталана последовательность натуральных чисел, заданную рекуррентным соотношением: $C_1 = 1$, $C_{k+1} = \sum_{i=1}^k C_i C_{k-i+1}$. То есть $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 2$, $C_4 = 5$, $C_5 = 14$, $C_6 = 42$ и т.д. Заметим, что часто нумерацию последовательности Каталана начинают не с 1, как это делаем мы, а с 0: $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, $C_5 = 42$ и т.д.

Теорема 1.2. Матрица A – нетривиальный идемпотент в K тогда и только тогда, когда A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{v+1} + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & \sigma_v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} \sigma_{v+1} + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & 1 - \sigma_v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где $b, c \in \mathbf{Z}$, $v = \left\lfloor \frac{n-1}{m-n} \right\rfloor$, $\sigma_v = \sum_{k=1}^v C_k (p^{m-n} bc)^k$, C_i – числа Каталана. Отметим,

что при $m \geq 2n$ индекс v равен 0. В таком случае считаем, что $\sigma_v = 0$.

Доказательство. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, – нетривиальный идемпотент кольца K . Тогда матрица A необратима и не нильпотентна, т.е. p делит или a , или d , но не одновременно, как отмечалось выше. Договоримся называть те идемпотентные матрицы, в которых p не делит a , но делит d , идемпотентными матрицами первого типа, а те, в которых p делит a , но не делит d , – идемпотентными матрицами второго типа.

Сначала рассмотрим случай, относящийся ко второму типу, т.е. когда $a = px$ и $d = t + py$, где $t, x, y \in \mathbf{Z}$ и $0 < t < p$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} p^2 x^2 + p^{m-n} bc + p^m \mathbf{Z} & ab + bd + p^n \mathbf{Z} \\ ac + cd + p^n \mathbf{Z} & p^{m-n} bc + (t + py)^2 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ & = A^2 = A = \begin{pmatrix} px + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & t + py + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} p^2 x^2 + p^{m-n} bc + p^m \mathbf{Z} = px + p^m \mathbf{Z}, \\ b(a + d) + p^n \mathbf{Z} = b + p^n \mathbf{Z}, \\ c(a + d) + p^n \mathbf{Z} = c + p^n \mathbf{Z}, \\ p^{m-n} bc + (t + py)^2 + p^n \mathbf{Z} = t + py + p^n \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно, что решение системы (1) равносильно решению системы сравнений

$$\begin{cases} p^2 x^2 + p^{m-n} bc \equiv px \pmod{p^m}, \\ b(a + d) \equiv b \pmod{p^n}, \\ c(a + d) \equiv c \pmod{p^n}, \\ p^{m-n} bc + (t + py)^2 \equiv t + py \pmod{p^n}. \end{cases} \quad (2)$$

Получим ее решение, но прежде покажем, что $t = 1$. Рассмотрим последнее сравнение системы (2):

$$p^{m-n}bc + (t + py)^2 \equiv t + py \pmod{p^n},$$

Помня, что $0 < t < p$, можем без потери общности перейти к сравнению по модулю p вместо p^n . Тогда останется

$$t^2 \equiv t \pmod{p}.$$

Из последнего сравнения следует, что $t = 1$, а значит, $d = 1 + py$.

Введем обозначение $N = m - n$. Заметим, что $1 \leq N \leq m - 1$. Теперь вернемся к системе (2) и рассмотрим ее первое сравнение:

$$\begin{aligned} p^2x^2 + p^Nbc &\equiv px \pmod{p^m}, \\ px^2 + p^{N-1}bc - x &\equiv 0 \pmod{p^{m-1}}. \end{aligned}$$

Найдем решение последнего сравнения, показав по индукции, что для всякого натурального числа s , если x является решением сравнения $px^2 + p^{N-1}bc - x \equiv 0 \pmod{p^s}$,

$$\text{то } x \equiv \sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k \pmod{p^s}.$$

Пусть $s = 1$. Тогда $x \equiv p^{N-1}bc \pmod{p}$, что и требуется.

Пусть теперь $s \geq 1$ и $x \equiv \sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k \pmod{p^s}$. Покажем, что отсюда

следует, что если x – решение сравнения $px^2 + p^{N-1}bc - x \equiv 0 \pmod{p^{s+1}}$, то

$$x \equiv \sum_{k=1}^{s+1} C_k p^{Nk-1} (bc)^k \pmod{p^{s+1}}.$$

Для некоторого $z \in \mathbf{Z}$ имеем

$$\begin{aligned} px^2 &= p \left(\sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k + p^s z \right)^2 = \\ &= p \left(\sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k \right)^2 + p^{s+1} \cdot 2 \sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k z + p^{2s+1} z^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим $\left(\sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k \right)^2$. Для всякого $k \in \{2, 3, \dots, s+1\}$ коэффициент при p^{Nk-2} равен

$$\sum_{i=1}^{k-1} C_i (bc)^i C_{k-i} (bc)^{k-i} = (bc)^k \sum_{i=1}^{k-1} C_i C_{k-i} = (bc)^k C_k.$$

Действительно, так как

$$\left(\sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k \right)^2 = \left(C_1 p^{N-1} bc + C_2 p^{2N-1} (bc)^2 + \dots + C_s p^{Ns-1} (bc)^s \right)^2,$$

то:

если $k = 2$, то коэффициент при p^{2N-2} равен $C_1bc \cdot C_1bc = (bc)^2 C_1^2 = (bc)^2 C_2$;

если $k = 3$, то коэффициент при p^{3N-2} равен

$$C_1bc \cdot C_2(bc)^2 + C_2(bc)^2 \cdot C_1bc = (bc)^3 (C_1C_2 + C_2C_1) = (bc)^3 \sum_{i=1}^2 C_i C_{2-i+1} = (bc)^3 C_3;$$

...

если $k = s + 1$, то коэффициент при $p^{N(s+1)-2}$ равен

$$\begin{aligned} & C_1bc \cdot C_s(bc)^s + C_2(bc)^2 \cdot C_{s-1}(bc)^{s-1} + \dots + C_s(bc)^s \cdot C_1bc = \\ & = (bc)^{s+1} (C_1C_s + C_2C_{s-1} + \dots + C_sC_1) = (bc)^{s+1} \sum_{i=1}^s C_i C_{s-i+1} = (bc)^{s+1} C_{s+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\left(\sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k \right)^2 = \sum_{k=2}^{s+1} C_k p^{Nk-2} (bc)^k + M$, где, очевидно, M делится на $p^{N(s+2)-2}$. Тогда сравнение $px^2 + p^{N-1}bc - x \equiv 0 \pmod{p^{s+1}}$ примет вид:

$$p \sum_{k=2}^{s+1} C_k p^{Nk-2} (bc)^k + pM + p^{N-1}bc - x \equiv 0 \pmod{p^{s+1}},$$

$$\sum_{k=1}^{s+1} C_k p^{Nk-1} (bc)^k + pM - x \equiv 0 \pmod{p^{s+1}}.$$

Так как pM делится на $p^{N(s+2)-1}$, то pM делится и на p^{s+1} в силу того, что $N(s+2) - 1 \geq s + 1$ (так как $N(s+2) \geq s + 2$). Тогда

$$x \equiv \sum_{k=1}^{s+1} C_k p^{Nk-1} (bc)^k \pmod{p^{s+1}}.$$

Итак, индукция завершена.

Тогда решение сравнения $px^2 + p^{N-1}bc - x \equiv 0 \pmod{p^{m-1}}$ имеет вид:

$$x + p^{m-1}Z = \sum_{k=1}^{m-1} C_k p^{Nk-1} (bc)^k + p^{m-1}Z. \text{ Значит,}$$

$$a + p^m Z = px + p^m Z = p \left(\sum_{k=1}^{m-1} C_k p^{Nk-1} (bc)^k \right) + p^m Z = \sum_{k=1}^{m-1} C_k p^{Nk} (bc)^k + p^m Z.$$

Так как $N = m - n$ и $(m-n) \left(\left\lceil \frac{m-1}{m-n} \right\rceil + 1 \right) \geq m$, то в предыдущей сумме можем

оставить только слагаемые с номерами не больше $\left\lceil \frac{m-1}{m-n} \right\rceil$. Обозначим число

$$\left\lceil \frac{m-1}{m-n} \right\rceil \text{ через } \mu, \text{ тогда } a + p^m Z = \sum_{k=1}^{\mu} C_k (p^{m-n} bc)^k + p^m Z.$$

Возвращаясь к системе (2), рассмотрим последнее сравнение

$$p^{m-n}bc + (1 + py)^2 \equiv 1 + py \pmod{p^n},$$

$$p^{m-n}bc + 1 + 2py + p^2y^2 \equiv 1 + py \pmod{p^n},$$

$$py^2 + p^{m-n-1}bc + y \equiv 0 \pmod{p^{n-1}}.$$

Полагая $y = -q$, получим $pq^2 + p^{m-n-1}bc - q \equiv 0 \pmod{p^{n-1}}$. Выше показано,

что решение данного сравнения имеет вид: $q + p^{n-1}\mathbf{Z} = \sum_{k=1}^{n-1} C_k p^{Nk-1} (bc)^k + p^{n-1}\mathbf{Z}$.

В силу неравенства $(m-n) \left(\left\lceil \frac{n-1}{m-n} \right\rceil + 1 \right) \geq n$ можем заметить, что p^{Nk} делится на p^n ,

если номер k больше, чем $v = \left\lfloor \frac{n-1}{m-n} \right\rfloor$. Тогда получаем

$$d + p^n\mathbf{Z} = 1 + py + p^n\mathbf{Z} = 1 - pq + p^n\mathbf{Z} = 1 - \sum_{k=1}^v C_k (p^{m-n}bc)^k + p^n\mathbf{Z}.$$

Заметим, что $v+1 = \left\lfloor \frac{n-1}{m-n} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{n-1}{m-n} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{m-1}{m-n} \right\rceil = \mu$. Поэтому далее от обозначения μ откажемся и будем писать только v и $v+1$ там, где нужно.

Таким образом, мы показали, что если $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$ – нетривиальный идемпотент кольца K , для которого a делится на p , а d не делится, то

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_{v+1} + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & 1 - \sigma_v + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \text{ где } \sigma_v = \sum_{k=1}^v C_k (p^{m-n}bc)^k.$$

Обратно, пусть $A = \begin{pmatrix} \sigma_{v+1} + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & 1 - \sigma_v + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$. Тогда

$$A^2 = \begin{pmatrix} \sigma_{v+1}^2 + p^{m-n}bc + p^m\mathbf{Z} & \sigma_{v+1}b + b(1 - \sigma_v) + p^n\mathbf{Z} \\ c\sigma_{v+1} + (1 - \sigma_v)c + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb + (1 - \sigma_v)^2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\sigma_{v+1}^2 + p^{m-n}bc + p^m\mathbf{Z} = \sigma_{v+1} + p^m\mathbf{Z}$. Для этого рассмотрим σ_{v+1}^2 . Аналогично рассуждениям выше,

$$\sigma_{v+1}^2 = \left(\sum_{k=1}^{v+1} C_k p^{(m-n)k} (bc)^k \right)^2 = \sum_{k=2}^{v+1} C_k p^{(m-n)k} (bc)^k + M,$$

где M делится на $p^{(m-n)(v+2)}$, а значит, делится и на p^m . Тогда

$$\sigma_{v+1}^2 + p^{m-n}bc + p^m\mathbf{Z} = \sum_{k=2}^{v+1} C_k (p^{m-n}bc)^k + M + p^{m-n}bc + p^m\mathbf{Z} =$$

$$= \sum_{k=1}^{v+1} C_k (p^{m-n}bc)^k + p^m \mathbf{Z} = \sigma_{v+1} + p^m \mathbf{Z}.$$

Теперь покажем, что $\sigma_{v+1} - \sigma_v + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{v+1} - \sigma_v + p^n \mathbf{Z} &= \sum_{k=1}^{v+1} C_k (p^{m-n}bc)^k - \sum_{k=1}^v C_k (p^{m-n}bc)^k + p^n \mathbf{Z} = \\ &= C_{v+1} (p^{m-n}bc)^{v+1} + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Значит, $b(1 + \sigma_{v+1} - \sigma_v) + p^n \mathbf{Z} = b + p^n \mathbf{Z}$ и $c(1 + \sigma_{v+1} - \sigma_v) + p^n \mathbf{Z} = c + p^n \mathbf{Z}$.

Далее, $p^{m-n}bc + (1 - \sigma_v)^2 + p^n \mathbf{Z} = p^{m-n}bc + 1 - \sigma_v - \sigma_v + \sigma_v^2 + p^n \mathbf{Z}$. Мы только что показали, что σ_{v+1} и σ_v совпадают по модулю p^n . Тогда $\sigma_v^2 + p^{m-n}bc + p^n \mathbf{Z} = \sigma_v + p^n \mathbf{Z}$ и, следовательно, $p^{m-n}bc + (1 - \sigma_v)^2 + p^n \mathbf{Z} = 1 - \sigma_v + p^n \mathbf{Z}$.

Таким образом, $A^2 = A$, то есть матрица A является идемпотентом.

Наконец, осталось рассмотреть случай, относящийся к первому типу, когда в идемпотентной матрице $A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$ число a не кратно p , а d кратно.

Заметим, что $(-b)(-c) = bc$ для любых целых b и c . По сути, $\sigma_v = \sum_{k=1}^v C_k (p^{m-n}bc)^k$ – функция от произведения чисел bc . Тогда для любых целых чисел b и c у идемпотентных матриц

$$\begin{pmatrix} \sigma_{v+1} + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & 1 - \sigma_v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ и } A' = \begin{pmatrix} \sigma'_{v+1} + p^m \mathbf{Z} & -b + p^n \mathbf{Z} \\ -c + p^n \mathbf{Z} & 1 - \sigma'_v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$$

совпадают элементы на главной диагонали, и мы можем записать $\sigma_v = \sigma'_v$, $\sigma_{v+1} = \sigma'_{v+1}$.

Пусть $A \in K$ – нетривиальный идемпотент, относящийся к первому типу, у которого элемент, стоящий в левом верхнем углу, не делится на p , а элемент в нижнем правом – делится. Тогда A есть в точности матрица $E - A'$, где A' – идемпотент второго типа. Так как общий вид идемпотентов второго типа уже найден, в силу сказанного в предыдущем абзаце имеем

$$\begin{aligned} E - A' &= \begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 1 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_{v+1} + p^m \mathbf{Z} & -b + p^n \mathbf{Z} \\ -c + p^n \mathbf{Z} & 1 - \sigma_v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{v+1} + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & \sigma_v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} = A, \end{aligned}$$

т.е. идемпотенты первого типа также имеют требуемый в теореме вид. ■

Следствие 1.3. Число нетривиальных идемпотентных матриц кольца K равно $2p^{2n}$.

Доказательство. Нетривиальные идемпотентные матрицы в K определяются элементами, стоящими на побочной диагонали. Число всех возможных комбинаций двух элементов из $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ равно p^{2n} . Есть два типа идемпотентных матриц. Итого получается $2p^{2n}$ различных идемпотентов. ■

Замечание 1.4. При $v = 0$ общий вид нетривиальной идемпотентной матрицы $A \in K$ заметно упрощается:

$$A = \begin{pmatrix} p^{m-n}bc + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & 1 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = \begin{pmatrix} 1 - p^{m-n}bc + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & 0 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где $b, c \in \mathbf{Z}$. ■

2. Ниль-чистые и k -ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов

Напомним, что элемент кольца называем *ниль-чистым*, если его можно представить как сумму идемпотентного и нильпотентного элементов кольца. Кольцо называем *ниль-чистым*, если все его элементы ниль-чисты. Соответственно, элемент кольца называем *k -ниль-чистым*, если его можно разложить в сумму одного нильпотентного и k идемпотентных элементов кольца, где k – натуральное число. Кольцо называем *k -ниль-чистым*, если все его элементы k -ниль-чисты.

Замечание 2.1. Очевидным образом из ниль-чистоты как для отдельного элемента, так и для всего кольца следует k -ниль-чистота, $k > 1$. ■

Больше о свойствах, похожих на k -ниль-чистоту, см., напр.: [6–8].

В нашей предыдущей работе [1] мы показали, что кольцо K формальных матриц над кольцами вычетов является $(p-1)$ -ниль-чистым. Там же мы задались вопросом: может ли K быть ниль-чистым кольцом при $p > 2$ [1. Вопрос 3.7]? Следующий результат, вытекающий из теоремы 1.2, дает ответ на этот вопрос.

Следствие 2.2. Кольцо K не является k -ниль-чистым кольцом ни для какого натурального числа k такого, что $k < p-1$.

Доказательство. Пусть $A = \begin{pmatrix} p-1 + p^m\mathbf{Z} & 0 + p^n\mathbf{Z} \\ 0 + p^n\mathbf{Z} & 0 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in K$. Предположим, что

A – k -ниль-чистая матрица, т.е. найдутся нильпотентная матрица B и идемпотентные матрицы $C_1, \dots, C_k$ такие, что $A = B + C_1 + \dots + C_k$.

Поскольку B – нильпотентная матрица, то $B = \begin{pmatrix} px + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & py + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$, где

$x, y, b, c \in \mathbf{Z}$. Допустим, что среди идемпотентов $C_1, \dots, C_k$ есть r единичных матриц, s матриц первого типа и t матриц второго типа, а остальные матрицы – нулевые; здесь r, s, t – неотрицательные целые и $0 \leq r + s + t \leq k < p-1$. Тогда

$$p-1 + p^m\mathbf{Z} = px + r + s - \sum_{i=1}^s (\sigma_{v+1})_i + \sum_{j=1}^t (\sigma_{v+1})_j + p^m\mathbf{Z},$$

откуда следует, что

$$s + r + 1 \equiv p - px + \sum_{i=1}^s (\sigma_{v+1})_i - \sum_{j=1}^t (\sigma_{v+1})_j \pmod{p^m},$$

где все слагаемые вида σ_{v+1} , конечно, кратны p . Однако $s + r + 1$ не делится на p , так как $0 < s + r + 1 < p$. Значит, матрицу A нельзя представить в виде суммы нильпотентной и k идемпотентных матриц кольца K , то есть матрица A не k -ниль-

чиста. Следовательно, кольцо K не является k -ниль-чистым ни для какого $0 < k < p - 1$. ■

Следствие 2.3. Если p – простое число и $p > 2$, то кольцо K не является ниль-чистым. ■

Список источников

1. Елфимова А.М., Норбосамбиев Ц.Д., Подкорытов М.В. Нильпотентные, ниль-хорошие и ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 31–40. doi: 10.17223/19988621/91/3
2. Норбосамбиев Ц.Д. Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 32–42. doi: 10.17223/19988621/85/3
3. Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 30–42. doi: 10.17223/19988621/74/4
4. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. М. : МЦНМО, 2017.
5. Крылов П.А. Определители обобщенных матриц порядка 2 // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. № 5 (20). С. 95–112.
6. Diesl A.J. Nil clean rings // J. Algebra. 2013. V. 383. P. 197–211. doi: 10.1016/j.jalgebra.2013.02.020
7. Călugăreanu G., Lam T.Y. Fine rings: A new class of simple rings // J. Algebra Appl. 2016. V. 15 (9). Art. 1650173. doi: 10.1142/S0219498816501735
8. Danchev P. Nil-good unital rings // Int. J. Algebra. 2016. V. 10 (5). P. 239–252. doi: 10.12988/ija.2016.6212

References

1. Elfimova A.M., Norbosambuev T.D., Podkorytov M.V. (2024) Nil'potentnyye, nil'-khoroshiye i nil'-chistyye formal'nyye matritsy nad kol'tsami vychetov [Nilpotent, nil-good, and nil-clean formal matrices over residue class rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 31–40. DOI: 10.17223/19988621/91/3.
2. Norbosambuev T.D. (2023) Khoroshiye kol'tsa formal'nykh matrits nad kol'tsami vychetov [Good formal matrix rings over residue class rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 32–42. DOI: 10.17223/19988621/85/3.
3. Stepanova A.Yu., Timoshenko E.A. (2021) Matrichnoye predstavleniye endomorfizmov primarnykh grupp malyykh rangov [Matrix representation of endomorphisms of primary groups of small ranks]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 30–42. DOI: 10.17223/19988621/74/4.
4. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal Matrices*. (Algebra and Applications, Vol. 23). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-53907-2.
5. Krylov P.A. (2018) Determinants of generalized matrices of order 2. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 230(3). pp. 414–427. DOI: 10.1007/s10958-018-3748-6.
6. Diesl A.J. (2013) Nil clean rings. *Journal of Algebra*. 383. pp. 197–211. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.02.020.
7. Călugăreanu G., Lam T.Y. (2016) Fine rings: A new class of simple rings. *Journal of Algebra and Its Applications*. 15(9). Article ID: 1650173. DOI: 10.1142/S0219498816501735.

8. Danchev P. (2016) Nil-good unital rings. *International Journal of Algebra*. 10(5). pp. 239–252. DOI: 10.12988/ija.2016.6212.

Сведения об авторах:

Королева Анастасия Максимовна – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета; ассистент кафедры общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: elfimova.nastya@bk.ru

Норбосамбуев Цырендоржи Дашацыренович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета; доцент кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nstsddts@yandex.ru

Подкорытов Максим Вадимович – студент механико-математического факультета Новосибирского государственного университета (Новосибирск, Россия). E-mail: maximthegreate@yandex.ru

Information about the authors:

Koroleva Anastasia M. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: elfimova.nastya@bk.ru

Norbosambuev Tsyrendorzhi D. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nstsddts@yandex.ru

Podkorytov Maxim V. (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: maximthegreate@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 15.10.2024; принята к публикации 07.02.2025

The article was submitted 15.10.2024; accepted for publication 07.02.2025

Научная статья

УДК 519.6:532.516

MSC: 93A30

doi: 10.17223/19988621/93/4

Математическая модель динамики биогеохимических процессов в пресноводном озере с учетом кислорода при развитии термобара

Баир Олегович Цыденов¹, Дмитрий Владимирович Деги²,
Андрей Андреевич Барт³, Никита Сергеевич Трунов⁴,
Владислава Васильевна Чуруксаева⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ tsydenov@math.tsu.ru

² dimadegi@rambler.ru

³ bart@math.tsu.ru

⁴ suslayndel@yandex.ru

⁵ chu.vv@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена описанию негидростатической математической модели для воспроизведения биогеохимических процессов в пресноводном озере во время развития термобара с учетом динамики растворенного кислорода. Параметризация поступления атмосферного кислорода в озеро реализована через растворимость кислорода в воде и изменчивость скорости ветра на поверхности водоема. Биохимическая циркуляция кислорода описывается процессами фотосинтеза, дыхания, нитрификации и реминерализации. С помощью предложенной модели получены данные по распределению нитратов, аммония, фосфатов, фито- и зоопланктона для условий Баргузинского залива озера Байкал в период существования весеннего термобара.

Ключевые слова: термобар, растворенный кислород, биогеохимический цикл, математическая модель, численный эксперимент, экосистема водоема, озеро Байкал

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10020, <https://www.rscf.ru/project/23-71-10020/>

Для цитирования: Цыденов Б.О., Деги Д.В., Барт А.А., Трунов Н.С., Чуруксаева В.В. Математическая модель динамики биогеохимических процессов в пресноводном озере с учетом кислорода при развитии термобара // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 41–57. doi: 10.17223/19988621/93/4

A mathematical model of the dynamics of biogeochemical processes in a freshwater lake including oxygen circulation with the development of the thermal bar

Bair O. Tsydenov¹, Dmitriy V. Degi², Andrey A. Bart³,
Nikita S. Trunov⁴, Vladislava V. Churuksaeva⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ tsydenov@math.tsu.ru

² dimadegi@rambler.ru

³ bart@math.tsu.ru

⁴ suslayndel@yandex.ru

⁵ chu.vv@mail.ru

Abstract. In this paper, a nonhydrostatic mathematical model is described for reproducing hydrophysical and biogeochemical processes including the dynamics of dissolved oxygen in a freshwater lake during the thermal bar. The biogeochemical part of the model includes the following variables: oxygen, nitrate, ammonium, phosphate, chlorophyll a, phytoplankton, zooplankton, and small and large detritus. The oxygen supply from the atmosphere to the lake is parameterized taking into account the solubility of oxygen in water and the variability of wind speed on the lake surface. The biochemical dynamics of oxygen are described by processes of photosynthesis, respiration, nitrification, and remineralization. The solution of reaction–convection–diffusion equations of the model is based on the finite volume method with the use of second-order implicit difference schemes in space and time.

The results of simulation showed that the highest level of dissolved oxygen was observed in the thermoactive area on the surface of the lake. The concentration of dissolved oxygen was high throughout the entire depth (due to intense mixing of waters with different temperatures) in the vicinity of the thermal bar, isolines of oxygen were qualitatively similar to isotherms in the estuary region. The content of ammonium supplied with the tributary waters was maximum at the confluence of the river, and in the thermoactive area in front of the thermal bar it decreased due to the growth of phytoplankton biomass. Qualitatively, the distribution patterns of nitrates and phosphates in the thermoinert area were identical.

Keywords: thermal bar, biogeochemical cycle, dissolved oxygen, mathematical model, numerical experiment, lake ecosystem, Lake Baikal

Acknowledgments: This study was funded by the Russian Science Foundation (project No.23-71-10020, <https://www.rscf.ru/en/project/23-71-10020/>)

For citation: Tsydenov, B.O., Degi, D.V., Bart, A.A., Trunov, N.S., Churuksaeva, V.V. (2025) A mathematical model of the dynamics of biogeochemical processes in a freshwater lake including oxygen circulation with the development of the thermal bar. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 41–57. doi: 10.17223/19988621/93/4

Введение

Количество растворенного кислорода – один из ключевых индикаторов качества воды. Кислородный режим водоемов формируется под влиянием гидрофизических, гидрохимических и гидробиологических процессов [1]. Растворенный кислород пополняется за счет контакта с атмосферой, фотосинтеза, расходуется при дыхании живых организмов и окислении органических веществ, а также участвует в других химических реакциях [2]. Основными потребителями кислорода являются фито-, бактерио- и зоопланктонные сообщества, причем на долю последних приходится 5–34% [3].

Несмотря на существенное ускорение темпов изменений, происходящих в водоемах за последние десятилетия, динамика концентрации растворенного кислорода в Байкале остается стабильной на суточном и сезонном масштабах [4]. Деятельность человека оказывает негативное влияние на качество воды главным образом в прибрежной зоне оз. Байкал (например, в дельте р. Селенги [5]), так как основным источником антропогенных и биогенных загрязнителей являются воды притоков, аккумулирующие в себе городские и промышленные стоки водосборного бассейна. Вертикальное перемешивание при разрушении стратификации способствует переносу биогенных элементов из нижних слоев в фотический, что может спровоцировать всплеск цветения воды [6].

В Байкале между поверхностными и глубинными водами существует обмен за счет вертикальных присклоновых циркуляций, плотностного перемешивания на фронте термобара [7, 8]. Исследования микробиологического состава вод Байкала во время развития весеннего термобара свидетельствуют о высоких концентрациях гетеротрофных бактерий и хлорофилла в присклоновых областях, а также на глубинах 400–600 и 900–1 100 м [9]. Прогрев солнечной энергией прибрежных вод весной активизирует рост растительности и многие химические и биологические процессы. Измерения, регулярно проводящиеся на Байкале, показывают, что органическое вещество в нем распределено неравномерно как в фотическом слое, где оно потребляется водорослями, так и в глубоководных частях [4].

При создании математических моделей для исследования биогеохимических циклов в пресноводных экосистемах наряду с лимитирующими рост организмов биогенными элементами – азотом и фосфором – важно рассматривать и первейший индикатор гидробиологических процессов – растворенный кислород, уровень которого аномально растет при интенсивном фотосинтезе (в результате поступления большого количества этих элементов) и резко падает при чрезмерном вымирании фитопланктона. Настоящая работа нацелена на разработку и описание математической модели для воспроизведения биогеохимических процессов в пресноводном озере с учетом динамики растворенного кислорода во время развития весеннего термобара (на примере Баргузинского залива оз. Байкал).

Математическая модель

Предложенная математическая модель основана на моделях цикла азота [10], фосфора [11], кислорода [12] и включает в себя следующие переменные: кислород (O_2), нитрат (NO_3), аммоний (NH_4), фосфат (PO_4), хлорофилл *a*, фитопланктон, зоопланктон, крупный и мелкий детрит. Циркуляция растворенного кислорода

в водоеме осуществляется через кислородный обмен с атмосферой, биогеохимические процессы и физический транспорт. Параметризация поступления атмосферного кислорода в озеро реализована с учетом растворимости кислорода в воде [13] и скорости ветра на поверхности водоема [14]. Биохимическая динамика кислорода описывается процессами фотосинтеза, дыхания, нитрификации и реминерализации. Приведенная на рис. 1 схематическая диаграмма иллюстрирует связи между компонентами модели (рис. 1, а), а также физико-биогеохимические процессы, ответственные за круговорот кислорода в водоеме (рис. 1, б). Физический транспорт кислорода в озере реализован на основе термогидродинамической модели, включающей в себя уравнения неразрывности, количества движения, энергии, турбулентных характеристик и др. [15].

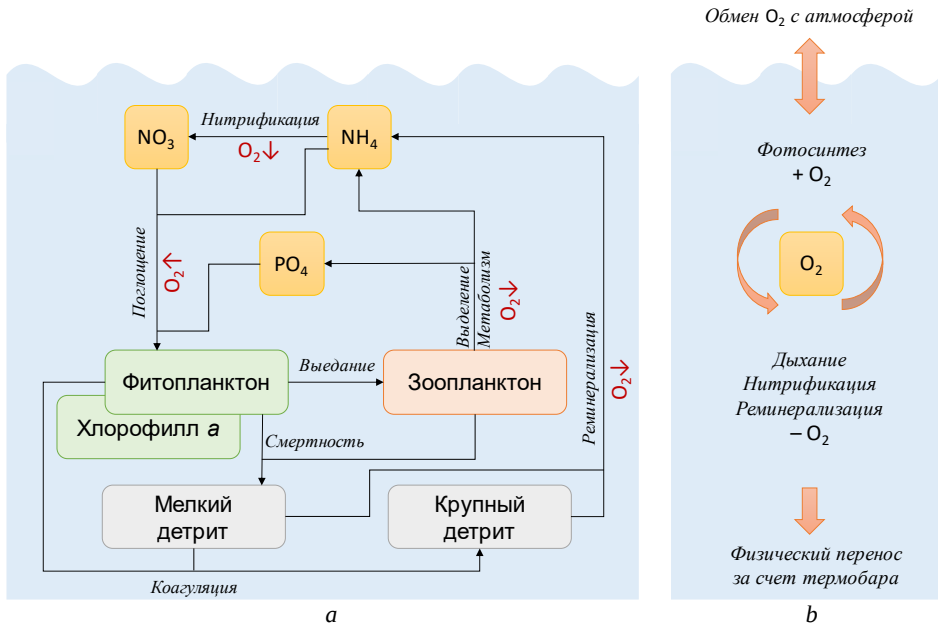


Рис. 1. Схема, демонстрирующая связи между компонентами модели (а) и физико-биогеохимические процессы, ответственные за циркуляцию кислорода в водоеме (б)
Fig. 1. (a) Schematic showing connections between model components and (b) physical and biogeochemical processes responsible for oxygen circulation in a lake

Биогеохимические процессы в пресноводном озере описываются с помощью реакционно-конвективно-диффузионных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial [NO_3]}{\partial t} + \frac{\partial u[NO_3]}{\partial x} + \frac{\partial w[NO_3]}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial [NO_3]}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial [NO_3]}{\partial z} \right) - \\ &- \mu_{\max}(T) f(I) \frac{L_{NO_3}}{L_N} \min(L_N, L_P) [Phyto] + L_{O_2} n [NH_4]; \\ \frac{\partial [NH_4]}{\partial t} + \frac{\partial u[NH_4]}{\partial x} + \frac{\partial w[NH_4]}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial [NH_4]}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial [NH_4]}{\partial z} \right) - \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 & -\mu_{\max}(T)f(I)\frac{L_{NH_4}}{L_N}\min(L_N, L_P)[Phyto]-L_{O_2}\eta[NH_4]+ \\
 & +\left(l_{BM}+l_E\frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto}+[Phyto]^2}\beta\right)[Zoo]+L_{O_2}(r_{SD}[SD]+r_{LD}[LD]);
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[PO_4]}{\partial t}+\frac{\partial u[PO_4]}{\partial x}+\frac{\partial w[PO_4]}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial[PO_4]}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial[PO_4]}{\partial z}\right)- \\
 -\theta_{N:P}^{-1}\mu_{\max}(T)f(I)\min(L_N, L_P)[Phyto]+
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 & +\theta_{N:P}^{-1}\left(l_{BM}+l_E\frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto}+[Phyto]^2}\beta\right)[Zoo]+\theta_{N:P}^{-1}L_{O_2}(r_{SD}[SD]+r_{LD}[LD]); \\
 & \frac{\partial[O_2]}{\partial t}+\frac{\partial u[O_2]}{\partial x}+\frac{\partial w[O_2]}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial[O_2]}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial[O_2]}{\partial z}\right)+F_{air-lake}d^{-1}+ \\
 & +\mu_{\max}(T)f(I)\left(\frac{L_{NO_3}}{L_N}R_{O_2:NO_3}+\frac{L_{NH_4}}{L_N}R_{O_2:NH_4}\right)\min(L_N, L_P)[Phyto]-2L_{O_2}\eta[NH_4]-
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 & -R_{O_2:NH_4}\left(l_{BM}+l_E\frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto}+[Phyto]^2}\beta\right)[Zoo]-R_{O_2:NH_4}L_{O_2}(r_{SD}[SD]+r_{LD}[LD]); \\
 & \frac{\partial[Chl]}{\partial t}+\frac{\partial u[Chl]}{\partial x}+\frac{\partial w[Chl]}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial[Chl]}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial[Chl]}{\partial z}\right)+ \\
 & +\left\{\rho_{Chl}\mu_{\max}(T)f(I)\min(L_N, L_P)-m_{Phyto}-\tau([SD]+[Phyto])\right\}[Chl]- \\
 & -g_{\max}\frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto}+[Phyto]^2}[Zoo]\frac{[Chl]}{[Phyto]};
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[Phyto]}{\partial t}+\frac{\partial u[Phyto]}{\partial x}+\frac{\partial w[Phyto]}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial[Phyto]}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial[Phyto]}{\partial z}\right)+ \\
 +\left\{\mu_{\max}(T)f(I)\min(L_N, L_P)-m_{Phyto}-\tau([SD]+[Phyto])\right\}[Phyto]- \\
 -g_{\max}\frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto}+[Phyto]^2}[Zoo];
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[Zoo]}{\partial t}+\frac{\partial u[Zoo]}{\partial x}+\frac{\partial w[Zoo]}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial[Zoo]}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial[Zoo]}{\partial z}\right)+ \\
 +\left\{(g_{\max}-l_E)\frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto}+[Phyto]^2}\beta-l_{BM}\right\}[Zoo]-m_{Zoo}[Zoo]^2;
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[SD]}{\partial t}+\frac{\partial u[SD]}{\partial x}+\frac{\partial w[SD]}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial[SD]}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial[SD]}{\partial z}\right)+ \\
 +g_{\max}\frac{[Phyto]^2}{k_{Phyto}+[Phyto]^2}(1-\beta)[Zoo]+m_{Zoo}[Zoo]^2+ \\
 +m_{Phyto}[Phyto]-\tau([SD]+[Phyto])[SD]-L_{O_2}r_{SD}[SD];
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial[LD]}{\partial t} + \frac{\partial u[LD]}{\partial x} + \frac{\partial w[LD]}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial[LD]}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial[LD]}{\partial z} \right) + \tau([SD] + [Phyto])^2 - L_{O_2} r_{LD}[LD], \end{aligned} \quad (9)$$

где NO_3 , NH_4 , PO_4 , O_2 , Chl , $Phyto$, Zoo , SD и LD – концентрации нитратов, аммония, фосфатов, растворенного кислорода, хлорофилла a , фитопланктона, зоопланктона, мелкого и крупного детрита соответственно; u и w – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости соответственно; D_x и D_z – коэффициенты турбулентной диффузии в соответствующих направлениях.

Максимальная скорость роста фитопланктона $\mu_{\max}(T)$ зависит от температуры воды [16]:

$$\mu_{\max}(T) = \mu_0 \cdot 1.066^T. \quad (10)$$

Коэффициенты L_{NO_3} , L_{NH_4} , L_{O_2} , L_N и L_P отвечают за лимитирование продуктивности водоема по основным биогенным элементам (табл. 1).

Таблица 1

Коэффициенты лимитирования

Обозначение	Наименование	Расчетная формула
L_{NO_3}	Коэффициент нитратного лимитирования	$\frac{[NO_3]}{k_{NO_3} + [NO_3]} \cdot \frac{1}{1 + [NH_4] / k_{NH_4}}$
L_{NH_4}	Коэффициент аммонийного лимитирования	$\frac{[NH_4]}{k_{NH_4} + [NH_4]}$
L_{O_2}	Коэффициент кислородного лимитирования	$\max \left[\left(\frac{O_2 - O_2^{th}}{k_{O_2} + O_2 - O_2^{th}} \right), 0 \right]$
L_N	Коэффициент биогенного лимитирования по азоту	$L_{NO_3} + L_{NH_4}$
L_P	Коэффициент биогенного лимитирования по фосфору	$\frac{[PO_4]}{k_{PO_4} + [PO_4]}$

Кислородообмен между атмосферой и озером описывается законом

$$F_{air-lake} = \nu k_{O_2} (O_2^* - O_2). \quad (11)$$

Для вычисления концентрации насыщения воды кислородом O_2^* используется аппроксимация эмпирических табличных данных [17] в диапазоне температур 0–20°C:

$$O_2^* = 456.96 - 12.86 \cdot T_C + 0.2771 \cdot T_C^2 - 0.0033 \cdot T_C^3, \quad (12)$$

где T_C – температура воды в °C.

Интенсивность перехода кислорода из газовой фазы в жидкую рассчитывается как [14]

$$\nu k_{O_2} = 0.31 U_{10}^2 \sqrt{\frac{Sc_{CO_2}}{Sc_{O_2}}}, \quad (13)$$

где $U_{10} = \sqrt{u_{10}^2 + v_{10}^2}$ – скорость ветра, Sc_{CO_2} и Sc_{O_2} – число Шмидта для CO_2 и O_2 соответственно. Для пресной воды

$$Sc_{O_2} = 1800.6 - 120.1 \cdot T_C + 3.7818 \cdot T_C^2 - 0.047608 \cdot T_C^3; \quad (14)$$

$$Sc_{CO_2} = 1911.1 - 118.11 \cdot T_C + 3.4527 \cdot T_C^2 - 0.04132 \cdot T_C^3. \quad (15)$$

Функция $f(I)$ представляет связь фотосинтеза и света:

$$f(I) = \frac{\alpha I}{\sqrt{\mu_{\max}^2 + \alpha^2 I^2}}; \quad (16)$$

$$I = I_s \cdot PAR \cdot \exp \left\{ -d \left(k_{water} + k_{chl} \int_d^{L_z} Chl(z) dz \right) \right\}, \quad (17)$$

где I_s – приходящий на поверхность воды свет; PAR – доля света для фотосинтеза ($= 0.43$); k_{water} и k_{chl} – коэффициенты ослабления света для воды ($= 0.04 \text{ м}^{-1}$) и хлорофилла ($= 0.025 \text{ (мг Chl)}^{-1} \text{ м}^{-2}$) соответственно [10]. Параметру I_s в модели соответствует коротковолновая радиация [10], которая вычисляется по формуле (8) из [18].

Участвующая в синтезе хлорофилла доля роста фитопланктона определяется как

$$\rho_{Chl} = \frac{\theta_{\max} \mu_{\max}(T) f(I) \min(I_N, L_P) [Phyto]}{\alpha I [Chl]}. \quad (18)$$

Скорость нитрификации вычисляется [19]:

$$n = n_{\max} \cdot \left(1 - \max \left[0, \frac{I - I_0}{k_I + I - I_0} \right] \right), \quad (19)$$

где $n_{\max}$ – максимальная скорость нитрификации. Параметры, входящие в расчетные формулы биогеохимического блока модели, приведены в табл 2.

Таблица 2

Значения биогеохимических параметров модели

Обозначение	Наименование	Значение
<i>Биогенные элементы</i>		
$n_{\max}$	Максимальная скорость нитрификации	0.05 сут^{-1}
k_I	Интенсивность света, при которой ингибирование нитрификации является полунасыщенным	0.1 Вт/м^2
I_0	Порог ФАР для ингибирования процесса нитрификации	0.0095 Вт/м^2
$\theta_{N:P}$	Соотношение азота к фосфору	16 ммольN/ммольP
<i>Кислород</i>		
k_{O_2}	Константа полунасыщения по кислороду	$3.0 \text{ ммольO}_2/\text{м}^3$
O_2^{th}	Порог по кислороду, ниже которого не происходят процессы аэробного дыхания или нитрификации	$6.0 \text{ ммольO}_2/\text{м}^3$
$R_{O_2:NO_3}$	Стехиометрическое соотношение, соответствующее количеству кислорода, образуемому на моль нитрата, ассимилированного при фотосинтетической продукции органического вещества	$8.5 \text{ ммольO}_2/\text{ммольNH}_4$

Окончание табл. 2

Обозначение	Наименование	Значение
$R_{O_2:NH_4}$	Стехиометрическое соотношение, соответствующее количеству кислорода, образующемуся на моль аммония, ассимилированного при фотосинтетической продукции органического вещества	6.625 ммоль O_2 /ммоль NH_4
Фитопланктон		
μ_0	Скорость роста фитопланктона при 0°C	0.69 сут $^{-1}$
α	Начальная крутизна кривой $P-I$	0.1 мг С (мг Chl Вт м $^{-2}$ сут) $^{-1}$
k_{NO_3}	Константа полунасыщения по нитрату	0.8 ммольN/м 3
k_{NH_4}	Константа полунасыщения по аммонiu	0.8 ммольN/м 3
k_{PO_4}	Константа полунасыщения по фосфату	0.06 ммольP/м 3
m_{Phyto}	Смертность фитопланктона	0.15 сут $^{-1}$
τ	Скорость коагуляции фитопланктона и мелкого детрита	0.08 (ммольN/м 3) $^{-1}$ сут $^{-1}$
θ_{max}	Максимальное соотношение хлорофилла к биомассе планктона	0.0535 мгChl(мгC) $^{-1}$
Зоопланктон		
q_{max}	Максимальная скорость питания	0.5 сут $^{-1}$
β	Эффективность ассимиляции	0.75
k_{Phyto}	Константа полунасыщения по потреблению фитопланктона	2 (ммольN/м 3) 2
l_{BM}	Скорость экскреции за счет основного обмена	0.1 сут $^{-1}$
l_E	Максимальная скорость экскреции при ассимиляции	0.1 сут $^{-1}$
m_{Zoo}	Смертность зоопланктона	0.025 (ммольN/м 3) $^{-1}$ сут $^{-1}$
Детрит		
r_{SD}	Скорость реминерализации мелкого детрита	0.03 сут $^{-1}$
r_{LD}	Скорость реминерализации крупного детрита	0.01 сут $^{-1}$

Граничные условия имеют вид:

а) на поверхности водоема

$$\frac{\partial[NO_3]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[NH_4]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[PO_4]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[O_2]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[Chl]}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial[Phyto]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[Zoo]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[SD]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[LD]}{\partial z} = 0;$$

б) на твердых границах

$$\frac{\partial[NO_3]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[NH_4]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[PO_4]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[O_2]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[Chl]}{\partial n} = 0;$$

$$\frac{\partial[Phyto]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[Zoo]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[SD]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[LD]}{\partial n} = 0,$$

где n – направление внешней нормали к области;

в) на границе впадения реки в озеро

$$[NO_3] = [NO_3]_R; [NH_4] = [NH_4]_R; [PO_4] = [PO_4]_R; [O_2] = [O_2]_R; [Chl] = [Chl]_R;$$

$$[Phyto] = [Phyto]_R; [Zoo] = [Zoo]_R; [SD] = [SD]_R; [LD] = [LD]_R,$$

где $[NO_3]_R$, $[NH_4]_R$, $[PO_4]_R$, $[O_2]_R$, $[Chl]_R$, $[Phyto]_R$, $[Zoo]_R$, $[SD]_R$ и $[LD]_R$ – концентрация нитратов, аммония, фосфатов, растворенного кислорода, хлорофилла a ,

фитопланктона, зоопланктона, мелкого и крупного детрита в устье реки соответственно.

г) на открытой (правой) границе задаются условия радиационного типа:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (\phi = [NO_3], [NH_4], [PO_4], [O_2], [Chl], [Phyto], [Zoo], [SD], [LD]),$$

фазовая скорость c_{ϕ} рассчитывается из пространственных и временных тенденций внутри области [20].

Коэффициенты вертикальной диффузии определяются как

$$D_z = \frac{\nu_T}{Pr_T} + \frac{\nu}{Pr},$$

где ν_T – турбулентная кинематическая вязкость (рассчитывается по k - ω -модели Уилкокса [21]); ν – молекулярная кинематическая вязкость воды; Pr и Pr_T – молекулярное и турбулентное числа Прандтля.

Коэффициенты горизонтальной диффузии заданы постоянными [22]:

$$D_x = 2.5 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Методы решения уравнений модели

Реакционно-конвективно-диффузионные уравнения модели решаются численно на основе метода конечного объема, согласно которому скалярные величины (концентрации нитратов, аммония, фосфатов, растворенного кислорода, хлорофилла a , фитопланктона, зоопланктона, мелкого и крупного детрита) определяются в центре сеточной ячейки, а компоненты вектора скорости – в середине ребер ячеек. Методом блокировки фиктивных областей (сведением к нулю скоростей при помощи больших значений коэффициентов вязкости в выключенной зоне) [23] осуществляется приближение вычислительной области к профилю дна водоема.

Алгоритм численного решения уравнений модели реализован с применением неявных разностных схем второго порядка по пространству и времени: аппроксимация конвективных и нестационарных членов проводится по схемам Леонарда [24] и Кранка–Николсона соответственно. Системы разностных уравнений на каждом шаге по времени решаются методом неполной факторизации [25].

Область исследования и параметры задачи

В качестве области исследования рассматривается вертикальный разрез Баргузинского залива оз. Байкал (рис. 2, *a*). Начало системы координат и направление ее осей определены следующим образом: начало соответствует устью р. Баргузин; ось Ox направлена в центр озера, ось Oy – вдоль берега (поперек устья реки) и ось Oz – вертикально вверх (см. рис. 2). Вычислительная область, имеющая длину 20 км и глубину 100 м (см. рис. 2, *b*), покрыта равномерной ортогональной сеткой с шагами $h_x = 25$ м и $h_z = 2.5$ м. Шаг по времени составляет 10 с.

Начальная температура воды в заливе принята равной 3°C , что отражает среднее значение вертикального распределения температуры в верхнем 100-метровом слое Среднего Байкала в июне [26]. Вода в устье р. Баргузин нагревалась со скоростью $0.2^\circ\text{C}/\text{сут}$ в диапазоне 12 – 18°C . Минерализация воды в реке – 149 мг/л [27], в озере – 96 мг/л [26]. Приустьевая скорость течения реки задана равной 0.5 см/с.

Касательное напряжение ветра, а также потоки коротко- и длинноволновой радиации, явного и скрытого тепла вычислены на основе данных погодных условий станции п. Усть-Баргузин за июнь 2023 г. [27].

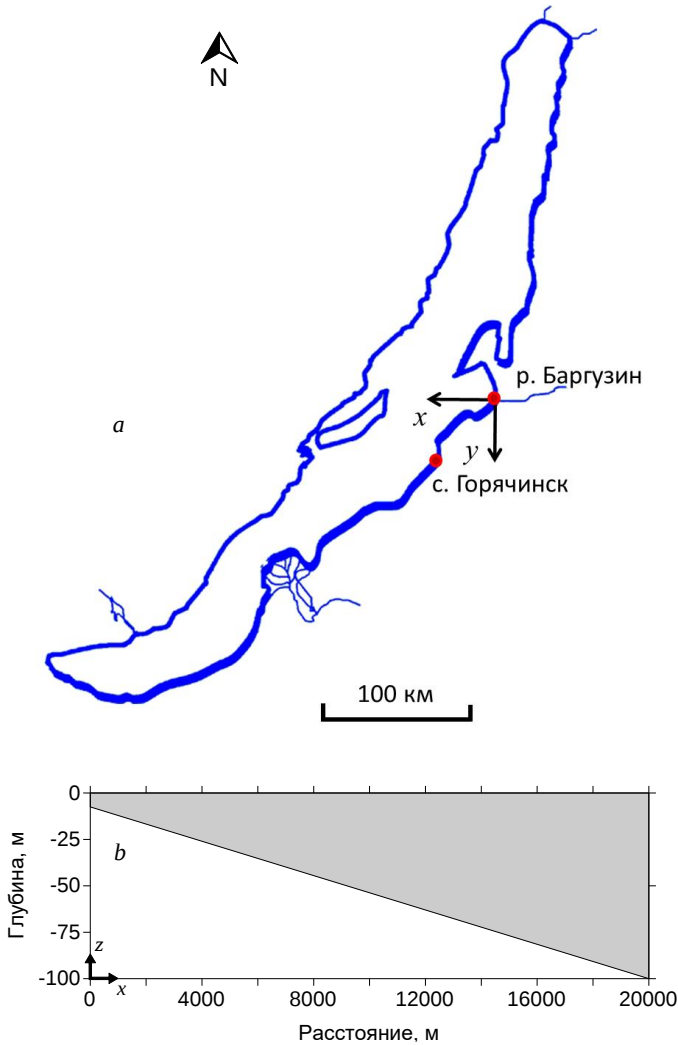


Рис. 2. Схема разреза (а) и вычислительная область (b)
Fig. 2. (a) Lake Baikal cross-section and (b) calculation domain

Значения концентрации нитратов, аммония, фосфатов и кислорода приняты равными 1.0 ммольN/м^3 , 1.0 ммольN/м^3 , 0.05 ммольP/м^3 и $312 \text{ ммольO}_2/\text{м}^3$ соответственно. Начальное распределение концентрации для планктонных и детритных компонентов составляет 0.2 и 0.1 ммольN/м^3 соответственно. Количество хлорофилла a задано исходя из соотношения 1.59 для $[\text{Chl}]/[\text{Phyto}]$. Граничные условия на месте впадения реки в озеро для переменных биогеохимической модели совпадают с их начальными значениями.

Результаты расчетов

Согласно результатам численного моделирования концентрация растворенного кислорода (рис. 3, *b1*, *b2*) увеличивается во всем водоеме с течением времени. Наибольшая концентрация наблюдается в теплоактивной области перед термобаром. На 5-е сут эта концентрация достигает $336 \text{ ммоль O}_2/\text{м}^3$ на расстоянии 3 км, а на 10-е сут – $346 \text{ ммоль O}_2/\text{м}^3$ на расстоянии 4.5 км от устья речного притока на поверхности водоема. На открытой границе расчетной области уровень растворенного кислорода на 5-е сут в придонной области $< 318 \text{ ммоль O}_2/\text{м}^3$, а на 10-е сут $< 328 \text{ ммоль O}_2/\text{м}^3$ по всей глубине. По мере развития термобара устанавливается вертикально однородное распределение кислорода в открытой части озера.

Наблюдается тенденция роста количества нитратов в направлении открытого озера как на 5-е сут (рис. 3, *c1*), так и на 10-е сут (рис. 3, *c2*). Причем в глубоководной части залива концентрация нитратов максимальна: на правой границе расчетной области $> 1.03 \text{ ммоль/м}^3$ на 5-е сут и $> 1.06 \text{ ммоль/м}^3$ на 10-е сут. В целом содержание нитратов с течением времени растет по всему водоему, за исключением приустьевой зоны.

На особенность распределения аммония в заливе оказывает сильное влияние эффект термобара (рис. 3, *d*). На месте втекания речного притока концентрация аммония сначала падает с ростом расстояния от устья реки, потом увеличивается при приближении к термическому фронту и затем снова снижается по мере удаления от термобара в открытое озеро. С развитием биогеохимических процессов в водоеме количество аммония в целом уменьшается, что связано с увеличением биомассы фитопланктона (рис. 3, *f*). На 5-е сут минимальное значение концентрации аммония в теплоактивной области ниже 0.981 ммоль/м^3 , максимальное значение вблизи термобара – выше 0.986 ммоль/м^3 , а на расстоянии 20 000 м от устья концентрация падает до 0.982 ммоль/м^3 ближе ко дну (рис. 3, *d1*). Здесь максимум за термическим фронтом по всей глубине достигается в температурной зоне $3.5\text{--}4.0^\circ\text{C}$ (рис. 3, *a1*). На 10-е сут содержание аммония в теплоактивной области ниже 0.958 ммоль/м^3 , вблизи термобара – выше 0.973 ммоль/м^3 (максимум сосредоточен в нижней части термобара, в температурной области $4.0\text{--}4.5^\circ\text{C}$ (рис. 3, *a1*) ближе ко дну), а в открытом озере концентрация аммония падает до 0.965 ммоль/м^3 .

Истощение фосфатов наблюдается в теплоактивной области (рис. 3, *e*), а дальше с увеличением расстояния от устья реки происходит постепенный рост. Концентрация фосфатов на 5-е сут достигает минимума 0.0488 ммоль/м^3 при $x \approx 1500 \text{ м}$ по всей глубине (рис. 3, *e1*) и на 10-е сут – 0.0474 ммоль/м^3 при $x \approx 2500 \text{ м}$ на поверхности озера (рис. 3, *e2*). При этом на правой границе расчетной области на 5-е сут концентрация фосфатов $> 0.0508 \text{ ммоль/м}^3$ в придонной области (рис. 3, *e1*), а на 10-е сут $> 0.0514 \text{ ммоль/м}^3$ по всей глубине (рис. 3, *e2*).

Активный рост фитопланктона происходит в теплоактивной области залива (рис. 3, *f*). Так, на 5-е сут достигает максимума $> 0.21 \text{ ммоль N/м}^3$ на расстоянии 1500 м (рис. 3, *f1*), а на 10-е сут $> 0.225 \text{ ммоль N/м}^3$ на расстоянии 2000 м (рис. 3, *f2*) по всей глубине. На открытой границе расчетной области на 5-е сут биомасса фитопланктона менее $0.185 \text{ ммоль N/м}^3$ (рис. 3, *f1*) и на 10-е сут – менее 0.17 ммоль N/м^3 (рис. 3, *f2*). Следует заметить, что минимумы концентраций фосфатов и фитопланктона снижаются со временем, а их максимумы – возрастают.

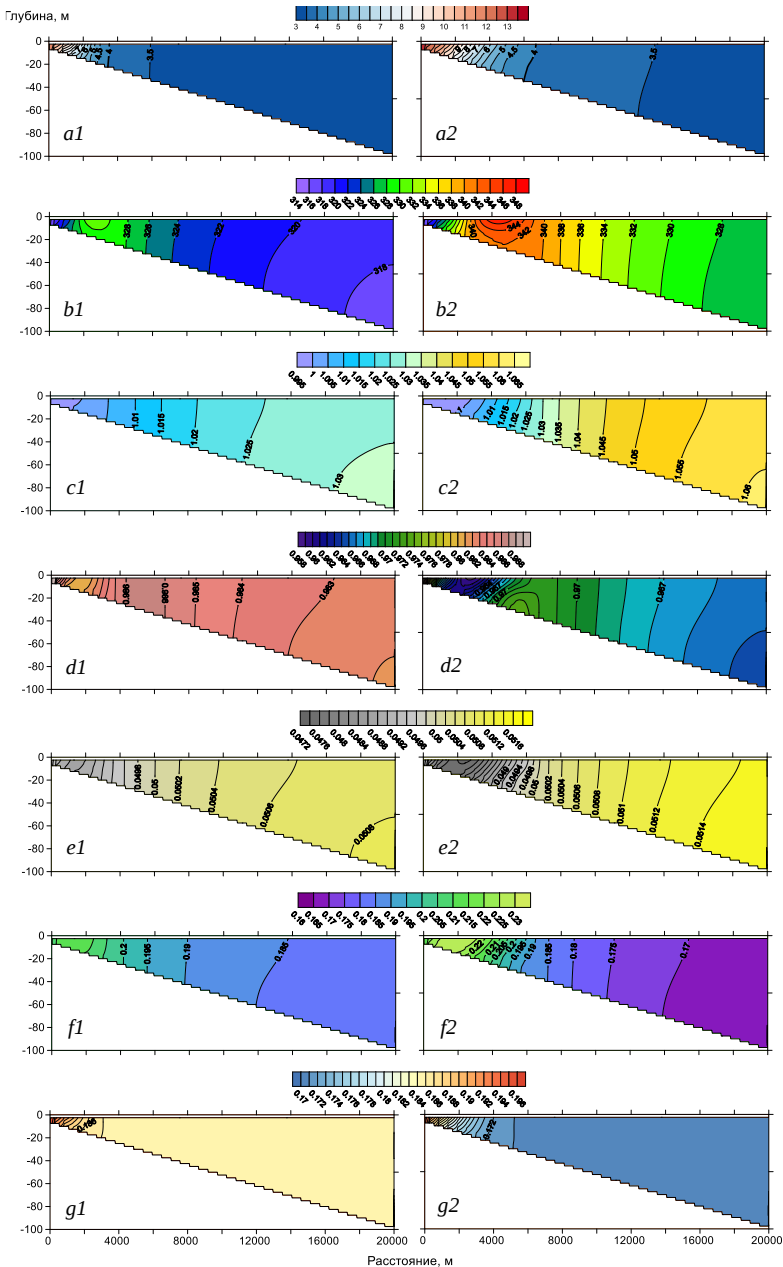


Рис. 3. Распределение температуры (жирной линией показана изотерма 4°C) [°C] (a), растворенного кислорода [ммольO₂/м³] (b), нитратов [ммоль/м³] (c), аммония [ммоль/м³] (d), фосфатов [ммоль/м³] (e), фитопланктона [ммольN/м³] (f) и зоопланктона [ммольN/м³] (g) на 5 (1) и 10 (2) сут

Fig. 3. (a) Distributions of temperature (the bold line is the 4°C isotherm) [°C], (b) dissolved oxygen [mmolO₂/m³], (c) nitrate [mmol/m³], (d) ammonium [mmol/m³], (e) phosphate [mmol/m³], (f) phytoplankton [mmolN/m³], and (g) zooplankton [mmolN/m³] on day 5 (1) and 10 (2)

Содержание зоопланктона постепенно уменьшается с увеличением расстояния от устья речного притока, где оно имеет самое высокое значение, и однородно в теплоинертной области (рис. 3, *g*). Концентрация зоопланктона устанавливается на отметке $< 0.185 \text{ ммольN/м}^3$ при $x > 3\,000 \text{ м}$ на 5-е сут (рис. 3, *g1*) и $< 0.171 \text{ ммольN/м}^3$ при $x > 5\,100 \text{ м}$ на 10-е сут (рис. 3, *g2*). Видно, что с течением времени популяция зоопланктона сокращается во всей области моделирования.

Важно заметить, что изотермы отклоняются в сторону открытого озера у поверхности воды (см. рис. 3, *a*), наклон тем больше, чем ближе к впадению реки, что показывает перемешивание речных вод с озерными в приповерхностном слое. При этом в силу небольшой глубины залива речной приток в месте впадения влияет на температуру воды в озере по всей глубине мелководья. Структура полученных для батиметрии Баргузинского залива изотерм (см. рис. 3, *a*) существенно отличается от структуры распределения температуры на разрезе р. Болдакова – прол. Малое Море, характеризующегося большими глубинами [29].

Заключение

Представленная в статье математическая модель позволяет в период существования весеннего термобара воспроизводить биогеохимические процессы в крупном водоеме с учетом динамики растворенного кислорода. Результаты расчетов показали, что наибольший уровень растворенного кислорода наблюдается в теплоактивной области на поверхности озера. В окрестности термобара концентрация растворенного кислорода имеет высокое значение по всей глубине (за счет интенсивного перемешивания вод с разной температурой), в приустьевой зоне ее изолинии обладают качественным сходством с изотермами. Содержание аммония, поступающего с водами притока, максимально в месте впадения реки, а в теплоактивной области перед термобаром оно падает вследствие роста биомассы фитопланктона. В качественном отношении картина распределений нитратов и фосфатов в теплоинертной области идентична.

Список источников

1. Ерина О.Н. Режим растворенного кислорода в стратифицированных водохранилищах Москворецкой системы водоснабжения г. Москвы : дис. ... канд. геогр. наук. М., 2015. 188 с.
2. Palshin N., Zdorovenнова G., Efremova T., Bogdanov S., Terzhevik A., Zdorovenнов R. Dissolved oxygen stratification in a small lake depending on water temperature and density and wind impact // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2021. V. 937. Art. 032019. doi: 10.1088/1755-1315/937/3/032019
3. Иванова М.Б. Продукция планктонных ракообразных в пресных водах. Л. : Наука и техника, 1985. 220 с.
4. Domysheva V., Vorobyeva S., Golobokova L., Netsvetaeva O., Onischuk N., Sakirko M., Khuriganova O., Fedotov A. Assessment of the current trophic status of the Southern Baikal littoral zone // Water. 2023. V. 15 (6). Art. 1139. doi: 10.3390/w15061139
5. Tomberg I.V., Sorokovikova L.M., Popovskaya G.I., Bashenkhayeva N.V., Sinyukovich V.N., Ivanov V.G. Concentration dynamics of biogenic elements and phytoplankton at Selenga R. Mouth and in Selenga shallows (Lake Baikal) // Water Resour. 2014. V. 41 (6). P. 687–695. doi: 10.1134/S0097807814050157

6. Reynolds C.S. Phytoplankton assemblages and their periodicity in stratifying lake systems // *Holarctic Ecol.* 1980. V. 3 (3). P. 141–159. doi: 10.1111/j.1600-0587.1980.tb00721.x
7. Shimaraev M.N., Granin N.G., Zhdanov A.A. Deep ventilation of Lake Baikal waters due to spring thermal bars // *Limnol. Oceanogr.* 1993, V. 38 (5). P. 1068–1072. doi: 10.4319/lo.1993.38.5.1068
8. Troitskaya E.S., Shimaraev M.N. Cases of mass development of intrusions in Lake Baikal and the correlation of intrusions with atmospheric circulation processes // *Limnology and Freshwater Biology.* 2022. V. 6. P. 1712–1719. doi: 10.31951/2658-3518-2022-A-6-1712
9. Parfenova V.V., Shimaraev M.N., Kostornova T.Y., Domysheva V.M., Levin L.A., Dryukker V.V., Zhdanov A.A., Gnatovskii R.Yu., Tsekhanovskii V.V., Logacheva N.F. On the vertical distribution of microorganisms in lake Baikal during spring deep-water renewal // *Microbiology.* 2000. V. 69 (3). P. 357–363. doi: 10.1007/BF02756748
10. Fennel K., Wilkin J., Levin J., Moisan J., O'Reilly J., Haidvogel D. Nitrogen cycling in the Middle Atlantic Bight: Results from a three-dimensional model and implications for the North Atlantic nitrogen budget // *Global Biogeochemical Cycles.* 2006. V. 20 (3). GB3007. doi: 10.1029/2005GB002456
11. Gan J., Lu Z., Cheung A., Dai M., Liang L., Harrison P.J., Zhao X. Assessing ecosystem response to phosphorus and nitrogen limitation in the Pearl River plume using the Regional Ocean Modeling System (ROMS) // *J. Geophys. Res.: Oceans.* 2014. V. 119 (12). P. 8858–8877. doi: 10.1002/2014JC009951
12. Fennel K., Hu J., Laurent A., Marta-Almeida M., Hetland R. Sensitivity of hypoxia predictions for the Northern Gulf of Mexico to sediment oxygen consumption and model nesting // *J. Geophys. Res.: Oceans.* 2013. V. 118 (2). P. 990–1002. doi: 10.1002/jgrc.20077
13. Garcia H.E., Gordon L.I. Oxygen solubility in seawater: Better fitting equations // *Limnol. Oceanogr.* 1992. V. 37 (6). P. 1307–1312. doi: 10.4319/lo.1992.37.6.1307
14. Wanninkhof R. Relationship between wind speed and gas exchange // *J. Geophys. Res.* 1992. V. 97. P. 7373–7382. doi: 10.1029/92JC00188
15. Цыденов Б.О. Математическая модель транспорта растворенного кислорода при развитии термобара // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2023. № 86. С. 176–187. doi: 10.17223/19988621/86/14
16. Eppley R.W. Temperature and phytoplankton growth in the sea // *Fish. Bull.* 1972. V. 70 (4). P. 1063–1085.
17. The Engineering ToolBox. Oxygen – solubility in fresh and sea water vs. temperature. URL: https://www.engineeringtoolbox.com/oxygen-solubility-water-d_841.html (accessed: 14.08.2023).
18. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. To the selection of heat flux parameterization models at the water-air interface for the study of the spring thermal bar in a deep lake // *Proc. SPIE* 9680, 96800H. 2015. P. 1–8. doi: 10.1117/12.2205687
19. Olson R.J. Differential photoinhibition of marine nitrifying bacteria: A possible mechanism for the formation of the primary nitrite maximum // *J. Mar. Res.* 1981. V. 39 (2). P. 227–238.
20. Orlanski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows // *J. Comput. Phys.* 1976. V. 21 (3). P. 251–269. doi: 10.1016/0021-9991(76)90023-1
21. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // *AIAA J.* 1988. V. 26 (11). P. 1299–1310. doi: 10.2514/3.10041
22. Holland P.R., Kay A., Botte V. Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake // *J. Mar. Syst.* 2003. V. 43 (1-2). P. 61–81. doi: 10.1016/S0924-7963(03)00089-7
23. Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. CRC Press, 1980. 197 p.
24. Leonard B. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 1979. V. 19 (1). P. 59–98. doi: 10.1016/0045-7825(79)90034-3
25. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М. : Физматлит, 1995. 288 с.

26. Shimaraev M.N., Verbolov V.I., Granin N.G., Sherstyankin P.P. Physical Limnology of Lake Baikal: A Review. Irkutsk–Okayama, 1994. 81 p.
27. Вотинцев К.К. Гидрохимия // Проблемы Байкала / ред. Г.И. Галазий, К.К. Вотинцев. Новосибирск, 1978. Т. 16, № 36. С. 124–146.
28. Расписание Погоды. URL: <https://rp5.ru/> (дата обращения: 14.08.2023).
29. Tsydenov B.O., Trunov N.S., Churuksaeva V.V., Degi D.V. Wind effects on deep convection in Lake Baikal during the autumnal thermal bar // Moscow University Physics Bulletin. 2024. V. 79 (2). P. 283–290. doi: 10.3103/S0027134924700280

References

1. Erina O.N. (2015) *Rezhim rastvorennogo kisloroda v stratifitsirovannykh vodokhranilishchakh Moskvoretskoy sistemy vodosnabzheniya g. Moskvy* [Dissolved oxygen regime in stratified reservoirs of the Moskvoretsk water supply system of Moscow]. Dissertation. Moscow State university.
2. Palshin N., Zdorovenнова G., Efremova T., Bogdanov S., Terzhevik A., Zdorovenнов R. (2021) Dissolved oxygen stratification in a small lake depending on water temperature and density and wind impact. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 937. 032019. DOI: 10.1088/1755-1315/937/3/032019.
3. Ivanova M.B. (1985) *Produksiya planktonnykh rakoobraznykh v presnykh vodakh* [Production of planktonic crustaceans in fresh waters]. Leningrad: Nauka i tekhnika.
4. Domysheva V., Vorobyeva S., Golobokova L., Netsvetaeva O., Onischuk N., Sakirko M., Khuriganova O., Fedotov A. (2023) Assessment of the current trophic status of the Southern Baikal littoral zone. *Water*. 15(6). p. 1139. DOI: 10.3390/w15061139.
5. Tomberg I.V., Sorokovikova L.M., Popovskaya G.I., Bashenkhaeva N.V., Sinyukovich V.N., Ivanov V.G. (2014) Concentration dynamics of biogenic elements and phytoplankton at Selenga R. Mouth and in Selenga shallows (Lake Baikal). *Water Resources*. 41(6). pp. 687–695. DOI: 10.1134/S0097807814050157.
6. Reynolds C.S. (1980) Phytoplankton assemblages and their periodicity in stratifying lake systems. *Holarctic Ecology*. 3(3). pp. 141–159. DOI: 10.1111/j.1600-0587.1980.tb00721.x.
7. Shimaraev M.N., Granin N.G., Zhdanov A.A. (1993) Deep ventilation of Lake Baikal waters due to spring thermal bars. *Limnology and Oceanography*. 38(5). pp. 1068–1072. DOI: 10.4319/lo.1993.38.5.1068.
8. Troitskaya E.S., Shimaraev M.N. (2022) Cases of mass development of intrusions in Lake Baikal and the correlation of intrusions with atmospheric circulation processes. *Limnology and Freshwater Biology*. 6. pp. 1712–1719. DOI: 10.31951/2658-3518-2022-A-6-1712.
9. Parfenova V.V., Shimaraev M.N., Kostornova T.Y., Domysheva V.M., Levin L.A., Dryukker V.V., Zhdanov A.A., Gnatovskii R.Yu., Tsekhanovskii V.V., Logacheva N.F. (2000) On the vertical distribution of microorganisms in Lake Baikal during spring deep-water renewal. *Microbiology*. 69(3). pp. 357–363. DOI: 10.1007/BF02756748.
10. Fennel K., Wilkin J., Levin J., Moisan J., O'Reilly J., Haidvogel D. (2006) Nitrogen cycling in the Middle Atlantic Bight: Results from a three-dimensional model and implications for the North Atlantic nitrogen budget. *Global Biogeochemical Cycles*. 20(3). GB3007. DOI: 10.1029/2005GB002456.
11. Gan J., Lu Z., Cheung A., Dai M., Liang L., Harrison P.J., Zhao X. (2014) Assessing ecosystem response to phosphorus and nitrogen limitation in the Pearl River plume using the Regional Ocean Modeling System (ROMS). *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 119(12). pp. 8858–8877. DOI: 10.1002/2014JC009951.
12. Fennel K., Hu J., Laurent A., Marta-Almeida M., Hetland R. (2013) Sensitivity of hypoxia predictions for the Northern Gulf of Mexico to sediment oxygen consumption and model nesting. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 118(2). pp. 990–1002. DOI: 10.1002/jgrc.20077.

13. Garcia H.E., Gordon L.I. (1992) Oxygen solubility in seawater: Better fitting equations. *Limnology and Oceanography*. 37(6). pp. 1307–1312. DOI: 10.4319/lo.1992.37.6.1307.
14. Wanninkhof R. (1992) Relationship between wind speed and gas exchange. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 97. pp. 7373–7382. DOI: 10.1029/92JC00188.
15. Tsydenov B.O. (2023) A mathematical model of dissolved oxygen transport during the thermal bar evolution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 176–187. DOI: 10.17223/19988621/86/14.
16. Eppley R.W. (1972) Temperature and phytoplankton growth in the sea. *Fishery Bulletin*. 70(4). pp. 1063–1085.
17. The Engineering ToolBox (2005). Oxygen – Solubility in Fresh and Sea Water vs. Temperature. [online] Access mode: https://www.engineeringtoolbox.com/oxygen-solubility-water-d_841.html (accessed 14.08.2023).
18. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. (2015) To the selection of heat flux parameterization models at the water-air interface for the study of the spring thermal bar in a deep lake. *Proceedings of SPIE*. 9680. 96800H. pp. 1–8. DOI: 10.1117/12.2205687.
19. Olson R.J. (1981) Differential photoinhibition of marine nitrifying bacteria: A possible mechanism for the formation of the primary nitrite maximum. *Journal of Marine Research*. 39(2). pp. 227–238.
20. Orlanski I. (1976) A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics*. 21(3). pp. 251–269. DOI: 10.1016/0021-9991(76)90023-1.
21. Wilcox D.C. (1988) Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*. 26(11). pp. 1299–1310. DOI: 10.2514/3.10041.
22. Holland P.R., Kay A., Botte V. (2003) Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake. *Journal of Marine Systems*. 43(1-2). pp. 61–81. DOI: 10.1016/S0924-7963(03)00089-7.
23. Patankar S. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. London: Hemisphere Publishing.
24. Leonard B. (1979) A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 19(1). pp. 59–98. DOI: 10.1016/0045-7825(79)90034-3.
25. Il'in V.P. (1995) *Metody nepolnoy faktorizatsii dlya resheniya algebraicheskikh sistem* [Incomplete factorization methods for solving algebraic systems]. Moscow: Fizmatlit.
26. Verbolov V.I., Granin N.G., Sherstyankin P.P. (1994). *Physical Limnology of Lake Baikal: A Review*. Irkutsk: Baikal International Center for Ecological Research.
27. Votintsev K.K. (1978) Gidrokimiya [Hydrochemistry], in: Galazii G.I., Votintsev K.K. (Eds.). *Problemy Baykala* [Problems of Lake Baikal], 16(36). pp. 124–146.
28. Raspisaniye pogody. Access mode: <https://rp5.ru/> (accessed 14.08.2023).
29. Tsydenov B.O., Trunov N.S., Churuxaeva V.V., Degi D.V. (2024) Wind effects on deep convection in Lake Baikal during the autumnal thermal bar. *Moscow University Physics Bulletin*. 79(2). pp. 283–290. DOI: 10.3103/S0027134924700280.

Сведения об авторах:

Цыденов Баир Олегович – кандидат физико-математических наук, заведующий научно-исследовательской лабораторией вычислительной геофизики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tsydenov@math.tsu.ru

Дегин Дмитрий Владимирович – программист научно-исследовательской лаборатории вычислительной геофизики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: dimadegi@rambler.ru

Барт Андрей Андреевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории вычислительной геофизики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bart@math.tsu.ru

Трунов Никита Сергеевич – младший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории вычислительной геофизики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: suslayndel@yandex.ru

Чуруксаева Владислава Васильевна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории вычислительной геофизики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: chu.vv@mail.ru

Information about the authors:

Tsydenov Bair O. (Candidate of Physics and Mathematics, Head of Laboratory, Laboratory of Computational Geophysics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tsydenov@math.tsu.ru

Degi Dmitriy V. (Programmer, Laboratory of Computational Geophysics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dimadegi@rambler.ru

Bart Andrey A. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Laboratory of Computational Geophysics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bart@math.tsu.ru

Trunov Nikita S. (Junior Researcher, Laboratory of Computational Geophysics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: suslayndel@yandex.ru

Churuksaeva Vladislava V. (Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Laboratory of Computational Geophysics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: chu.vv@mail.ru

Статья поступила в редакцию 19.06.2024; принята к публикации 07.02.2025

The article was submitted 19.06.2024; accepted for publication 07.02.2025

Научная статья

УДК 517.956.6

doi: 10.17223/19988621/93/5

MSC: 35M10, 35M12

Задача нахождения собственных значений и собственных функций краевых задач для уравнения смешанного типа

Иброхимжон Тожалиевич Тожибоев

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан, ibroxim@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются собственные значения и соответствующие им собственные функции краевой задачи с условием Франкла для эллиптического уравнения с негладкой линией смены типа в специальной области. Доказывается неполнота системы собственных функций рассматриваемой задачи в пространстве L_2 .

Ключевые слова: уравнения смешанного типа со спектральным параметром, собственные значения, собственные функции, краевая задача, единственность решения, спектральная задача

Для цитирования: Тожибоев И.Т. Задача нахождения собственных значений и собственных функций краевых задач для уравнения смешанного типа // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 58–66. doi: 10.17223/19988621/93/5

Original article

The problem of finding eigenvalues and eigenfunctions of boundary value problems for mixed-type equations

Ibrokhimjon Tojalievich Tojiboev

Ferghana State University, Ferghana, Republic of Uzbekistan, ibroxim@gmail.com

Abstract. In this work, eigenvalues and eigenfunctions of the boundary value problem with the Frankl condition for an elliptic-hyperbolic type equation in a special domain are considered. In the elliptic part of the domain, using polar coordinates and the method of separation of variables, we derive the spectral problems for the ordinary differential equations. By solving these problems, we obtain the eigenvalues and eigenfunctions of the formulated problem. Furthermore, we prove that the system of eigenfunctions is incomplete in the L^2 space, which means that not every square-integrable function in the domain can be represented as a series expansion in terms of these eigenfunctions. This incompleteness is demonstrated by constructing a specific function orthogonal to the entire system of eigenfunctions.

By exploring the spectral properties of mixed-type equations, this paper contributes to a broader understanding of how solutions behave in domains with varying types of differential operators. The study highlights the challenges posed by the change in operator

type, emphasizing the difficulties in obtaining a complete and comprehensive eigenfunction system. The research expands on previous works in the field of spectral analysis for mixed-type equations, particularly with respect to the role of spectral parameters and their impact on the completeness of the solution space. This research provides valuable insights into the mathematical and physical implications of mixed-type boundary value problems.

Keywords: mixed-type equations with a spectral parameter, eigenvalues, eigenfunctions, boundary value problem, uniqueness of the solution, spectral problem

For citation: Tojiboev, I.T. (2025) The problem of finding eigenvalues and eigenfunctions of boundary value problems for mixed-type equations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 58–66. doi: 10.17223/19988621/93/5

Введение

Со второй половины 70-х гг. прошлого столетия очень хорошо и интенсивно изучались краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Одна из причин этого состоит в том, что некоторые многомерные аналоги основных краевых задач для уравнений смешанного типа могут быть изучены [1] путем их сведения (с помощью преобразования Фурье) к задачам для уравнений со спектральным параметром. Существование и единственность решения различных задач для уравнений смешанного типа изучались этим же методом в работах [2, 3] в трехмерных областях.

Изучение спектральных свойств краевых задач для уравнений такого типа началось с работы Т.С. Кальменова [4], в которой он доказал существование хотя бы одного собственного значения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. Позднее Е.И. Моисеевым [5] были найдены участки, в которых нет собственного значения задачи Трикоми для серий смешанных уравнений. В работе С.М. Пономарева [6] найдены собственные функции и собственные значения задачи Трикоми для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sign} y u_{yy} - \lambda u = 0$ в специальной области.

По изучению спектральных свойств локальных краевых задач для уравнений смешанного типа отметим работы К.Б. Сабитова и В.В. Тихомирова [7, 8].

В настоящее время исследований спектральных свойств нелокальных задач для смешанных уравнений эллипτικο-гиперболического типа со спектральным параметром мало. Отметим лишь работы [9–14].

В данной работе мы найдем собственные значения и соответствующие им собственные функции краевой задачи с условием Франкла для эллипτικο-гиперболического уравнения с негладкой линией изменения типа в специальной области, а также докажем неполноту системы собственных функций рассматриваемой задачи в пространстве L_2 .

1. Постановка задачи

В данной работе в конечной односвязной области Ω плоскости xOy , ограниченной при $x \geq 0, y \geq 0$ и $x \leq 0, y \leq 0$ дугами σ_1 и σ_2 окружности $x^2 + y^2 = 1$, с концами в точках $A_1(0,1)$, $B_1(1,0)$ и $A_2(0,-1)$, $B_2(-1,0)$ и отрезками $\overline{OA_1}$ и $\overline{OB_2}$ прямых $x = 0, y = 0$ соответственно, а при $x \geq 0, y \leq 0$ отрезком $\overline{B_1A_2}$ прямой $x - y = 1$, будут поставлены краевые задачи для уравнения

$$\text{sign}(x+y) \left(\text{sign } x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \text{sign } y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \lambda u = 0, \quad (1)$$

$$(x, y) \in \Omega \setminus (OA_1 \cup OA_2 \cup OC),$$

где λ – заданное действительное число, и исследована однозначная разрешимость поставленных задач.

Кроме того, будут найдены собственные значения и собственные функции этих задач и исследована полнота системы собственных функций. При этом используются следующие обозначения: $\Omega^+ = \Omega \cap (x+y > 0)$, $\Omega_0^+ = \Omega^+ \cap (y > 0)$, $\Omega_1^+ = \Omega^+ \cap (y < 0)$; $\Omega^- = \Omega \cap (x+y < 0)$, $\Omega_0^- = \Omega^- \cap (x < 0)$, $\Omega_1^- = \Omega^- \cap (x > 0)$; $OD = \{(x, y) : x+y = 0, 0 < x < (1/2)\}$.

Уравнение (1) в области Ω принадлежит смешанному типу, а именно: в областях Ω_0^+ – эллиптическому типу, а в областях Ω_1^+ – гиперболическому типу. Отрезки OA_2 и OB_1 являются линиями изменения типа уравнения, а OD – линией разрыва последнего коэффициента уравнения.

При этом используются следующие обозначения: $\Delta = \Omega \cap (x-y > 0)$, $\Delta^+ = \Delta \cap (x+y > 0)$, $\Omega_2^+ = \Delta^+ \cap (y < 0)$, $\Omega_3^+ = \Delta^+ \cap (y > 0)$; $\Delta^- = \Delta \cap (x+y < 0)$, $\Omega_2^- = \Delta^- \cap (x > 0)$, $\Omega_3^- = \Delta^- \cap (x < 0)$; $\sigma_3 = \sigma_1 \cap (x-y > 0)$, $\sigma_4 = \sigma_2 \cap (x-y > 0)$; OA_3 (OA_4), OB_1 , OA_2 , OD – отрезки $x-y=0$, $y=0$, $x=0$, $x+y=0$ соответственно, где $O(0,0)$, $D(1/2, -1/2)$, $B_1(1,0)$, $A_2(0,-1)$, $A_3(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $A_4(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Задача Θ_λ . Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные в области Δ решения уравнения

$$\text{sign}(x+y) \left(\text{sign } x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \text{sign } y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \lambda u = 0, \quad (1)$$

$$(x, y) \in \Omega \setminus (OA_1 \cup OA_2 \cup OC),$$

из класса $C(\bar{\Delta}) \cap C^1((\Delta \cup OA_3 \cup OA_4) \setminus OD) \cap C^2(\Delta \setminus (OB_1 \cup OA_2 \cup OD))$, удовлетворяющие условиям

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_3; \quad \frac{\partial}{\partial n} u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in OA_3; \quad (2)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_4; \quad \frac{\partial}{\partial n} u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in OA_4; \quad (3)$$

$$u(0, -x) + u(x/\sqrt{2}, x/\sqrt{2}) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

где n – внутренняя нормаль к OA_3 и OA_4 .

Те значения параметра λ , которые требуется найти в задачах Θ_λ , называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные функции – собственными функциями задачи Θ_λ .

Пусть λ_0 есть какое-нибудь собственное значение задачи Θ_λ , а $u_0(x, y)$ – соответствующая ему собственная функция. Введем обозначения $\xi = \xi(x, y) = -y$, $\eta = \eta(x, y) = -x$ и

$$u_0(x, y) = \begin{cases} u_0^+(x, y), & (x, y) \in \Delta^+; \\ u_0^-(x, y), & (x, y) \in \Delta^-. \end{cases}$$

Очевидно, что если $(x, y) \in \bar{\Delta}^+$, то $(\xi, \eta) \in \bar{\Delta}^-$. Учитывая это, в области Δ^+ введем в рассмотрение функцию

$$v_0(x, y) = u_0^+(x, y) - u_0^-(\xi, \eta), \quad (x, y) \in \Delta^+.$$

Пользуясь свойствами функций $u_0^+(x, y)$ и $u_0^-(\xi, \eta)$, краевыми условиями (2), (3) и $u_0^+(x, -x) = u_0^-(x, -x)$, $0 \leq x \leq 1/2$, нетрудно убедиться в том, что функция $v_0(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} v_0(x, y) &\in C(\bar{\Delta}^+) \cap C^1(\Delta^+ \cup OA_3) \cap C^2(\Delta^+ \setminus OB_1); \\ v_{0xx} + \text{sign } y v_{0yy} + \lambda_0 v_0 &= 0, \quad (x, y) \in \Delta^+ \setminus OB_1; \\ v_{0xx}(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_1 \cup \overline{OD}; \\ \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial n} &= 0, \quad (x, y) \in OA_3. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Одной из функций, удовлетворяющих условию (5), является функция $v_0(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \bar{\Delta}^+$, откуда следует, что $v_0(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$, т.е. $u_0^+(x, 0) - u_0^-(0, -x) = 0$, $0 \leq x \leq 1$. Учитывая это и условие (4), имеем

$$u_0^+(x, 0) + u_0^+(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (6)$$

Из свойства функции $u_0^+(x, y)$ и равенства (6) следует, что функция $u_0^+(x, y)$ в области Ω_3^+ удовлетворяет уравнению

$$u_{0xx} + u_{0yy} + \lambda_0 u_0 = 0,$$

а на ее границе – условиям (6) и

$$u_0(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_3; \quad \frac{\partial}{\partial n} u_0(x, y) = 0, \quad (x, y) \in OA_3.$$

Отсюда следует, что собственные значения и собственные функции задачи Θ_λ в области Ω_3^+ являются также собственными значениями и собственными функциями следующей задачи.

Задача Ψ_λ . Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные в области Ω_3^+ решения уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}_3^+) \cap C^1(\Omega_3^+ \cup OA_3) \cap C^2(\Omega_3^+)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_3, \quad (\partial / \partial n)u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in OA_3$$

и

$$u(x, 0) + u(x / \sqrt{2}, x / \sqrt{2}) = 0, \quad (x, 0) \in \overline{OB}_1,$$

где n – внутренняя нормаль к OA_3 .

2. Результаты и исследования

В области Ω_3^+ переходим к полярным координатам

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi/2) \quad (7)$$

и решение задачи Ψ_λ ищем в виде:

$$u(x, y) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0. \quad (8)$$

Тогда из задачи Ψ_λ относительно функций $R(r)$ получим задачу на собственные значения:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda r^2 - \omega^2) R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (9)$$

и $R(0) = 0, R(1) = 0$, а относительно $\Phi(\varphi)$ – задачу с условиями

$$\Phi''(\varphi) + \omega^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi/2, \quad (10)$$

$$\Phi'(\pi/4) = 0, \quad \Phi(0) + \Phi(\pi/4) = 0. \quad (11)$$

Решением уравнения (9), удовлетворяющим условию $R(0) = 0$, является функция

$$R(r) = J_\omega(\sqrt{\lambda}r), \quad \operatorname{Re} \omega > 0. \quad (12)$$

Пользуясь общим решением

$$\Phi(\varphi) = a \cos(\omega\varphi) + b \sin(\omega\varphi)$$

уравнения (10) и $\operatorname{Re} \omega > 0$, нетрудно убедиться, что нетривиальные решения задачи $\{(10), (11)\}$ существуют при $\omega = \omega_n = 8n - 4, n \in N$, и они определяются равенствами

$$\Phi_n(\varphi) = a_n \cos[(8n - 4)\varphi], \quad n \in N, \quad (13)$$

где $a_n \neq 0$ – произвольные постоянные.

Подставляя $\omega = \omega_n = 8n - 4, n \in N$, в решение

$$\Phi'(\pi/2) = 0, \quad \Phi(0) + \Phi(\pi/2) = 0$$

уравнения (9) и удовлетворяя условию $R(1) = 0$, имеем уравнение

$$J_{8n-4}(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad n \in N, \quad (14)$$

относительно λ . Обозначая через $\beta_{n,m}$ – m -й положительный корень уравнения (14), находим собственные значения $\lambda_{n,m} = \beta_{n,m}^2$ задачи Ψ_λ .

Собственные функции задачи Ψ_λ , соответствующие собственным числам $\lambda_{n,m}$, в силу (8), (12), (13) и $\omega = \omega_n = 8n - 4$ имеют вид:

$$u_{n,m}(x, y) = a_{n,m} \cos[(8n - 4)\varphi] \times \\ \times J_{8n-4}(\beta_{n,m} \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x, y) \in \Omega_3^+, \quad n, m \in N, \quad (15)$$

где $a_{n,m} \neq 0$ – произвольные постоянные.

Теорема 1. Система собственных функций $\{u_{n,m}(x, y)\}_{n,m=1}^\infty$ задачи Ψ_λ , определяемая формулой (15), не полна в пространстве $L_2(\Omega_3^+)$.

В самом деле, каждая функция вида $f(x, y) = r^p \sin[(8p-4)\varphi]$, $p = \text{const} \in N$, ортогональна ко всем функциям системы (15) в $L_2(\Omega_3^+)$.

Пользуясь функциями (15) и формулами

$$u(x, y) = \left[k_1 T_1^{p/2} + k_2 T_1^{-p/2} \right] J_p \left[\sqrt{\lambda(x^2 - y^2)} \right], \quad (x, y) \in \Omega_1^+;$$

$$u(x, y) = \left[k_3 T_2^{p/2} + k_4 T_2^{-p/2} \right] J_p \left[\sqrt{\lambda(y^2 - x^2)} \right], \quad (x, y) \in \Omega_1^-;$$

можно убедиться, что числа $\lambda_{n,m} = \beta_{n,m}^2$ являются собственными значениями задачи Θ_λ , а собственные функции этой задачи определяются равенствами

$$u_{n,m}(x, y) = \begin{cases} a_{n,m} \cos[(8n-4)\varphi] J_{8n-4} \left[\beta_{n,m} \sqrt{x^2 + y^2} \right], & (x, y) \in \Omega_3^+; \\ \frac{1}{2} a_{n,m} \left[T_1^{4n-2} - T_1^{-(4n-2)} \right] J_{8n-4} \left[\beta_{n,m} \sqrt{x^2 - y^2} \right], & (x, y) \in \Omega_2^+; \\ \frac{1}{2} a_{n,m} \left[T_2^{4n-2} - T_2^{-(4n-2)} \right] J_{8n-4} \left[\beta_{n,m} \sqrt{y^2 - x^2} \right], & (x, y) \in \Omega_2^-; \\ a_{n,m} \cos[(8n-4)\varphi] J_{8n-4} \left[\beta_{n,m} \sqrt{x^2 + y^2} \right], & (x, y) \in \Omega_3^-, \end{cases} \quad (16)$$

где $a_{n,m} \neq 0$ – произвольные постоянные, $n, m \in N$; $\text{Re} p \geq 0$, $T_1 = (x-y)/(x+y)$, $T_2 = (y-x)/(y+x)$.

Теорема 2. Система собственных функций $\{u_{n,m}(x, y)\}_{n,m=1}^\infty$ задачи Θ_λ , определяемая формулой (16), не полна в пространстве $L_2(\Delta)$.

Доказательство. В области Δ рассмотрим функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} F_3^+(x, y), & (x, y) \in \Omega_3^+; \\ F_2^+(x, y), & (x, y) \in \Omega_2^+; \\ F_2^-(x, y), & (x, y) \in \Omega_2^-; \\ F_3^-(x, y), & (x, y) \in \Omega_3^-, \end{cases}$$

где $F_j^\pm(x, y) \in L_2(\Omega_j^\pm)$, $j = 2, 3$, и интеграл

$$\begin{aligned} L = \iint_{\Delta} F(x, y) u_{n,m}(x, y) dx dy &= \sum_{j=2}^3 \iint_{\Omega_j^+} F_j^+(x, y) u_{n,m}(x, y) dx dy + \\ &+ \sum_{j=2}^3 \iint_{\Omega_j^-} F_j^-(x, y) u_{n,m}(x, y) dx dy = L_3^+ + L_2^+ + L_2^- + L_3^-. \end{aligned} \quad (17)$$

Переходя к полярным координатам (7) в L_3^+ и L_3^- , получим

$$L_3^+ = c_2 \int_0^1 \bar{J}_{8n-4}(\beta_{n,m} r) r^{8n-3} dr \int_0^\pi f_3^+(r, \theta/4) \cos[(2n-1)\theta] d\theta, \quad (18)$$

$$L_3^- = c_2 \int_0^1 \bar{J}_{8n-4}(\beta_{n,m} r) r^{8n-3} dr \int_{5\pi}^{6\pi} f_3^-(r, \theta/4) \cos[(2n-1)\theta] d\theta, \quad (19)$$

где $f_3^\pm(r, \theta/4) = F_3^\pm(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, $\theta = 4\varphi$, $c_2 = a_{n,m}(\beta_{n,m}/2)^{8n-4}/[4\Gamma(4n-1)]$.

В интеграле L_2^+ произведем замену переменных $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы [14], получим

$$L_2^+ = c_2 \int_0^1 \bar{J}_{8n-4}(\beta_{n,m} q) q^{8n-3} dq \int_q^1 f_2^+(qs, q/s) (s^{-8n+3} + s^{8n-5}) ds. \quad (20)$$

Полагая $\xi = -x - y$, $\eta = x - y$ в интеграле L_2^- , аналогично находим

$$L_2^- = c_2 \int_0^1 \bar{J}_{8n-4}(\beta_{n,m} q) q^{8n-3} dq \int_q^1 f_2^-(qs, q/s) (s^{-8n+3} + s^{8n-5}) ds, \quad (21)$$

здесь $f_2^\pm(qs, q/s) = F_2^\pm(x, y)$.

Подставляя (18)–(21) в (17), будем иметь

$$\begin{aligned} L = c_2 \int_0^1 \bar{J}_{8n-4}(\beta_{n,m} r) r^{8n-3} dr \left[\int_0^\pi f_3^+(r, \theta/4) \cos[(2n-1)\theta] d\theta + \right. \\ \left. + \int_{5\pi}^{6\pi} f_3^-(r, \theta/4) \cos[(2n-1)\theta] d\theta \right] + c_2 \int_0^1 \bar{J}_{8n-4}(\beta_{n,m} q) q^{8n-3} dq \times \\ \times \int_q^1 [f_2^+(qs, q/s) + f_2^-(qs, q/s)] (s^{-8n+3} + s^{8n-5}) ds. \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть $f_3^\pm(r, \theta/4) = r^p \sin[(2p-1)\theta]$, $p = \text{const} \in N$; $f_2^+(qs, q/s) = -f_2^-(qs, q/s) \neq 0$. Тогда из (22) следует, что $L = 0$. Следовательно, существует функция $F(x, y) \in L_2(\Delta)$, и $F(x, y) \neq 0$ в $\bar{\Delta}$, которая ортогональна ко всем функциям системы (16). Теорема 2 доказана.

Список источников

1. Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сибирский математический журнал. 1962. № 3. С. 642–644.
2. Ежов А.М., Пулькин С.П. Оценка решения задачи Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа // Доклады Академии наук СССР. 1970. Т. 193, № 5. С. 978–980.
3. Нахушев А.М. Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка. Нальчик: Эльбрус, 1992. 155 с.
4. Кальменов Т.Ш. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 8. С. 1418–1425.
5. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Моск. гос. ун-т, 1988. 150 с.
6. Пономарев С.М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева–Бицадзе: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1981. 139 с.
7. Сабитов К.Б. К теории уравнений парабола-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 117–126.

8. Сабитов К.Б., Тихомиров В.В. О построении собственных значений и функций одной газодинамической задачи Франкля // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, № 10. С. 100–109.
9. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент : Фан, 1997. 166 с.
10. Уринов А.К., Тожибоев И.Т. Собственные числа и собственные функции некоторых краевых задач для одного уравнения смешанного типа с негладкой линией изменения типа // Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений : тез. междунар. науч. конф., 5–12 октября 2008 г. Новосибирск, 2008. С. 218.
11. Уринов А.К., Тожибоев И.Т. О полноте системы собственных функций некоторых внутренне-краевых задач для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с негладкой линией изменения типа // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2009. № 3-4. С. 19–23.
12. Тожибоев И.Т. Краевые задачи в специальной области для уравнения смешанного типа // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 56. С. 17–29.
13. Тожибоев И.Т. Собственные числа и собственные функции одной внутренне-краевой задачи для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с негладкой линией изменения типа // Узбекский математический журнал. 2009. № 4. С. 107–114.
14. Urinov A.K., Tojiboev I.T. Eigenvalue and eigenfunctions of some boundary-value problems for a mixed type equation with non-smooth line of type changing // Proceedings of the 16th Inter. conf. on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, July 28 – August 1, 2008. Gyeongju, 2009. P. 282–289.

References

1. Bitsadze A.V. (1962) Ob odnom trekhmernom analoge zadachi Triкоми [A three-dimensional analogue of the Tricomi problem]. *Siberian Mathematical Journal*. 3(5). pp. 642–644.
2. Ezhov A.M., Pul'kin S.P. (1970) Otsenka resheniya zadachi Triкоми dlya odnogo klassa uravneniy smeshannogo tipa [Estimation of the solution of the Tricomi problem for a certain class of equations of mixed type]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 193(5). pp. 978–980.
3. Nakhushiev A.M. (1992) Ob odnom klasse lineynykh krayevykh zadach dlya giperbolicheskogo i smeshannogo tipov uravneniy vtorogo poryadka [On a class of linear boundary-value problems for the hyperbolic and the mixed type equations of the second order]. Nalchik: Elbrus.
4. Kal'menov T.S. (1977) O spektre zadachi Triкоми dlya uravneniya Lavrent'yeva – Bitsadze [On spectrum of the Tricomi problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation]. *Differentsial'nye uravneniya*. 13(8). pp. 1418–1425.
5. Moiseev E.I. (1988) *Uravneniya smeshannogo tipa so spektral'nyim parametrom* [Mixed type equations with a spectral parameter]. Moscow: Moscow State University.
6. Ponomarev S.M. (1981) *Spektral'naya teoriya osnovnoy krayevoy zadachi dlya uravneniya smeshannogo tipa Lavrent'yeva – Bitsadze* [Spectral theory of the main boundary value problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation of the mixed type]. Dissertation. Moscow State University.
7. Sabitov K.B. (1989) K teorii uravneniy parabolo-giperbolicheskogo tipa so spektral'nyim parametrom [Toward the theory of mixed parabolic-hyperbolic type equations with a spectral parameter]. *Differentsial'nye uravneniya*. 25(1). pp. 117–126.
8. Sabitov K.B., Tikhomirov V.V. (1990) O postroyenii sobstvennykh znacheniy i funktsiy odnoy gazodinamicheskoy zadachi Franklya [On construction of eigenvalues and eigenfunctions of a gas-dynamical Frankl problem]. *Matematicheskoye modelirovaniye*. 2(10). pp. 100–109.
9. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. (1997) *Krayevyye zadachi dlya uravneniy smeshannogo tipa so spektral'nyim parametrom* [Boundary value problems for mixed type equations with a spectral parameter]. Tashkent: Fan.

10. Urinov A.K., Tojiboev I.T. (2008) Sobstvennyye chisla i sobstvennyye funktsii nekotorykh krayevykh zadach dlya odnogo uravneniya smeshannogo tipa s negladkoy liniyey izmeneniya tipa [Eigenvalues and eigenfunctions of some boundary value problems for an equation of mixed type with a nonsmooth line of type change]. *Differential Equations, Functional Spaces, Approximation Theory: Proceeding of the International Scientific Conference. October 5–12, 2008. Novosibirsk*. p. 218.
11. Urinov A.K., Tojiboev I.T. (2009) O polnote sistemy sobstvennykh funktsiy nekotorykh vnutrenne-krayevykh zadach dlya uravneniya Lavrent'yeva – Bitsadze s negladkoy liniyey izmeneniya tipa [On completeness of the system of eigenfunctions of some internal boundary value problems for the Lavrentiev–Bitsadze equation with a non-smooth line of type change]. *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*. 3-4. pp. 19–23.
12. Tojiboev I.T. (2018) Krayevyye zadachi v spetsial'noy oblasti dlya uravneniya smeshannogo tipa [Boundary problems in a special domain for an equation of mixed type]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 56. pp. 17–28.
13. Tojiboev I.T. (2009) Sobstvennyye chisla i sobstvennyye funktsii odnoy vnutrenne-krayevoy zadachi dlya uravneniya Lavrent'yeva – Bitsadze s negladkoy liniyey izmeneniya tipa [Eigenvalues and eigenfunctions of an internal boundary value problem for the Lavrentiev–Bitsadze equation with a non-smooth type change line]. *Uzbek Mathematical Journal*. 4. pp. 107–114.
14. Urinov A.K., Tojiboev I.T. (2009) Eigenvalue and eigenfunctions of some boundary-value problems for a mixed type equation with non-smooth line of type changing. *Proceedings of the 16th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, July 28–August 1, 2008. Gyeongju*. pp. 282–289.

Сведения об авторе:

Тожибоев Иброхимжон Тожалиевич – кандидат физико-математических наук, доцент Ферганского государственного университета (Фергана, Узбекистан). E-mail: ibroxim@gmail.com

Information about the author:

Tojiboev Ibrokhimjon T. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Ferghana State University, Ferghana, Republic of Uzbekistan). E-mail: ibroxim@gmail.com

Статья поступила в редакцию 24.10.2023; принята к публикации 07.02.2025

The article was submitted 24.10.2023; accepted for publication 07.02.2025

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 534.1

doi: 10.17223/19988621/93/6

Динамические режимы виброзащитных систем**Сергей Павлович Глушков¹, Наталья Владимировна Молокова²,
Дарья Андреевна Проворная³**^{1,2,3} *Сибирский государственный университет путей сообщения, Новосибирск, Россия*¹ *rcpl.glushkov@yandex.ru*² *molokovada@gmail.com*³ *provornayadarya@yandex.ru*

Аннотация. Динамические характеристики виброзащитных систем играют важную роль при их изучении. Так как виброзащитные системы должны удовлетворять требованиям, обеспечивающим надежную эксплуатацию защищаемого объекта, для определения оптимальных размеров устройства виброизоляции необходимо исследовать его динамические режимы. Такие исследования будут производиться путем возмущающего воздействия с помощью моделирования на ЭВМ. По анализу отклика на это воздействие оценим эффективность устройства.

Ключевые слова: виброзащита, динамика, устройства, сигнал, коэффициент, гаситель

Для цитирования: Глушков С.П., Молокова Н.В., Проворная Д.А. Динамические режимы виброзащитных систем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 67–78. doi: 10.17223/19988621/93/6

Original article

Dynamic modes of a vibration isolation system**Sergey P. Glushkov¹, Natal'ay V. Molokova², Dar'ya A. Provornaya³**^{1,2,3} *Siberian Transport University, Novosibirsk, Russian Federation*¹ *rcpl.glushkov@yandex.ru*² *molokovada@gmail.com*³ *provornayadarya@yandex.ru*

Abstract. To specify the optimal dimensions of the vibration isolation device that meet the requirements, it is necessary to determine the dynamic modes of the device. In this paper, perturbation techniques are used to solve the formulated problem and evaluate the device efficiency.

When using dynamic vibration dampers, the vibrations are suppressed by the damper springs. The increase in their stiffness is determined by the forces arising during the additional mass motion. The dynamic characteristics of the considered system with a vibration damper are calculated using the Simulink modeling tool.

It is revealed that the frequencies of free vibrations in the “basic mass – dynamic damper” system are determined by two parameters, namely, the mass ratio of the dynamic damper and main structure, as well as the damper settings. The obtained free vibration frequencies of the system are located almost symmetrically relative to the natural free vibration frequency of the main structure. Variation in the tuning frequency induces symmetry breaking.

Keywords: vibration isolation, dynamics, devices, signal, coefficient, damper

For citation: Glushkov, S.P., Molokova, N.V., Provornaya, D.A. (2025) Dynamic modes of a vibration isolation system. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 67–78. doi: 10.17223/19988621/93/6

Введение

С развитием строительных технологий, а также с разработкой новых высокоэффективных материалов за последние годы мостовые сооружения стали более гибкими, а длина пролетов увеличилась, что привело к созданию более легких и тонких конструкций, которые применяются при строительстве пешеходных мостов, а также автомобильных и железнодорожных. Следовательно, эти конструкции начали становиться более восприимчивыми к динамическим воздействиям движущихся нагрузок. Примерами могут служить возникновения чрезмерных вибраций на лондонском пешеходном мосту Миллениум и Волгоградском автомобильном мосту. В первый же день лондонский мост испытал горизонтальные колебания со смещением центрального пролета около 70 мм, вызванные синхронизированной горизонтальной нагрузкой от пешеходов. Через два дня после открытия мост был закрыт для выяснения причины вибраций и разработки способов уменьшения колебаний мостового сооружения. После тщательного анализа было принято решение о пассивном демпфировании с использованием 37 вязкостно-жидкостных амортизаторов и 52 настраиваемых амортизаторов массы для управления поведением моста.

Что касается области исследований, связанной с динамическим поведением мостов, то воздействие высокоскоростного движения на железнодорожные мосты в настоящее время является одной из наиболее специфических и актуальных сфер изучения. Этим можно объяснить растущий интерес к строительству новых высокоскоростных линий, а также к переоборудованию некоторых обычных железнодорожных линий для работы на более высоких скоростях.

Поэтому представляет большой интерес исследование колебаний мостовых сооружений для удовлетворения следующих требований на высокоскоростных железнодорожных мостах:

- 1) безопасность и работоспособность мостов;
- 2) предотвращение увеличения максимальных перемещений моста, ускорений и внутренних напряжений;
- 3) ограничение ускорений вагонов поездов, так как это связано с комфортом пассажиров.

Для улучшения динамических характеристик мостов существует два различных решения: первый, возможно, более традиционный, состоит в повышении жесткости конструкции, в то время как другой заключается в усилении демпфирования. Цель данной работы – исследование возможных решений, связанных с усилением демпфирования мостовых сооружений с помощью пассивных настроенных амортизаторов массы.

Постановка задачи

Ванг и др. [1] изучили применимость пассивных настроенных амортизаторов массы на мостах с простой опорой и пролетом 30 и 40 м для подавления вибраций, вызванных высокоскоростными поездами, движущимися с постоянной скоростью. Реакции моста были проверены с точки зрения вертикальных перемещений, ускорения и конечного поворота моста, в то время как для поезда было проанализировано вертикальное ускорение, чтобы обеспечить безопасность моста и комфорт пассажиров. В середине пролета каждого моста рассматривался один динамический гаситель колебаний (ДГК), соответствующий максимальной амплитуде мод. Параметры ДГК были настроены таким образом, чтобы уравнивать частоту демпфера с модальной частотой. Для моста с пролетом 40 м пассивный ДГК показал хороший контроль вибрации основной формы колебания балки, поскольку резонансный отклик в пределах расчетной скорости доминирует над максимальными динамическими характеристиками как моста, так и поезда. При массе ДГК всего 0,5% от массы моста максимальные вертикальные динамические характеристики моста с пролетом 40 м могут быть снижены примерно на 40 и 20% для ускорений и перемещений соответственно.

У ДГК есть один существенный минус: его чувствительность к изменениям частоты. Наличие массы динамического демпфера в основной конструкции увеличивает одну степень свободы, поэтому резонансы не устраняются, а «раздваиваются». Действительно простым и очевидным способом избегания возможности попадания указанных режимов является изменение резонансной частоты таким образом, чтобы частота возмущающей силы оставалась за пределами возможного изменения. Теоретически такое возможно путем увеличения соотношения масс демпфера и основной системы, но конструктивно это увеличит массу ДГК. Поэтому необходимо применять ДГК с малой массой. В качестве динамического гасителя колебаний малой массы можно использовать устройство с распределенными параметрами для гашения вертикальных и горизонтальных поперечных колебаний [2] (рис. 1).

Требования к вертикальному смещению пути определяют жесткость спиральных пружин динамического гасителя колебаний. Устройство, рассматриваемое в работе, предназначено для снижения динамических колебаний и включает в себя: динамический гаситель как несущий упругий элемент, представленный спиральной пружиной, установленной между основаниями; инерционную массу, установленную по оси всего устройства и присоединенную к основаниям пружинами. Инерционную массу в устройство устанавливают для изменения динамики моста при прохождении подвижного состава по пролетному строению на рабочей частоте колебаний. Динамическое взаимодействие моста и устройства возможно менять путем компенсации циклических сил и моментов, передаваемых от опор-

ных элементов, за счет сил и моментов противоположного направления с помощью внутренней инерционной массы, которая колеблется в противоположной фазе.

Такая конструкция может быть установлена либо непосредственно на пролетное строение (применительно к ВСМ), либо между опорой и балкой пролетного строения при сейсмических воздействиях (рис. 2).

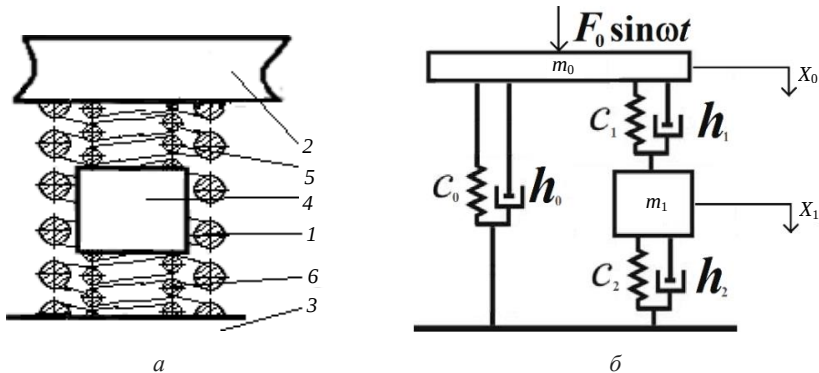


Рис. 1. Динамический гаситель колебаний (а) и его расчетная схема (б): 1 – несущий упругий элемент; 2 – пролетное строение; 3 – опора; 4 – дополнительная масса; 5, 6 – пружины; C_0 – жесткость основной несущей пружины; C_1 и C_2 – жесткости соответственно основной и добавочной пружин гасителя; h_1, h_2, h_3 – коэффициенты демпфирования; m_0, m_1 – массы балки и динамического гасителя соответственно; F_0 – внешняя сила

Fig. 1. (a) Dynamic vibration damper (DVD) and (b) calculation model of the damper: 1, elastic bearing element; 2, span structure; 3, support arrangement; 4, additional mass; and 5, 6, springs;

C_0 is the stiffness of the main bearing spring; C_1 and C_2 are the stiffness of the main and additional springs of the damper, respectively; h_1, h_2, h_3 are the damping coefficients; m_0, m_1 are the mass of the beam and dynamic damper, respectively; and F_0 is the external force

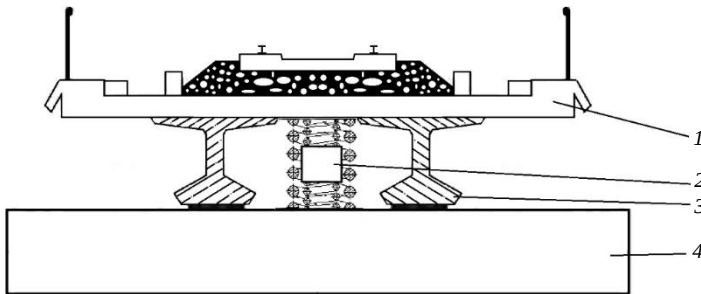


Рис. 2. Мостовое сооружение с ДГК: 1 – верхнее строение пути; 2 – динамический гаситель колебаний; 3 – балка пролетного строения; 4 – опора

Fig. 2. Bridge with a DVD: 1, upper structure of the track; 2, dynamic vibration damper; 3, span beam; and 4, support arrangement

Далее от колебаний пролетного строения возникающие переменные усилия пружины передают на основание, жесткость пружин и амплитуда их колебаний пропорциональны упругим элементам, масса будет совершать колебания в противофазе с пролетным строением от сил, передаваемых пружинами. Возникающие при деформации пружин циклические усилия будут передаваться на основа-

ние вдоль оси динамического гасителя колебаний. Если силы пружин направлены в противоположные стороны и равны по величине, то сумма переменных сил и моментов, передаваемых на основание, равна нулю.

Метод решения

Рассмотрим балку пролетного строения, которая совершает прямолинейные колебания под действием гармонической силы с амплитудой F_0 и частотой ω [2]. Примем, что $x_0(t)$ – перемещение пролетного строения в горизонтальной плоскости, а $x_1(t)$ – перемещение гасителя (см. рис. 1, а).

На основании расчетной схемы (см. рис. 1, б) дифференциальные уравнения движения системы «балка пролетного строения – динамический гаситель колебаний – опора» можно записать в виде [2]:

$$\begin{cases} m_0 \ddot{x}_0 + (C_0 + C_1)x_0 - C_1 x_1 + (h_0 + h_1)\dot{x}_0 - h_1 \dot{x}_1 = F \sin \omega t; \\ m_1 \ddot{x}_1 - C_1 x_0 + (C_1 + C_2)x_1 + (h_1 + h_2)\dot{x}_1 - h_1 \dot{x}_0 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для решения этой системы дифференциальных уравнений и исследования колебаний можно использовать метод комплексных амплитуд [3], но для динамического поведения сложных систем удобнее применить структурный метод. Структурный метод для анализа и синтеза исследования колебательных процессов использует структурные схемы в соответствии с теорией автоматического управления [4].

Расчетную схему ДГК (см. рис. 1, б) переводим в структурную схему (рис. 3), предварительно переписав уравнения системы (1) в систему уравнений в оперативной форме:

$$\begin{cases} (T_0^2 p^2 + T_0 q_0 p + 1) \cdot x_0(p) - (T_0 q_0 p + T_0^2 \frac{C_1}{m_0}) \cdot x_1(p) = F(p); \\ (T_1^2 p^2 + T_1 q_1 p + 1) \cdot x_1(p) - \frac{1}{\mu \vartheta} (T_1 q_{01} p + T_0^2 \frac{C_1}{m_0} \vartheta) \cdot x_0(p) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

где $\mu = \frac{m_1}{m_0}$ – отношение масс гасителя и основной системы; $p = \frac{d}{dt}$ – оператор

дифференцирования; $T_0 = \frac{1}{\omega_0}$ – постоянная времени исследуемой системы;

$T_1 = \frac{1}{\omega_1}$ – постоянная времени динамического гасителя колебаний; $\vartheta^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}$ –

настройка гасителя; $\omega_0 = \sqrt{\frac{C_0 + C_1}{m_0}}$ – собственная частота основной системы без

гасителя; $\omega_1 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{m_1}}$ – парциальная частота гасителя; $q_0 = \frac{2(h_0 + h_1)}{h_{0кр}}$,

$q_1 = \frac{2(h_1 + h_2)}{h_{1кр}}$ – относительные коэффициенты трения; $h_{0кр} = 2m_0\omega_0$, $h_{1кр} = 2m_1\omega_1$ –

безразмерные коэффициенты демпфирования.

В соответствии с системой уравнений (2) структурная схема мостового сооружения с динамическим гасителем колебаний, применяемым для гашения колебаний пролетного строения от возмущающей силы $F(p)$, будет иметь вид, представленный на рис. 3 [5].

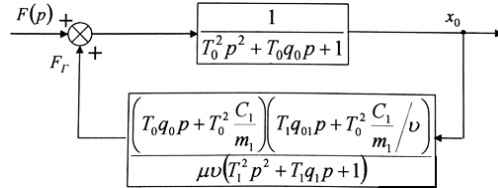


Рис. 3. Схема устройства с ДГК (вход – возмущающая сила, выход – сигнал)

Fig. 3. Diagram of the device with a DVD (in – exciting force, out – signal)

Оптимальное гашение колебаний мостового сооружения происходит в том случае, когда ДГК настроен таким образом, что коэффициент $\vartheta = 1$. Введем коэффициент $k = T_0^2 \frac{C_1}{m_1}$, тогда схема на рис. 3 преобразуется в структурную схему с типовыми динамическими звеньями (рис. 4).

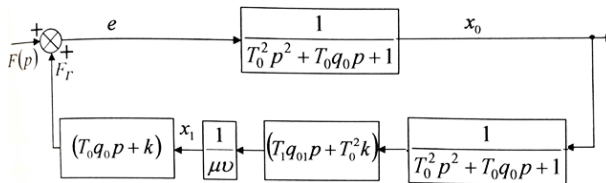


Рис. 4. Преобразованная схема

Fig. 4. Modified diagram

В качестве ошибки регулирования e в этой схеме рассматривается разность между возбуждением $F(p)$ и реакцией динамического гасителя F_r . Масса динамического гасителя должна составлять не более 5% от массы пролетного строения, а величины значений жесткостей C_1 и C_2 , обеспечивающие частотную настройку ДГК, во многом зависят от величины жесткости C_0 [6].

Исследования динамических характеристик мостового сооружения с ДГК, структурная схема которого представлена на рис. 4, проводились на ЭВМ с применением пакета моделирования simulink. Для определения переходных процессов системы и ее устойчивости на различных частотах была использована схема, приведенная на рис. 5 [6].

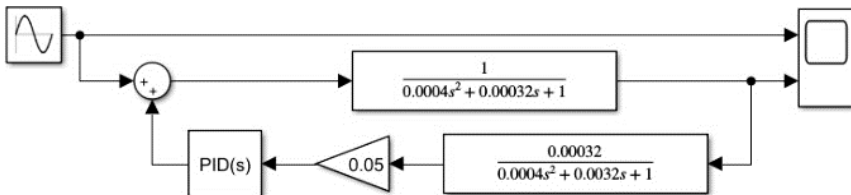


Рис. 5. Схема исследуемого устройства

Fig. 5. Diagram of the test device

При моделировании системы с динамическим гасителем колебаний приняты следующие параметры:

- масса объекта защиты $m_0 = 1\,000$ кг;
- масса присоединенного динамического гасителя колебаний $m_1 = 50$ кг;
- относительные коэффициенты трения: $q_0 = 0,016$ и $q_1 = 0,016$.

Выбор жесткостей пружин устройства ДГК производился из условия, что обеспечивается устойчивость работы мостового сооружения при действии на него динамической нагрузки. Следовательно, для определения работоспособности предложенного динамического гасителя с распределенными параметрами в мостовых сооружениях необходимо задавать различные динамические режимы.

Выбираем массу гасителя m_1 для заданной массы защищаемого объекта m_0 и его собственной частоты ω_0 . Определяем коэффициент масс объекта и гасителя по величине коэффициента связи с учетом устойчивости системы [3]. Жесткость C_1 основной пружины гасителя колебаний для заданной (настроенной) частоты находим по формуле

$$C_1 = k \cdot m_1 \cdot \omega_n^2. \quad (3)$$

Жесткость C_2 дополнительной пружины гасителя

$$C_2 = m_0 \cdot \omega_n^2 - C_1. \quad (4)$$

Исследования динамического поведения массы m_1 системы «мостовое сооружение – ДГК малой массы» производились при фиксированных значениях частоты возмущающей силы 12, 22, 32, 62 и 100 рад/с. Результаты моделирования для частоты 12 рад/с приведены в таблице.

Параметры динамического поведения при значениях частоты возмущающей силы 12 рад/с

C_0 , Нм	C_1 , Нм	C_2 , Нм	k	Мах амплитуда	Перерегулирование, %	Постоянная времени системы, с	Устойчивость системы
9 720	4 680	–3 960	6,5	–	–	0,15	Нет
11 180	3 220	–2 500	4,47	–	–	0,15	Да
11 230	3 170	–2 450	4,4	41,1	31,5	0,15	Да
11 520	2 880	–2 160	4	8,01	60	0,15	Да
14 400	0	720	0	1,97	97,3	0,15	Да
17 280	–2 880	3 600	–4	7,98	59,5	0,15	Да
17 570	–3 170	3 890	–4,4	40,8	30,3	0,15	Да
17 620	–3 220	3 940	–4,47	–	–	0,15	Да
19 080	–4 680	5 400	–6,5	–	–	0,15	Нет

Анализируя полученные данные, видим, что по коэффициенту связи k можно оценивать общие закономерности динамического поведения системы на различных возмущающих частотах. При значениях жесткости $C_1 = 0$ и коэффициента связи $k = 0$ колебания массы динамического гасителя минимальны, при значениях $|k| = 4,4$ максимальны, а перерегулирование уменьшается, т.е. наблюдается более качественное гашение колебаний. При величине модуля коэффициента $|k| \leq 4,4$ переходный процесс в системе носит колебательный характер, причем динамическая устойчивость системы наступает через небольшой промежуток времени [5]. Это утверждение иллюстрируется на рис. 6–10, где представлены

реакции системы при разных значениях частоты возмущающей силы. При значениях $|k| > 6.4$ система всегда неустойчива, при $4.47 < k < 6.4$ переходный процесс аperiодический.

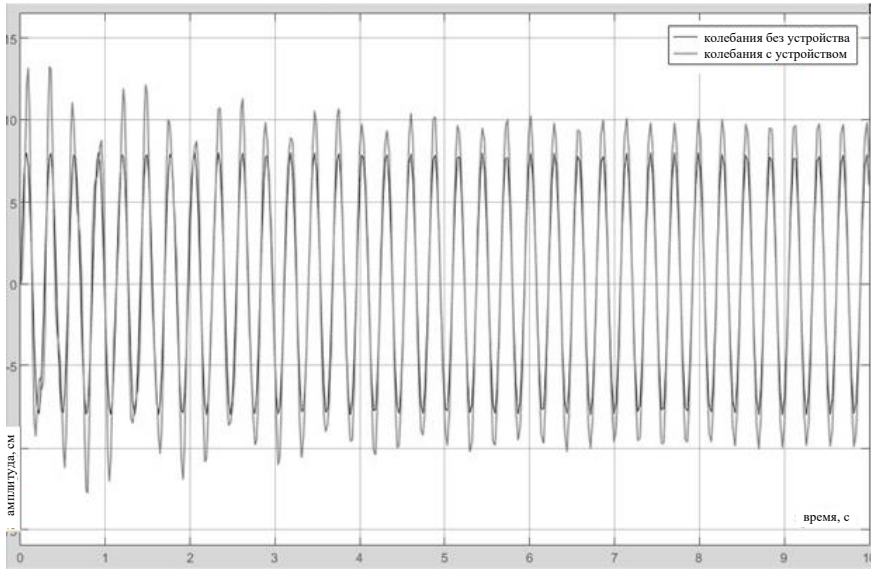


Рис. 6. Реакция системы на возмущающий сигнал частотой 12 рад/с
Fig. 6. Response of the system to a disturbance signal with a frequency of 12 rad/s

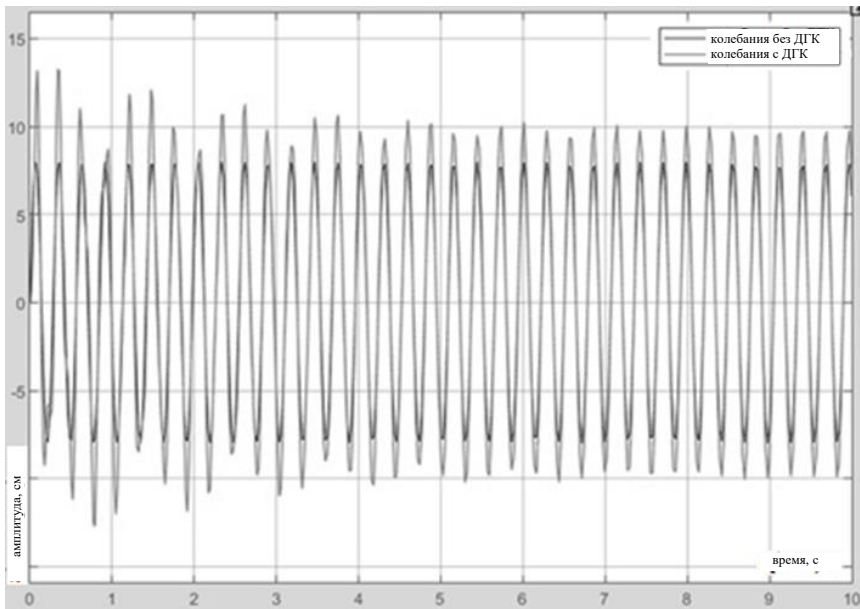


Рис. 7. Реакция системы на возмущающий сигнал частотой 22 рад/с
Fig. 7. Response of the system to a disturbance signal with a frequency of 22 rad/s

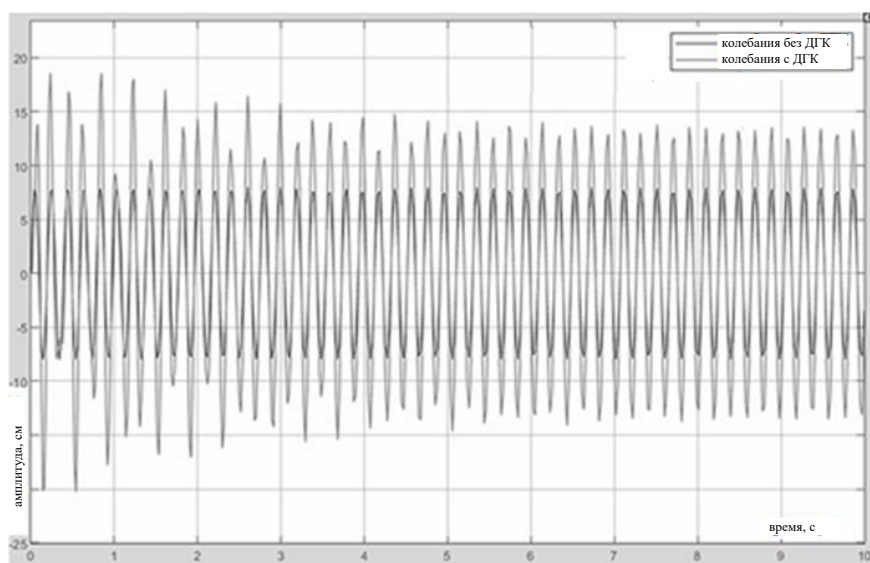


Рис. 8. Реакция системы на возмущающий сигнал частотой 32 рад/с

Fig. 8. Response of the system to a disturbance signal with a frequency of 32 rad/s

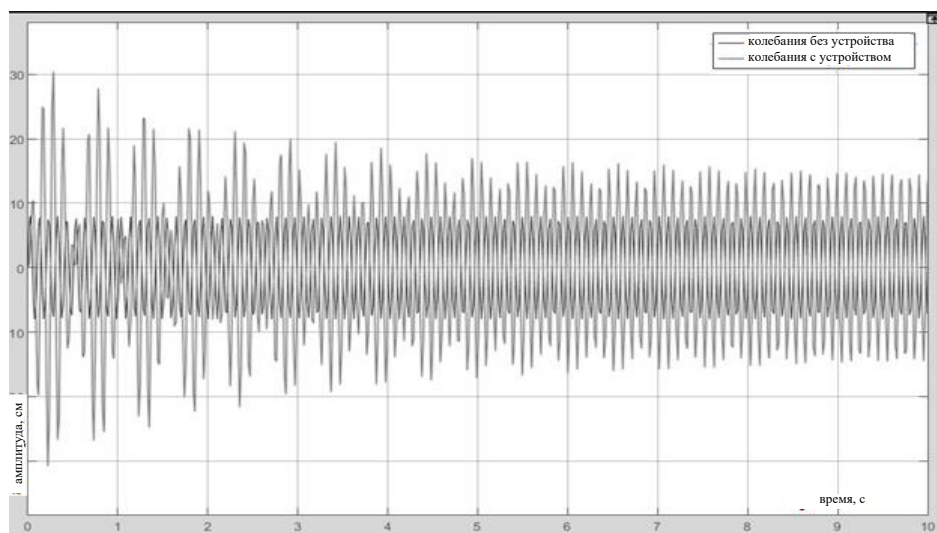


Рис. 9. Реакция системы на возмущающий сигнал частотой 62 рад/с

Fig. 9. Response of the system to a disturbance signal with a frequency of 62 rad/s

Из приведенных данных следует, что амплитуда и область неустойчивости мостового сооружения (до 5 с) без ДГК при возмущении сигнала частотами 12–62 рад/с различаются незначительно, при этом наблюдается снижение амплитуды колебаний до 5 с, а после 5 с параметры системы стабилизируются и система становится устойчивой. Мостовое сооружение с ДГК на частотах 12–32 рад/с практически с начала воздействия возмущающей силы устойчиво, амплитуды

колебаний меньше, чем без ДГК, и в зоне неустойчивости (до 5 с) это различие является более существенным. При рассмотрении динамики системы с частотой возмущающей силы 62 рад/с (см. рис. 9) видно, что колебания системы до 4 с имеют незначительные изменения частоты, это объясняется изменением частоты ДГК, но при этом амплитуда колебаний всей системы остается постоянной и значительно меньше, чем системы без ДГК [5].

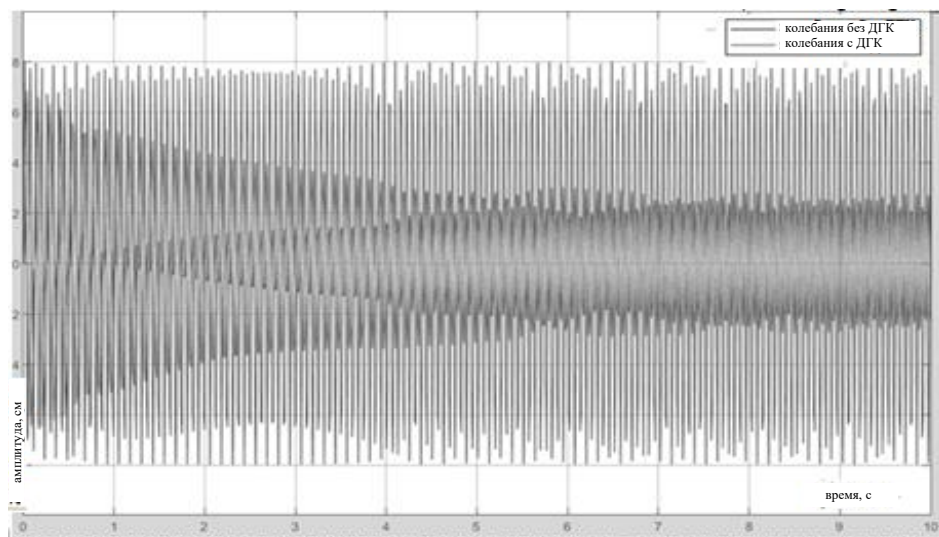


Рис. 10. Реакция системы на возмущающий сигнал частотой 100 рад/с
Fig. 10. Response of the system to a disturbance signal with a frequency of 100 rad/s

Из результатов, приведенных на рис. 10, следует, что при такой частоте возмущающей силы динамическое поведение мостового сооружения без ДГК носит синусоидальный характер больших амплитудных значений. Динамическое поведение системы с ДГК характеризуется меньшими значениями амплитуды в первую секунду, и система находится в зоне неустойчивости, затем значения амплитуды снижаются, а колебания с 5 с становятся устойчивыми благодаря включению в работу пружины с жесткостью C_2 . При этом динамические колебания всей системы значительно снижены.

Заключение

Из приведенных данных следует, что амплитуда и область неустойчивости мостового сооружения (до 5 с) без ДГК при возмущении сигнала частотами 12–62 рад/с различаются незначительно, при этом наблюдается снижение амплитуды колебаний до 5 с, а после 5 с параметры системы стабилизируются и система становится устойчивой. Мостовое сооружение с ДГК на частотах 12–32 рад/с практически с начала воздействия возмущающей силы устойчиво, амплитуды колебаний меньше, чем без ДГК, и в зоне неустойчивости (до 5 с) это различие является более существенным. При рассмотрении динамики системы с частотой возмущающей силы 62 рад/с видно, что колебания системы до 4 с имеет незначительное изменение частоты, это объясняется изменением частоты ДГК, но при

этом амплитуда колебаний всей системы остается постоянной и значительно меньшей, чем системы без ДГК. Из результатов, приведенных на рис. 10, следует, что с такой частотой возмущающей силы динамическое поведение мостового сооружения без ДГК носит синусоидальный характер больших амплитудных значений. Динамическое поведение системы с ДГК характеризуется меньшими значениями амплитуды в первую секунду, и система находится в зоне неустойчивости, затем значения амплитуды снижаются, а колебания с 5 с становятся устойчивыми благодаря включению в работу пружины с жесткостью C_2 . При этом динамические колебания всей системы значительно снижены.

Список источников

1. Wang J.F., Lin C.C., Chen B.L. Vibration suppression for high-speed railway bridges using tuned mass dampers // *International Journal of Solids and Structures*. 2003. V. 40 (2). P. 465–491.
2. Provornaya D., Glushkov S., Solovyev L. Damping of vertical and horizontal transverse vibrations in the bridge span structures // *MATEC Web of Conferences*. 10th International Scientific and Technical Conference “Polytransport Systems”, PTS 2018. 2018. V. 216 (8). Art. 01015.
3. Бурьян Ю.А., Ситников Д.В. Изучаемая вибрационная мощность в колебательной системе // *Динамика систем механизмов и машин*. 2018. № 1. С. 1–10.
4. Попов Е.П. Автоматическое регулирование и управление. М. : Наука, 1966. 338 с.
5. Попов И.П. Символическое представление вынужденных колебаний разветвленных механических систем // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 72. С. 118–130. doi: 10.17223/19988621/72/10
6. Жаров А.В. Разработка управляемой виброгасящей системы для подвесок судовых двигателей : дис. ... канд. техн. наук : 05.08.05. Новосибирск, 2005. 157 с.

References

1. Wang J.F., Lin C.C., Chen B.L. (2003) Vibration suppression for high-speed railway bridges using tuned mass dampers. *International Journal of Solids and Structures*. 40(2). pp. 465–491. doi: 10.1016/S0020-7683(02)00589-9
2. Provornaya D., Glushkov S., Solovyev L. (2018) Damping of vertical and horizontal transverse vibrations in the bridge span structures. *MATEC Web of Conferences*. 10th International Scientific and Technical Conference "Polytransport Systems". 216(8). Article 01015. doi: 10.1051/mateconf/201821601015
3. Burian Yu.A., Zubarev A.V., Sitnikov D.V. (2018) Emitted vibrational power in an oscillating system with an electrodynamic compensator. *Omsk Scientific Bulletin. Series Aviation-Rocket and Power Engineering*. 1. pp. 27–32.
4. Popov E.P. (1966) *Avtomaticheskoe regulirovanie i upravlenie* [Automatic regulation and control]. Moscow: Nauka.
5. Popov I.P. (2021) *Simvolicheskoe predstavlenie vynuzhdennykh kolebaniy razvetvlennykh mekhanicheskikh sistem* [Symbolic representation of forced oscillations of branched mechanical systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 72. pp. 118–130. doi: 10.17223/19988621/72/10
6. Zharov A.V. (2005) *Razrabotka upravlyaemoy vibrogasyashchey sistemy dlya podvesok sudovykh dvigateley* [Development of the controlled vibration isolation system for ship engine suspensions]. Ph.D. thesis, Novosibirsk.

Сведения об авторах:

Глушков Сергей Павлович – доктор технических наук, профессор кафедры «Технологии транспортного машиностроения и эксплуатации машин» Сибирского государственного университета путей сообщения (Новосибирск, Россия). E-mail: rcpl.glushkov@yandex.ru

Молокова Наталья Владимировна – старший преподаватель кафедры «Мосты и тоннели» Сибирского государственного университета путей сообщения (Новосибирск, Россия). E-mail: molokovada@gmail.com

Проворная Дарья Андреевна – преподаватель кафедры «Теоретическая механика» Сибирского государственного университета путей сообщения (Новосибирск, Россия). E-mail: provornayadarya@yandex.ru

Information about the authors:

Glushkov Sergey P. (Doctor of Technical Sciences, Siberian Transport University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: rcpl.glushkov@yandex.ru

Molokova Natal'ya V. (Senior Lecturer, Siberian Transport University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: molokovada@gmail.com

Provornaya Dar'ya A. (Lecturer, Siberian Transport University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: provornayadarya@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 09.07.2023; принята к публикации 07.02.2025

The article was submitted 09.07.2023; accepted for publication 07.02.2025

Научная статья

УДК 62-233.28: 621.822.811

doi: 10.17223/19988621/93/7

О методике выбора рациональной формы роликов подшипников по критерию их усталостной долговечности

Константин Александрович Гордеев¹, Лев Беркович Цвик²

^{1, 2} *Иркутский национальный исследовательский технический университет,
Иркутск, Россия*

¹ *konstantin.gordeev.1999@mail.ru*

² *tsvik_l@mail.ru*

Аннотация. Описана методика рационализации формы профиля тел качения роликовых подшипников по критерию усталостной долговечности, основанная на равномерном поиске в пространстве их конструктивных параметров путем проведения вычислительных экспериментов с использованием метода конечных элементов. Поиск форм осуществлялся в классе степенных функций с отрицательными целыми коэффициентами. Предлагаемый подход позволяет снизить повреждающие факторы и обеспечить их равномерное распределение по длине роликов, а также упрощает процесс рационализации контактирующих тел в различных эксплуатационных ситуациях.

Ключевые слова: долговечность подшипников, профиль тела качения, логарифмический профиль, степенной профиль

Для цитирования: Гордеев К.А., Цвик Л.Б. О методике выбора рациональной формы роликов подшипников по критерию их усталостной долговечности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 79–95. doi: 10.17223/19988621/93/7

Original article

On the methodology of choosing rational shape of bearing rollers based on their fatigue durability criterion

Konstantin A. Gordeev¹, Lev B. Tsvik²

^{1, 2} *Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation*

¹ *konstantin.gordeev.1999@mail.ru*

² *tsvik_l@mail.ru*

Abstract. This paper proposes a methodology for the rationalization of the shape of a bearing roller profile based on the fatigue durability criterion. Here, the durability criteria are presented as the von Mises stresses and contact pressures, which are determined by the numerical modeling of the contact interaction between the roller and the inner ring of the bearing based on the finite element method. The proposed methodology implies

a uniform search of the design parameters of rollers in the region, where the generatrices represent the fragments of a power function with a negative integer index of power. The analysis results show that the use of power functions as a profile line provides a uniform distribution of contact pressures along the roller length and minimizes the von Mises stresses. The stress-strain state under roller skew is also studied. The results show that the use of the considered profiles provides a sufficiently uniform stress distribution. Thus, the proposed rationalization method is universal for rationalizing the shape of contacting bodies under various conditions and can significantly simplify the choice of the shape of bearing unit elements.

Keywords: bearing durability, rolling element profile, logarithmic profile, power-law profile

For citation: Gordeev, K.A., Tsvik, L.B. (2025) On the methodology of choosing rational shape of bearing rollers based on their fatigue durability criterion. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 79–95. doi: 10.17223/19988621/93/7

Введение

Современные методы оценки усталостной долговечности подшипников позволяют учесть влияние различных параметров, например величины зазора в конструкции подшипника, податливости и перекоса колец, профиля образующей тел качения [1]. Обязательным этапом при расчете долговечности является определение функций контактного давления между кольцами и наиболее нагруженным телом качения [1, 2]. Данные функции оказывают прямое влияние на долговечность, поэтому для повышения ресурса подшипника необходимо обеспечить их минимизацию и гладкость. Следует отметить, что контактное взаимодействие высоконагруженных элементов подшипников (колец и роликов) с прямолинейной образующей вызывает местный подъем напряжений на краях контактных площадок, что существенно ограничивает их усталостный ресурс (рис. 1, а) [3]. В данной работе осуществляется обзор основных подходов решения данной проблемы, а также рассматриваются роликовые подшипники качения, в которых в зоне контакта тел качения и колец происходит усталостное выкрашивание дорожек качения, что приводит к их выходу из строя [4]. В работе также описывается общая методика рационализации (по критерию усталостной долговечности) форм профиля тел качения роликовых буксовых подшипников в пространстве их конструктивных параметров с целью снижения уровня напряжений в зоне контакта. Поиск рациональных конструктивных решений осуществляется на основе численного моделирования контакта ролика и внутреннего кольца подшипника, реализуемого с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Для проверки качества получаемых форм профилей проводятся вычислительные эксперименты, позволяющие оценить эффективность результатов реализации предлагаемого подхода в различных расчетных и эксплуатационных ситуациях (оценка работоспособности подшипникового узла в условиях перекоса роликов). Существенно, что предлагаемая методика имеет общий характер: в частности, отмечается возможность его применения в случае роликов подшипников, испытывающих значительную осевую нагрузку.

С целью снижения концентрации напряжения на краю зоны контакта тела качения в ряде случаев изготавливают с выпуклым (бомбинированным) профилем.

Образующей данного профиля является либо дуга окружности, либо комбинация из дуг окружностей и прямолинейного участка [5]. Как показано в [6, 7], данное техническое решение требует существенного уточнения, так как вызывает рост напряжений в центре ролика с последующим усталостным разрушением (рис. 1, б, с).

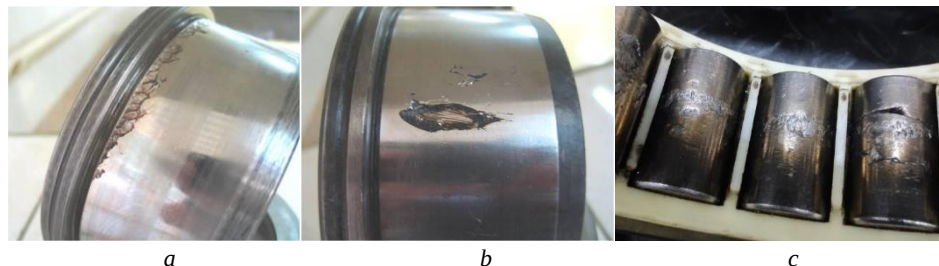


Рис. 1. Усталостное выкрашивание колец подшипников буксовых узлов железнодорожных вагонов: *а* – повреждения кольца подшипника в случае использования роликов с прямолинейной образующей; *б* – повреждения кольца подшипника в случае использования бомбинированных роликов; *с* – разрушенный буксовый подшипник с бомбинированными роликами

Fig. 1. Fatigue chipping of the bearing rings of the axle units of railway cars: (*a*) bearing ring damage when using rollers with a straight generatrix; (*b*) bearing ring damage when using crowning rollers; and (*c*) destroyed axle bearing with crowning rollers

Другой путь снижения уровня напряжений в зоне контакта за счет использования поверхностей контактов более сложной формы, образованных с помощью логарифмической функции, позволяет обеспечить равномерное распределение напряжений с последующим плавным снижением напряжений к торцу ролика.

Одной из первых работ в рассматриваемом направлении является исследование тел качения с логарифмическим профилем, предложенным в работе Г. Лундберга [8]:

$$h(x) = \frac{2F}{E'l} \ln \frac{1}{1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2}, \quad (1)$$

где $h(x)$ – функция профиля подшипника, F – нагрузка, E' – эквивалентный модуль Юнга, l – длина ролика (контакта), x – координата, изменяемая в диапазоне $\pm l/2$. Недостатками указанного профиля являются сингулярность соответствующего теоретического решения и, как следствие, невозможность его реализации. Указанная трудность преодолена в работе Джонса и Гохара [9], предложивших профиль, описываемый соотношением

$$h(x) = \frac{2F}{E'l} \ln \frac{1}{1 - K_1 \left(\frac{2x}{l}\right)^2}, \quad (2)$$

в котором $K_1 = 1 - 0.3033(b_0/l)$, b_0 – ширина площадки контакта при $x = 0$. В то же время непосредственное применение этого соотношения не позволяет осуществлять оптимизацию проектируемого профиля на множестве различных диаметров тела качения так как D_r – номинальный диаметр ролика – в соотношение (2) не входит.

Описанный выше подход, основанный на расширении пространства используемых параметров [9], был развит в работах [10–13] за счет включения дополнительных параметров. Так Кшеминский-Фреда и Варда [10, 11] включили в состав параметров функции профиля диаметр тела качения и предложили следующую функцию профиля:

$$h(x) = 1.44 \cdot 10^{-4} D_r \frac{h_m}{h_L} \ln \frac{1}{1 + e^{-\left(4.66 - \ln \frac{D_r}{l_1}\right) - \left(\frac{2x}{l}\right)^{2\varepsilon_K}}}, \quad (3)$$

где l_1 – длина ролика без скруглений; h_m – изменение величины радиуса ролика относительно номинального диаметра на расстоянии l от плоскости симметрии ролика (см. рис. 1); h_L – константа, определяемая соотношением

$$h_L = 1.44 \cdot 10^{-4} D_r \left(4.66 - \ln \frac{D_r}{l_1}\right). \quad (4)$$

С этой же целью Каомото и соавт. [12] ввели в рассмотрение профили, зависящие от свойств материала (предел текучести, максимально допустимые касательные напряжения и др.):

$$h(x) = 4Rk_2 \left(\frac{\sigma_T}{0.557E'}\right)^2 \ln \frac{1}{1 - \left(\frac{2k_1x}{l}\right)^2}, \quad (5)$$

где R – эквивалентный радиус сжимаемых тел, k_1 и k_2 – коэффициенты, σ_T – предел текучести.

Представленные выше математические модели работы подшипниковых узлов содержат большое количество как физических, так и геометрических параметров. Указанное обстоятельство, а также развитие компьютерных технологий оптимизации создают принципиальную возможность рационализации рассматриваемых профилей по критерию долговечности подшипникового узла. В частности, такое исследование было представлено в работе [13], описывающей равномерный поиск рационального профиля, реализованного по схеме Розенброка [14]. Рационализация профиля осуществлялась в этом случае в рамках равномерного поиска в пространстве параметров для модифицированной формулы (2) за счет варьирования трех констант k_1 , k_2 , z_m :

$$h(x) = \frac{2k_1F}{\pi E' l} \ln \frac{1}{1 - \left(1 - e^{-\frac{z_m \pi E' l}{2k_1 F}}\right) \left(\frac{x-a}{k_2 a} + 1\right)^2} \quad (6)$$

где a – эффективная длина контакта, k_1 – коэффициент увеличения нагрузки; k_2 – отношение проекции на горизонтальную ось длины логарифмического участка к общей эффективной длине контакта, z_m – изменение величины радиуса ролика на конце эффективной длины контакта.

Экспериментальное исследование [15], направленное на подтверждение теоретических результатов, полученных в работе [13], показало, что ролики подшипников, имеющие полностью логарифмический профиль, обладают большей долговечностью по сравнению с роликами, имеющими прямолинейную часть профиля.

Также одним из направлений совершенствования роликов является повышение их стойкости к возможному перекосу роликов, вызванному перекосом колец подшипника. В работах [9, 11, 13, 16–18] было показано, что использование роликов, спроектированных по приведенным алгоритмам, позволяет повысить их долговечность не только в расчетных режимах эксплуатации, но и в режимах эксплуатации подшипников при наличии перекоса положения колец относительно роликов.

В рамках данной работы предлагается альтернативное решение поиска рационального профиля ролика подшипника с использованием степенной функции с целой отрицательной степенью, имеющей более простое аналитическое описание в сравнении с логарифмическими функциями. Цель работы – продемонстрировать адекватность равномерного поиска при определении рациональных форм профиля тел качения с применением численных методов, что не требует дорогостоящих экспериментов на этапе проектирования подшипников.

Методология

Отметим, что в работе [13] приводится алгоритм поиска рациональных форм тел качения на множестве логарифмических функций с перебором трех параметров, что затрудняет его применение в общем случае. В настоящей работе для нахождения эффективных форм тел качения предлагается общий алгоритм рационализации формы такого тела, основанный на равномерном поиске (метод перебора [19, 20]) в пространстве параметров в классе степенных функций с целой отрицательной степенью. Существенно, что предлагаемый алгоритм позволяет проводить вычислительные эксперименты и для других классов функций. Предлагаемая нами методика имеет общий характер и в данной работе верифицирована на примере воспроизводства известного решения, полученного в работах [9–11]. В процессе рационализации осуществляется минимизация максимальных значений подповерхностных напряжений σ_i и контактных давлений, возникающих в зоне контакта [2, 11]. Данные критерии отвечают за разные механизмы разрушения, но в зоне контакта пропорциональны между собой [21]. Алгоритм, реализующий указанный подход, включает в себя следующие шаги:

- 1) определение конструктивных параметров, подлежащих варьированию;
- 2) построение геометрических и конечно-элементных (КЭ) моделей для начальных значений варьируемых параметров (анализ чувствительности влияния их изменения на критерий σ_i);
- 3) определение необходимого шага значений параметров при последовательном переборе параметров;
- 4) проведение равномерного поиска рациональной (по тем или иным критериям) формы профиля с помощью вычислительных экспериментов;
- 5) исследование контактного взаимодействия при перекосе тела качения;
- 6) анализ результатов.

В качестве объекта исследования выбран роликовый подшипник качения буксового узла вагона. Геометрические размеры конструктивных элементов подшипника представлены на рис. 2 [22, 23]. Материалом тел качения и соответствующих колец для определенности выбрана сталь ШХ15 с модулем Юнга $E = 211\,000$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0.3$. В качестве нагрузки при-

кладывается распределенная по образующей линии сила 58 860 Н [24, 25]. Рассмотрим параметры, которые потенциально подлежат варьированию для общего вида ролика подшипника (см. рис. 2):

- 1) длина прямолинейного участка K_1 ;
- 2) расстояние от торца до начала радиусного перехода (направляющей линии профиля в зоне перехода от боковой поверхности тела качения к торцевой, имеющей форму части окружности) K_2 ;
- 3) величина изменения радиуса тела качения в точке стыковки кривой профиля ($f(x)$) с радиусным переходом K_3 ;
- 4) величина изменения радиуса тела качения в точке стыковки торцевой части с радиусным переходом K_4 .

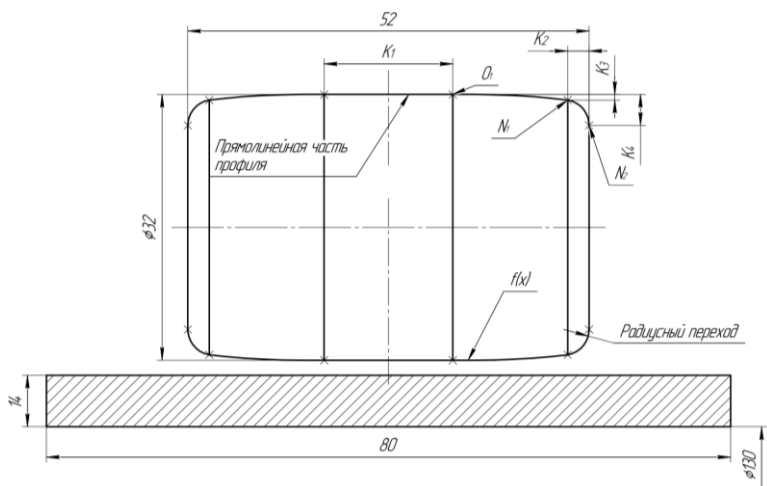


Рис. 2. Геометрические размеры и параметры контактирующих тел
Fig. 2. Geometric dimensions and parameters of contacting bodies

Сравнительный анализ чувствительности величины σ_i на изменение параметров показал, что значимыми параметрами, влияющими на напряженно-деформированное состояние, на дорожке качения являются параметры K_1 и K_3 . По этой причине поиск рациональной формы профиля выполнялся на основе равномерного поиска (перебора) значений данных параметров. При этом для величины K_1 перебор выполнялся для значений $K_1 = 0, 6, 10, 20, 30, 40$ мм. Аналогично параметр K_3 рассматривался для значений, обеспечивающих минимизацию величины критерия σ_i , с шагом 0.012 мм и при необходимости уменьшался. Описанный ниже численный анализ показал относительно невысокую значимость варьирования величин K_2 и K_4 , значения которых в процессе вычислительного эксперимента принимались (в соответствии с [23]) равными 1.

Линия профиля поверхности качения может быть образована с помощью переноса и поворота фрагментов различных линий. При их выборе необходимо выполнение дополнительного условия: функция, описывающая профиль, должна быть достаточно гладкой во всех точках возможного контакта. В противном случае в точке разрыва производных более высокого порядка нарушается гладкость решения с последующим ростом напряжений. Указанное явление описано, напри-

мер, в работе [26]. С этой точки зрения более универсальной (в сравнении с логарифмической функцией) является степенная функция с отрицательным целым показателем. Существенной особенностью такой функции является возможность исключить радиусный переход на всем протяжении функции профиля (рис. 3). Такой подход создает возможность исключения радиусного перехода в линии профиля ролика в целом. Это обстоятельство позволяет предположить, что при возможном перекосе ролика, возникающем в процессе эксплуатации подшипника, точки нарушения гладкости профиля в зоне возможного контакта образовываться не будут.

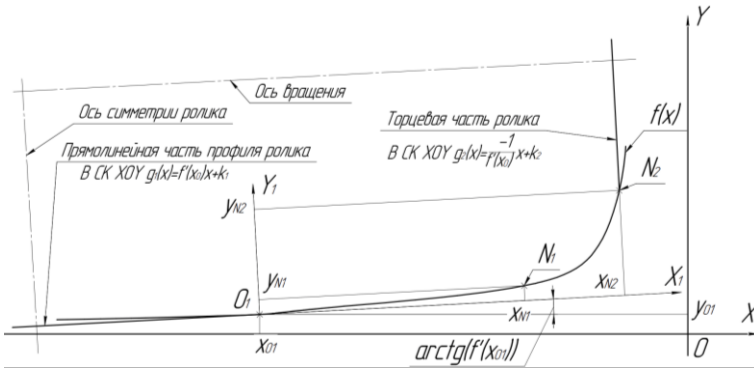


Рис. 3. Определение необходимого фрагмента функции
Fig. 3. Determining of the required function fragment

Рассмотрим формирование профиля с использованием фрагмента степенной функции:

$$f(x) = cx^b. \quad (7)$$

В декартовой системе координат XOY рассмотрим график функции $f(x)$ (см. рис. 3) с положительным коэффициентом c и $b = -2$. На графике произвольно выбирается точка O_1 , через которую проводится новая система координат $X_1O_1Y_1$ таким образом, что ось O_1X_1 является касательной функции $f(x)$ в точке O_1 , как показано на рис. 3. В положительном направлении оси O_1X_1 последовательно выбираются точки N_1 и N_2 с координатами в системе координат $X_1O_1Y_1$ (x_{N1}, y_{N1}) и (x_{N2}, y_{N2}) соответственно. Связь данных координат с параметрами тела качения устанавливается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} x_{N1} = l/2 - K_1 - K_2, \\ y_{N1} = K_3, \\ x_{N2} = l/2 - K_1, \\ y_{N2} = K_4. \end{cases} \quad (8)$$

Данные координаты точек можно представить в системе координат XOY:

$$\begin{cases} x'_{N1} = x_{N1} \cos(\arctan(f'(x_0))) - y_{N1} \sin(\arctan(f'(x_0))) - x_0, \\ y'_{N1} = x_{N1} \sin(\arctan(f'(x_0))) + y_{N1} \cos(\arctan(f'(x_0))) + y_0, \\ x'_{N2} = x_{N2} \cos(\arctan(f'(x_0))) - y_{N2} \sin(\arctan(f'(x_0))) - x_0, \\ y'_{N2} = x_{N2} \sin(\arctan(f'(x_0))) + y_{N2} \cos(\arctan(f'(x_0))) + y_0. \end{cases} \quad (9)$$

Указанные соотношения позволяют составить систему уравнений, разрешимую относительно значений параметров c , x_0 , y_0 :

$$\begin{cases} y_0 = cx_0^{-2}, \\ y'_{N1} = cx_{N1}^{-2}, \\ y'_{N2} = cx_{N2}^{-2}, \end{cases} \quad (10)$$

и построить соответствующую линию профиля рассматриваемых роликов. Существенно, что указанная линия проходит при этом через заданные базовые точки, определяющие контур тела качения (см. рис. 2, 3). После чего строится геометрическая модель в программном комплексе Siemens NX 1899 [27].

С целью определения и минимизации значений σ_i были осуществлены вычислительные эксперименты с использованием численного моделирования процесса контакта ролика и внутреннего кольца подшипника, основанного на применении МКЭ, (использовался программный комплекс Siemens Femap 2020.1 [28]).

Оценка достоверности получаемых значений характеристик НДС контакта осуществлялась на последовательности КЭ-дискретизаций. При этом на каждом шаге этой последовательности размер КЭ уменьшался вдвое по каждому из координатных направлений. Измельчение разбивки принималось достаточным, если на некотором шаге указанного измельчения значение $\sigma_i^{\max}$ изменялось не более чем на 3%. Для достижения необходимой точности использовалась процедура фрагментирования твердых тел на отдельные фрагменты с последующим сопряжением решений (рис. 4) [29].

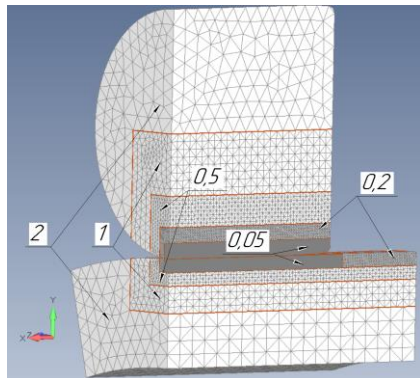


Рис. 4. Дискретизация конечно-элементной сетки модели контактного взаимодействия ролика и внутреннего кольца подшипника

Fig. 4. Discretization of the finite element mesh of the model of contact interaction between the roller and the inner ring of the bearing

Для повышения точности описываемого КЭ-моделирования в зоне контакта (во фрагментах, примыкающих к поверхностям контакта) использовались гексагональные КЭ [30]. Для достижения указанной точности потребовалась дискретизация рассматриваемых тел на 11 фрагментов тел. В целом используемая дискретизация содержала не менее 1 млн КЭ, а размер наименьшего КЭ не превышал при этом 0.05 мм. Полученные результаты верифицированы на примере воспроизводства известного решения, полученного в работах [9–11], и дополнительно

также с помощью численного решения модельной задачи (задача Герца) [21, 31, 32]. При этом соответствующее решение указанной модельной задачи рассматривалось для цилиндров, диаметры которых соответствовали диаметрам элементов подшипников. Аналитическое решение поставленной модельной задачи дает максимальное (в сечении ролика) значение интенсивности напряжений, равное 1 003 МПа [21, 31, 32]. Вычислительное моделирование рассматриваемого контактного взаимодействия осуществлялось на основе линейных уравнений теории упругости с применением МКЭ. Расчетное значение указанной максимальной интенсивности составило при этом 1 020 МПа. Близость уровня НДС в случае решения задачи Герца и соответствующего численного решения также подтверждает необходимую точность моделирования рассматриваемых НДС.

Анализ результатов моделирования

Рассмотрим процесс рационализации формы ролика, осуществляемый в пространстве геометрических параметров, представленных на рис. 2. Результаты проведенного равномерного поиска в пространстве параметров K_1 и K_3 тела качения для степенных функций с отрицательными целыми коэффициентами представлены на рис. 5–7.

Полученные результаты показывают, что наибольшее снижение значений $\sigma_i^{\max}$ достигается при выполнении равенства $K_1 = 0$. При этом возможно изготавливать ролики с частично (до значения $K_1 = 20$, что составляет 38% длины ролика) прямолинейной образующей (прямолинейная часть профиля образует серединную часть боковой поверхности ролика, представленной на рис. 2). Повышение напряжений (по сравнению с ситуацией, когда $K_1 = 0$) не превышают 1.5%. При уменьшении показателя b величина минимально возможного значения $\sigma_i(K_3)$ возрастает, при этом увеличивается значение аргумента K_3 , при котором величина $\sigma_i^{\max}$ достигает минимального значения. Наибольший эффект минимизации при этом достигается для степенных профилей (7) образованных при $b = -1$.

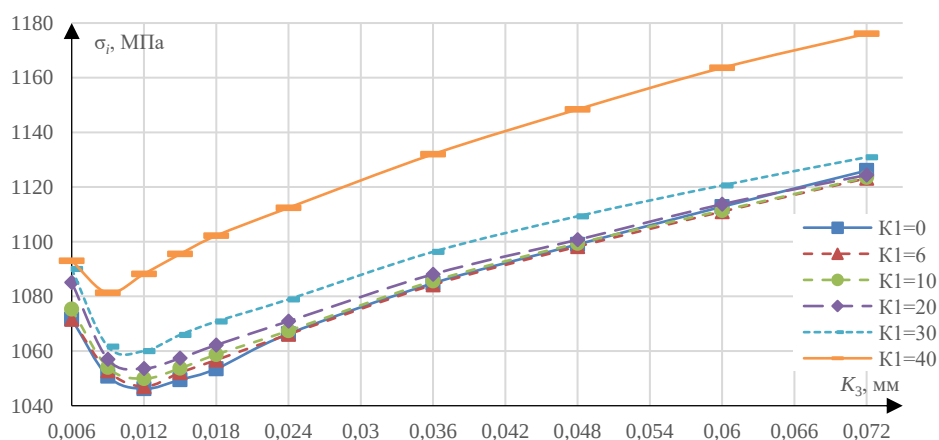


Рис. 5. Результаты вычислительных экспериментов для степенной функции со степенью $b = -1$

Fig. 5. Results of computational experiments for a power function with degree $b = -1$

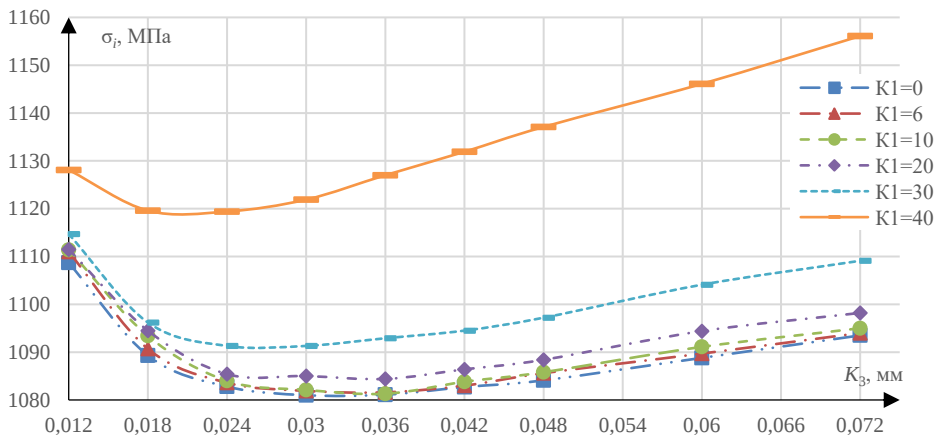


Рис. 6. Результаты вычислительных экспериментов для степенной функции со степенью $b = -2$

Fig. 6. Results of computational experiments for a power function with degree $b = -2$

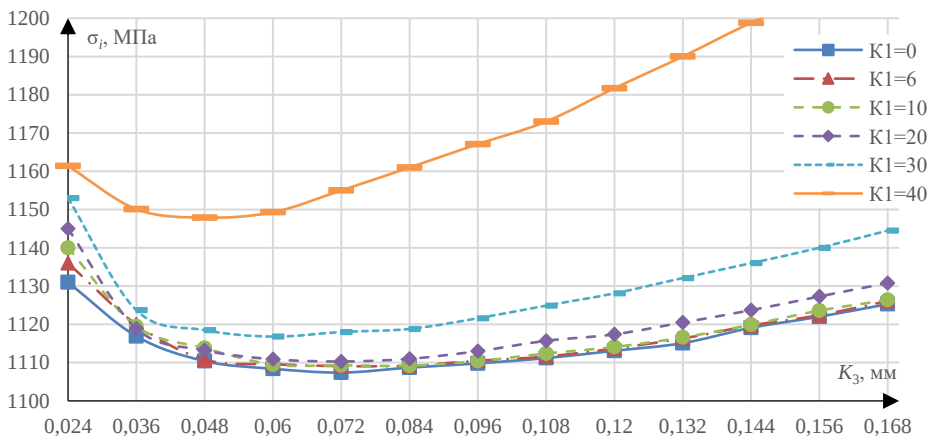


Рис. 7. Результаты вычислительных экспериментов для степенной функции со степенью $b = -3$

Fig. 7. Results of computational experiments for a power function with degree $b = -3$

Отметим, что идеальным (при заданной нагрузке и длине контакта) решением рассматриваемой технической задачи о минимизации максимального уровня напряжений в зоне контакта является распределение напряжений, соответствующее решению задачи Герца. Сравнение полученных результатов минимизации для степенных (7) и логарифмических профилей (2), (3), а также результатов, определяемых решением задачи Герца, представлено в таблице. Такое сравнение показывает, что применяемый в данной работе алгоритм позволяет минимизировать σ_i до значения, отличающегося менее чем на 5% от идеального решения рассматриваемой задачи минимизации.

Для оценки НДС, возникающего при перекосе роликов (рис. 8), проведено исследование влияния величины угла перекоса $\varphi = 0, 0.1, 0.2^\circ$.

Сравнение результатов вычислительных экспериментов

№	Функция профиля	σ_i , МПа	%	Примечание
1	$h(x) = 0.003 \ln \frac{1}{1 - 0.97 \left(\frac{2x}{26} \right)^2}$	1 070	6.7	Профиль Джонса и Гохара
2	$h(x) = 0.014 \ln \frac{1}{1.006 - \left(\frac{2x}{25} \right)^6}$	1 110	10.7	Профиль Кшеминьского-Фреды и Варда
3	$f(x) = 0.012x^{-1}$	1 050	4.7	$K_1 = 0, K_3 = 0.012$
4	$f(x) = 0.055x^{-1}$	1 100	9.7	$K_1 = 0, K_3 = 0.048$
5	Решение задачи Герца для цилиндров одинаковой длины, соответствующих элементам подшипникового узла	1 003	—	

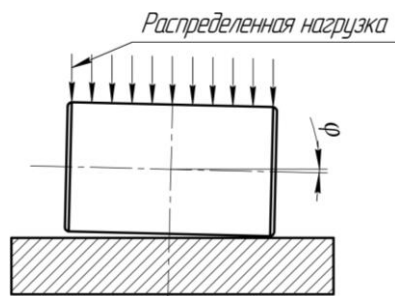


Рис. 8. Угол перекоса ролика

Fig. 8. Roller skew angle

Наиболее наглядно влияние перекоса роликов видно на графиках распределения контактных давлений по длине ролика, которые должны быть монотонными и не иметь локальных всплесков напряжений. Результаты вычислительных экспериментов с учетом перекоса роликов представлены на рис. 9–11.

Приведенные на рис. 9 распределения контактных давлений показывают, что рассмотренные профили с точки зрения повышения ресурса работы близки друг к другу.

Из графиков видно, что при использовании профиля Джонса и Гохара возникает резкий скачок контактных давлений, что вызывает резкое повышение σ_i . Профиль степенной функции $f(x) = 0.012x^{-1}$ дает лучшее распределение контактных давлений и лучший результат по критерию σ_i при $\varphi = 0^\circ$. В то же время при увеличении φ (так же, как и при использовании профиля Джонса и Гохара) вблизи торца ролика возникает зона концентрации напряжений. Соответственно, по мере накопления усталостных повреждений возникает зона кромочного износа (см. рис. 1, а). По этой причине данный профиль не является наиболее рациональным. Наибольшую рациональность (по критерию минимизации $\sigma_i^{\max}$) в различных эксплуатационных ситуациях демонстрируют профили Кшеминьского-Фреды и Варды и степенной профиль $f(x) = 0.055x^{-1}$. Данные профили незначительно отличаются по характеристикам возникающего в процессе эксплуатации НДС. При этом существенно, что степенной профиль описывается более простой ана-

литической функцией, что упрощает практическую реализацию предлагаемого процесса рационализации формы роликов.

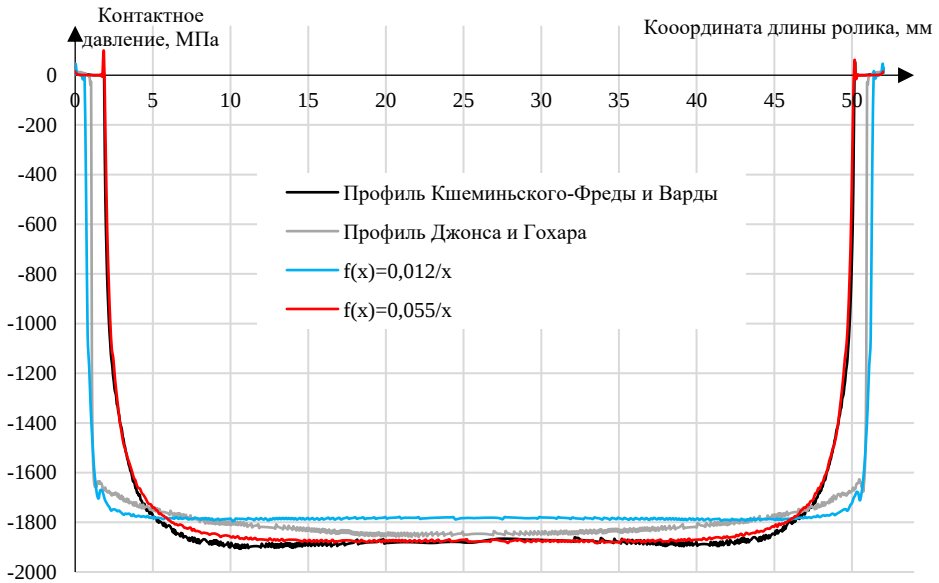


Рис. 9. Распределение контактных давлений по длине ролика при угле перекоса $\varphi = 0^\circ$
Fig. 9. Distribution of contact pressures along the roller length at skew angle $\varphi = 0^\circ$

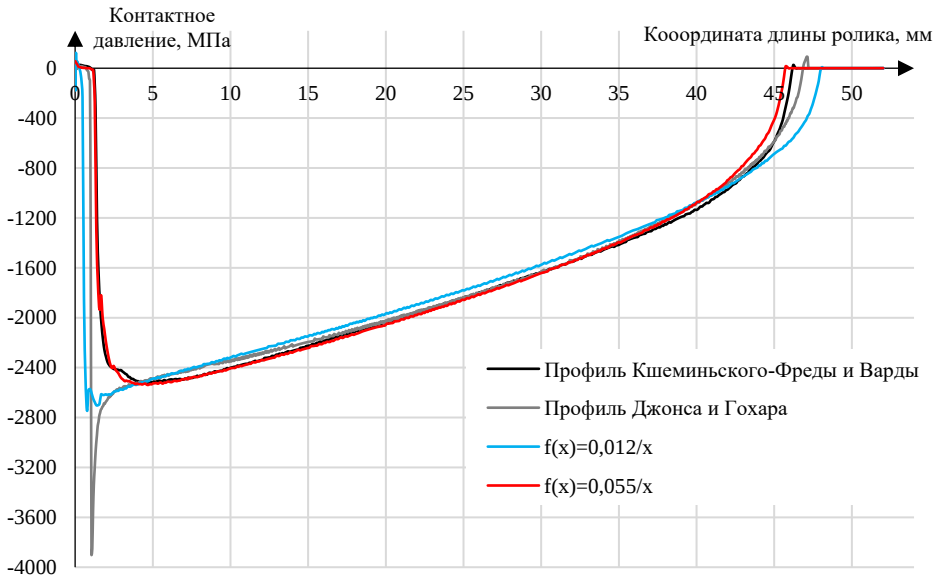


Рис. 10. Распределение контактных давлений по длине ролика при угле перекоса $\varphi = 0.1^\circ$
Fig. 10. Distribution of contact pressures along the roller length at skew angle $\varphi = 0.1^\circ$

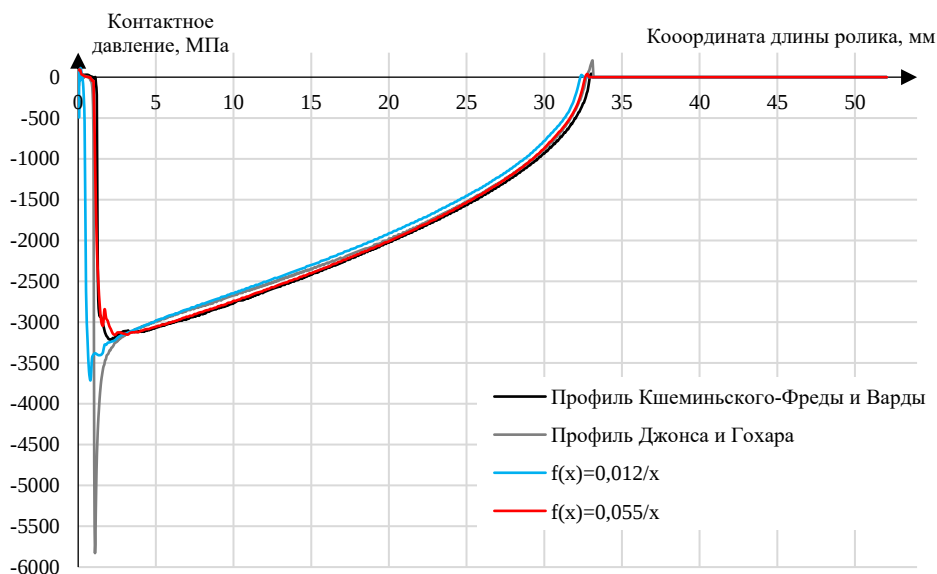


Рис. 11. Распределение контактных давлений по длине ролика при угле перекоса $\varphi = 0.2^\circ$

Fig. 11. Distribution of contact pressures along the roller length at skew angle $\varphi = 0.2^\circ$

Отметим, что предлагаемый подход к рационализации формы контактирующих тел, основанный на использовании степенной функции, описывающей профиль ролика, не опирается на известные аналитические решения каких-либо задач о контактном взаимодействии цилиндрических тел и может быть эффективно использован при исследовании различных конструктивных элементов подшипниковых узлов. В том числе при рассмотрении конических роликов, при рационализации формы тороидальных подшипников, роликовых подшипников, воспринимающих значительные осевые нагрузки на торце ролика, в частности упорных роликовых подшипников.

Заключение

Полученные результаты математического моделирования процесса контактного взаимодействия показывают, что достаточно рациональными и одновременно универсальными являются профили, описываемые степенной функцией с показателем $b = -1$. Использование таких профилей позволяет достичь минимального (на рассмотренных классах функций) значения $\sigma_i^{\max}$ по длине контакта. Также в случае перекоса ролика сохраняется возможность достичь равномерного распределения контактных давлений, не имеющего значительных местных подъемов. Получаемые характеристики НДС при этом практически не отличаются от известных зарубежных решений.

В целом представленные в данной работе результаты показывают, что методика рационализации (по критерию долговечности) формы высоконагруженных элементов подшипников может осуществляться в процессе равномерного поиска в пространстве их конструктивных параметров, основанного на использовании

простейших степенных функций с отрицательным целым показателем путем вычислительных экспериментов. Это обстоятельство существенно упрощает и ускоряет рациональный выбор значений геометрических параметров рассматриваемых конструктивных элементов.

Список источников

1. ISO 16281:2008. Rolling bearings. Methods for calculating the modified reference rating life for universally loaded bearings. 2008.
2. *Иванников В.В., Дегтярев С.А., Леонтьев М.К.* Расчеты на долговечность с учетом сложного нагружения роликоподшипника и распределения усилий по телам качения // Климовские чтения – 2018: перспективные направления развития авиадвигателестроения : сб. докл. междунар. науч.-техн. конф., СПб., 2018. СПб : Скифия-принт, 2018. С. 168–177.
3. *Привалихин Р.С.* Напряженное состояние в зоне контакта двух цилиндрических тел конечной длины // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2011. Т. 13, № 1-3. С. 599–603
4. ЦВТ-22. Классификатор дефектов и повреждений подшипников качения / ОАО «РЖД». 2007. URL: <https://rcit.su/techinfo66.html>
5. 3-ЦВПК. Инструктивные указания по эксплуатации и ремонту вагонных букс с роликовыми подшипниками / Министерство путей сообщения РФ. 1998. URL: <https://rcit.su/techinfo52.html>
6. *Попова Д.Д., Самойленко Н.А., Семенов С.В., Шустеров В.А.* Анализ эффективности применения бомбинированных роликов для снижения контактных напряжений в роликоподшипнике // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. 2020. № 60. С. 96–104. doi: 10.15593/2224-9982/2020.60.11
7. *Клебанов Я.М., Петров В.Р., Адеянов И.Е.* Решение задачи контактного взаимодействия кольца роликового подшипника и ролика на основе уравнения Буссинеску // Фундаментальные основы механики. 2019. № 4. С. 93–100. doi: 10.26160/2542-0127-2019-4-93-100
8. *Lundberg G.* Elastic contact between two semi-infinite bodies // Forschung auf den Gebiete des Ingenieurwesens. 1939. V. 10 (5). P. 201–211. doi: 10.1007/BF02584950
9. *Johns P.M., Gohar R.* Roller bearings under radial and eccentric loads // Tribology International. 1981. V. 14 (3). P. 131–136. doi:10.1016/0301-679X(81)90058-X
10. *Krzemiński-Freda H., Warda B.* Correction of the roller generators in spherical roller bearings // Wear. 1996. V. 192. P. 29–39. doi:10.1016/0043-1648(95)06739-6
11. *Warda B., Chudzik A.* Effect of ring misalignment on the fatigue life of the radial cylindrical roller bearing // International Journal of Mechanical Sciences. 2016. V. 111-112. P. 1–11. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2016.03.019
12. *Kamamoto S., Fujimoto K., Yamamoto T.* Research on crowning profile to obtain the maximum load carrying capacity for roller bearings // KOYO Engineering Journal. 2001. V. 159E. P. 47–52
13. *Fujiwara H., Kawase T.* Logarithmic Profile of Rollers in Roller Bearing and Optimization of the Profile // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series. 2006. P. 3022–3029. doi: 10.1299/kikaic.72.3022
14. *Bazaraa M.S., Sherall H.D., Shetty C.M.*, Nonlinear Programming, New York : John Wiley and Sons, 2006. 853 p.
15. *Fujiwara H., Kobayashi T., Kawase T., Yamauchi K.* Optimized Logarithmic Roller Crowning Design of Cylindrical Roller Bearings and Its Experimental Demonstration // Tribology Transactions. 2010. V. 53. P. 909–916. doi: 10.1080/10402004.2010.510619
16. *Harris T.A.* Rolling Bearing Analysis. New York : John Wiley and Sons, 1966. 760 p.

17. Клебанов Я.М., Петров В.Р., Адеянов И.Е. Численное исследование влияния профиля ролика и перекоса колец на нормальное давление в области контакта ролика с дорожками качения цилиндрического роликового подшипника // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 10 (94). С. 1–18. doi: 10.18698/2308-6033-2019-9-1927
18. Shuting Li. Strength analysis of the roller bearing with a crowning and misalignment error // Engineering Failure Analysis. 2021. V. 123. P. 1–15. doi: 10.1016/j.engfailanal.2021.105311
19. Гончаров В.А. Методы оптимизации : учеб. пособие для вузов. М. : Юрайт, 2024. 191 с.
20. Цвик Л.Б., Зеньков Е.В., Запольский Д.В., Еремеев В.К. Проектирование профиля железнодорожных колес методом равномерного поиска в пространстве радиусов галтельных переходов // Транспорт Урала. 2015. № 3 (46). С. 67–70.
21. Биргер И.А. и др. Прочность, устойчивость, колебания : справочник : в 3 т. М. : Машиностроение, 1968. Т. 2. 465 с.
22. ГОСТ 18572–2014. Подшипники буксовые роликовые цилиндрические железнодорожного подвижного состава. Введ. 01.07.2015. М. : Стандартиформ, 2015. 79 с.
23. ГОСТ 22696–2013. Подшипники качения. Ролики цилиндрические. Технические условия. Введ. 01.06.2015. М. : Стандартиформ, 2015. 33 с.
24. Лукин В.В., Шадура Л.А., Котуранов В.Н. Конструирование и расчет вагонов : учеб. пособие. М. : УМК МПС, 2000. 731 с.
25. Ефремова И.А., Павлюков А.Э. Исследование изменения нагрузки на ролики в подшипнике железнодорожного вагона с использованием численных методов // Новые материалы и технологии в машиностроении. 2004. № 3. С. 27–31.
26. Цвик Л.Б., Тармаев А.А., Бочаров И.С. Гладкость контуров тел качения подшипников с цилиндрическими роликами и ресурс их циклической работы // Транспорт Урала. 2019. № 3 (62). С. 20–27. doi: 10.20291/1815-9400-2019-3-20-27
27. Бутко А.О., Прудников В.А., Цырклов Г.А. Основы моделирования в САПР NX : учеб. пособие. 2-е изд. М. : ИНФРА-М, 2018. 199 с.
28. Рычков С.П. Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran : практ. руководство. 2-е изд. М. : ДМК Пресс, 2023. 785 с.
29. Запольский Д.В., Цвик Л.Б., Зеньков Е.В., Еремеев В.К. Сравнительный анализ деформирования дисковой части цельнокатаных железнодорожных колес различного конструктивного оформления // Вестник ВНИИЖТ. 2013. № 5. С. 29–36.
30. Цвик Л.Б., Зеньков Е.В., Бочаров И.С. Вычислительная механика деформирования деталей вагонов. Иркутск : Иркут. гос. ун-т путей сообщения, 2020. 164 с.
31. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости : пер. с англ. / под ред. Г.С. Шапиро. 2-е изд. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 560 с.
32. Беляев Н.М. Местные напряжения при сжатии упругих тел // Инженерные сооружения и строительная механика. Л. : Путь, 1924. С. 27–108.

References

1. ISO 16281:2008 (2008) *Rolling bearings. Methods for calculating the modified reference rating life for universally loaded bearings.*
2. Ivannikov V.V., Degtyarev S.A., Leont'ev M.K. (2018) Raschety na dolgovechnost' s uchetom slozhnogo nagruzheniya rolikopodshipnika i raspredeleniya usilii po telam kacheniya [Durability calculations taking into account complex roller bearing loading and force distribution across rolling elements]. *Klimovskie chteniya-2018: perspektivnye napravleniya razvitiya aviadvigatelistroeniya: sbornik dokladov mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii. Saint Petersburg, 2018. pp. 168–177.*
3. Privalikhin R.S. (2011) Napryazhennoe sostoyanie v zone kontakta dvukh tsilindricheskikh tel konechnoy dliny [Tension in contact zone of two cylindrical final length bodies]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra rossyskoy akademii nauk – Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.* 13(1–3). pp. 599–603.

4. TsVT–22 (2007) *Klassifikator defektov i povrezhdeniy podshipnikov kacheniya* [Classifier of defects and damages of rolling bearings]. OAO «RZHD».
5. 3–TsVRK (1998) *Instruktivnye ukazaniya po ekspluatatsii i remontu vagonnykh buks s rolikovymi podshipnikami* [Guidelines for the operation and repair of wagon axle boxes with roller bearings]. Ministerstvo putey soobshcheniya RF.
6. Popova D.D., Samoylenko N.A., Semenov S.V., Shisterov V.A. (2020) Analiz effektivnosti primeneniya bombinirovannykh rolikov dlya snizheniya kontaktnykh napryazheniy v rolkopodshipnike [Analysis of the efficiency of application of bombined rollers to reduce the contact tensions in the roller bearing]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika – PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*. 60. pp. 96–104. doi: 10.15593/2224-9982/2020.60.11
7. Klebanov Ya.M., Petrov V.R., Adeyanov I.E. (2019) Reshenie zadachi kontaktnogo vzaimodeystviya kol'tsa rolikovogo podshipnika i rolika na osnove uravneniya Bussinesku [Solving the problem of contact interaction of a roller bearing ring and a roller based on the Bousinescu equation]. *Fundamental'nye osnovy mekhaniki*. 4. pp. 93–100. doi: 10.26160/2542-0127-2019-4-93-100
8. Lundberg G. (1939) Elastic contact between two semi-infinite bodies. *Forschung auf den Gebiete des Ingenieurwesen*. 10(5). pp. 201–211. doi: 10.1007/BF02584950
9. Johns P.M., Gohar R. (1981) Roller bearings under radial and eccentric loads. *Tribology International*. 14(3). pp. 131–136. doi: 10.1016/0301-679X(81)90058-X
10. Krzemiński-Freda H., Warda B. (1996) Correction of the roller generators in spherical roller bearings. *Wear*. 192. pp. 29–39. doi: 10.1016/0043-1648(95)06739-6
11. Warda B., Chudzik A. (2016) Effect of ring misalignment on the fatigue life of the radial cylindrical roller bearing. *International Journal of Mechanical Sciences*. 111–112. pp. 1–11. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2016.03.019
12. Kamamoto S., Fujimoto K., Yamamoto T. (2001) Research on crowning profile to obtain the maximum load carrying capacity for roller bearings. *KOYO Engineering Journal*. 159E. pp. 47–52.
13. Fujiwara H., Kawase T. (2006) Logarithmic profile of rollers in roller bearing and optimization of the profile. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series*. pp. 3022–3029. doi: 10.1299/kikaic.72.3022
14. Bazaraa M.S., Sherali H.D., Shetty C.M. (2006) *Nonlinear Programming*. New York: John Wiley and Sons.
15. Fujiwara H., Kobayashi T., Kawase T., Yamauchi K. (2010) Optimized logarithmic roller crowning design of cylindrical roller bearings and its experimental demonstration. *Tribology Transactions*. 53. pp. 909–916. doi: 10.1080/10402004.2010.510619
16. Harris T.A. (1966) *Rolling Bearing Analysis*. New York: John Wiley and Sons.
17. Klebanov J.M., Petrov V.R., Adeyanov I.E. (2019) Chislennoe issledovanie vliyaniya profilya rolika i perekosa kolets na normal'noe davlenie v oblasti kontakta rolika s dorozhkami kacheniya tsilindricheskogo rolikovogo podshipnika [Numerical study of the effect of roller profile and ring skew on roller raceways contact pressure in cylindrical roller bearing]. *Inzhenernyy zhurnal: Nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 10(94). pp. 1–15. doi: 10.18698/2308-6033-2019-9-1927
18. Li S. (2021) Strength analysis of the roller bearing with a crowning and misalignment error. *Engineering Failure Analysis*. 123. pp. 1–15. doi: 10.1016/j.engfailanal.2021.105311
19. Goncharov V.A. (2024) *Metody optimizatsii: uchebnoe posobie dlya vuzov* [Optimization methods: a textbook for universities]. Moscow: Yurayt.
20. Tsvik L.B., Zenkov E.V., Zapol'sky D.V., Ereemeev V.K. (2015) Proektirovanie profilya zheleznodorozhnykh koles metodom ravnomernogo poiska v prostranstve radiusov galtel'nykh perekhodov [Design of a railway wheel profile by uniform search in fillet radius space]. *Transport Urala – Transport of the Urals*. 3(46). pp. 67–70.
21. Birger I.A. (1968) *Prochnost', ustoychivost', kolebaniya. Spravochnik. Tom 2* [Strength, stability, vibrations. A reference book. Volume 2]. Moscow: Mashinostroenie.

22. GOST 18572-2014. *Podshipniki bukovye rolikovye tsilindricheskie zheleznodorozhnogo podvizhnogo sostava* [Cylindrical roller axle bearings for railway rolling stock]. Moscow: Standartinform.
23. GOST 22696-2013. *Podshipniki kacheniya. Roliki tsilindricheskie. Tekhnicheskie usloviya* [Rolling bearings. Cylindrical rollers. Technical conditions]. Moscow: Standartinform.
24. Lukin V.V., Shadur L.A., Koturanov V.N. (2000) *Konstruirovaniye i raschet vagonov: uchebnoye posobie* [Design and calculation of railway cars: a textbook]. Moscow: UMK MPS.
25. Efremova I.A., Pavlyukov A.E. (2004) Issledovanie izmeneniya nagruzki na roliki v podshipnike zheleznodorozhnogo vagona s ispol'zovaniem chislennykh metodov [Study of changes in the load on rollers in a railway car bearing using numerical methods]. *Novye materialy i tekhnologii v mashinostroyenii*. 3. pp. 27–31.
26. Tsvik L.B., Tarmaev A.A., Bocharov I.S. (2019) Gladkost' konturov tel kacheniya podshipnikov s tsilindricheskimi rolnikami i resurs ikh tsiklicheskoj raboty [Smoothness of rolling elements contours of bearings with cylindrical rollers and their life time]. *Transport Urala – Transport of the Urals*. 3(62). pp. 20–27. doi: 10.20291/1815-9400-2019-3-20-27
27. Butko A.O., Prudnikov V.A., Tsirkov G.A. (2018) *Osnovy modelirovaniya v SAPR NX: uchebnoye posobie* [Basics of modeling in NX CAD: a textbook]. Moscow: INFRA-M.
28. Rychkov S.P. (2023) *Modelirovaniye konstruksiy v srede Femap with NX Nastran: prakticheskoe rukovodstvo* [Modeling of structures in the Femap with NX Nastran environment: a practical guide]. Moscow: DMK Press.
29. Zapol'sky D.V., Tsvik L.B., Zenkov E.V., Ereemeev V.K. (2013) Sravnitel'nyy analiz deformirovaniya diskovoy chasti tsel'nokatanykh zheleznodorozhnykh koles razlichnogo konstruktivnogo oformleniya [Comparative analysis of disk part deformations of various design solid wheels]. *Vestnik VNIIZhT – Russian Railway Science Journal*. 5. pp. 29–36.
30. Tsvik L.B., Zenkov E.V., Bocharov I.S. (2020) *Vychislitel'naya mekhanika deformirovaniya detaley vagonov* [Computational mechanics of deformation of railway car parts]. Irkutsk: Irkutsk State Transport University.
31. Timoshenko S.P., Goodier J.N., Abramson H.N. (1970) Theory of Elasticity. In: *ASME. Journal of Applied Mechanics*. doi: 10.1115/1.3408648
32. Belyaev N.M. (1924) Mestnye napryazheniya pri szhatii uprugikh tel [Local stresses during compression of elastic bodies]. *Inzhenernye sooruzheniya i stroitel'naya mekhanika*. pp. 27–108.

Сведения об авторах:

Гордеев Константин Александрович – аспирант кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении Иркутского национального исследовательского технического университета (ИРНИТУ) (Иркутск, Россия). E-mail: konstantin.gordeev.1999@mail.ru

Цвик Лев Беркович – доктор технических наук, профессор кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении Иркутского национального исследовательского технического университета (ИРНИТУ) (Иркутск, Россия). E-mail: tsvik_l@mail.ru

Information about the authors:

Gordeev Konstantin A. (Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation). E-mail: konstantin.gordeev.1999@mail.ru

Tsvik Lev B. (Doctor of Technical Sciences, Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation). E-mail: tsvik_l@mail.ru

Статья поступила в редакцию 05.09.2024; принята к публикации 07.02.2025

The article was submitted 05.09.2024; accepted for publication 07.02.2025

Научная статья

УДК 531.3, 532.1

doi: 10.17223/19988621/93/8

Подводный старт суперкавитирующих ударников из лабораторных метательных установок различной длины

Александр Николаевич Ищенко¹, Владислав Сергеевич Акользин²,
Виктор Владимирович Буркин³, Илья Михайлович Бирюков⁴,
Алексей Сергеевич Дьячковский⁵, Алена Сергеевна Шестопалова⁶,
Андрей Владимирович Чупашев⁷

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ ichan@niipmm.tsu.ru

² akolzin99@inbox.ru

³ v.v.burkin@mail.ru

⁴ ilya.biryukov.2072@mail.ru

⁵ lex_okha@mail.ru

⁶ shestopalova@ftf.tsu.ru

⁷ chupashevav@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Приводятся примеры экспериментальной реализации подводного старта с визуализацией быстропротекающих высокоэнергетических процессов, сопровождающих выход ударников из ускорительных каналов различной длины в воду. Зафиксированы качественные различия в картинах процесса подводного выстрела при старте из метательных установок с различной длиной ускорительного канала. Получена зависимость скорости фронта продуктов сгорания от дульной скорости ударника. Рассчитаны внутрибаллистические параметры выстрела, характеризующие особенности метательных установок с различной длиной ускорительного канала.

Ключевые слова: гидробаллистическая трасса, суперкавитация, ударник, кавитатор, длина ускорительного канала метательной установки, подводный старт

Благодарности: Экспериментальные исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда № 19-19-00233, <https://rscf.ru/project/19-19-00233/>. Анализ экспериментальных результатов выполнен при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

Для цитирования: Ищенко А.Н., Акользин В.С., Буркин В.В., Бирюков И.М., Дьячковский А.С., Шестопалова А.С., Чупашев А.В. Подводный старт суперкавитирующих ударников из лабораторных метательных установок различной длины // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 96–105. doi: 10.17223/19988621/93/8

Original article

Underwater launching of supercavitating projectiles from laboratory bores of different lengths

Aleksandr N. Ishchenko¹, Vladislav S. Akol'zin², Viktor V. Burkin³,
Il'ya M. Biryukov⁴, Aleksey S. D'yachkovskiy⁵, Alyona S. Shestopalova⁶,
Andrey V. Chupashev⁷

^{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ ichan@niipmm.tsu.ru

² akolzin99@inbox.ru

³ v.v.burkin@mail.ru

⁴ ilya.biryukov.2072@mail.ru

⁵ lex_okha@mail.ru

⁶ shestopalova@ftf.tsu.ru

⁷ chupashevav@niipmm.tsu.ru

Abstract. Examples of experiments on underwater launching with the visualization of fast-flowing high-energy processes accompanying the release of projectiles from accelerator channels of various lengths into the water are presented. The qualitative difference in the patterns of underwater firing during launching from the bores with accelerator channels of different lengths is revealed. The velocity of the front of the combustion products is obtained as a function of the muzzle velocity of the projectile. The intraballistic parameters of the firing process, which characterize the features of projectile launchers with accelerator channels of different lengths, are calculated.

Keywords: hydroballistic track, supercavitation, projectile, cavitator, accelerator channel length, underwater launch

Acknowledgments: Experimental studies were carried out at the expense of the Russian Science Foundation (project No. 19-19-00233), <https://rscf.ru/project/19-19-00233/>. The analysis of experimental results was supported by the Tomsk State University Development Program (Priority 2030).

For citation: Ishchenko, A.N., Akol'zin, V.S., Burkin, V.V., Biryukov, I.M., D'yachkovskiy, A.S., Shestopalova, A.S., Chupashev, A.V. (2025) Underwater launching of supercavitating projectiles from laboratory bores of different lengths. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 96–105. doi: 10.17223/19988621/93/8

Введение

Высокоскоростное движение твердых тел в воде сопряжено с нарушением сплошности среды с образованием каверн [1–3], часто встречается в различных технических приложениях и является актуальной задачей для исследовательских коллективов многих стран [4–9]. На базе гидробаллистического комплекса НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета проводятся экспериментально-теоретические исследования высокоэнергетических быстротекущих процессов в различных средах [10–11].

Известно, что при выстреле в воздух истекающая из ускорительного канала струя пороховых газов в периоде последействия может повлиять на дальнейшую траекторию движения метаемого тела. При подводном выстреле такое влияние может быть более существенным из-за наличия подвижной границы раздела фаз, на которой плотность среды меняется в сотни и более раз. В ходе работы [11] было отмечено, что выход ударника сопровождается характерной вспышкой и последующим выбросом в воду или суперкаверну горячих газов под давлением с дальнейшей реализацией одного из двух характерных сценариев:

- с «замытием» ударника без проникновения метаемого газа в суперкаверну;
- без «замытия» ударника с прорывом метаемого газа в суперкаверну.

В обоих случаях отмечалось существенное влияние истекающих пороховых газов на общую газодинамическую картину подводного старта, вносящее нестационарность в газодинамическую картину вокруг ударника, что влияет на исход эксперимента, затрудняет обработку результатов и сравнение их с расчетами. Это показывает, что, с одной стороны, нужно стремиться к уменьшению влияния внутрибаллистических процессов на движение суперкавитирующего ударника в периоде последействия, с другой стороны, необходимо научиться прогнозировать и учитывать это влияние в математических моделях подводного выстрела. Последнему способствует получение данных о скорости фронта продуктов сгорания, поступающих в суперкаверну, в зависимости от параметров выстрела.

Цель настоящей работы – получение новых данных об особенностях подводного старта ударников из ускорительных каналов различных длин и построение зависимости скорости фронта продуктов сгорания метаемого состава от скорости ударника.

Подводный старт ударников из ускорительных каналов различной длины

Эксперименты проводились с применением двух баллистических установок с равными диаметрами ускорительных каналов $d = 8$ мм, но различными длинами ускорительных каналов – $25d$ и $106d$. Метались удлиненные ударники с плоским кавитатором диаметром $0.25d$. Согласно оценочным расчетам [11], величина давления на дульном срезе установки длиной $106d$ в несколько раз меньше, чем при длине $25d$, что существенно снижает воздействие струи метаемых газов на ударник и каверну в период последействия. Визуальное сравнение картины протекающих процессов при подводном старте из установок разной длины при близких дульных скоростях ударника выявляет несколько качественных различий. На рис. 1 приведены фотографии момента выхода ударников из ускорительных каналов длиной $25d$ (см. рис. 1, а) и $106d$ (см. рис. 1, б).

В случае с установкой длиной $25d$ (см. рис. 1, а) в момент освобождения канала на дульном срезе отмечается вспышка, которая не наблюдается при длине $106d$ (см. рис. 1, б). Ее наличие можно объяснить более высокой температурой газа на срезе короткого ускорительного канала или присутствием несгоревших частиц метаемого состава.

Следующая рассматриваемая фаза процесса – столкновение фронта метаемых газов с границами суперкаверны в области кавитатора (рис. 2).

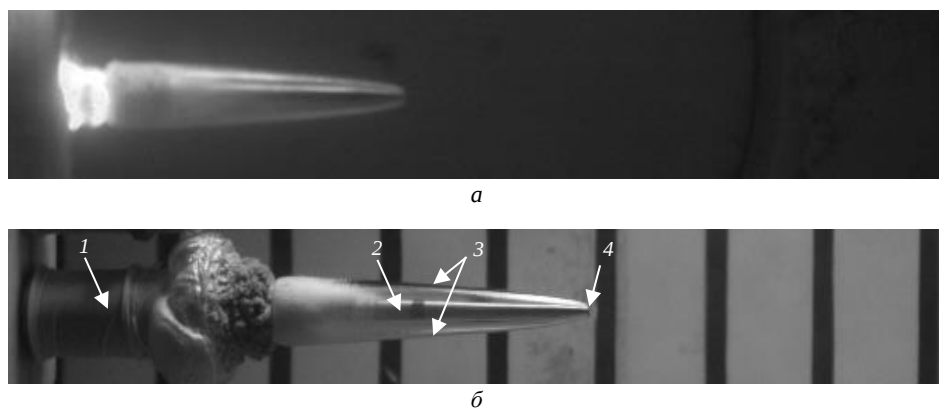


Рис. 1. Фотографии, полученные в момент освобождения ударниками ускорительного канала: *a* – длиной $25d$, *б* – длиной $106d$; 1 – метательная установка; 2 – ударник; 3 – верхняя / нижняя граница суперкаверны; 4 – кавитатор

Fig. 1. Pictures of the projectile release from the accelerator channels of different lengths: (a) $25d$ and (b) $106d$; 1, accelerator; 2, projectile; 3, top/bottom boundaries of the supercavern; and 4, cavitator

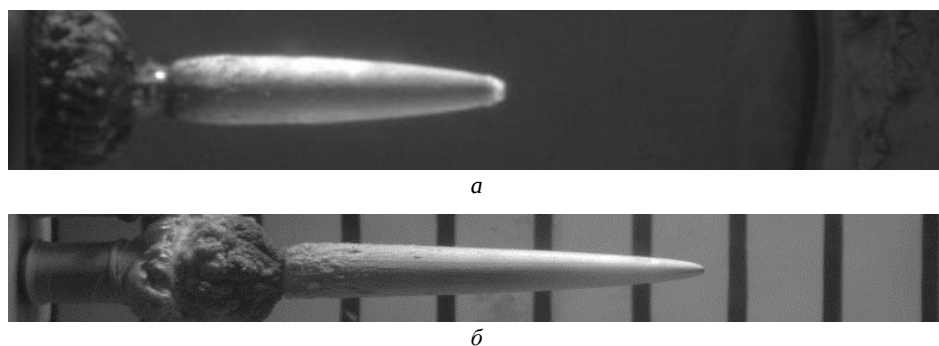


Рис. 2. Фотографии, полученные в момент столкновения фронта метаемых газов с границами суперкаверны в области кавитатора: *a* – канал длиной $25d$; *б* – канал длиной $106d$

Fig. 2. Pictures of the collision between the front of the combustion products and the boundaries of the supercavern in the cavitator vicinity at different channel lengths: (a) $25d$ and (b) $106d$

При длине ускорительного канала $25d$ (см. рис. 2, *a*) в области кавитатора отмечаются свечение границ суперкаверны и ее локальное расширение. В случае с каналом длиной $106d$ (см. рис. 2, *б*) существенных визуальных изменений поверхности суперкаверны не отмечается. Фотографии на рис. 3 показывают дальнейшее развитие процесса.

В случае с ускорительным каналом длиной $25d$ (см. рис. 3, *a*) в месте удара газового фронта о каверну наблюдается локальная кольцевая деформация ее границ, которая не отмечается в эксперименте с длиной канала $106d$ (см. рис. 3, *б*).

Приведенные визуальные сравнения выявляют качественные различия в картинах протекающих процессов метания при различных длинах ускорительного канала. Метанию из ускорительного канала длиной $25d$ сопутствуют две вспышки: в момент освобождения канала ударником и в момент торможения быстро-

движущихся горячих пороховых газов о границы суперкаверны в области кавитатора. Последующая деформация каверны в этой области свидетельствует о значительной величине давления в момент удара газового фронта о воду. При метании с применением канала длиной $106d$ дульная вспышка не наблюдается, а в области торможения газового фронта искажения границ суперкаверны не происходит, что в совокупности указывает на меньшее возмущающее действие истекающих газов в периоде последствий.

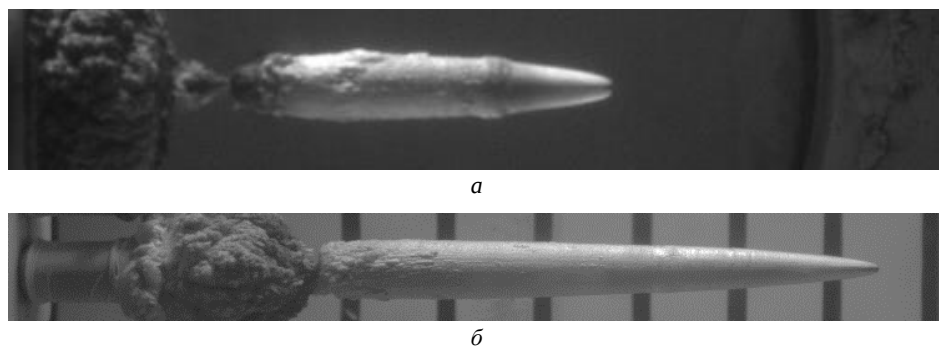


Рис. 3. Картина движения после столкновения фронта метаемых газов с границами суперкаверны в области кавитатора: *а* – канал длиной $25d$; *б* – канал длиной $106d$
Fig. 3. Pictures of the motion after the collision between the front of the combustion products and the boundaries of the supercavern in the cavitator vicinity at different channel lengths: (a) $25d$ and (b) $106d$

Для правильного анализа наблюдаемой картины необходимо установить, произошло ли полное сгорание метаемого состава к моменту выхода ударника из ускорительного канала. С применением математической модели и численной методики расчета внутрикамерных процессов [12] был произведен расчет внутрибаллистических параметров выстрела. Результаты газодинамических расчетов, приведенные на рис. 4, показывают зависимость безразмерной массы несгоревшего заряда от пути, пройденного ударником в ускорительном канале.

Согласно расчету, в обоих рассмотренных случаях с ударниками массой 27 и 53 г происходит полное сгорание метаемого состава к моменту достижения ударником первых $19d$ канала, т.е. к моменту входа ударника в воду весь заряд уже сгорел, и наблюдаемая картина не является следствием его догорания вне ускорительного канала. В таком случае причиной наблюдаемого на срезе ускорительного канала длиной $25d$ свечения, скорее всего, является высокая температура продуктов сгорания, так как полное сгорание порохового заряда происходит близко к дульному срезу. Соответственно, для случая с каналом $106d$ процесс горения полностью завершается в канале задолго до момента выхода ударника, и газ успевает остыть. В результате расчета газодинамической картины выстрела получено, что для ускорительного канала длиной $25d$ температура газов при выходе составляет около 2 000 К, а давление в газе на торце ударника при выходе из ускорительного канала достигает 160–180 МПа. Для установки с каналом длиной $106d$ температура газов снижается в 2 раза, а дульное давление – в 4 раза. Использование более длинной установки позволяет снизить воздействие на окружающую среду и метаемый ударник. Для установки с длиной канала $25d$

замечено, что повышение дульного давления газа (свыше 150–200 МПа) снижает вероятность попадания пороховых газов в каверну.

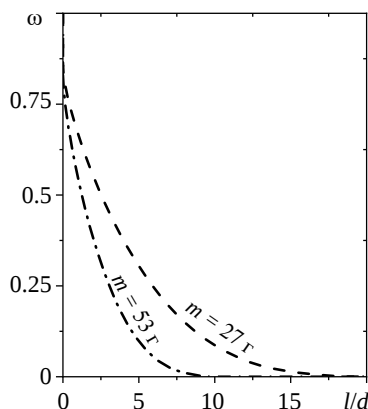


Рис. 4. Зависимость безразмерной массы несгоревшего заряда от положения ударника в ускорительном канале

Fig. 4. Dimensionless mass of the unburned charge as a function of the projectile position in the accelerator channel

Результаты внутрибаллистических расчетов газодинамической картины выстрела показали, что процесс горения заряда заканчивается до момента выхода ударника из ускорительного канала, что, в свою очередь, позволяет рассматривать движение газопороховой смеси в воде без учета горения заряда при расчете процессов, сопровождающих подводный старт.

Движение фронта продуктов сгорания в суперкаверне

Исследование зависимости скорости фронта продуктов сгорания, проникающих в суперкаверну, производилось на установке с длиной ускорительного канала $106d$ по данным высокоскоростной видеорегистрации. Фотографирование в опытах производилось с равным периодом $5.5 \cdot 10^{-5}$ с. На рис. 5 запечатлен характерный процесс подводного выстрела с распространением продуктов сгорания из ствола в суперкаверну (положение фронта продуктов сгорания на фотографиях отмечено стрелками).

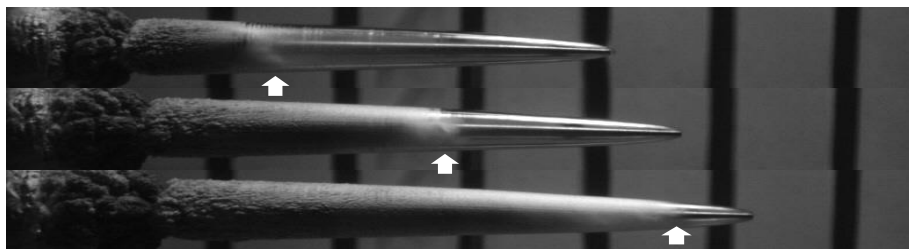


Рис. 5. Движение фронта продуктов сгорания в суперкаверне

Fig. 5. Movement of the front of the combustion products in the supercavern

По перемещению между кадрами были сделаны оценки скорости фронта продуктов сгорания при использовании канала длиной $106d$. Зависимость скорости фронта продуктов сгорания $V_{\text{пр}}$ в суперкаверне от дульной скорости ударника V показана на рис. 6. Величины обезразмерены по максимальной дульной скорости V_{max} ударника, достигнутой в экспериментах.

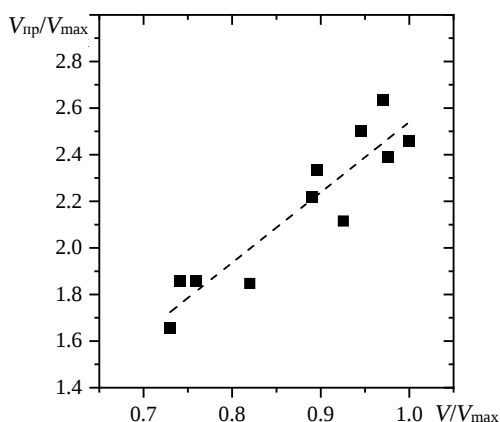


Рис. 6. Зависимость скорости фронта продуктов сгорания от дульной скорости ударника:

■ – эксперимент; - - - - линейная аппроксимация

Fig. 6. Velocity of the combustion product front as a function of the projectile muzzle velocity:

■ experiment and - - - linear approximation

Наблюдается зависимость скорости фронта продуктов сгорания от дульной скорости ударника. В исследуемом диапазоне скоростей экспериментальные значения методом наименьших квадратов аппроксимируются линейной функцией $V_{\text{пр}} = -0.48V_{\text{max}} + 3V$ (штриховая линия на графике), коэффициент детерминации составил $R^2 = 0.85$.

Заключение

В работе получены новые данные по подводному старту ударников из ускорительных каналов различной длины, в частности:

- получен детальный фото- и видеоматериал, на котором запечатлена сложная газодинамическая картина быстропротекающих процессов, сопровождающих подводный выстрел из ускорительных каналов метательных установок различной длины, и показано, что проникающие в суперкаверну при подводном выстреле пороховые газы возмущают границы суперкаверны вокруг ударника;

- при подводном старте из ускорительного канала метательной установки длиной $25d$ проникающие в суперкаверну пороховые газы деформируют профиль суперкаверны вокруг ударника, а при старте из ускорительного канала длиной $106d$ деформации суперкаверны не отмечаются;

- расчетным образом показано, что процесс горения заряда в обоих случаях заканчивается до момента выхода ударника из ускорительного канала. Это позволяет в дальнейшем моделировать движение ударника и продуктов сгорания каверны без учета горения заряда;

– для ускорительного канала метательной установки длиной 106d получена экспериментальная зависимость скорости фронта продуктов сгорания метающего состава от скорости ударника. В рассмотренном диапазоне скоростей она аппроксимируется линейной функцией $V_{\text{пр}} = -0.48V_{\text{max}} + 3V$.

Список источников

1. Логвинович Г.В. Некоторые вопросы глиссирования и кавитации // Труды ЦАГИ. 1980. № 2052. С. 250–270.
2. Пирсол И. Кавитация / пер. с англ. Ю.Ф. Журавлева. М. : Мир, 1975. 95 с.
3. Васин А.Д. Задачи гидродинамики и гидроупругости высокоскоростного движения в воде : дис. ... д-ра техн. наук / Гос. науч.-исслед. центр ЦАГИ, 1999. 282 с.
4. Савченко Ю.Н., Власенко Ю.Д., Семенов В.Н. Экспериментальные исследования высокоскоростных кавитационных течений // Гидромеханика. 1998. № 72. С. 103–111.
5. Савченко Ю.Н. Моделирование суперкавитационных процессов // Прикладная гидромеханика. 2000. Т. 2, № 3. С. 75–86.
6. Thai D., Horák V., Nguyen Van D., Dao Van D. Ballistics of Supercavitating Projectiles // Advances in Military Technology. 2018. V. 13 (2). P. 237–248. doi: 10.3849/aimt.01243
7. Vlasenko Y. Experimental investigation of supercavitation flow regimes at subsonic and transonic speeds // Proceedings of the Fifth Int. Symp. on Cavitation (Osaka, Japan). 2003. Cav03-GS-6-006.
8. Guo Z., Zhang W., Xiao X., Wei G., Ren P. An investigation into horizontal water entry behaviors of projectiles with different nose shapes // International Journal Impact Engineering. 2012. V. 49. P. 43–60. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2012.04.004
9. Ping W., Jian H., Tingfeng C. Analysis on the stability of supercavitation projectile // Applied Mechanics and Materials. 2012. V. 157-158. P. 58–61. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.157-158.58
10. Ищенко А.Н., Буркин В.В., Дьячковский А.С. и др. Исследование параметров движения инертных конических моделей в воде // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 71. С. 78–89. doi: 10.17223/19988621/71/7
11. Ищенко А.Н., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Чупашев А.В. Подводный старт суперкавитирующего ударника из лабораторной баллистической установки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 97–107. doi: 10.17223/19988621/82/8
12. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1999. 255 с.

References

1. Logvinovich G.V. (1980) Nekotorye voprosy glissirovaniya i kavitatsii [Some issues of planing and cavitation]. *Trudy TSAGI*. 2052. pp. 250–270.
2. Pearsall I.S. (1972) *Cavitation*. London: Mills & Boon.
3. Vasin A.D. (1999) *Zadachi gidrodinamiki i gidrouprugosti vysokoskorostnogo dvizheniya v vode* [Problems of hydrodynamics and hydroelasticity of high-speed motion in water]. Dissertation. Gosudarstvennyy nauchno-issledovatel'skiy tsentr TSAGI.
4. Savchenko Yu.N., Vlasenko Yu.D., Semenenko V.N. (1998) Eksperimental'nye issledovaniya vysokoskorostnykh kavitatsionnykh techeniy [Experimental studies of high-speed cavitation flows]. *Gidromekhanika*. 72. pp. 103–111.
5. Savchenko Yu.N. (2000) Modelirovanie superkavitatsionnykh protsessov [Modeling of supercavitation processes]. *Prikladnaya gidromekhanika*. 2(3). pp. 75–86.
6. Thai D., Horák V., Nguyen Van D., Dao Van D. (2018) Ballistics of supercavitating projectiles. *Advances in Military Technology*. 13(2). pp. 237–248. doi: 10.3849/aimt.01243

7. Vlasenko Yu.D. (2003) Experimental investigation of supercavitation flow regimes at subsonic and transonic speeds. *Proceedings of the Fifth International Symposium on Cavitation, Osaka, Japan*. Cav03-GS-6-006.
8. Guo Z., Zhang W., Xiao X., Wei G., Ren P. (2012) An investigation into horizontal water entry behaviors of projectiles with different nose shapes. *International Journal of Impact Engineering*. 49. pp. 43–60. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2012.04.004
9. Ping W., Jian H., Tingfeng C. (2012) Analysis of the stability of supercavitation projectile. *Applied Mechanics and Materials*. 157–158. pp. 58–61. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.157-158.58
10. Ishchenko A.N., Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Chupashev A.V. (2021) Issledovanie parametrov dvizheniya inertnykh konicheskikh modeley v vode [Investigation of underwater motion parameters for inert conical models]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 71. pp. 78–89. doi: 10.17223/19988621/71/7
11. Ishchenko A.N., Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Chupashev A.V. (2023) Podvodnyy start superkavitiruyushchego udarnika iz laboratornoy ballisticheskoy ustanovki [Underwater launching of a supercavitating projectile out of a ballistic test setup]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 97–107. doi: 10.17223/19988621/82/8
12. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematic simulation of intraballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.

Сведения об авторах:

Ищенко Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Акользин Владислав Сергеевич – инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: akolzin99@inbox.ru

Бирюков Илья Михайлович – техник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ilya.biryukov.2072@mail.ru

Буркин Виктор Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

Дьячковский Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором 71 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: lex_okha@mail.ru

Шестопалова Алена Сергеевна – техник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: shestopalova@ftf.tsu.ru

Чупашев Андрей Владимирович – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: chupashevav@gmail.ru

Information about the authors:

Ishchenko Aleksandr N. (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Akol'zin Vladislav S. (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akolzin99@inbox.ru

Biryukov Il'ya M. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ilya.biryukov.2072@mail.ru

Burkin Viktor V. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

D'yachkovskiy Aleksey S. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex_okha@mail.ru

Shestopalova Alyona S. (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shestopalova@ftf.tsu.ru

Chupashev Andrey V. (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: chupashevav@gmail.ru

Статья поступила в редакцию 08.12.2023; принята к публикации 07.02.2025

The article was submitted 08.12.2023; accepted for publication 07.02.2025

Научная статья

УДК 539.4

doi: 10.17223/19988621/93/9

Деформация и разрушение сетчатых PLA образцов при динамическом нагружении

Наталия Васильевна Казанцева¹, Анатолий Олегович Онищенко²,
Сергей Алексеевич Зелепугин³, Роман Олегович Черепанов⁴,
Оксана Владимировна Иванова⁵

^{1,2} Институт физики металлов Уральского отделения РАН им. М.Н. Михеева,
Екатеринбург, Россия

^{3,4,5} Томский научный центр Сибирского отделения РАН, Томск, Россия

³ Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ kazantseva@imp.uran.ru

² tolya_onishenko@mail.ru

³ szel@yandex.ru

⁴ rcherepanov82@gmail.com

⁵ o.ivanova@hq.tsc.ru

Аннотация. Проведен анализ процесса деформации и характера разрушения в условиях динамических (баллистических) испытаний сетчатых PLA образцов со структурой трижды периодической поверхности минимальной энергии типа алмазной поверхности Шварца (Schwarz Diamond Surface), полученных с помощью 3D-принтера. Обнаружено, что с ростом плотности сетчатых PLA образцов характер разрушения меняется с вязкого на хрупкий.

Ключевые слова: полилактид (PLA), сетчатая структура, метаматериалы, 3D-печать, динамическое нагружение, разрушение

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для ИФМ УрО РАН, государственного задания ТНЦ СО РАН (проект FWRP-2024-0009) и Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030). Сканирующая электронная микроскопия была выполнена в центре коллективного пользования ИФМ УрО РАН им. М.Н. Михеева.

Для цитирования: Казанцева Н.В., Онищенко А.О., Зелепугин С.А., Черепанов Р.О., Иванова О.В. Деформация и разрушение сетчатых PLA образцов при динамическом нагружении // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 106–116. doi: 10.17223/19988621/93/9

Original article

Deformation and fracture of PLA honeycomb samples under dynamic loading

Nataliya V. Kazantseva¹, Anatoliy O. Onishchenko², Sergey A. Zelepugin³,
Roman O. Cherepanov⁴, Oksana V. Ivanova⁵

^{1,2} M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy
of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation

^{3, 4, 5} Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Tomsk, Russian Federation

³ Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ kazantseva@imp.uran.ru

² tolya_onishenko@mail.ru

³ szel@yandex.ru

⁴ rcherepanov82@gmail.com

⁵ o.ivanova@hq.tsc.ru

Abstract. The search for and investigation of new porous materials with a bionic honeycomb structure is an urgent scientific problem due to the active development of additive technologies. The aim of this study is to examine the effect of the morphology of PLA (polylactide, $C_3H_4O_3$) samples with a honeycomb structure based on a triply periodic minimal surface, namely the Schwarz-Diamond surface, on their impact resistance under dynamic (ballistic) loading. To produce samples with the Schwarz-Diamond surface, a software, which generates G-Code using surface equations, is developed. The honeycomb samples are manufactured from PLA filaments via fusion deposition modeling (FDM) using a Picasso 3D printer. The dimensions of the cells in the samples vary from 1 to 5 mm, which corresponds to the large honeycomb morphology. Ballistic tests are conducted on an experimental test setup comprising a Crossman 2100 classic BB pneumatic pump air rifle, a device for recording the velocity of a spherical projectile (ball), and a pocket to arrange a test sample and to catch the ball and fragments. The analysis of deformation and fracture of the PLA samples reveals that the fracture pattern after ballistic impact tests is dependent on density and exhibits a transition from ductile to quasi-brittle behavior. Quasi-brittle fracture behavior is observed in the samples with the highest density (0.93 g/cm^3). The mechanical properties of the Schwarz-Diamond surface structures are found to be moderate. Therefore, such structures can be used as reinforcement in various applications, including building materials, aerospace components, and automotive parts.

Keywords: polylactide (PLA), honeycomb structure, metamaterials, 3D printing, dynamic loading, fracture

Acknowledgments: The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation for the IMP UB RAS, of the public contract for the Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (project No. FWRF-2024-0009) and the Tomsk State University Development Program (Priority 2030). Scanning electron microscopy was performed using the equipment of the Collective Research Facility Center of the M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences.

For citation: Kazantseva, N.V., Onishchenko, A.O., Zelepugin, S.A., Cherepanov, R.O., Ivanova, O.V. (2025) Deformation and fracture of PLA honeycomb samples under dynamic loading. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 106–116. doi: 10.17223/19988621/93/9

Введение

Сетчатые дизайнерские конструкции представляют высокий научный и практический интерес для создания изделий для автомобильной, аэрокосмической промышленности и медицины. Такие конструкции позволяют снизить общий вес изделия, а также могут являться армирующей частью композиционного материала. Это способствует созданию новых композитов с разными эксплуатационными свойствами. Среди различных видов ячеек в сетчатых структурах трижды периодические поверхности минимальной энергии (triply periodic minimal surface; TPMS) занимают особое место. Особенностью таких поверхностей является наличие

трансляционной симметрии в трех независимых направлениях и нулевой кривизны [1]. Размеры и форму сот (ячеек) в материалах с топологической TPMS структурой можно варьировать и, таким образом, управлять их механическими свойствами. Среди известных TPMS структур наиболее перспективными для армирующей основы признаются материалы со структурой типа алмазной поверхности Шварца (Schwarz Diamond Surface) [2]. Эта топологическая поверхность построена с помощью алгебраических действий над тригонометрическими функциями ($\sin$, $\cos$) [2]:

$$\sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(z) + \sin(x) \cdot \cos(y) \cdot \cos(z) + \\ + \cos(x) \cdot \sin(y) \cdot \cos(z) + \cos(x) \cdot \cos(y) \cdot \cos(z) = 0.$$

Получение изделий с TPMS структурой стало возможным с развитием аддитивных технологий, использующих 3D-принтеры. Сегодня 3D-печать позволяет создавать сложные композиционные материалы на металло-матричной или полимерной основе [3]. Материалы с TPMS структурой являются перспективными в различных отраслях промышленности в качестве замены монолитных изделий. Например, их можно использовать в качестве катализаторов химических реакций или для поглощений акустических волн [4–6]. Также легкие сетчатые изделия с TPMS структурой могут быть использованы в качестве амортизаторов ударной нагрузки в авиакосмических конструкциях [7, 8]. В работе [8] проведена оценка поглощения энергии сжатия полимерным образцом с TPMS структурой типа героида (Geroid), полученным с помощью 3D-принтера, в условиях статического сжатия при комнатной температуре. При этом исследований поведения материалов с TPMS структурой в условиях динамических (баллистических) нагрузок в литературе нами не обнаружено.

В работе [9] было показано, что для выбора оптимальной конструкции образца с TPMS структурой в качестве армирующей основы композиционного материала может быть использован биоразлагаемый PLA пластик. PLA пластик на основе полилактида ($C_3H_4O_3$) является известным дешевым природным материалом, который обладает хорошей термической стабильностью и пластичностью и широко используется для производства упаковок, одноразовой посуды, тары, а также медицинских штифтов и хирургических нитей, защитных пленок, ожоговых и раневых повязок [10, 11].

Цель настоящей работы – анализ деформации и разрушения после динамических (баллистических) испытаний PLA образцов с сетчатой топологической структурой трижды периодической поверхности минимальной энергии типа алмазной поверхности Шварца (Schwarz Diamond Surface), полученных с помощью 3D-принтера.

Экспериментальная часть

Для получения образцов с топологией типа Schwarz Diamond Surface была разработана программа для генерации G-Code по алгебраическому уравнению алмазной поверхности Шварца (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024617696). Сетчатые образцы размером $80 \times 60 \times 60$ мм были получены методом наплавления (Fusion Deposition Modeling; FDM) на 3D-принтере Picasso из нитевидного PLA термопластика (полилактид, Bestfilament, Россия) диаметром 1.75 мм. Физико-механические свойства нитевидного PLA термопластика белого цвета были следующими: плотность – 1.24 г/см^3 ; прочность – 62.63 МПа; пластичность – 4.43%; температура плавления – 210° ; модуль упругости – 3.2 ГПа.

Размер ячеек в сетчатых образцах варьировали от 1 до 5 мм (крупная сота). Для реализации технологии FDM-печати была предварительно построена трехмерная цифровая модель образцов в формате STL, затем для печати эта модель в компьютерной программе была разделена на слои, после чего был сгенерирован код (G-code), в котором были заложены все параметры печати и перемещения экструдера 3D-принтера. Для печати образцов были использованы следующие режимы 3D-принтера: диаметр сопла экструдера – 0.5 мм; высота слоя – 0.2 мм; ширина линии – 0.5 мм; температура экструдера – 215°C; температура подогрева стола – 60°C.

Плотность полученных образцов измеряли сравнением с эталонным образцом с плотностью 100% и того же объема, полученным также с помощью FDM-печати. Все образцы, включая плотный, были взвешены на аналитических весах. Полученное отношение масс сетчатых образцов и массы плотного образца составило 0.25, 0.5, 0.75. Плотность сетчатых образцов $\rho = \frac{m}{V}$ была рассчитана с учетом значений плотности полилактидной нити.

Для баллистических испытаний был использован экспериментальный стенд, состоящий из пневматической винтовки с предварительной накачкой Crossman 2100 classic, устройства для регистрации скорости полета сферического ударника (шарика) и приемного кармана для расположения тестируемого образца и улавливания шарика и осколков, при необходимости. Выстрелы производились стальным омедненным шариком диаметром 4.43 мм, массой 0.35 г, скорость полета шарика составила (220 ± 5) м/с. Время полета шарика определялось по времени начала спадов на соответствующих осциллограммах.

Исходные образцы (по два образца каждой плотности) были пронумерованы следующим образом: 1 – плотные, 2 – образцы средней плотности, 3 – образцы низкой плотности. Перед испытаниями все образцы были распилены на три равные части по 25 мм толщиной в плоскости, параллельной плоскости печатного стола. После распила поверхности распила были выровнены фрезерованием острым резцом на низкой скорости с медленной подачей. Отстрел был произведен по трем поверхностям двух образцов каждого типа:

1. По недеформированной поверхности нижнего слоя (гладкая, ровная, относительно более плотная поверхность), образцы пронумерованы дополнительно: -1, -2.

2. По недеформированной поверхности верхнего слоя (ровная, шершавая поверхность), образцы пронумерованы дополнительно: -3, -4.

3. По деформированной поверхности после обработки, образцы пронумерованы дополнительно: -5, -6.

После выстрела образцы распиливали для анализа особенностей процесса взаимодействия шарика с полимерной преградой.

Масса образцов до и после испытания измерялась на аналитических весах Ohaus AV114C Adventurer PRO (Альбштадт, Германия), обеспечивающих точность взвешивания 0.0001 г.

Образцы после распила были сфотографированы с приложенной измерительной линейкой с ценой деления 0.5 мм. На фотографиях были выделены границы кратера и края ударников, оцифрованная линейка использовалась для оценки глубины и диаметра кратеров. Размеры пикселей изображений после микроскопии составляли 0.04 мм, при этом положение границ кратеров и ударника опре-

делялось с точностью не хуже 2 пикселей, что дает погрешность определения глубины проникновения и диаметра кратера не хуже 0.08 мм.

Результаты исследования и обсуждение

На рис. 1 представлено оптическое изображение полученных с помощью 3D-принтера образцов. Плотность образцов составила: для группы 1 – 0.93 г/см³; для группы 2 – 0.62 г/см³; для группы 3 – 0.31 г/см³.

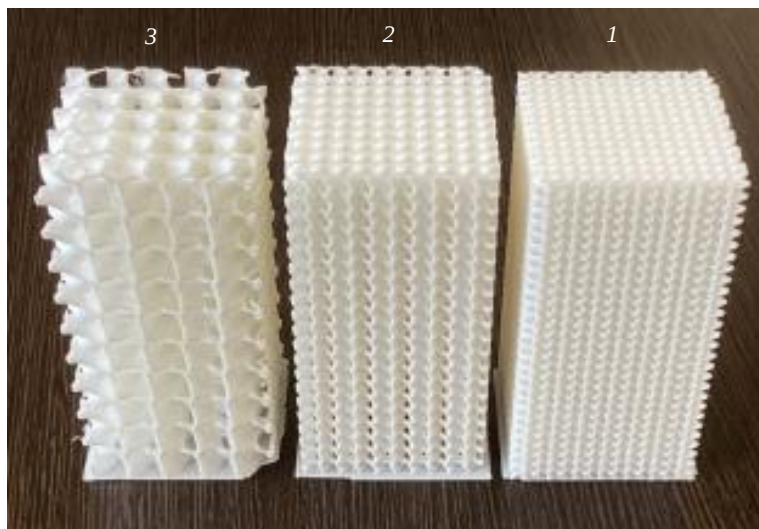


Рис. 1. PLA образцы со структурой типа Schwarz Diamond, оптический снимок
Fig. 1. Optical image of PLA samples with a Schwarz-Diamond surface structure

В таблице приведены сводные данные баллистических испытаний. Диаметр кратера указан максимальный, измеренный на лицевой поверхности образцов. Для образцов группы 1 глубина кратера указана максимальная, измеренная в наиболее глубокой точке кратера.

Результаты баллистических испытаний сетчатых образцов, скорость удара (220 ± 5) м/с

Группа образца	Начальная масса образца, M_0 , г	Масса после удара, M_1 , г	Изменение массы, dM , г	Глубина кратера, L_k , мм	Диаметр кратера, D_k , мм
1-1	83.3967	83.3033	0.0934	3.8	10.0
1-2	75.6170	75.5614	0.0556	3.8	9.0
1-3	76.2534	76.1476	0.1058	4.2	9.0
1-4	80.9533	80.8403	0.113	4.1	10.5
1-5	78.5875	78.4768	0.1107	4.5	10.0
1-6	78.0580	77.9552	0.1028	4.0	11.0
2-1	55.5642	55.4529	0.1113	9.4	3.5
2-2	53.6077	53.5980	0.0097	9.8	3.4
2-3	56.5033	56.4896	0.0137	9.6	3.5

Окончание таблицы

Группа образца	Начальная масса образца, M_0 , г	Масса после удара, M_1 , г	Изменение массы, dM , г	Глубина кратера, L_k , мм	Диаметр кратера, D_k , мм
2-4	50.6494	50.6249	0.0245	9.6	3.0
2-5	54.2106	54.1488	0.0618	10.0	3.0
2-6	53.3549	53.2653	0.0896	10.6	3.0
3-1	29.5593	29.4291	0.1302	—	пробитие
3-2	29.5530	29.3511	0.2019	—	пробитие
3-3	28.5868	28.4578	0.129	—	пробитие
3-4	27.9008	27.7616	0.1392	—	пробитие
3-5	27.3461	27.1580	0.1881	—	пробитие
3-6	25.6171	25.3519	0.2652	—	пробитие

На рис. 2–4 приведены электронно-микроскопические изображения образцов после баллистических испытаний. При ударном испытании образцов группы 1 (плотность 0.93 г/см^3) ударяющий шарик отскочил от преграды. В образцах после динамических испытаний обнаружено формирование неглубокого кратера (см. рис. 2, а). Глубина кольцевой области разрушения составляет примерно половину от максимальной глубины кратера. Максимальный диаметр центральной выемки немного меньше диаметра шарика (см. рис. 2, а). По форме центральный кратер близок к полусфере с неровной поверхностью из-за разрушения материала образца. Характер разрушения образцов группы 1 можно рассматривать как квази-хрупкий (см. рис. 2, б). На электронно-микроскопических снимках можно видеть хрупкий излом PLA волокон и их более вязкое деформирование.

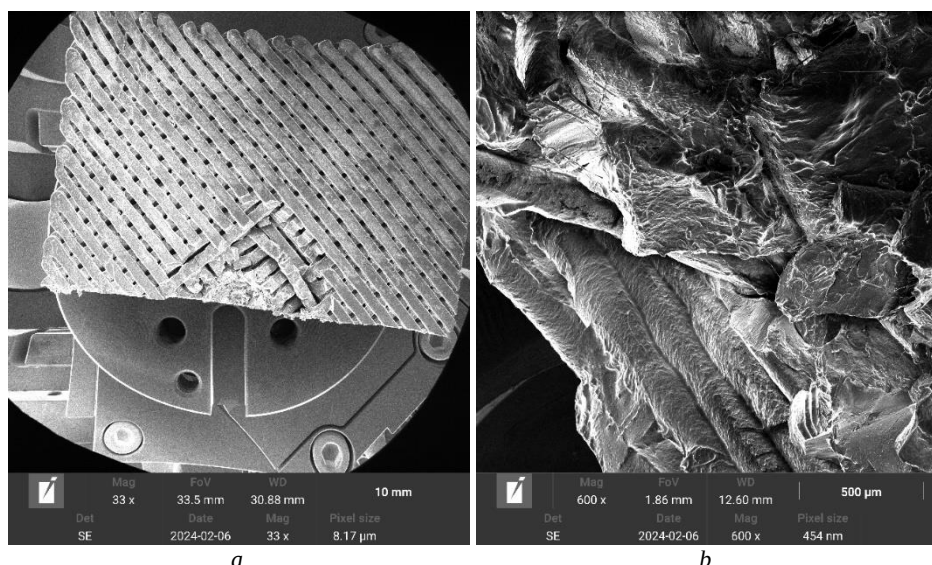


Рис. 2. Микроструктура образцов группы 1 после испытаний при скорости 220 м/с, СЭМ: общий вид зоны удара (а), центральная часть зоны удара (б)

Fig. 2. SEM images of the microstructure of samples (group 1) after ballistic tests at a velocity of 220 m/s: (a) general view of the impact zone and (b) central part of the impact zone

Для образцов группы 2 (плотность 0.62 г/см^3) (см. рис. 3, *a*) произошло внедрение шарика на глубину двух его диаметров. Образовавшийся в процессе внедрения шарика канал уже, чем диаметр самого шарика (3.0–3.5 мм при диаметре шарика 4.43 мм). Уменьшение ширины канала обусловлено вязким характером деформирования и разрушения материала образца после прохождения шарика. Также в канале отмечены частицы разрушенных PLA волокон. Характер разрушения образцов группы 2 меняется с хрупкого на вязкий. В структуре зоны разрушения хорошо видны вытянутые PLA волокна (см. рис. 3, *b*).

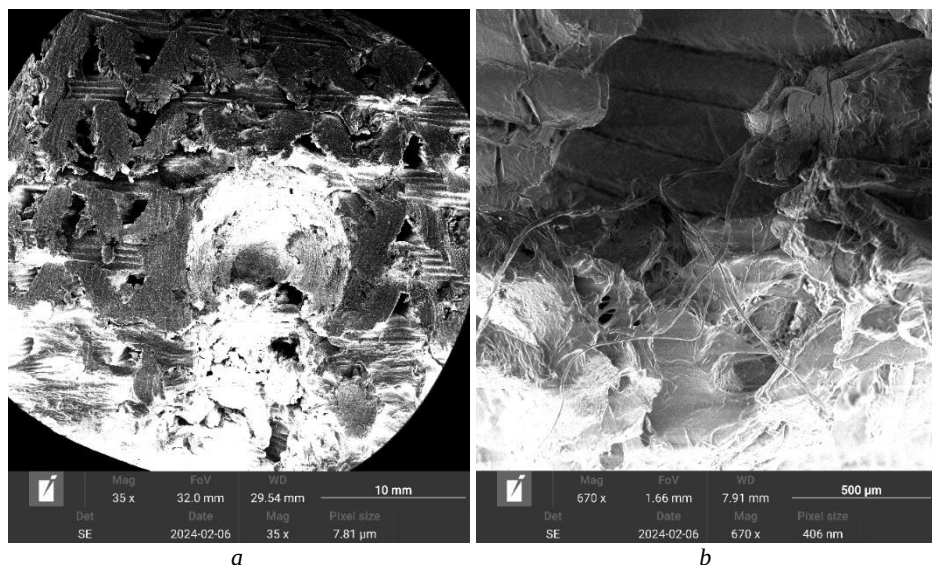


Рис. 3. Микроструктура образцов группы 2 после испытаний при скорости 220 м/с, СЭМ: общий вид зоны удара (*a*), нижняя, входная часть зоны удара (*b*)

Fig. 3. SEM images of the microstructure of samples (group 2) after ballistic tests at a velocity of 220 m/s: (*a*) general view of the impact zone and (*b*) bottom part of the impact zone

В образцах группы 3 (плотность 0.31 г/см^3) после испытаний со скоростью 220 м/с обнаружено сквозное пробитие образцов (см. рис. 4, *a*, канал указан стрелкой). Ширина канала, образованного шариком, превышает его диаметр. Характер разрушения образцов группы 3 также вязкий. На рис. 4, *b* показан участок внутри канала, где можно видеть вязкий скол стенок PLA ячейки.

Измеренный средний дефект массы образцов составил: для группы 1 0.097 г, для группы 2 0.052 г, для группы 3 0.18 г. Образцы группы 2 с плотностью 0.62 г/см^3 демонстрируют наименьшую потерю массы, что обусловлено застреванием разрушенного материала в канале. Для этих образцов при ударе разрушенный материал представляет собой мелкие крупинки пластика, часть из них вылетает из канала под действием вибрации и потока вытесняемого воздуха, часть осколков застревает в порах материала. Наибольший дефект массы наблюдается для образцов группы 3 (плотность 0.31 г/см^3 ; таблица).

Полученные в работе результаты позволяют выбрать наиболее оптимальный вариант размеров сот TPMS структуры, которым являются образцы группы 2.

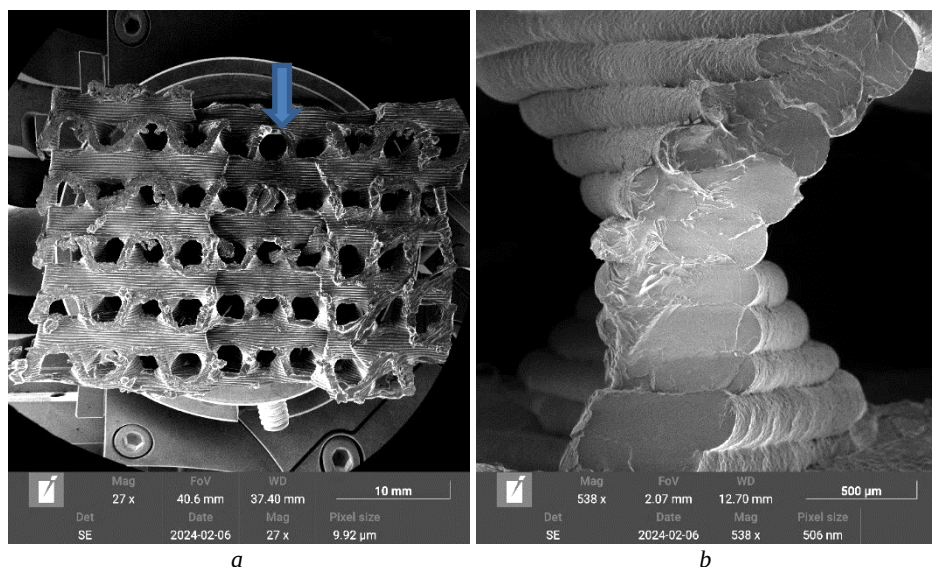


Рис. 4. Микроструктура образцов группы 3 после испытаний при скорости 220 м/с, СЭМ: канал в зоне разрушения (а), участок в центре канала (б)

Fig. 4. SEM images of the microstructure of samples (group 3) after ballistic tests at a velocity of 220 m/s: (a) channel in the fracture zone and (b) section in the channel center

Образцы с алмазной поверхностью Шварца с плотностью 0.62 г/см^3 (группа 2, 0.5 от плотности сплошного образца) показали хорошую устойчивость к удару и вязкий характер разрушения. Однако в целом она хуже, чем у известных демпферных материалов, таких как углепластики или стеклоткань, пропитанная смолой [11]. Тем не менее армирующий вариант группы 2 выбран вполне удачно и в дальнейшем может служить для создания композиционного материала с различным наполнением.

Заключение

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Проведены баллистические испытания сетчатых PLA образцов с различной плотностью, на основании которых выбран оптимальный вариант плотности сот (группа 2, 0.62 г/см^3 , 0.5 от плотности сплошного образца) TPMS структуры для композиционного материала.
2. Обнаружено, что характер деформирования и разрушения исследованных PLA образцов после баллистических испытаний зависит от плотности ячеек и с ростом плотности меняется с вязкого на хрупкий. Хрупкое разрушение наблюдается в образцах с плотностью 0.93 г/см^3 .

Список источников

1. Karcher H., Polthier K. Construction of triply periodic minimal surfaces // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1996. V. 354 (1715). P. 2077–2104. doi: 10.1098/rsta.1996.0093

2. Restrepo S., Ocampo S., Ram'irez J.A., Paucar C., Garc'ia C. Mechanical properties of ceramic structures based on Triply Periodic Minimal Surface (TPMS) processed by 3D printing // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2017. V. 935. Art. 012036. doi: 10.1088/1742-6596/935/1/012036
3. Промахов В.В., Матвеев А.Е., Шульц Н.А., Бахмат В.Р., Дронов Ф.Ю., Туранов Т.Э. Исследование структуры и свойств металломатричных композиционных материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 77. С. 125–139. doi: 10.17223/19988621/77/10
4. Guo Y., Rosa M.I.N., Ruzzene M. Topological surface states in a gyroid acoustic crystal // *Adv. Sci.* 2023. V. 10 (6). Art. 2205723. doi: 10.1002/advs.202205723
5. Arenas J.P., Crocker M.J. Recent trends in porous sound-absorbing materials // *Sound and Vibration*. 2010. V. 44 (7). P. 12–17.
6. Li X., Chua J.W., Yu X., Li Z., Zhao M., Wang Z., Zhai W. 3D-printed lattice structures for sound absorption: Current progress, mechanisms and models, structural-property relationships, and future outlook // *Adv. Sci.* 2024. V. 11. Art. 2305232. doi: 10.1002/advs.202305232
7. Дьяченко С.В., Лебедев Л.А., Сычев М.М., Нефедова Л.А. Физико-механические свойства модельного материала с топологией трижды периодических поверхностей минимальной энергии типа гироид в форме куба // *Журнал технической физики*. 2018. Т. 88, вып. 7. С. 1014–1017. doi: 10.21883/JTF.2018.07.46169.2555
8. Abueidda D.W., Elhebeary M., Shiang C.-S. (Andrew), Pang S., Abu Al-Rub R.K., Jasiuk I.M. Mechanical properties of 3D printed polymeric gyroid cellular structures: Experimental and finite element study // *Materials and Design*. 2019. V. 165. Art. 107597. doi: 10.1016/j.matdes.2019.107597
9. Богданова О.И., Седуш Н.Г., Овчинникова Т.Н., Белоусов С.И., Поляков Д.К., Чвалун С.Н. Полилактид – биоразлагаемый биосовместимый полимер на основе растительного сырья // *Экология и промышленность России*. 2010. № 5. С. 18–23.
10. Kulkarni R.K., Pani K.C., Neuman C., Leonard F. Polylactic acid for surgical implants // *Arch. Surg.* 1966. V. 93. P. 839–843. doi: 10.1001/archsurg.1966.01330050143023
11. Туренко А.Н., Ужва А.В., Сергиенко А.В. Результаты исследований поглощения энергии при ударе изделиями из композитных материалов // *Вестник ХНАДУ*. 2013. Вып. 60. С. 90–94.

References

1. Karcher H., Polthier K. (1996) Construction of triply periodic minimal surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 54(1715). pp. 2077–2104. doi: 10.1098/rsta.1996.0093
2. Restrepo S., Ocampo S., Ramirez J.A., Paucar C., Garcia C. (2017) Mechanical properties of ceramic structures based on Triply Periodic Minimal Surface (TPMS) processed by 3D printing. *Journal of Physics: Conference Series*. 935. Article 012036. doi: 10.1088/1742-6596/935/1/012036
3. Promakhov V.V., Matveev A.E., Schultz N.A., Bakhmat V.R., Dronov F.Yu., Turanov T.E. (2022) Issledovanie struktury i svoystv metallomatrichnykh kompozitsionnykh materialov, poluchennykh metodom pryamogo lazernogo vyrashchivaniya [A study of the structure and properties of the metal matrix composite materials obtained by a method of direct laser growing]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 125–139. doi: 10.17223/19988621/77/10
4. Guo Y., Rosa M.I.N., Ruzzene M. (2022) Topological surface states in a gyroid acoustic crystal. *Advanced Science*. 10(6). Article 2205723. doi: 10.1002/advs.202205723

5. Arenas J.P., Crocker M.J. (2010) Recent trends in porous sound-absorbing materials. *Sound and Vibration*. 44(7). pp. 12–17.
6. Li X., Chua J.W., Yu X., Li Z., Zhao M., Wang Z., Zhai W. (2024) 3D-printed lattice structures for sound absorption: Current progress, mechanisms and models, structural-property relationships, and future outlook. *Advanced Science*. 11(4). Article e2305232. doi: 10.1002/advs.202305232
7. D'yachenko S.V., Lebedev L.A., Sychev M.M., Nefedova L.A. (2018) Physicomechanical properties of a model material in the form of a cube with the topology of Triply Periodic Minimal Surfaces of the gyroid type. *Technical Physics*. 63. pp. 984–987. doi: 10.1134/S1063784218070101
8. Abueidda D.W., Elhebeary M., Shiang C.-S. (Andrew), Pang S., Abu Al-Rub R.K., Jasiuk I.M. (2019) Mechanical properties of 3D printed polymeric gyroid cellular structures: Experimental and finite element study. *Materials and Design*. 165. Article 107597. doi: 10.1016/j.matdes.2019.107597
9. Bogdanova O.I., Sedush N.G., Ovchinnikova T.N., Belousov S.I., Polyakov D.K., Chvalun S.N. (2010) Polilaktid – biorazlagaeemyy biosovmestimyy polimer na osnove rastitel'nogo syr'ya [Polylactide, a biodegradable, biocompatible polymer based on plant raw materials]. *Ekologiya i promyshlennost' Rossii – Ecology and Industry of Russia*. 5. pp. 18–23.
10. Kulkarni R.K., Pani K.C., Neuman C., Leonard F. (1966) Polylactic acid for surgical implants. *Archives of Surgery*. 93. pp. 839–843. doi: 10.1001/archsurg.1966.01330050143023
11. Turenko A.N., Uzhva A.V., Sergienko A.V. (2013) Rezultaty issledovaniy pogloshcheniya energii pri udare izdeliyami iz kompozitnykh materialov [Research results concerning impact energy absorbing by composite products]. *Vestnik KhNADU – Bulletin of Kharkov National Automobile and Highway University*. 60. pp. 90–94.

Сведения об авторах:

Казанцева Наталия Васильевна – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник Института физики металлов Уральского отделения РАН им. М.Н. Михеева (Екатеринбург, Россия). E-mail: kazantseva@imp.uran.ru

Онищенко Анатолий Олегович – младший научный сотрудник Института физики металлов Уральского отделения РАН им. М.Н. Михеева (Екатеринбург, Россия). E-mail: tolya_onishenko@mail.ru

Зелепугин Сергей Алексеевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Томского научного центра Сибирского отделения РАН; профессор Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: szel@yandex.ru

Черепанов Роман Олегович – кандидат физико-математических наук, ведущий инженер Томского научного центра Сибирского отделения РАН (Томск, Россия). E-mail: rcherepanov82@gmail.com

Иванова Оксана Владимировна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Томского научного центра Сибирского отделения РАН (Томск, Россия). E-mail: o.ivanova@hq.tsc.ru

Information about the authors:

Kazantseva Nataliya V. (Doctor of Physics and Mathematics, Principal Researcher, M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the RAS, Yekaterinburg, Russian Federation). E-mail: kazantseva@imp.uran.ru

Onishchenko Anatoliy O. (Junior Researcher, M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the RAS, Yekaterinburg, Russian Federation). E-mail: tolya_onishenko@mail.ru

Zelepugin Sergey A. (Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the RAS, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: szel@yandex.ru

Cherepanov Roman O. (Candidate of Physics and Mathematics, Leading Engineer, Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the RAS, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rcherepanov82@gmail.com

Ivanova Oksana V. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the RAS, Tomsk, Russian Federation). E-mail: o.ivanova@hq.tsc.ru

Статья поступила в редакцию 25.06.2024; принята к публикации 07.02.2025

The article was submitted 25.06.2024; accepted for publication 07.02.2025

Научная статья

УДК 521.1, 521.182

doi: 10.17223/19988621/93/10

Исследование стохастических свойств средневисотной области движения спутников глобальных навигационных систем

Эдуард Дмитриевич Кузнецов¹, Екатерина Сергеевна Смагина²,
Иван Сергеевич Жмакин³, Тавриз Ринатович Уразаев⁴

^{1, 2, 3, 4} *Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*

¹ *eduard.kuznetsov@urfu.ru*

² *Ekaterina.Smagina@urfu.me*

³ *zhmakin01@bk.ru*

⁴ *urazaev11@list.ru*

Аннотация. Стохастические свойства средневисотной области движения спутников глобальных навигационных систем исследованы для малых и умеренных отношений площади миделева сечения к массе на основе результатов численного моделирования. Стохастические свойства движения анализировались с использованием интегральной автокорреляционной функции. При увеличении начальных значений наклона и большой полуоси орбиты проявления стохастической эволюции, обусловленной лунно-солнечными возмущениями, увеличиваются. Оценки интегральной автокорреляционной функции существенно зависят от начальной ориентации плоскости орбиты по отношению к направлению на Солнце.

Ключевые слова: глобальные навигационные спутниковые системы, отношение площади миделева сечения к массе, стохастическое движение, орбитальная эволюция, интегральная автокорреляционная функция

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, тема № FEUZ-2020-0038.

Для цитирования: Кузнецов Э.Д., Смагина Е.С., Жмакин И.С., Уразаев Т.Р. Исследование стохастических свойств средневисотной области движения спутников глобальных навигационных систем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 117–130. doi: 10.17223/19988621/93/10

A study of stochastic properties of the mid-altitude region of motion of global navigation system satellites

Eduard D. Kuznetsov¹, Ekaterina S. Smagina²,
Ivan S. Zhmakin³, Tavriz R. Urazaev⁴

^{1, 2, 3, 4} Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation

¹ eduard.kuznetsov@urfu.ru

² Ekaterina.Smagina@urfu.me

³ zhmakin01@bk.ru

⁴ urazaev11@list.ru

Abstract. The study of the stochastic properties of the mid-altitude region of motion of global navigation system satellites at low and moderate area-to-mass ratios (0.001, 0.01, and 0.1 m²/kg) is performed based on the numerical simulation results. The behavior of the integrated autocorrelation functions for the semi-major axis and Kholshchevnikov metric is considered. The Kholshchevnikov metric is specified in the three-dimensional factor space of the positional orbit elements. The initial orbits are assumed to be close to circular orbits with an eccentricity of 0.0001. The initial inclination is chosen according to the semi-major axis of the orbit: 64.8° near the GLONASS system, 55° near the GPS and BeiDou systems, and 56° near the Galileo system. The initial longitude of the ascending node is varied with a 90° step. The dependence of the integrated autocorrelation function on the initial semi-major axis of object's orbit is analyzed. The occurrence of stochastic evolution grows with an increase in the initial inclination and semi-major axis of the orbit due to luni-solar perturbations. The attributes of stochastic behavior are revealed even at small area-to-mass ratios corresponding to the satellites. It can be concluded that the estimates of the integrated autocorrelation function significantly depend on the initial orientation of the orbit plane with respect to the direction to the Sun. This should be considered when selecting orbits for the disposal of deactivated satellites of global navigation systems.

Keywords: global navigation satellite systems, area-to-mass ratio, stochastic motion, orbital evolution, integrated autocorrelation function

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FEUZ-2020-0038).

For citation: Kuznetsov, E.D., Smagina, E.S., Zhmakin, I.S., Urazaev, T.R. (2025) A study of stochastic properties of the mid-altitude region of motion of global navigation system satellites. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 117–130. doi: 10.17223/19988621/93/10

Введение

Исследование стохастической эволюции объектов, движущихся вблизи орбит глобальных навигационных спутниковых систем, представляет интерес для решения проблемы космического мусора, поскольку навигационные спутники, завершившие работу, остаются вблизи области движения рабочих спутников. Актуаль-

ность данной проблемы связана с тем, что постепенное разрушение завершивших работу спутников может приводить к появлению объектов, имеющих большую парусность (отношение площади миделева сечения A к массе m), что ведет к росту возмущений, обусловленных давлением солнечного излучения, так как для объектов за пределами атмосферы Земли световое давление является основным негравитационным возмущающим фактором.

В настоящее время ведутся активные исследования динамических свойств околоземного космического пространства. Например, в международном проекте ReDSHIFT выполняется динамическое картографирование области околоземного пространства от 400 км над поверхностью Земли до геостационарной и супергеосинхронных орбит [1] с целью анализа устойчивости орбит и их стохастических свойств. В НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета (НИИ ПММ ТГУ) изучаются резонансные и стохастические свойства низких, средних и высоких орбит (см., напр.: [2–5]). Сохраняется интерес к детальному исследованию отдельных областей околоземного космического пространства, например к средним и высоким орбитам, по которым происходит движение спутников глобальных навигационных систем [6–10]. При исследовании орбитальной эволюции объектов на интервалах десятков и сотен лет необходимо учитывать, что характер эволюции орбит фрагментов космического мусора может становиться стохастическим за счет влияния резонансов средних движений и вековых резонансов [6], а при росте парусности вероятность проявления стохастических свойств увеличивается.

В настоящей работе новизна подхода, направленного на изучение стохастических свойств движения, связана с использованием интегральной автокорреляционной функции [11]. Этот относительно простой и эффективный метод был успешно применен для исследования стохастической эволюции объектов в окрестности геосинхронных орбит [11] более 15 лет назад, в настоящее время он практически не используется.

Цель настоящей работы – исследовать стохастические свойства движения в области средневысотных орбит глобальных навигационных систем на основе результатов численного моделирования, используя интегральные автокорреляционную функцию для большой полуоси и метрики Холшевникова [12].

Методика исследования

Стохастические свойства движения исследовались на основе результатов численного моделирования с помощью численной модели движения искусственных спутников Земли, разработанной в НИИ ПММ ТГУ [10]. Мы использовали модель возмущающих сил, которая включает основные возмущающие факторы: влияние гравитационного поля Земли (в модели гравитационного потенциала Земли EGM96 учитывались гармоники до 27-го порядка и степени включительно); притяжение Луны и Солнца в приближении точечных масс; приливы в теле Земли; прямое давление солнечного излучения (модель сферического объекта с однородной диффузно отражающей поверхностью и коэффициентом отражения $k = 1.44$) с учетом тени Земли; эффект Пойнтинга–Робертсона; сопротивление атмосферы в случае, если орбита спутника проходит через атмосферу Земли. Уравнения движения интегрируются методом Эверхарта 19-го порядка.

Мы рассматривали области около средневысотных орбит спутников глобальных навигационных систем ГЛОНАСС, GPS, BeiDou и Galileo. Начальные значения большой полуоси орбиты a_0 варьировали от 25 400 км (ниже орбит ГЛОНАСС) до 30 000 км (выше орбит Galileo) с шагом 10 км. Начальное значение наклона орбиты i_0 полагалось равным 63.4° для $a_0 = 25\,400\text{--}25\,950$ км (окрестность орбит системы ГЛОНАСС), $i_0 = 55^\circ$ для $a_0 = 25\,950\text{--}29\,040$ км (окрестность орбит систем GPS и средневысотного сегмента BeiDou), $i_0 = 56^\circ$ для $a_0 = 29\,040\text{--}30\,000$ км (окрестность орбит системы Galileo). Начальное значение эксцентриситета орбиты e_0 было выбрано равным 0.0001, что соответствует номинальным эксцентриситетам орбит навигационных спутников. Для долготы восходящего узла Ω_0 рассматривались четыре начальных значения: 0, 90, 180, 270° . Начальное значение аргумента перигея g_0 положено равным 270° . Начальная эпоха $T_0 = 00^{\text{h}} 00^{\text{m}} 00^{\text{s}}$ 21.03.1998. Рассматривались значения парусности $A/m = 0.001, 0.01$ и 0.1 м²/кг. Эволюция при более высоких значениях парусности будет исследоваться в следующих работах. Интервал интегрирования составлял 200 лет. Длительность интервала определялась в первую очередь необходимостью надежного выявления признаков стохастического движения.

Стохастические свойства движения анализировались с помощью интегральной автокорреляционной функции W [11], определяемой как среднее значение квадратов последовательности автокорреляционных функций A_k по смешанным моментам:

$$A_k = \frac{\sum_{i=0}^{N-k} (r_i - \bar{r}_i)(r_{i+k} - \bar{r}_{i+k})}{\left(\sum_{i=0}^{N-k} (r_i - \bar{r}_i)^2 \sum_{i=0}^{N-k} (r_{i+k} - \bar{r}_{i+k})^2 \right)^{1/2}} \quad (1)$$

где $\bar{r}_s = (s+1)^{-1} \sum_{i=0}^s r_i$ – среднее значение s -элементного подмножества равномерного временного ряда

$$r = \{r_i : r_i = r(t_0 + ih), \quad 0 \leq i \leq N\}, \quad (2)$$

где t_0 – начальный момент, h – постоянный шаг, N – число членов временного ряда. При обработке результатов интегрирования на интервале 200 лет число членов N составляло 7 307, шаг временного ряда h (шаг выдачи результатов) равнялся 10 сут.

Для вычисления интегральной автокорреляционной функции W использовалось ее представление в виде суммы

$$W(J_K) = \frac{1}{J_K} \left(1 + \sum_{k=1}^K (J_k - J_{k-1}) A_{J_k}^2 \right), \quad (3)$$

где $K = [B(\lg(N)/\lg(2))]$ – максимальное рассматриваемое значение k , на котором завершается суммирование по сдвигам аргумента автокорреляционной функции A_k , B – базовое число, $[z]$ – целая часть числа z . Параметр $J_k = j_K - j_{K-k}$ в формуле (3) задает сдвиг аргумента автокорреляционной функции A_k на последовательности экспоненциально распределенных точек:

$$j_0 = 0, \quad j_1 = 1, \quad \dots, \quad j_k = j_{k-1} + 2^{[(k-1)/B]}, \quad k = 0, 1, \dots, K.$$

Если $B = 1$, то получается последовательность точек $\{0, 1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$. При больших значениях B точки выборки группируются в последовательности из B точек, каждая последующая последовательность в два раза реже предыдущей.

Свойства интегральной автокорреляционной функции W (3) позволяют выявлять и анализировать хаотическое поведение системы. В случае постоянного временного ряда функция W асимптотически стремится к 1. Если равномерный временной ряд представим периодической функцией типа синус, функция W стремится к 0.5. Для других периодических и квазипериодических временных рядов функция W изменяется в небольших пределах около 0.5. Для хаотических траекторий интегральная автокорреляционная функция W асимптотически стремится к нулю.

Оценка функции W , получаемая по формуле (3), зависит от выбора значения базового числа B . Была выполнена серия численных экспериментов на интервале времени 200 лет, в которых значение B варьировало от 50 до 500. В качестве оптимального было выбрано значение базового числа $B = 100$, при котором интегральная автокорреляционная функция W на рассматриваемом интервале времени оценивается надежно при минимальных затратах вычислительных ресурсов.

В настоящей работе мы рассматривали поведение двух интегральных автокорреляционных функций: W_a для большой полуоси орбиты a и W_{p_5} для метрики Холшевникова p_5 [12] между текущей (индекс 2) и начальной (индекс 1) орбитами. Метрика Холшевникова p_5 (обозначение метрики p_5 соответствует соглашению, принятому в работе [12]) вычисляется на основе позиционных элементов орбиты (большая полуось a , эксцентриситет e , наклон i):

$$p_5^2 = (1 + e_1^2) p_1 + (1 + e_2^2) p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} [e_1 e_2 + \cos(i_1 - i_2)], \quad (4)$$

следовательно, функция W_{p_5} характеризует стохастические свойства орбитально-го эллипса без учета движения узлов и перигея.

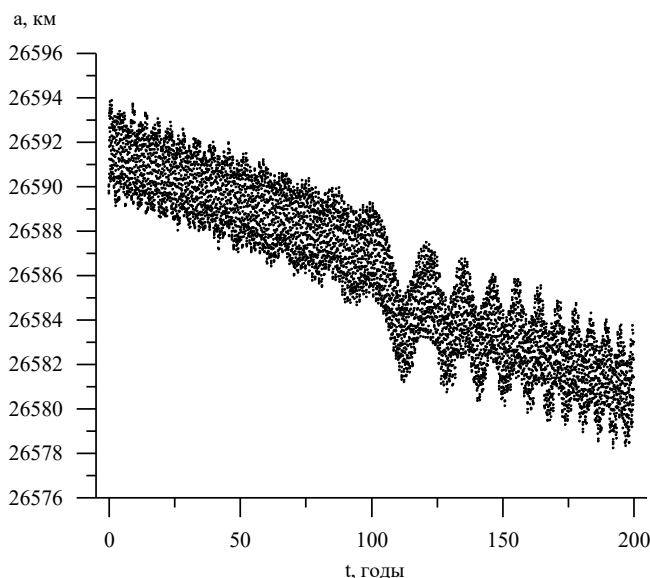


Рис. 1. Эволюция большой полуоси орбиты вблизи области резонанса 1/2 ($a_0 = 26\,590$ км, $\Omega_0 = 0^\circ$, $A/m = 1$ м²/кг)

Fig. 1. Evolution of a semi-major axis of the orbit near the resonance region 1/2 ($a_0 = 26\,590$ km, $\Omega_0 = 0^\circ$, $A/m = 1$ м²/кг)

Стохастические эффекты в первую очередь проявляются в угловых элементах орбиты: аномалиях, аргументах и долготах, что приводит к частичной потере информации о положении объекта, ориентации конического сечения и плоскости орбиты. Однако для анализа области возможных движений существенную роль играют размер, форма и наклон орбиты, описываемые позиционными элементами. Именно поэтому в данной работе основное внимание уделяется интегральным автокорреляционным функциям большой полуоси W_a и метрики Холшевникова W_{p5} . Пример проявления стохастичности в большой полуоси орбиты объекта вблизи области резонанса $1/2$ (система GPS) показан на рис. 1. Большое отношение миделева сечения к массе $A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$ приводит к вековому уменьшению большой полуоси орбиты a . Примерно через 100 лет объект проходит через область резонанса $1/2$, в результате чего происходит качественное изменение характера эволюции.

Результаты и их обсуждение

На рис. 2 и 3 соответственно показаны зависимости оценок интегральных автокорреляционных функций W_a и W_{p5} от начальной большой полуоси a для начальной долготы восходящего узла $\Omega_0 = 0^\circ$ при парусности $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$. Значения больших полуосей, соответствующих номинальным средневисотным орбитам спутников глобальных навигационных систем ГЛОНАСС, GPS, BeiDou, Galileo, показаны штриховыми линиями. На рис. 2 и 3 объединены результаты, полученные при различных начальных наклонах орбит i_0 . Границы начальных больших полуосей орбит a , соответствующих заданным начальным наклонам i_0 , показаны пунктирными линиями.

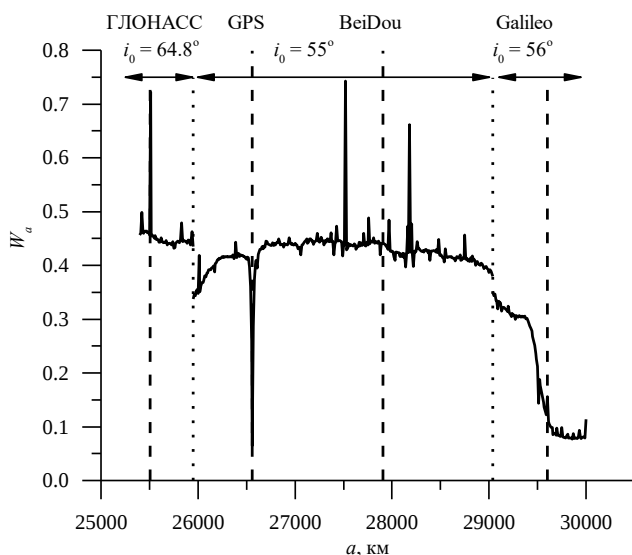


Рис. 2. Зависимость интегральной автокорреляционной функции для большой полуоси W_a от начального значения большой полуоси a ($\Omega_0 = 0^\circ$, $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$)

Fig. 2. Dependence of the integrated autocorrelation function for the semi-major axis W_a on the initial semi-major axis a ($\Omega_0 = 0^\circ$, $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$)

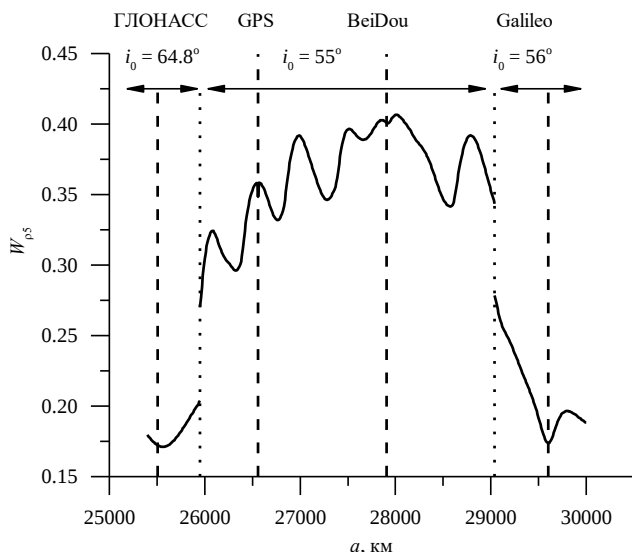


Рис. 3. Зависимость интегральной автокорреляционной функции для метрики Холшевникова W_{p5} от начального значения большой полуоси a ($\Omega_0 = 0^\circ$, $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$)

Fig. 3. Dependence of the integrated autocorrelation function for the Kholshchevnikov metric W_{p5} on the initial semi-major axis a ($\Omega_0 = 0^\circ$, $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$)

Функция W_a характеризуется наличием локальных экстремумов большой амплитуды для некоторых значений большой полуоси (см. рис. 2): например, максимум в окрестности номинального значения большой полуоси системы ГЛОНАСС и минимум для системы GPS. В обоих случаях присутствуют тессеральные резонансы: резонанс высокого порядка 8:17 для системы ГЛОНАСС и резонанс низкого порядка 1:2 для GPS. В области системы GPS даже при малом значении парусности $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$, которое сопоставимо с парусностью спутников NAVSTAR (см, напр.: [13]), проявляется стохастический характер эволюции большой полуоси орбиты. При начальных значениях большой полуоси от 25 500 до 29 000 км функция W_a колеблется в пределах от 0.5 до 0.35 (исключая несколько локальных экстремумов), что свидетельствует о регулярном характере эволюции большой полуоси орбиты. В области движения спутников Galileo функция W_a быстро убывает до значений менее 0.1, что свидетельствует о нарастании стохастичности за счет влияния лунно-солнечных возмущений.

Изменение функции W_{p5} более плавное (см. рис. 3). Экстремумы функции располагаются вблизи (для ГЛОНАСС) или совпадают (для GPS, BeiDou, Galileo) со значениями больших полуосей орбит спутников глобальных навигационных систем. Для системы ГЛОНАСС значение функции $W_{p5} \approx 0.17$, что указывает на проявление стохастических свойств, в отличие от $W_a \approx 0.73$, указывающего на малые изменения большой полуоси. Это связано с ростом стохастичности в эволюции эксцентриситета и наклона при большом начальном значении последнего. Для системы GPS функция W_{p5} имеет острый локальный минимум аналогично W_a . В области движения спутников систем GPS и BeiDou значения функции W_{p5} лежат в пределах от 0.28 до 0.41, что указывает на регулярный характер эволюции. Это согласуется с выводом, полученным на основе анализа поведения функции W_a .

В области системы Galileo функция W_{p5} быстро убывает и достигает минимума $W_{p5} \approx 0.175$, что говорит о нарастании стохастичности, обусловленной лунно-солнечными возмущениями, как и в случае функции W_a . Все рассматриваемые глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС) являются резонансными: ГЛОНАСС – 8:17, GPS – 1:2, BeiDou – 7:13, Galileo – 10:17. Для всех систем наличие резонансов ведет к формированию локальных минимумов функции W_{p5} , в отличие от функции W_a .

На рис. 4 и 5 даны зависимости оценок интегральных автокорреляционных функций W_a и W_{p5} от начальной большой полуоси a для области ГЛОНАСС при варьировании начальной долготы восходящего узла: $\Omega_0 = 0, 90, 180, 270^\circ$ и парусности $A/m = 0.001, 0.01, 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$.

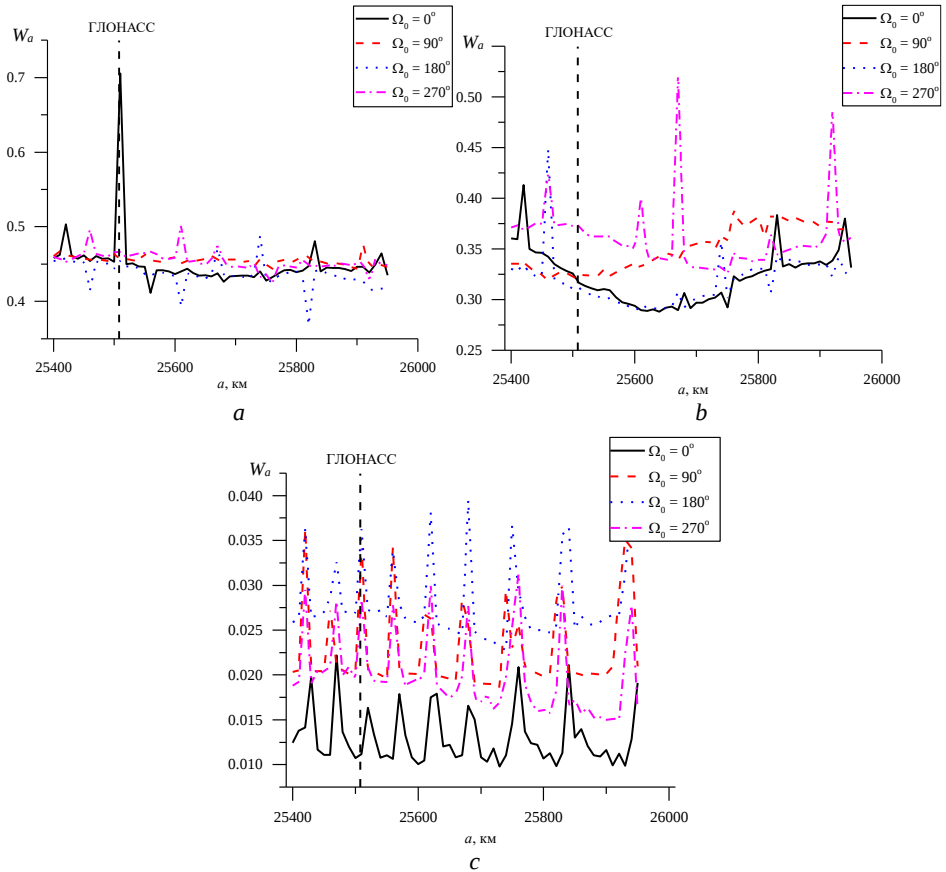


Рис. 4. Зависимость интегральной автокорреляционной функции для большой полуоси W_a от начальной большой полуоси a для области ГЛОНАСС при различных начальных долготах восходящего узла Ω_0 и отношениях A/m : $a - A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$, $b - A/m = 0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$, $c - A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$

Fig. 4. Dependence of the integrated autocorrelation function for the semi-major axis W_a on the initial semi-major axis a for the GLONASS region at different initial longitudes of the ascending node Ω_0 and area-to-mass ratios A/m : $A/m = (a) 0.001, (b) 0.01, \text{ and } (c) 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$

Как видно из рис. 4, при варьировании начальной долготы восходящего узла Ω_0 значения функции W_a меняются слабо, экстремумы изменяют свой вид и положение, но большинство колебаний функции W_a остается на уровне фоновых изменений. Отметим, что максимум функции W_a при значениях, равном номинальному значению большой полуоси орбиты системы ГЛОНАСС, присутствует только в одном варианте при $\Omega_0 = 0^\circ$ и $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$. При увеличении парусности A/m от 0.001 до $0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$, значение функции W_a в среднем уменьшается на 0.1, достигая в минимуме 0.3, т.е. происходит нарастание стохастичности. Также с ростом парусности увеличивается разброс значений функции W_a при различных начальных долготах восходящего узла Ω_0 . При парусности $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$ интегральная автокорреляционная функция W_a в среднем уменьшается с ростом большой полуоси a . При $A/m = 0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$ поведение функции W_a зависит от начальной долготы восходящего узла Ω_0 . При $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$ значения функции W_a изменяются в пределах от 0.01 до 0.04, что указывает на проявление стохастичности в поведении большой полуоси орбиты a , связанное с влиянием светового давления. Отметим, что в этом случае зависимость функции W_a от начальной большой полуоси a имеет квазипериодический характер для всех рассмотренных начальных значений долготы восходящего узла Ω_0 .

Интегральная автокорреляционная функция W_{p5} при значениях парусности $A/m = 0.001$ и $0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$ изменяется в пределах от 0.12 до 0.35 (см. рис. 5, а, б) в зависимости от начальной долготы восходящего узла Ω_0 . При $\Omega_0 = 0, 90, 270^\circ$ стохастическое поведение проявляется наиболее сильно. Сравнение с функцией W_a (см. рис. 4, а, б) указывает, что стохастическое поведение связано с особенностями эволюции эксцентриситета орбит (рис. 6) под влиянием возмущений от Луны и Солнца. На рассматриваемом интервале времени эволюция эксцентриситета не имеет доминирующей периодической составляющей, а представляется нелинейной возрастающей функцией, что приводит к малым значениям функции W_{p5} . Появление выраженной периодической компоненты при росте парусности (см. рис. 6, б при $\Omega_0 = 270^\circ$) приводит к росту значений функции W_{p5} . Рост парусности до значения $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$ (см. рис. 5, с) приводит к увеличению W_{p5} . При начальных значениях $\Omega_0 = 0$ и 270° движение становится регулярным, а при $\Omega_0 = 90$ и 180° проявления стохастичности уменьшаются. Это может быть связано с доминированием возмущений от светового давления в эксцентриситете и наклоне над лунно-солнечными возмущениями.

На рис. 7 и 8 показаны зависимости интегральных автокорреляционных функций W_a и W_{p5} от начальной большой полуоси a для областей GPS и BeiDou при варьировании начальной долготы восходящего узла: $\Omega_0 = 0, 90^\circ$ и парусности $A/m = 0.001, 0.01, 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$. Как видно из рис. 7, изменение функции W_a для значений $\Omega_0 = 0$ и 90° происходит схожим образом. При $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$ эволюция большой полуоси a становится стохастической. Зависимости функции W_{p5} от большой полуоси a при $\Omega_0 = 0^\circ$ для значений парусности $A/m = 0.001, 0.01, 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$ практически совпадают (см. рис. 8, а). При $\Omega_0 = 90^\circ$ для значений парусности $A/m = 0.001$ и $0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$ эволюция становится стохастической (см. рис. 8, б), хотя для $A/m = 0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$ характер эволюции близок к регулярному. Это связано с особенностями эволюции эксцентриситета орбиты, аналогичными приведенным на рис. 6. Отметим, что при $\Omega_0 = 90^\circ$ и $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$ вблизи орбиты GPS формируются условия для регулярной эволюции.

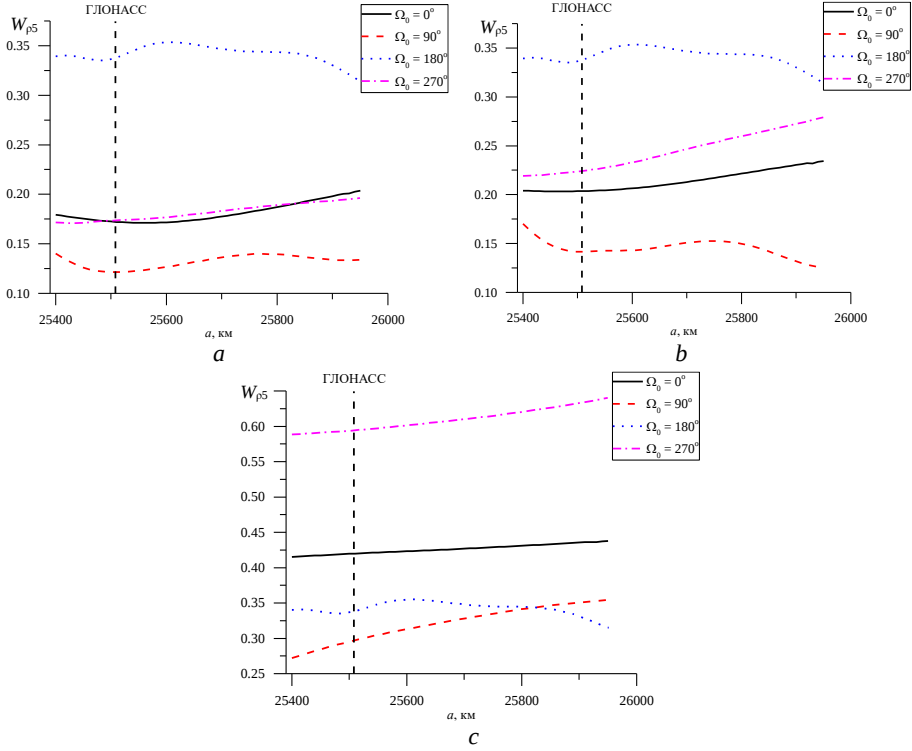


Рис. 5. Зависимость интегральной автокорреляционной функции для метрики Холшевникова W_{p5} от начальной большой полуоси a для области ГЛОНАСС при различных начальных долготах восходящего узла Ω_0 и отношениях A/m :

$a - A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$, $b - A/m = 0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$, $c - A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$

Fig. 5. Dependence of the integrated autocorrelation function for the Kholshchevnikov metric W_{p5} on the initial semi-major axis a for the GLONASS region at different initial longitudes of the ascending node Ω_0 and area-to-mass ratios A/m : $A/m = (a) 0.001, (b) 0.01, \text{ and } (c) 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$

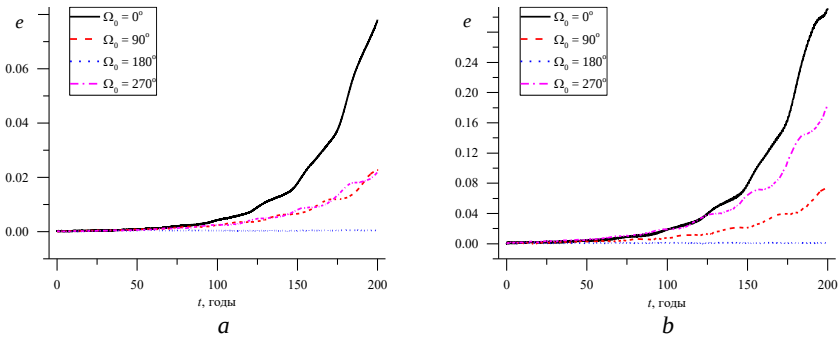


Рис. 6. Эволюция эксцентриситета орбиты для начального значения большой полуоси $a_0 = 25\,510 \text{ км}$ при различных начальных долготах восходящего узла Ω_0 и отношениях A/m : $a - A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$, $b - A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$

Fig. 6. Evolution of the orbital eccentricity for the initial semi-major axis $a_0 = 25\,510 \text{ км}$ at different initial longitudes of the ascending node Ω_0 and area-to-mass ratios A/m : $A/m = (a) 0.001 \text{ and } (b) 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$

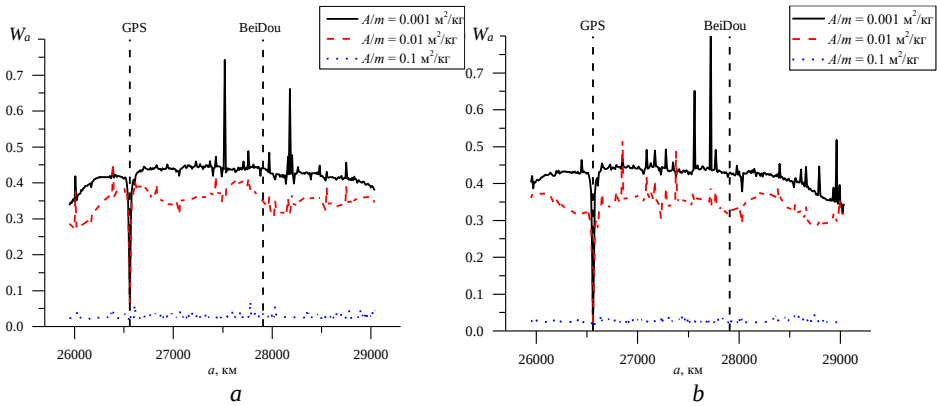


Рис. 7. Зависимость интегральной автокорреляционной функции для большой полуоси W_a от начальной большой полуоси a для областей GPS и BeiDou при различных отношениях A/m и начальных долготах восходящего узла Ω_0 : $a - \Omega_0 = 0^\circ$, $b - \Omega_0 = 90^\circ$

Fig. 7. Dependence of the integrated autocorrelation function for the semi-major axis W_a on the initial semi-major axis a for GPS and BeiDou regions at different area-to-mass ratios A/m and initial longitudes of the ascending node Ω_0 : $\Omega_0 = (a) 0^\circ$ and $(b) 90^\circ$

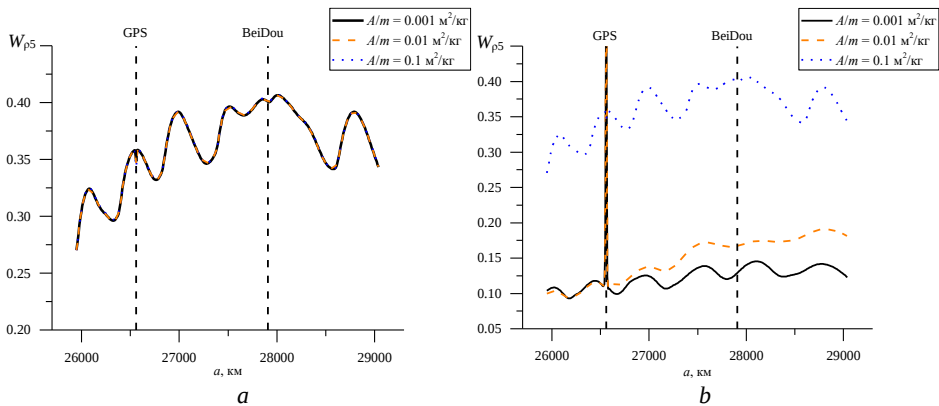


Рис. 8. Зависимость интегральной автокорреляционной функции для метрики Холшевникова W_{p5} от начальной большой полуоси a для областей GPS и BeiDou при различных отношениях A/m и начальных долготах восходящего узла Ω_0 : $a - \Omega_0 = 0^\circ$, $b - \Omega_0 = 90^\circ$

Fig. 8. Dependence of the integrated autocorrelation function for the Kholshchennikov metric W_{p5} on the initial semi-major axis a for GPS and BeiDou regions at different area-to-mass ratios A/m and initial longitudes of the ascending node Ω_0 : $\Omega_0 = (a) 0^\circ$ and $(b) 90^\circ$

Анализ поведения функции W_a показывает, что при парусности $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$ в областях движения спутников ГЛОНАСС, GPS, BeiDou характер эволюции большой полуоси a становится стохастическим (см. рис. 4 и 7). В то же время функция W_{p5} (определяется через позиционные элементы орбиты) показывает, что в областях движения спутников ГЛОНАСС, GPS, BeiDou в зависимости от начальной долготы восходящего узла Ω_0 стохастичность может проявляться и при малых значениях парусности $A/m = 0.001, 0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$ (см. рис. 5 и 8).

Заключение

Результаты исследования стохастических свойств окрестностей средневисотных орбит спутников глобальных навигационных систем на основе анализа значений интегральных автокорреляционных функций W_a и W_{p5} в случае малых и умеренных значений парусности показали, что проявления стохастической эволюции, обусловленной лунно-солнечными возмущениями, фиксируются при малых значениях парусности $A/m \leq 0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$. Увеличение парусности может приводить как к уменьшению стохастичности, так и к ее росту в зависимости от начальной ориентации плоскости орбиты. Отметим, что в случае умеренных значений парусности это играет важную роль, определяя начальное положение плоскости орбиты относительно направления на Солнце. Это необходимо учитывать при выборе орбит для размещения выведенных из эксплуатации спутников глобальных навигационных систем.

В дальнейшем планируется продолжить исследование и рассмотреть особенности стохастической эволюции при больших значениях парусности, соответствующих космическому мусору, а также исследовать стохастические свойства движения в области высокоорбитального сегмента системы BeiDou.

Список источников

1. Rosengren A.J., Skoulidou D.K., Tsiganis K., Voyatzis G. Dynamical cartography of Earth satellite orbits // *Advances in Space Research*. 2019. V. 63. P. 443–460. doi: 10.1016/j.asr.2018.09.004
2. Бордовицына Т.В., Александрова А.Г., Чувашов И.Н. Комплекс алгоритмов и программ для исследования хаотичности в динамике искусственных спутников Земли // *Известия вузов. Физика*. 2010. № 8/2. С. 14–21.
3. Томилова И.В., Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В. Особенности динамики объектов, движущихся в окрестности резонанса 1:3 с вращением Земли // *Астрономический вестник*. 2019. Т 53, №5. С. 323–338. doi: 10.1134/S0038094619050071
4. Александрова А.Г., Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В., Попандопуло Н.А., Томилова И.В. Вековые резонансы в динамике объектов, движущихся в областях LEO–MEO околоземного орбитального пространства // *Астрономический вестник*. 2021. Т 55, № 3. С. 272–287. doi: 10.1134/S0038094621030011
5. Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В. Исследование динамики области орбитальных резонансов высоких порядков // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 79. С. 58–68. doi: 10.17223/19988621/79/5
6. Бордовицына Т.В., Томилова И.В., Чувашов И.Н. Вековые резонансы как источник возникновения динамической хаотичности в долговременной орбитальной эволюции неуправляемых объектов спутниковых радионавигационных систем // *Астрономический вестник*. 2014. Т. 48, № 4. С. 280–289. doi: 10.1134/S0038094614040042
7. Rosengren A.J., Alessi E.M., Rossi A., Valsecchi G.B. Chaos in navigation satellite orbits caused by the perturbed motion // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. V. 449, is. 4. P. 3522–3526. doi: 10.1093/mnras/stv534
8. Kuznetsov E.D., Avvakumova E.A. Dynamical evolution of space debris in the vicinity of GNSS regions // *Acta Astronautica*. 2019. V. 158. P. 140–147. doi: 10.1016/j.actaastro.2018.02.001
9. Томилова И.В., Красавин Д.С., Бордовицына Т.В. Динамическая структура околоземного орбитального пространства в области резонанса 1:2 со скоростью вращения Земли // *Астрономический вестник*. 2020. Т 54, № 4. С. 337–348. doi: 10.1134/S0038094620040085
10. Бордовицына Т.В., Томилова И.В., Чувашов И.Н. Влияние вековых резонансов на долговременную орбитальную эволюцию неуправляемых объектов спутниковых радиона-

- вигационных систем в области МЕО // *Астрономический вестник*. 2012. Т. 46. С. 356–368. doi: 10.1134/S0038094612040016
11. Wytrzyszczak I., Breiter S., Borczyk W. Regular and chaotic motion of high altitude satellites // *Advances in Space Research*. 2007. V. 40. P. 134–142. doi: 10.1016/j.asr.2006.11.020
 12. Kholshchevnikov K.V., Kokhirova G.I., Babadzhanyan P.B., Khamroev U.H. Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2016. V. 462. P. 2275–2283. doi: 10.1093/mnras/stw1712
 13. Anselmo L., Pardini C. Dynamical evolution of high area-to-mass ratio debris released into GPS orbits // *Advances in Space Research*. 2009. V. 43. P. 1491–1508. doi: 10.1016/j.asr.2009.01.017

References

1. Rosengren A.J., Skoulidou D.K., Tsiganis K., Voyatzis G. (2019) Dynamical cartography of Earth satellite orbits. *Advances in Space Research*. 63. pp. 443–460. doi: 10.1016/j.asr.2018.09.004
2. Bordovitsyna T.V., Aleksandrova A.G., Chuvashov I.N. (2010) Kompleks algoritmov i programm dlya issledovaniya khaotichnosti v dinamike iskusstvennykh sputnikov Zemli [Algorithms and program complex for chaotic dynamics investigation of the Earth artificial satellites]. *Izvestiya Vuzov. Fizika*. 8(2). pp. 14–21.
3. Tomilova I.V., Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V. (2019) Features of the dynamics of objects moving in the neighborhood of the 1:3 resonance with the Earth's rotation. *Solar System Research*. 53(5). pp. 307–321. doi: 10.1134/S0038094619050071
4. Aleksandrova A.G., Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V., Popandopulo N.A., Tomilova I.V. (2021) Secular resonances in the dynamics of objects moving in LEO-MEO regions of near-Earth orbital space. *Solar System Research*. 55(3). pp. 266–281. doi: 10.1134/S0038094621030011
5. Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V. (2022) Issledovanie dinamiki oblasti orbital'nykh rezonansov vysokikh porядkov [Investigation of dynamics of a region with high-order orbital resonances]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 58–68. doi: 10.17223/19988621/79/5
6. Bordovitsyna T.V., Tomilova I.V., Chuvashov I.N. (2014) Secular resonances as a source of dynamic chaoticity in the long-term orbital evolution of uncontrolled satellites. *Solar System Research*. 48(4). pp. 259–268. doi: 10.1134/S0038094614040042
7. Rosengren A.J., Alessi E.M., Rossi A., Valsecchi G.B. (2015) Chaos in navigation satellite orbits caused by the perturbed motion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 449(4). pp. 3522–3526. doi: 10.1093/mnras/stv534
8. Kuznetsov E.D., Avvakumova E.A. (2019) Dynamical evolution of space debris in the vicinity of GNSS regions. *Acta Astronautica*. 158. pp. 140–147. doi: 10.1016/j.actaastro.2018.02.001
9. Tomilova I.V., Krasavin D.S., Bordovitsyna T.V. (2020) Dynamic structure of near-Earth orbital space in the 1:2 resonance region with the speed of Earth's rotation. *Solar System Research*. 54(4). pp. 307–317. doi: 10.1134/S0038094620040085
10. Bordovitsyna T.V., Tomilova I.V., Chuvashov I.N. (2012) The effect of secular resonances on the long-term orbital evolution of uncontrollable objects on satellite radio navigation systems in the MEO region. *Solar System Research*. 46. pp. 329–340. doi: 10.1134/S0038094612040016
11. Wytrzyszczak I., Breiter S., Borczyk W. (2007) Regular and chaotic motion of high altitude satellites. *Advances in Space Research*. 40. pp. 134–142. doi: 10.1016/j.asr.2006.11.020
12. Kholshchevnikov K.V., Kokhirova G.I., Babadzhanyan P.B., Khamroev U.H. (2016) Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common

- origin. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 462. pp. 2275–2283. doi: 10.1093/mnras/stw1712
13. Anselmo L., Pardini C. (2009) Dynamical evolution of high area-to-mass ratio debris released into GPS orbits. *Advances in Space Research*. 43. pp. 1491–1508. doi: 10.1016/j.asr.2009.01.017

Сведения об авторах:

Кузнецов Эдуард Дмитриевич – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой астрономии, геодезии, экологии и мониторинга окружающей среды Института естественных наук и математики Уральского федерального университета (Екатеринбург, Россия). E-mail: eduard.kuznetsov@urfu.ru

Смагина Екатерина Сергеевна – аспирант кафедры астрономии, геодезии, экологии и мониторинга окружающей среды Института естественных наук и математики Уральского федерального университета (Екатеринбург, Россия). E-mail: Ekaterina.Smagina@urfu.me

Жмакин Иван Сергеевич – магистрант кафедры астрономии, геодезии, экологии и мониторинга окружающей среды Института естественных наук и математики Уральского федерального университета (Екатеринбург, Россия). E-mail: zhmakin01@bk.ru

Уразаев Тавриз Ринатович – магистрант кафедры астрономии, геодезии, экологии и мониторинга окружающей среды Института естественных наук и математики Уральского федерального университета (Екатеринбург, Россия). E-mail: urazaev11@list.ru

Information about the authors:

Kuznetsov Eduard D. (Doctor of Physics and Mathematics, Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation). E-mail: eduard.kuznetsov@urfu.ru

Smagina Ekaterina S. (Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation). E-mail: Ekaterina.Smagina@urfu.me

Zhmakin Ivan S. (Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation). E-mail: zhmakin01@bk.ru

Urazaev Tavriz R. (Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation). E-mail: urazaev11@list.ru

Статья поступила в редакцию 18.12.2023; принята к публикации 07.02.2025

The article was submitted 18.12.2023; accepted for publication 07.02.2025

Научная статья

УДК 531.57

doi: 10.17223/19988621/93/11

О влиянии конусности канала заряда на величины внутрибаллистических параметров РДТТ

Алексей Матвеевич Липанов

Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия, lipanov@udman.ru

Аннотация. Рассмотрен вопрос о влиянии одного из конструктивных элементов заряда – конусности его канала – на величины внутрибаллистических параметров. Исследовано влияние небольшой конусности канала заряда с углом наклона его образующей к оси симметрии канала, равным 0.5° . Изучен случай, когда расширение канала заряда направлено в сторону его сопловой границы. Показано, что при этих условиях скорость потока на сопловой границе канала по сравнению с цилиндрическим каналом меньше на 17,68%. На 14,66% уменьшается продольный перепад давления.

Ключевые слова: заряд твердого топлива, канал заряда, скорость потока, перепад давления, двигатель

Для цитирования: Липанов А.М. О влиянии конусности канала заряда на величины внутрибаллистических параметров РДТТ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 131–139. doi: 10.17223/19988621/93/11

Original article

On the effect of charge channel conicity on the internal ballistic parameters of a solid-propellant rocket motor

Aleksey M. Lipanov

Federal Research Center M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, lipanov@udman.ru

Abstract. This paper considers the influence of a charge design element, namely, the channel conicity, on the internal ballistic parameters. The case of a small conicity of the charge channel with an inclination angle of its generatrix to the channel symmetry axis of 0.5 degrees is studied. The charge channel is expanded toward its nozzle boundary. Under these conditions, the flow velocity at the nozzle boundary of the channel is 17.68% less than that in a cylindrical channel; the longitudinal pressure drop is reduced by 14.66%. The calculations performed have shown that the use of a conical charge channel instead of a cylindrical one, with an inclination angle of the charge channel generatrix to the symmetry axis equal to 0.5 degrees, allows one to significantly reduce the flow velocity

at the nozzle boundary of the charge channel. This creates conditions for erosion-free combustion of solid propellants for charge with dimensions close to those of a charge with a cylindrical channel. At the same time, the longitudinal force effect on the charge is also reduced.

Keywords: solid propellant charge, charge channel, flow rate, pressure drop, engine

For citation: Lipanov, A.M. (2025) On the effect of charge channel conicity on the internal ballistic parameters of a solid-propellant rocket motor. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 131–139. doi: 10.17223/19988621/93/11

Введение

Рассмотрим практически важный вопрос о влиянии конусности канала заряда на величины внутрибаллистических параметров (ВБП). Речь пойдет о конусности канала заряда типа технологической, создаваемой из соображений безопасности при изготовлении крупногабаритных зарядов. Будем рассматривать заряды, длины L которых равны трем и более метрам. Для таких зарядов, чтобы технологическую иглу, формирующую канал заряда в результате полимеризации и отверждения топлива, извлечь из его канала без трения, на канале необходимо создавать конусность [1].

Но это из технологических соображений и соображений безопасности.

Естественно, возникает вопрос, как создание конусного канала заряда сказывается на величинах ВБП РДТТ. В известных автору работах [2–6], в которых анализируются внутрикамерные процессы, этот вопрос не рассматривается. В работе [7] представлены данные по горению заряда в виде «зонтика».

Постановка задачи и описание метода решения

Чтобы ответить на данный вопрос, рассмотрим сначала заряд внутреннего горения (рис. 1) для двигателя с застойной зоной с цилиндрическим каналом, заимствованный из работы [8]. Этот заряд имеет опорный уступ 1 для создания застойной зоны в двигателе. Большая часть наружной поверхности данного заряда, включая опорный уступ и наружную поверхность 3 после него, бронированы. Наружная поверхность, примыкающая к переднему торцу заряда, не бронирована. Для обеспечения зависимости величины поверхности горения заряда $S(e)$ как функции величины сгоревшего свода e , близкой к постоянной, на этом участке наружной поверхности заряда определенным ее отрезок 2 бронирован. Кроме того, для тех же целей на переднем и сопловом торцах заряда сделано по одной проточке. Длины проточек на переднем и сопловом торцах заряда обозначим l_n и l_c соответственно. Их величины и значения других параметров рассматриваемого заряда (без конусности) приведены в табл. 1

В табл. 1 D – наружный диаметр (калибр) заряда; d_0 – начальный диаметр цилиндрического канала заряда; $\bar{S}$ – сумма поверхностей горения (переднего торца, передней проточки и не бронированной наружной поверхности, примыкающей к переднему торцу заряда), ПС с которых поступают в канал заряда через его переднюю границу; S_c – сумма поверхностей горения соплового торца заряда и сопловой проточки; ΔR – величина опорного уступа заряда; ω – масса заряда.

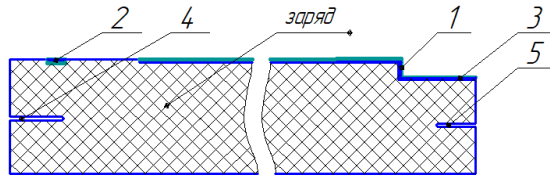


Рис. 1. Заряд внутреннего горения для РДТТ с застойной зоной: 1 – опорный уступ заряда; 2 – дополнительный забронированный участок наружной поверхности заряда; 3 – забронированная наружная поверхность заряда после опорного уступа; 4 – передняя проточка; 5 – сопловая проточка

Fig. 1. Internal combustion charge for a solid-propellant rocket motor with a stagnation zone: 1, charge support step; 2, additional armored section of the outer surface of the charge; 3, armored outer surface of the charge following the support step; 4, front groove; and 5, nozzle groove

Таблица 1

Величины параметров рассматриваемого заряда

D , м	d_0 , м	L , м	l_n , м	l_c , м	$\bar{S}$, м ²	S_c , м ²	ΔR , м	ω , кг
1	0.27	3	0.22	0.2			0.07	3 200

Заряд имеет длину 3 м и наружный диаметр $D = 0.975$ м. Начальный диаметр d_0 канала заряда, если канал цилиндрический, равен 0.27 м. Если канал конический, угол α_k наклона одной его стороны к оси симметрии канала заряда принимаем равным $\alpha_k = 0.5^\circ$. При этом средний радиус канала заряда оставляем равным 0.135 м. На длине в 3 м изменение радиуса канала заряда составляет 0.026 м. Масса заряда равна 3.2 т. Его время горения при давлении $p = 4$ МПа и температуре топлива 20°C равно 36,5 с, а скорость u_T горения твердого топлива при тех же условиях равна $u_T = 0.01$ м/с. Используем степенной закон зависимости скорости горения топлива от давления $u_T = u_1 p^\nu$. Величину показателя степени ν принимаем равной $\nu = 0.3$. Коэффициент u_1 скорости горения определим, учитывая условие, что при $p = 4$ Мпа скорость u_T горения топлива равна 0.01 м/с.

Величину площади критического сечения сопла находим при гипотезе осреднения ВБП по свободному объему двигателя. Коэффициент расхода $\varphi_2 = 0.98$. Отношение k изобарной c_p и изохорной c_v теплоемкостей равно $k = 1.2$. Функция $B(k) = 0.64853$ [2]. Произведение $RT_p = 10^6$ м²/с². При этих условиях величина площади $F_{кр}$ критического сечения сопла $F_{кр} = 0.034486$ м².

Чтобы ответить на вопрос о влиянии конусности канала заряда на величины ВБП, решим одномерную гомогенную квазистационарную газодинамическую задачу для начального этапа квазистационарной работы РДТТ. На этом этапе работы двигателя при переменной по длине канала заряда площади F его поперечного сечения имеем два дифференциальных уравнения [2]:

уравнение неразрывности

$$\frac{dF \rho v}{dx} = \frac{\rho_T u_T}{\cos \alpha_k} \quad (1)$$

и импульса

$$\frac{dF \rho v^2}{dx} + F \frac{dp}{dx} = 0 \quad (2)$$

и две конечные связи:
интеграл Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} RT_p \quad (3)$$

и уравнение состояния

$$\frac{p}{\rho} = RT. \quad (4)$$

В уравнениях (1)–(4) x – продольная пространственная координата, ρ_T – плотность топлива, ρ , v – плотность и скорость движения продуктов сгорания соответственно, R – газовая постоянная, T – температура продуктов сгорания соответственно.

Для решения уравнений (1) и (2) необходимо задать граничные условия. На входе в канал при $x = 0$ (параметры с индексом 0) имеем равенства

$$F_0 \rho_0 v_0 = \bar{S} \rho_T u_T(\bar{p}), \quad (5)$$

$$p_0 + \rho_0 v_0^2 = \bar{p}. \quad (6)$$

В равенстве (5) $\bar{S}$ – величина площади поверхности горения, с которой ПС поступают в канал заряда. В данном случае $\bar{S} = 1.2 \text{ м}^2$, $\bar{p}$ – давление в переднем объеме двигателя.

Добавим к уравнениям (5) и (6) интеграл Бернулли (3), записанный при $x = 0$:

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k}{k-1} RT_p. \quad (7)$$

Используя уравнения (5)–(7), сможем найти переменные v_0 , p_0 , ρ_0 . Для нахождения переменной $\bar{p}$ воспользуемся условием равенства расхода ПС на сопловой границе заряда расходу через критическое сечение сопла [3]:

$$F_c \rho_c v_c + S_c \rho_T u_T(p_c) = \varphi_2 \frac{F_{kp} B(k)}{\sqrt{RT_p}} p_{*c}^3. \quad (8)$$

В равенстве (8)

$$B(k) = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{0.5 \frac{k+1}{k-1}} \sqrt{k}, \quad (9)$$

p_c^* – давление торможения в сопле. Его величина равна давлению торможения p_{*c}^3 на сопловой границе заряда. Для определения значения давления торможения p_{*c}^3 используем равенство

$$p_{*c}^3 = \frac{F_c \rho_c v_c p_{*c} + S_c \rho_T u_T(p_c) p_c}{F_c \rho_c v_c + S_c \rho_T u_T(p_c)}. \quad (10)$$

Здесь p_{*c} – давление торможения на сопловой границе канала заряда. Давление торможения на сопловом торце заряда в виду малой скорости оттока ПС от поверхности горения приравниваем статическому давлению p_c на сопловой границе канала заряда. Для нахождения величины давления торможения p_{*c} на сопловой границе канала заряда воспользуемся выражением для энтропийной функции

$$\frac{p_{*c}}{\rho_{*c}^k} = \frac{p_c}{\rho_c^k} \quad (11)$$

и уравнением состояния

$$\frac{p_{*c}}{\rho_{*c}} = RT. \quad (12)$$

Решая уравнения (11) и (12), получим

$$p_{*c} = \frac{(\rho_c RT_p)^{\frac{k}{k-1}}}{\rho_c^{\frac{1}{k-1}}}. \quad (13)$$

В результате имеем необходимую совокупность соотношений для решения уравнений (1), (2).

Сначала рассмотрим случай, когда канал заряда цилиндрический. В этом случае уравнение (2) интегрируется и приводится к виду:

$$p + \rho v^2 = \bar{p}. \quad (14)$$

Уравнение (1) запишется в виде:

$$\frac{d\rho v}{dx} = \frac{\text{Пр}_T u_1}{F} p^v. \quad (15)$$

Обозначим плотность тока ρv буквой m :

$$m = \rho v, \quad (16)$$

и получим для давления p формулу в зависимости от m . Учитывая обозначение (16), из уравнения (3) находим

$$\frac{mv}{2} + \frac{k}{k-1} p = \frac{k}{k-1} RT_p \rho.$$

Давление p в полученном равенстве исключим с помощью уравнения (14). Получим

$$-\frac{k+1}{2} mv + k\bar{p} = kRT_p \rho.$$

Умножим найденное уравнение слева и справа на v . Получим квадратное уравнение для определения v :

$$v^2 - \frac{2k}{k+1} \frac{\bar{p}}{m} v + \frac{2k}{k+1} RT_p = 0. \quad (17)$$

Решая его, будем иметь

$$v = \frac{k}{k+1} \frac{\bar{p}}{m} - \sqrt{\left(\frac{k}{k+1} \frac{\bar{p}}{m}\right)^2 - \frac{2k}{k+1} RT_p}. \quad (18)$$

Выражение для v подставим в уравнение (14). Учитывая обозначение (16), получим давление p как функцию плотности тока m :

$$\begin{aligned} p &= \bar{p} \frac{k}{k+1} \bar{p} - \sqrt{\left(\frac{k}{k+1} \frac{\bar{p}}{m}\right)^2 - \frac{2k}{k+1} RT_p} m^2 = \\ &= \frac{\bar{p}}{k+1} \left(1 - \sqrt{k^2 - 2k(k+1)RT_p \left(\frac{m}{\bar{p}}\right)^2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

После этого уравнение (15) можно проинтегрировать и записать в виде:

$$\int_{m_0}^m \frac{d\xi}{\left(1 - \sqrt{k^2 - 2k(k+1)RT_p \left(\frac{\xi}{\bar{p}}\right)^2}\right)^v} = \frac{\Pi \rho_T u_1}{F} \left(\frac{\bar{p}}{k+1}\right)^v. \quad (20)$$

Квадратуру в левой части уравнения (20) будем находить численно, используя метод трапеций [9]. Она определяет зависимость плотности тока m от пространственной координаты x .

При известных величинах параметров канала заряда, ПС и топлива, чтобы данную квадратуру найти, необходимо задать величину давления $\bar{p}$, найти плотность тока m_0 на входе в канал и решить трансцендентное уравнение (20) при заданной величине координаты x . Для нахождения величины $m_0 = \rho_0 v_0$ используем граничное условие (5). Уравнение (20) будем решать при $x = L = 3$ м. Варьируя величину давления $\bar{p}$, чтобы удовлетворить условие (8), находим $\bar{p} = 4.328$ МПа. Этой величине давления $\bar{p}$ соответствуют: $m_0 = 558.6218$ кг/(м²с²); $m_c = 1\,319.6438$ кг/(м²с²); $v_c = 336.6131$ м/с; $p_c = 3.8833$ МПа; $p_{*c} = 4.1108$ МПа; $p_c^3 = 4.07116$ МПа. При этих величинах записанных ВБП разница между левой и правой частями уравнения (8) оказалась равной $2.0523 \cdot 10^{-4}$ кг/с. При величине расхода ПС на входе в сопло, равной 91.50483 кг/с, это составляет $2.243 \cdot 10^{-4}\%$.

Среднее по длине канала заряда давление равно 4.1056 МПа, т.е. достаточно близкое к 4 МПа, имеющим место при гипотезе осреднения в двигателе.

Давление торможения p_c^3 на сопловой границе заряда, равное 4.07116 МПа, тоже близко к давлению в двигателе при гипотезе осреднения.

При этом скорость потока на сопловой границе канала заряда, равная 336.6131 м/с, достаточно велика и близка к началу эрозионного горения [10]. Перепад давления по длине канала заряда равен 0.4447 МПа.

Далее рассмотрим конусный канал. Поскольку в цилиндрическом канале максимальная скорость потока ПС достаточно велика, сужение канала в сторону сопла направлять не будем. Это приведет к дальнейшему росту скорости потока ПС и возникновению эрозионного горения ТТ. Поэтому будем рассматривать канал заряда, расширяющийся в направлении его сопловой границы. При этом канал будет таким, что посередине длины канала его радиус равен цилиндрическому. Это значит, что увеличение канала на его сопловой границе по сравнению с цилиндрическим каналом составит 0.012 м, если угол α_k наклона его образующей к оси симметрии равен 0.5°.

Уравнение (1), учитывая обозначение (16), после интегрирования запишем в виде:

$$m = \frac{F_0}{F} m_0 + 2\pi \frac{\rho_T u_T (\bar{p})}{F} \int_0^x (R_0 + x \operatorname{tg} \alpha_k) \left(\frac{p}{\bar{p}}\right)^{0.3} dx. \quad (21)$$

Переменную $y = \left(\frac{p}{\bar{p}}\right)^{0.3}$ как функцию координаты x , будем аппроксимировать четным полиномом

$$y = y_0 + \beta_1 x^2 + \beta_2 x^4 + \dots \quad (22)$$

Здесь $y_0 = \left(\frac{p_0}{\bar{p}} \right)^{0.3}$ относится к передней границе канала заряда при $x = 0$.

Применяя метод последовательных приближений для нахождения величины плотности тока m , коэффициенты β_i ($i = 1, 2, \dots$) определяем, используя результаты предыдущего приближения. В первом приближении величину y считаем константой, равной y_0 .

Попутно отметим, что в рассматриваемом случае $\operatorname{tg}(\alpha_k)$ – это малая величина, равная $\operatorname{tg}(\alpha_k) = 8.7269 \cdot 10^{-3}$, а $\cos(\alpha_k)$ принимаем равным единице.

Уравнение (2) сначала запишем в виде:

$$\frac{dF(p + \rho v^2)}{dx} = p \frac{dF}{dx} = 2\pi p (R_0 + x \operatorname{tg}(\alpha_k)) \operatorname{tg}(\alpha_k). \quad (23)$$

После этого уравнение (23), учитывая граничное условие (6), после интегрирования запишем в виде:

$$p + \rho v^2 = \bar{p} \frac{F_0}{F} + \frac{2\pi \bar{p}}{F} \operatorname{tg}(\alpha_k) \int_0^x (R_0 + x \operatorname{tg}(\alpha_k)) \frac{p}{\bar{p}} dx. \quad (24)$$

Отношение $z = \frac{p}{\bar{p}}$ в подынтегральном выражении уравнения (24) как функцию координаты x будем аппроксимировать четным полиномом

$$z = z_0 + \gamma_1 x^2 + \gamma_2 x^4 + \dots \quad (25)$$

Здесь $z_0 = \frac{p_0}{\bar{p}}$ относится к передней границе канала заряда при $x = 0$. Как и выше,

коэффициенты γ_i ($i = 1, 2, \dots$) определяем, используя результаты предыдущего приближения. В первом приближении величину z считаем константой, равной z_0 . Как следует из результатов расчетов, трех приближений оказывается достаточно, чтобы вычислительный процесс сошелся.

Варьируя величину давления $\bar{p}$, чтобы удовлетворить условие (8), находим $\bar{p} = 4.319$ МПа, при котором уравнение (8) удовлетворяется с точностью 0.1%. Этому давлению соответствуют величины ВБП, приведенные в табл. 2.

Таблица 2

Величины ВБП в двигателе с коническим каналом заряда

m_0 , кг/(м ² ·с)	v_0 , м/с	p_0 , МПа	m_c , кг/(м ² ·с)	v_c , м/с	p_c , МПа	p_{c^*} , МПа	$p_{c^*}^3$, МПа
688.5555	163.322	4.2065	1 098.3744	277.0908	3.9386	4.0932	4.0665

Видим, что при переходе от цилиндрического канала заряда к коническому, обусловленном технологическими условиями изготовления заряда, как давление $\bar{p}$, так и большинство других параметров изменились незначительно. Однако величина скорости потока изменилась заметно и уменьшилась на 59.5223 м/с, или на 17.68%. Достаточно заметно уменьшился и перепад давления, действующий на заряд

(0.4447 и 0.3804). В данном случае уменьшение перепада давления составило 14.66%. Как видим, оба фактора создают более благоприятные условия для работы двигателя.

Заключение

Выполненные расчеты показали, что использование конического канала заряда вместо цилиндрического при угле наклона образующей канала заряда к его оси симметрии, равном 0.5° , позволяет значительно уменьшить величину скорости потока на сопловой границе канала заряда. Это создает условия для безэрозионного горения ТТ для заряда в габаритах, близких к заряду с цилиндрическим каналом. Одновременно уменьшается и продольное силовое воздействие на заряд.

Список источников

1. Внутренняя баллистика РДТТ / под ред. А.М. Липанова, Ю.М. Милёхина. М. : Машиностроение, 1996. 761 с.
2. Соркин Р.Е. Теория внутрикамерных процессов в системах на твердом топливе. М. : Наука, 1983. 286 с.
3. Шишков А.А. Газодинамика пороховых ракетных двигателей. М. : Машиностроение, 1974. 156 с.
4. Ерохин Б.Т., Липанов А.М. Нестационарные и квазистационарные режимы работы РДТТ. М. : Машиностроение, 1967.
5. Соркин Р.Е. Газотермодинамика ракетных двигателей на твердом топливе. М. : Наука, 1967. 368 с.
6. Калинин В.В., Ковалёв Ю.Н., Липанов А.М. Нестационарные процессы и методы проектирования узлов РДТТ. М. : Машиностроение, 1976. 216 с.
7. Кирюшкин А.Е., Миньков Л.Л. Моделирование внутрикамерных процессов в ракетном двигателе на твердом топливе с учетом движения поверхности горения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 71. С. 90–105.
8. Липанов А.М., Колесникова Л.Н., Лещёв А.Ю. Об эффективности использования реального закона скорости горения твердого топлива // Физика горения и взрыва. 2020. Т. 56, № 2. С. 55–64.
9. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М. : Наука, 1986. 544 с.
10. Виллюнов В.Н. К теории эрозионного горения порохов // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 136, № 2. С. 381–383.

References

1. Lipanov A.M., Milekhin Yu.M. (1996) *Vnutrennyaya ballistika RDTT* [Internal ballistics of solid-propellant rocket motors]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Sorkin R.E. (1983) *Teoriya vnutrikamernykh protsessov v sistemakh na tvyordom toplive* [Theory of intra-chamber processes in solid propellant systems]. Moscow: Nauka.
3. Shishkov A.A. (1974) *Gazodinamika porokhovykh raketnykh dvigateley* [Gas dynamics of powder rocket engines]. Moscow: Mashinostroenie.
4. Erokhin B.T., Lipanov A.M. (1967) *Nestatsionarnye i kvazistatsionarnye rezhimy raboty RDTT* [Unsteady and quasi-stationary modes of operation of solid-propellant rocket motors]. Moscow: Mashinostroenie.
5. Sorkin R.E. (1967) *Gazotermodinamika raketnykh dvigateley na tvyordom toplive* [Gas thermodynamics of solid-propellant rocket motors]. Moscow: Nauka.

6. Kalinin V.V., Kovalev Yu.N., Lipanov A.M. (1976) *Nestatsionarnye protsessy i metody proektirovaniya uzlov RDTT* [Unsteady processes and methods of designing units of solid-propellant rocket motors]. Moscow: Mashinostroenie.
7. Kiryushkin A.E., Min'kov L.L. (2021) Modelirovanie vnutrikamernykh protsessov v raketnom dvigatele na tverdom toplive s uchetoм dvizheniya poverkhnosti goreniya [Numerical simulation of intra-chamber processes in a solid rocket motor with account for burning surface motion]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 71. pp. 90–105. doi: 10.17223/19988621/71/8
8. Lipanov A.M., Kolesnikova L.N., Leshchev A.Y. (2020) On the effectiveness of using the real law of solid propellant burning rate as a function of solid rocket motor pressure. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 56(2). pp. 172–180. doi: 10.1134/S0010508220020082
9. Bronstein I.N., Semendyaev K.A. (1986) *Spravochnik po matematike* [Handbook of mathematics]. Moscow: Nauka.
10. Vilyunov V.N. (1961) K teorii erozionnogo goreniya porokhov [On the theory of erosive combustion of gunpowders]. *Doklady akademii nauk*. 136(2). pp. 381–383.

Сведения об авторе:

Липанов Алексей Матвеевич – академик РАН, доктор технических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» (Москва, Россия). E-mail: lipanov@udman.ru

Information about the author:

Lipanov Aleksey M. (Academician of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Technical Sciences, Chief Researcher, Federal Research Center M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: lipanov@udman.ru

Статья поступила в редакцию 17.09.2024; принята к публикации 07.02.2025

The article was submitted 17.09.2024; accepted for publication 07.02.2025

Научная статья

УДК 532.542.4

doi: 10.17223/19988621/93/12

Численное исследование тепловентиляционного состояния припортального тамбура тоннеля в зимнее время года

Андрей Александрович Оберемок¹, Алексей Юрьевич Крайнов²,
Леонид Леонидович Миньков³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ oberemokaa@minesoft.ru

² akrainov@ftf.tsu.ru

³ lminkov@ftf.tsu.ru

Аннотация. Представлены результаты численного моделирования тепловентиляционного состояния припортального тамбура тоннеля в зимнее время года, выполненного в приближении турбулентного вязкого теплопроводного сжимаемого газа. Рассмотрены два режима работы тепловентиляционных установок, расположенных в тамбурном пространстве, – прямой и обратный. Показано, что обратный режим работы тепловентиляционных установок дает возможность обеспечить относительно равномерное движение воздуха по высоте проема портала и не позволяет холодному наружному воздуху проникать более чем на 10 м вглубь тамбура.

Ключевые слова: вентиляция, тоннель, припортальный тамбур, тепловое состояние, математическое моделирование

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSWM-2020-0036.

Для цитирования: Оберемок А.А., Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л. Численное исследование тепловентиляционного состояния припортального тамбура тоннеля в зимнее время года // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 140–159. doi: 10.17223/19988621/93/12

Original article

A numerical study of the heat-ventilation state of a portal tambour of a tunnel in winter

Vasiliy A. Poryazov¹, Oleg G. Glotov², Aleksey Yu. Krainov³,
Dmitriy A. Krainov⁴, Ivan V. Sorokin⁵, Grigory S. Surodin⁶

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ oberemokaa@minesoft.ru

² akrainov@ftf.tsu.ru

³ lminkov@ftf.tsu.ru

Abstract. Numerical simulation of the heat-ventilation state of a portal tambour of a tunnel in winter is performed using the model of turbulent viscous heat-conducting compressible gas. The direct and reverse operating modes of heat-ventilation units (HVUs) located in the tambour are considered. The air intake and exhaust from the openings for the HVUs in the tambour occur at a 45° angle with respect to the plane of the wall. The following phenomena are taken into account when calculating the thermal state of the air mass in the tambour: air heating in the tambour due to operating HVUs; heat exchange between the air flowing from the outside into the tambour and the air in the tunnel; and heat exchange between the air flowing from the portal side into the tambour and the air in the tunnel. It is assumed that external cold air with a temperature of -43°C is flowing into the tambour at a volumetric flow rate of $100\text{ m}^3/\text{s}$. The reverse operation mode of the HVUs ensures relatively uniform air flow along the height of the gate opening and does not allow cold air to penetrate from the outside into the tambour down to a depth of more than 10 m.

Keywords: ventilation, tunnel, portal tambour, thermal state, mathematical modeling

Acknowledgments: This work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state assignment No. FSWM-2020-0036).

For citation: Oberemok, A.A., Krainov, A.Yu., Min'kov, L.L. (2025) A numerical study of the heat-ventilation state of a portal tambour of a tunnel in winter. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 140–159. doi: 10.17223/19988621/93/12

Введение

Основной проблемой эксплуатации тоннелей в зимнее время в суровых климатических условиях является образование наледи на его стенках и контактных проводах, проходящих в тоннеле. Для устранения данного негативного фактора используют тепловентиляционные установки (ТВУ) и закрывающиеся в автоматическом режиме порталные ворота, что позволяет повышать температуру в тоннеле до приемлемых значений. Требуемая температура воздуха внутри тоннеля поддерживается за счет тепла, выделяемого калориферами ТВУ, и конвективного теплообмена между воздухом и стенками тоннеля. Для определения мощности ТВУ необходимо знать величину воздухообмена в тоннеле, которая определяется как скоростью прохождения железнодорожных составов, так и их количеством.

Экспериментально-теоретическое исследование влияния конвекции воздушного потока и теплопроводности материала стенки тоннеля на изменение температуры внутри тоннеля в зависимости от скорости воздушного потока с низкой температурой на входе проводилось в работах [1, 2]. Результаты показали, что температура воздушного потока и окружающей породы быстро падает в начале процесса и замедляется со временем. Температура воздушного потока и окружающей породы колеблется в зависимости от изменения температуры на входе, и это колебание является гистерезисным.

В работе [3] показано, что система вентиляции существенно влияет на температуру воздуха внутри тоннеля и распределение температуры в пристенной

окружающей породе. Важным фактором, определяющим процесс теплообмена, является среда, заполняющая трещины в горных выработках. Вопросы оптимизации системы вентиляции сверхдлинных тоннелей обсуждаются в работах [4, 5].

Процессы теплообмена в протяженных заглубленных тоннелях и вопросы, связанные с охлаждением воздуха в них, исследовались в работах [6, 7]. Показано, что использование технологий вентиляции и распылительного охлаждения является перспективным в местах с высокими температурами благодаря своему удобству и экологичности.

В работе [8] представлен обзор исследований аэродинамических эффектов, возникающих в тоннелях при прохождении в них поездов, в том числе высокоскоростных, и связанных с этим таких проблем, как аэродинамическое сопротивление, скольжение, волна давления и волна микродавления.

Исследование воздушного распределения в протяженных железнодорожных тоннелях длиной 3 и 6 км от поршневого действия поездов проводилось в работах [9–11] с помощью численного моделирования в программном пакете ANSYS Fluent. Показано, что основным эксплуатационным фактором, влияющим на воздухообмен, инициированный поршневым действием движущихся поездов в протяженном железнодорожном тоннеле, – это длина поезда. Динамика расхода воздуха в тоннеле при прохождении по нему поезда является линейной во время входа поезда в тоннель, степенной после полного вхождения поезда в тоннель и линейной во время выхода поезда из тоннеля.

Разработка технических решений для модернизации систем вентиляции и подогрева воздуха в Северомуйском тоннеле, связанной с увеличением интенсивности движения железнодорожных составов в зимний период, рассматривалась в работе [12]. В частности, были проведены расчет мощности калориферных установок для подогрева воздуха и определение мест их размещения по длине тоннеля, а также получено распределение температуры воздуха по длине тоннеля.

Исследование зон переохлаждения в тоннелях, приводящих к образованию наледей на стенках тоннеля, проводилось в работах [13, 14]. Показано, что наиболее рациональным способом размещения тепловентиляционных установок для поддержания требуемой температуры тоннельного воздуха является их равномерное распределение по длине тоннеля, совмещенное с установкой припортовых воздушно-тепловых завес [13, 15]. Была доказана энергетическая эффективность размещения ворот на порталах тоннеля, и обосновано расположение относительно портала мест подачи в тоннель подогретого в калориферах воздуха и удаления из него охлажденного воздуха, обеспечивающее максимальный энергетический эффект [14, 16, 17].

В работе [18] представлены результаты исследования распределения температуры воздуха по длине протяженного железнодорожного тоннеля в зависимости от различных конфигураций и мест расположения тепловентиляционных установок. Показано, что наиболее рациональным способом является равномерное размещение тепловентиляционных установок по длине тоннеля, совмещенное с устройством припортовых воздушно-тепловых завес. Это позволяет обеспечить положительную температуру воздуха на всех участках по длине тоннеля.

В работах [16, 19] рассмотрены различные проблемы проветривания транспортных тоннелей. В частности, утверждается, что создание в железнодорожных тоннелях положительного теплового режима за счет подогрева подаваемого

в выработки наружного воздуха является одним из наиболее надежных способов предотвращения образования наледей.

Исследование теплотерь в тоннеле на нагревание холодного поезда проводилось в работах [11, 20]. Методами вычислительной аэродинамики в стационарной и нестационарной постановках изучена динамика воздухораспределения от поршневого действия поездов в протяженных железнодорожных тоннелях [21].

Интенсификация движения железнодорожных составов в тоннелях в зимнее время года, с одной стороны, создает трудности в работе порталных ворот, на открытие и закрытие которых требуется определенное время, а с другой стороны, вызывает обмерзание порталных ворот. Увеличение пропускной способности тоннеля ведет к изменению нормативных требований, предъявляемых к количеству и месту расположения ТВУ. Одним из путей решения задачи обеспечения положительного теплового баланса тоннеля в холодное время года являются отказ от порталных ворот и постройка специального тамбура перед порталом с дополнительными ТВУ, обеспечивающими подогрев втекающего холодного воздуха.

Цель данной работы – исследование воздухообмена и температурного поля в тамбурном сооружении для двух схем функционирования ТВУ, расположенных в нем, в холодное время года.

Физическая постановка задачи

Исследуется тепловентиляционный процесс в области (рис. 1), состоящей из тамбурного сооружения (тамбур) 1, порталного сооружения (портал) 2, после которого расположен транспортный тоннель. В тамбуре и портале с каждой боковой стороны находятся проемы для забора воздуха в ТВУ 3 и проемы для выброса нагретого воздуха из ТВУ 4. Площадь поперечного сечения тамбура составляет 34.44 м², портала 49.28 м², тоннеля 37.1 м². Длина тамбура – 60 м, длина портала – 20 м.

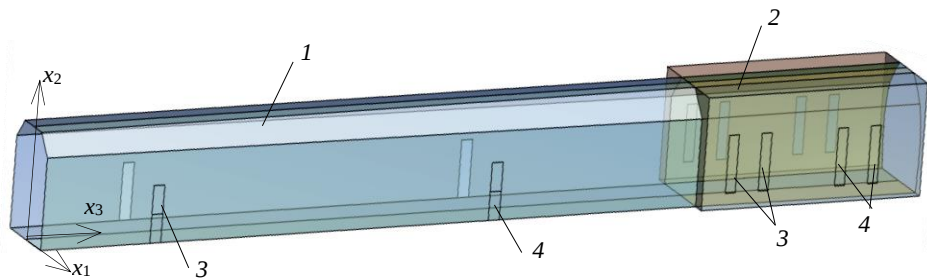


Рис. 1. Схема тамбурного и порталного сооружений:

1 – тамбур, 2 – портал, 3 – входной проем ТВУ, 4 – выходной проем ТВУ

Fig. 1. Design of the tambour and portal buildings: 1, tambour; 2, portal;

3, entrance opening of the heat-ventilation unit (HVU); and 4, exit opening of the HVU

Через входное сечение тамбура затекает холодный воздух с температурой –43 С и объемным расходом 100 м³/с. Для нагрева такого воздуха до 0 С требуется мощность источников тепла, равная 6.45 МВт ($\rho Q c_p \Delta T = 1.5 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3} \times 100 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1} \times 1\,000 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1} \times 43 \text{ К}$).

В тамбуре находятся четыре ТВУ с общей мощностью 4.5 МВт (по 1.125 МВт на каждую ТВУ). В портале находятся также четыре ТВУ, но с общей мощностью 2 МВт (по 0.5 МВт на каждую ТВУ). Забор воздуха и выброс воздуха из проемов для ТВУ в тамбуре происходит под углом 45° к плоскости стены и под углом 90° в портале. Площадь поперечного сечения каждого входного (выходного) проема для забора воздуха в ТВУ и выброса воздуха из ТВУ для тамбура равна 1.8 м^2 , а для портала 3.24 м^2 .

Для обогрева тамбурного помещения с помощью ТВУ рассматриваются следующие две схемы:

1. ТВУ расположены параллельно (друг над другом; рис. 2, *a*). Вентиляторы ТВУ работают в прямом режиме. Забор воздуха происходит из тамбура через входной проем на расстоянии 10.5 м после входа в тамбур, и после подогрева воздух выбрасывается в тамбурное пространство на расстоянии 18.5 м перед входом в портал (расстояние между входными и выходными проемами составляет 31 м).

2. Расположение ТВУ такое же, как и в схеме 1, но вентиляторы работают в реверсивном режиме. Забор воздуха происходит из тамбурного пространства на расстоянии 18.5 м от порталных ворот, и после подогрева воздух выбрасывается на расстоянии 10.5 м от входа в тамбур (рис. 2, *b*).

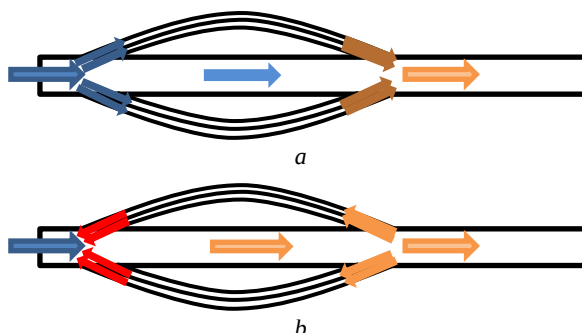


Рис. 2. Схема работы ТВУ в тамбуре: *a* – прямой режим; *b* – реверсивный режим

Fig. 2. Scheme of the HVU operation in the tambour: (*a*) direct and (*b*) reverse modes

При расчете теплового состояния воздушной массы тамбура учитываются следующие явления:

- нагрев воздуха в тамбуре за счет работающих тепловентиляционных установок;
- теплообмен между наружным воздухом, затекающим в тамбур, и воздухом, находящимся в тоннеле;
- теплообмен между воздухом, затекающим в тамбур со стороны портала, и воздухом, находящимся в тоннеле.

Математическая постановка задачи

Уравнение сохранения массы

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1)$$

Уравнение сохранения импульса

$$\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^6 \Delta p_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \rho g_i. \quad (2)$$

Уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial u_j (\rho E + p)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_{eff} \frac{\partial T}{\partial x_j} + u_i \tau_{ij, eff} \right) + \sum_{i=1}^6 Q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (3)$$

Уравнение состояния идеального газа

$$p = \rho RT, \quad (4)$$

где $E = H - \frac{p}{\rho}$, $H = h + \frac{u_i u_i}{2}$, $h = h^0(T_{ref}) + \int_{T_{ref}}^T c_p dT$, $\tau_{ij, eff} = \mu_{eff} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] -$

тензор эффективных напряжений, $\lambda_{eff} = \lambda + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t}$ – эффективный коэффициент

теплопроводности газа, $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$ – эффективный коэффициент вязкости, R – газовая постоянная, g_i – ускорение свободного падения, μ – коэффициент молекулярной вязкости газа, μ_t – коэффициент турбулентной вязкости газа, λ – молекулярный коэффициент теплопроводности газа, c_p – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, Q_i – тепловой поток от радиатора, Δp_i – перепад давления на вентиляторе, $\delta(\mathbf{x})$ – дельта-функция Дирака, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Модель турбулентности

В данной работе использовалась realizable k - ε -модель турбулентности, преимущество которой перед другими k - ε -моделями турбулентности состоит в том, что она позволяет более точно предсказывать скорость распространения как плоских, так и круглых струй [22].

Уравнение турбулентной энергии

$$\frac{\partial \rho k u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon. \quad (5)$$

Уравнение удельной скорости диссипации турбулентной энергии

$$\frac{\partial \rho \varepsilon u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho \varepsilon \left(C_1 S - C_2 \frac{\varepsilon}{k + \sqrt{\mu \varepsilon \rho^{-1}}} \right) + C_{1\varepsilon} C_{3\varepsilon} G_b \frac{\varepsilon}{k}, \quad (6)$$

где $G_k = \mu_t S^2$ – производство турбулентной кинетической энергии, $S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$ –

модуль тензора скоростей деформации, $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, $C_1 = \max \left(0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right)$,

$\eta = S \frac{k}{\varepsilon}$, $C_2 = 1.9$, $C_{1\varepsilon} = 1.44$, $G_b = -\frac{\mu_t}{\rho Pr_t} g_i \frac{\partial p}{\partial x_i}$, $C_{3\varepsilon} = \text{th} \left| \frac{V}{U} \right|$, V , U – соответ-

ственно параллельная и перпендикулярная компоненты вектора скорости вектору

гравитации; $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$, $C_\mu = \left(A_0 + A_s \frac{k U^*}{\varepsilon} \right)^{-1}$, $U^* = \sqrt{S_{ij} S_{ij} + \Omega_{ij} \Omega_{ij}}$, $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) -$

тензор завихренности; $A_0 = 4.04$, $A_3 = 6\cos(\phi)$, $\phi = \frac{1}{3}\cos^{-1}(\sqrt{6}W)$, $W = \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{\tilde{S}^3}$,
 $\tilde{S} = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$, $Pr_t = 0.85$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1.2$.

Граничные условия

Граничные условия для турбулентной кинетической энергии на **стенке** задаются следующим образом:

$$\partial k / \partial n = 0,$$

скорость диссипация турбулентной кинетической энергии ε в пристенной области рассчитывается из условия равенства производства кинетической энергии турбулентных пульсаций и ее диссипации и предположения о логарифмическом распределении средней скорости газа:

$$\varepsilon_p = C_\mu^{0.75} k_p^{1.5} / (\kappa y_p),$$

где $\kappa = 0.42$. Величина y_p – это расстояние от центра пристенной ячейки до стенки, если $y_p > \mu y^* / (\rho C_\mu^{0.25} k_p^{0.5})$, в противном случае $y_p = \mu y^* / (\rho C_\mu^{0.25} k_p^{0.5})$. Здесь $y^* = 11.225$.

Граничные условия **на входе** в область:

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = U_0, T = T_{in}, \varepsilon = C_\mu^{0.75} k^{1.5} / (0.07 D_h), k = 1.5(U_0 \cdot I)^2,$$

где I – интенсивность турбулентных пульсаций, принималась равной 0.05; U_0 – скорость затекания воздуха в тамбур, 2.9 м/с; T_{in} – температура затекающего воздуха в тамбур, 230 К; D_h – гидравлический размер входного участка области, 7 м.

Граничные условия на **выходе** из области: $p = p_n - \rho g x_2$. Давление на нижней границе выхода $p_n = 101\,325$ Па, $g = 9.81$ м/с².

На стенках задавались условия прилипания $u_i = 0$. Предполагалось, что стенки тамбура являются адиабатическими, а стенки портала имеют постоянную температуру, равную 277 К.

Метод решения

Система уравнений (1)–(6) решалась численно с привлечением вычислительного пакета Ansys-Fluent. Для дискретизации по пространству использовалась противопоточная схема второго порядка аппроксимации. Расчет давления на гранях ячеек выполнялся с помощью схемы PRESTO! (PREssure STaggering Option). Связь между скоростью и давлением осуществлялась на основе алгоритма SIMPLE.

Для исследования влияния разностной сетки на результаты численного решения рассчитывалась среднемассовая температура в поперечных сечениях тамбура с координатами $x_3 = 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59$ м. Расчеты выполнялись на последовательности разностных сеток с шагом 0.25, 0.125 и 0.0625 м в направлении либо x_1 , либо x_2 , либо x_3 . Базовая разностная сетка имела характерный шаг, равный 0.25 м.

На рис. 3 показано изменение среднемассовой температуры вдоль тамбура в случае ТБУ, работающих в прямом режиме. Как видно, измельчение сетки

в продольном направлении тамбура практически не влияет на результаты расчета (рис. 3, *a*). Измельчение сетки в вертикальном направлении, ведет к снижению температуры на 1–2°C на промежутке от 23 до 35 м (рис. 3, *b*). Существенное влияние размер шага разностной сетки оказывает на распределение среднемассовой температуры в поперечном направлении (рис. 3, *c*). Из рисунка видно, что различие в среднемассовой температуре, полученной на разностных сетках с шагами 0.125 и 0.0625 м, существенно ниже, чем на разностных сетках 0.25 и 0.125 м, что свидетельствует о сходимости численного решения.

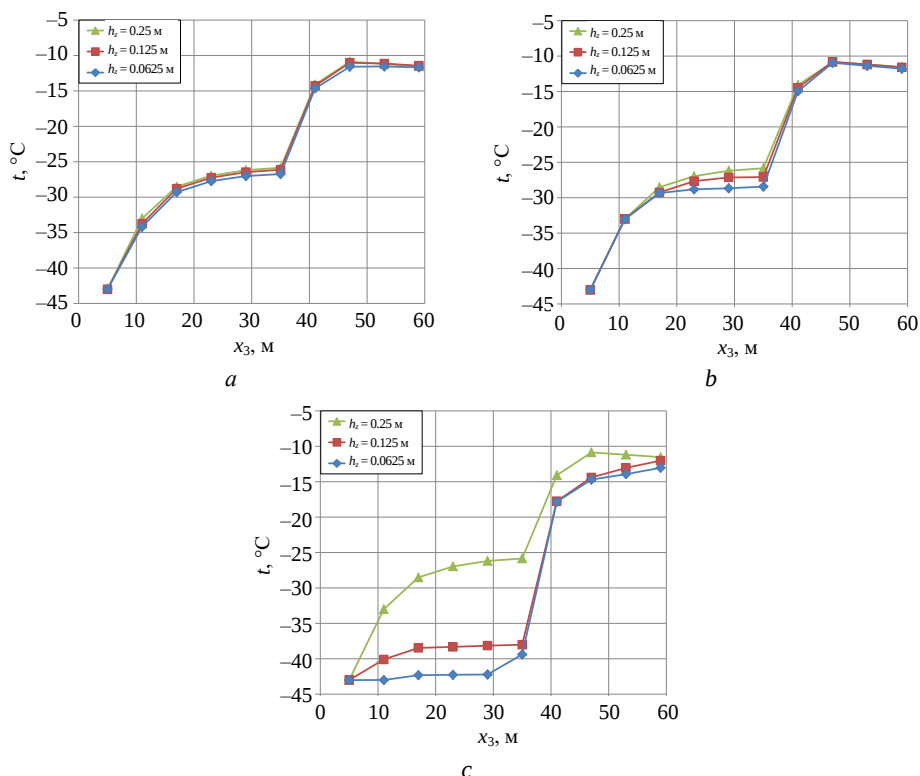


Рис. 3. Влияние шага разностной сетки на изменение среднемассовой температуры вдоль тамбура. Сгущение сетки в направлениях: *a* – продольном (x_3), *b* – вертикальном (x_2), *c* – поперечном (x_1)

Fig. 3. Effect of the difference grid step on the variation of the mass-average temperature along the tambour. Fine grid in the (a) longitudinal x_3 , (b) vertical x_2 , and (c) transverse x_1 directions

Влияние шага разностной сетки на распределение среднемассовой температуры вдоль тамбура в случае ТВУ, работающих в реверсивном режиме, несущественно. Результаты расчетов показывают, что среднее отклонение среднемассовых температур, полученных на сетках с шагом 0.25 и 0.0625 м, не превосходит 0.9°C по любому направлению, а среднее отклонение среднемассовых температур, полученных на сетках с шагом 0.125 и 0.0625 м, не превосходит 0.5°C.

Дальнейшие расчеты выполнялись на разностной сетке с шагом 0.0625 м в направлении x_1 , шагом 0.125 м в направлении x_2 и шагом 0.25 м в направлении x_3 .

Результаты расчетов и их обсуждение

Тепловое состояние тамбура для ТВУ, работающих в прямом режиме

На рис. 4, *a* показано поле температуры воздуха в поперечных сечениях тамбура, расположенных через каждые 6 м, в центральном вертикальном продольном сечении и в плоскости, соответствующей полу тамбура. На рис. 4, *b* показано поле температуры воздуха в центральном вертикальном продольном сечении. Поле векторов скоростей воздуха в центральном вертикальном продольном сечении показано на рис. 4, *c*. Цветовая палитра векторов скоростей соответствует температуре воздуха.

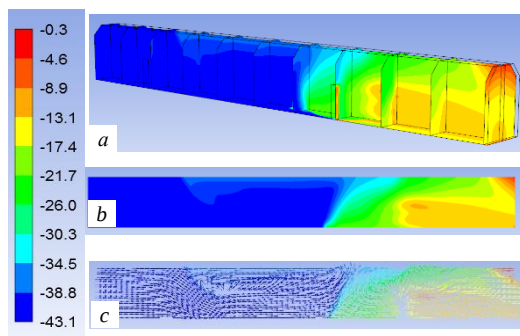


Рис. 4. Распределение параметров в тамбуре при работе ТВУ в прямом режиме:

a – поле температур в тамбуре; *b*, *c* – поле температур и векторов скоростей соответственно в центральном вертикальном продольном сечении

Fig. 4. Distribution of parameters in the tambour when the HVU operates in direct mode: (*a*) temperature field in the tambour; (*b*), (*c*) fields of temperature and velocity vectors, respectively, in the central vertical longitudinal section

Видно, что при параллельной организации работы ТВУ в прямом режиме холодный воздух проникает в тамбур по всей его высоте до места расположения проемов для забора воздуха в ТВУ, и далее холодный воздух движется до места выхода нагретого воздуха из ТВУ. Вследствие того, что холодный воздух затягивается в проемы 3 и в их окрестности реализуется опускное течение, холодный воздух смешивается с нагретым в ТВУ воздухом, и часть его продолжает движение в сторону портала, а другая часть поднимается вверх и движется в обратную сторону к месту расположения проемов для забора воздуха в ТВУ, где блокирует движение холодного воздуха в верхней части тамбура. Между проемами для забора воздуха в ТВУ 3 и выбросом воздуха из ТВУ 4 образуется циркуляционная зона. При этом основная масса нагретого воздуха движется в сторону портала. При этом часть воздуха поступает из верхней части портала.

На рис. 5 показано распределение среднemasсовой температуры воздуха вдоль тамбура, вычисленной в поперечных сечениях, приведенных на рис. 4, *a*. Повышение температуры происходит в окрестности проемов 4, откуда в тамбур поступает нагретый воздух. На участке длиной 25 м от входа в тамбур температура практически не изменяется. Основное повышение температуры от -40 до -18°C происходит на участке от 35 до 41 м в результате работы ТВУ. Далее, по мере

продвижения воздушной массы к выходу из тамбура в портал, ее температура плавно повышается до -13°C .

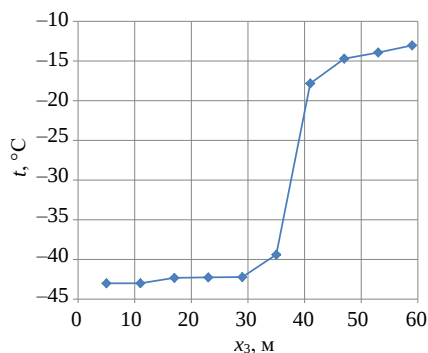


Рис. 5. Изменение среднemasовой температуры вдоль тамбура
Fig. 5. Variation of the mass-average temperature along the tambour

На рис. 6 приведены поля продольной скорости в горизонтальных сечениях, расположенных на высотах от 1 до 5 м, с шагом 1 м, над уровнем пола. Можно выделить три основных участка: начальный участок (от входа в тамбур до проема для забора воздуха в ТВУ), скорость движения воздуха на котором около 2–3 м/с; промежуточный участок (участок между проемами для забора воздуха в ТВУ и для выброса воздуха из ТВУ), скорость движения воздуха на котором составляет от -2 до $+2$ м/с; участок струйного течения (от проема для выброса воздуха из ТВУ до входа в портал), скорость движения воздуха на котором может достигать 16–17 м/с. На высоте 5 м скорость воздуха на третьем участке падает до 7–9 м/с.

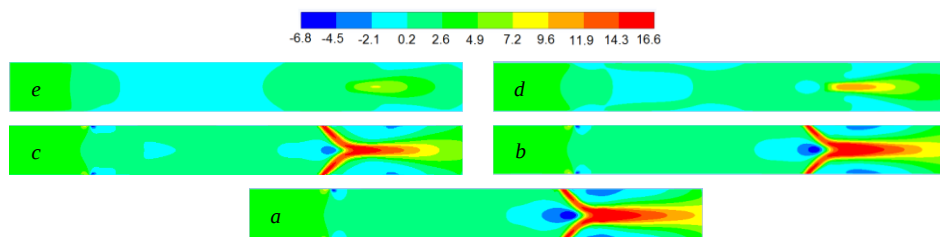


Рис. 6. Распределение продольной скорости на горизонтальных плоскостях тамбура:
 $a - y = 1$ м; $b - 2$ м; $c - 3$ м; $d - 4$ м; $e - 5$ м

Fig. 6. Longitudinal velocity distribution on the horizontal planes of the tambour:
 $y = (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4, \text{ and } (e) 5$ м

На рис. 7 приведены поля продольной скорости в центральном вертикальном продольном сечении.

На высотах от 0 до 2 м воздух движется в сторону портала, при этом скорость воздуха не превосходит 3 м/с практически по всей длине тамбура, за исключением третьего участка, где течение имеет струйный характер в силу выбрасываемого нагретого воздуха из выходных проемов работающих ТВУ. На этом участке продольная скорость движения воздуха имеет как отрицательные значения до -8.6 м/с, так и положительные до 16 м/с. На входе в портал на высоте от 5 м и выше при-

существует участок с отрицательной скоростью, где воздух поступает из портала в тамбур (см. рис. 4 с).

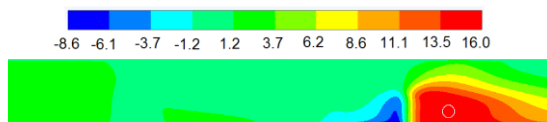


Рис. 7. Распределение продольной скорости в центральном вертикальном продольном сечении

Fig. 7. Longitudinal velocity distribution in the central vertical longitudinal section

На рис. 8 показана зависимость объемного расхода воздуха в разных поперечных сечениях тамбура от места положения этих сечений. На входе в тамбур объемный расход составляет $100 \text{ м}^3/\text{с}$. После прохождения проемов для забора воздуха в ТВУ объемный расход в тамбуре падает до $15 \text{ м}^3/\text{с}$ и остается неизменным вплоть до проема, служащего для выброса нагретого воздуха из ТВУ, после чего на участке длиной 12 м его значение монотонно повышается и достигает величины $112.5 \text{ м}^3/\text{с}$. Увеличение объемного расхода воздуха на выходе из тамбура по сравнению с объемным расходом на входе в тамбур объясняется повышением температуры воздуха за счет ТВУ, при этом массовый расход воздуха остается неизменным и равным $153 \text{ кг}/\text{с}$.

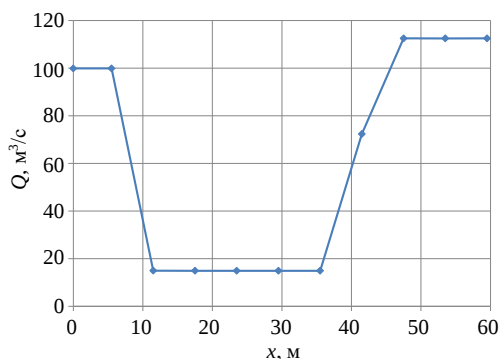


Рис. 8. Изменение объемного расхода воздуха вдоль тамбура

Fig. 8. Variation of the volumetric air flow rate along the tambour

На рис. 9, а–с показаны распределения температуры в характерных сечениях расчетной области: выход из тамбура, выход из портала, крайнее сечение тоннеля. Видно, что на выходе из тамбура перепад температуры по высоте достаточно велик и составляет 15°C (см. рис. 9, а). Вблизи пола тамбура температура может достигать -14°C , а вверху под крышей 1°C . Среднее значение температуры в этом сечении равно -13°C . После прохождения портала средняя температура воздуха повышается и достигает 0.7°C на выходе из портала, при этом перепад температур по высоте уменьшается и достигает 4°C (см. рис. 9, б). После прохождения 70 м участка транспортного тоннеля средняя температура воздуха немного повышается за счет обогрева о стенки тоннеля и достигает значения 1.0°C , при этом достигается еще большее выравнивание поля температуры по сечению (см. рис. 9, с).

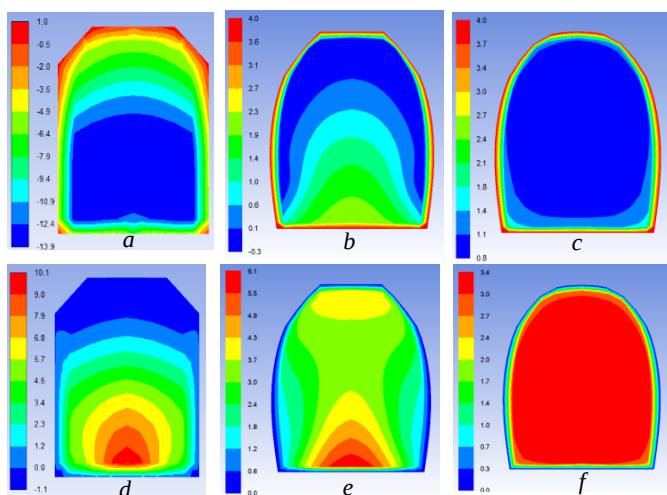


Рис. 9. Распределение параметров в характерных сечениях:
 а – выход из тамбура, б – выход из портала, с – сечение тоннеля;
 а, б, с – температура; d, e, f – продольная скорость;

Fig. 9. Distribution of parameters in the characteristic sections:
 (a) exit from the tambour, (b) exit from the portal, (c) section of the tunnel;
 (a), (b), (c) temperature; (d), (e), (f) longitudinal velocity

На рис. 9 d–f показаны распределения продольной скорости в характерных сечениях расчетной области: выход из тамбура, выход из портала, крайнее сечение тоннеля. Поле продольной скорости в выходном сечении тамбура характеризуется большими градиентами. Скорость воздуха в нижней части сечения достигает 9–10 м/с, в средней части имеет умеренные значения от 2 до 3 м/с, тогда как в верхней части воздух движется в противоположную сторону, его скорость отрицательна и равна –1 м/с (см. рис. 9, d). На выходе из портала скорость воздуха во всем сечении имеет положительные значения. В нижней части сечения значение продольной скорости повышено и достигает 6 м/с, тогда как в остальной части равна 2–4 м/с (см. рис. 9, e). После прохождения 70 м тоннеля распределение продольной скорости выравнивается и ее значение становится равным 3.4 м/с (см. рис. 9, f).

Тепловое состояние тамбура для ТВУ, работающих в реверсивном режиме

На рис. 10, а показано поле температуры воздуха в поперечных сечениях тамбура, расположенных через каждые 6 м, в центральном вертикальном продольном сечении и в плоскости, соответствующей полу тамбура. На рис. 10, б показано поле температуры воздуха в центральном вертикальном продольном сечении.

Видно, что при параллельной организации работы ТВУ в реверсивном режиме, в отличие от прямого режима, холодный воздух проникает в тамбур по всей его высоте только до места расположения проемов для выброса нагретого воздуха в ТВУ, которые находятся на расстоянии 10.5 м от входа в тамбур. Здесь холодный воздух смешивается с нагретым воздухом из ТВУ, и далее отепленный воздух движется в сторону расположения проемов для забора воздуха и далее в сторону портала.

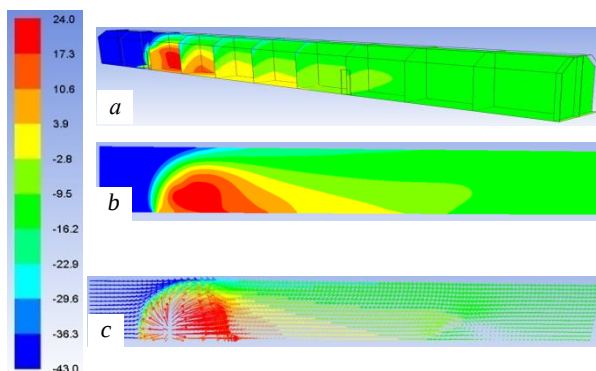


Рис. 10. Распределение параметров в тамбуре при работе ТВУ в реверсивном режиме:
 а – поле температур в тамбуре; б, с – поле температур и векторов скоростей
 соответственно в центральном вертикальном продольном сечении

Fig. 10. Distribution of parameters in the tambour when the HVU operates in reverse mode:
 (a) temperature field in the tambour; (b), (c) fields of temperature and velocity vectors,
 respectively, in the central vertical longitudinal section

Поле векторов скоростей воздуха в центральном вертикальном продольном сечении показано на рис. 10, с. Цветовая палитра векторов скоростей соответствует температуре воздуха. Здесь, в отличие прямого режима работы ТВУ, между проемами для выброса воздуха из ТВУ и забора воздуха в ТВУ циркуляционной зоны не образуется. Имеется небольшая вихревая зона вблизи проема для забора воздуха в ТВУ, после которой воздух движется практически параллельно полу тамбура с постоянной температурой около -14°C .

На рис. 11 показано распределение среднemasсовой температуры воздуха вдоль тамбура, вычисленной в поперечных сечениях, приведенных на рис. 10, а. Повышение температуры происходит одноступенчато с -43 до -7°C за счет выброса нагретого воздуха из ТВУ.

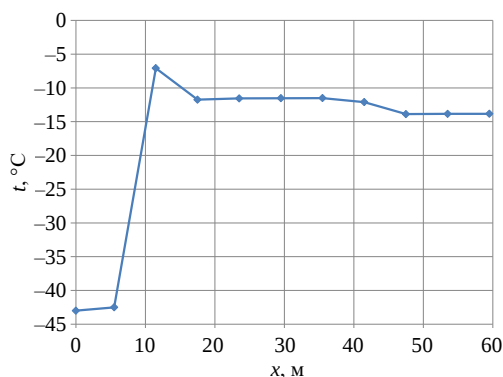


Рис. 11. Изменение среднemasсовой температуры вдоль тамбура

Fig. 11. Variation of the mass-average temperature along the tambour

Далее температура снижается на 5°C из-за перемешивания с холодным воздухом и остается постоянной до точки забора воздуха в ТВУ, после чего происходит

понижение температуры воздуха на 3°C . К выходу из тамбура в портал значение температуры достигает -13°C .

На рис. 12 приведены поля продольной скорости в горизонтальных сечениях, расположенных на высотах от 1 до 5 м, с шагом 1 м, над уровнем пола. Здесь, как и для прямого режима работы ТВУ, можно выделить три основных участка: начальный участок (от входа в тамбур до проема для выброса воздуха из ТВУ), скорость движения воздуха на котором около 2–3 м/с; промежуточный участок (участок между проемами для выброса воздуха из ТВУ и для забора воздуха в ТВУ), скорость движения воздуха на котором изменяется от 2 до 15 м/с в зависимости от высоты горизонта; участок (от проема для забора воздуха в ТВУ до входа в портал), скорость движения воздуха на котором находится в пределах от –3 до 3 м/с.

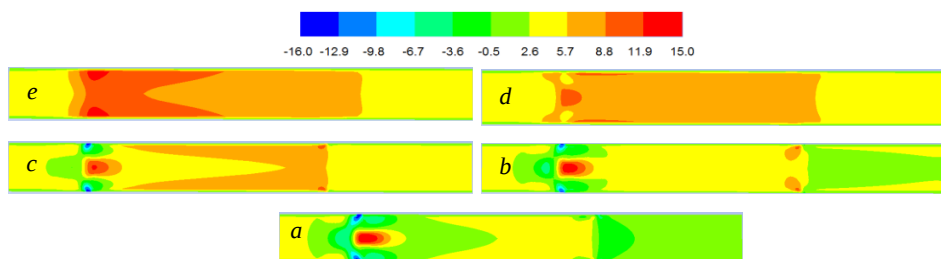


Рис. 12. Распределение продольной скорости на горизонтальных плоскостях тамбура:

$a - y = 1$ м, $b - 2$ м, $c - 3$ м, $d - 4$ м, $e - 5$ м

Fig. 12. Longitudinal velocity distribution on the horizontal planes of the tambour:

$y = (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4$, and $(e) 5$ m

На рис. 13 приведены поля продольной скорости в центральном вертикальном продольном сечении.

Видно, что на всех горизонтах на уровне места выброса воздуха из ТВУ в центральной части тамбура формируется зона с высоким значением продольной скорости, до 11–15 м/с. За этой зоной скорость воздуха понижается с уменьшением высоты. На границе первого участка и второго, на высотах от 1 до 3 м, имеют место области, где воздух движется навстречу основному потоку (струйный характер течения (синий цвет на рис. 10, $a-c$)) и скорость достигает 16 м/с.

На горизонте 1 м в окрестности точки забора воздуха в ТВУ формируется зона с отрицательным значением продольной скорости до –16 м/с, после которой на всех горизонтах воздух движется в сторону портала со скоростью 2–3 м/с.

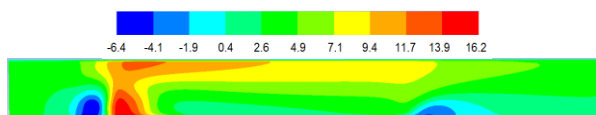


Рис. 13. Распределение продольной скорости в центральном вертикальном продольном сечении тамбура

Fig. 13. Longitudinal velocity distribution in the central vertical longitudinal section of the tambour

На рис. 14 показана зависимость объемного расхода воздуха в разных поперечных сечениях тамбура от местоположения этих сечений. На входе в тамбур объемный расход составляет $100 \text{ м}^3/\text{с}$. После прохождения проемов для выброса

воздуха из ТВУ объемный расход в тамбуре возрастает до $206.4 \text{ м}^3/\text{с}$ и остается неизменным вплоть до проема, служащего для забора подогретого воздуха в ТВУ, после чего на участке длиной 12 м его значение монотонно понижается и достигает величины $112.5 \text{ м}^3/\text{с}$. Увеличение объемного расхода воздуха на выходе из тамбура по сравнению с объемным расходом на входе в тамбур объясняется повышением температуры воздуха за счет ТВУ, при этом массовый расход воздуха остается неизменным и равным $153 \text{ кг}/\text{с}$.

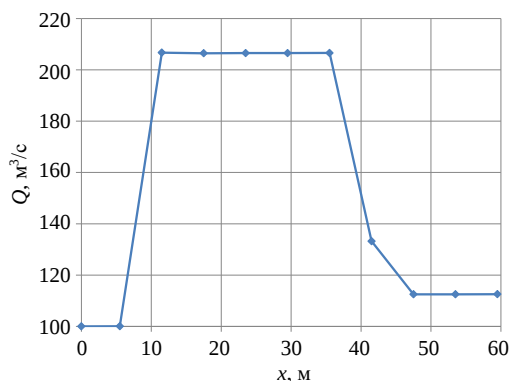


Рис. 14. Изменение объемного расхода воздуха вдоль тамбура
Fig. 14. Variation of the volumetric air flow rate along the tambour

На рис. 15, *a–c* показаны распределения температуры в характерных сечениях расчетной области: выход из тамбура, выход из портала, крайнее сечение тоннеля. Видно, что на выходе из тамбура перепад температуры по высоте небольшой и составляет 3°C (см. рис. 15, *a*). Вблизи пола тамбура температура достигает -13°C , а вверху под крышей -15°C . Среднее значение температуры в этом сечении равно -13.8°C . Незначительный перепад температуры по высоте объясняется лучшими условиями перемешивания холодного и нагретого воздуха по сравнению со схемой обогрева 1, поскольку место перемешивания находится дальше от входа в портал на 30 м.

После прохождения портала средняя температура воздуха повышается и достигает 0°C на выходе из портала, при этом перепад температур по высоте увеличивается за счет работы ТВУ в портале и достигает 4.6°C (см. рис. 15, *b*). После прохождения 70 м участка транспортного тоннеля средняя температура воздуха немного повышается за счет обогрева о стенки тоннеля и достигает значения 0.6°C , при этом перепад температур не превышает 1.5°C (см. рис. 15, *c*).

Распределения продольной скорости в характерных сечениях расчетной области показаны на рис. 15, *d–f*: выход из тамбура, выход из портала, крайнее сечение тоннеля. Поле продольной скорости в выходном сечении тамбура характеризуется умеренными градиентами. Воздух в каждой точке сечения движется в сторону портала. Обратное течение, что имело место для схемы 1, отсутствует. Скорость воздуха в нижней части сечения равна $1\text{--}2 \text{ м}/\text{с}$, в средней части имеет умеренные значения от 3 до $4 \text{ м}/\text{с}$, тогда как в верхней части скорость движения воздуха достигает $4.8 \text{ м}/\text{с}$ (см. рис. 15, *d*). На выходе из портала скорость во всем сечении имеет положительные значения.

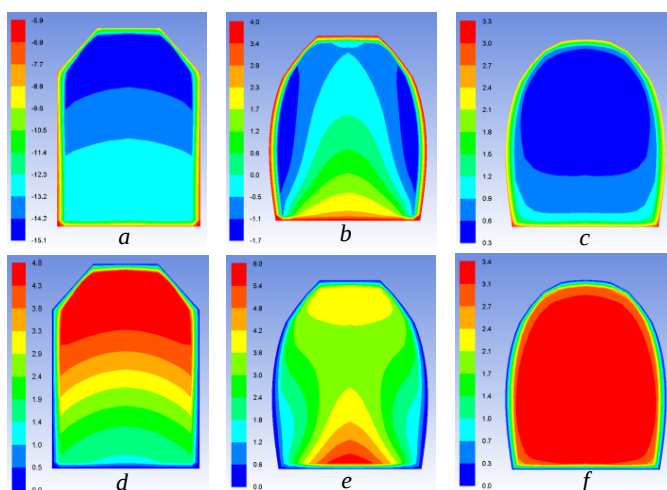


Рис. 15. Распределение параметров в характерных сечениях:

a – выход из тамбура, *b* – выход из портала, *c* – сечение тоннеля;

a, b, c – температура; *d, e, f* – продольная скорость

Fig. 15. Distribution of parameters in the characteristic sections:

(a) exit from the tambour, *(b)* exit from the portal, *(c)* section of the tunnel;

(a), (b), (c) temperatures; *(d), (e), (f)* longitudinal velocity

В нижней части сечения значение продольной скорости повышено и достигает 6 м/с, тогда как в остальной части равна 2–4 м/с (см. рис. 15, *e*). После прохождения 70 м тоннеля распределение продольной скорости выравнивается и ее значение становится равным 3.4 м/с (рис. 15, *f*).

Заключение

1. Схема обогрева 1 с прямым режимом работы ТВУ в тамбуре не позволяет обеспечить равномерное движение воздуха по высоте проема порталных ворот, при этом около пола продольная скорость достигает 10 м/с, а вверху ворот формируется возвратная зона течения с отрицательной продольной скоростью от –1 до –2 м/с. В случае реализации схемы 1 перепад температур по высоте ворот достигает 15°C, причем зона холодного воздуха может находиться вблизи пола.

2. Схема обогрева 2 с реверсивным режимом работы ТВУ в тамбуре обеспечивает относительно равномерное движение воздуха по высоте проема порталных ворот, причем значение продольной скорости увеличивается от 1 до 5 м/с по мере подъема от пола вверх. Схема обогрева 2 обеспечивают равномерное распределение температуры в сечении порталных ворот с перепадом температур 3°C.

3. При реверсивной схеме 2 обогрева тамбура средняя температура на входе в портал составляет –13.8°C, а для прямой схемы обогрева 1 эта температура равна –13°C.

4. В случае реверсивной схемы 2 обогрева тамбура холодный наружный воздух проникает не более чем на 10–15 м вглубь тамбура по всей его высоте, тогда как для прямой схемы 1 обогрева воздух может проникать вглубь до 30 м и более.

Список источников

1. Zhou X., Zeng Y., Fan L. Temperature field analysis of a cold-region railway tunnel considering mechanical and train-induced ventilation effects // *Applied Thermal Engineering*. 2016. V. 100. P. 114–124. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2016.01.070
2. Zeng Y., Liu K., Zhou X., Fan L. Tunnel temperature fields analysis under the couple effect of convection-conduction in cold regions // *Applied Thermal Engineering*. 2017. V. 120. P. 378–392. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2017.03.143
3. Liu C., Li P., Wang X., Yu H., Lyu M., Wu H., Guo Z. Thermal environment analysis for the deep-buried TBM construction tunnel considering the influences of surrounding rock heat transfer and ventilation system // *Thermal Science and Engineering Progress*. 2024. V. 48. Art. 102406. doi: 10.1016/j.tsep.2024.102406
4. Tao Y., Hu H., Zhang H., Zhang G., Hao Z., Wang L. A new ventilation system for extra-long railway tunnel construction by using the air cabin relay: A case study on optimization of air cabin parameters length // *Journal of Building Engineering*. 2022. V. 45. Art. 103480. doi: 10.1016/j.jobbe.2021.103480
5. Гендлер С.Г., Савенков Е.А. Использование струйных вентиляторов для проветривания железнодорожных тоннелей // *Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал)*. 2015. № S7. С. 26–31.
6. Zeng Y., Tao L., Ye X., Zhou X., Fang Y., Fan L., Liu X., Yang Z. Temperature reduction for extra-long railway tunnel with high geotemperature by longitudinal ventilation // *Tunnelling and Underground Space Technology*. 2020. V. 99. Art. 103381. doi: 10.1016/j.tust.2020.103381
7. Zhang G., Jiang Z., Wang H., Jing X., Si M., Zeng F., Yang B., Yang X., Feng R. The coupled cooling effect of ventilation and spray in the deep-buried high-temperature tunnel // *Case Studies in Thermal Engineering*. 2023. V. 45. Art. 103011. doi: 10.1016/j.csite.2023.103011
8. Niu J., Sui Y., Yu Q., Cao X., Yuan Y. Aerodynamics of railway train/tunnel system: A review of recent research // *Energy and Built Environment*. 2020. V. 1 (4). P. 351–375. doi: 10.1016/j.enbenv.2020.03.003
9. Krasnyuk A.M., Lugin I.V., Alferova E.L. Air distribution in long transportation tunnels of the Baikal Amur Mainline (BAM) // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2020. V. 523. Art. 012011. doi: 10.1088/1755-1315/523/1/012011
10. Красюк А.М., Лугин И.В., Алферова Е.Л. Исследование воздухораспределения в протяженных транспортных тоннелях БАМ // *Интерэкспо Гео-Сибирь*. 2019. Т. 2, № 4. С. 114–121. doi: 10.33764/2618-981X-2019-2-4-114-121
11. Лугин И.В., Алферова Е.Л. Теплотери при движении поезда по подземному тоннелю при различных условиях эксплуатации // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук*. 2019. Т. 6, № 2. С. 181–185. doi: 10.15372/FPVGN2019060231
12. Гендлер С.Г., Белов М.Р. Основные направления модернизации тепловентиляционной системы Северомуйского тоннеля при увеличении размера движения подвижного состава // *Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал)*. 2019. № S6. С. 45–57. doi: 10.25018/0236-1493-2019-4-6-45-57
13. Кияница Л.А., Лугин И.В., Красюк А.М. Исследование тепловых режимов протяженных железнодорожных горных тоннелей в холодный период года // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. 2021. Т. 57, № 1. С. 169–188. doi: 10.15372/FTPRPI20210116
14. Гендлер С.Г., Синявина С.В. Методика определения параметров системы подогрева воздуха в железнодорожных тоннелях, расположенных в суровых климатических условиях // *Записки Горного института*. 2017. Т. 224. С. 215–222. doi: 10.18454/PMI.2017.2.215
15. Кияница Л.А., Лугин И.В., Красюк А.М. Пути обеспечения температурных режимов протяженных транспортных тоннелей БАМ в холодный период года // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук*. 2020. Т. 7, № 1. С. 298–303. doi: 10.15372/FPVGN2020070147

16. Гендлер С.Г., Синявина С.В. Особенности управления вентиляционным режимом нового Байкальского железнодорожного тоннеля // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 11. С. 173–179.
17. Гендлер С.Г., Смирняков В.А., Терентьев Р.П. Повышение эффективности обеспечения безопасной эксплуатации железнодорожных тоннелей в суровых климатических условиях // Записки Горного института. 2001. Т. 147. С. 86–94.
18. Kiyantsa L.A., Lugin I.V., Krasnyk A.M. Means of providing temperature regimes for extended transport tunnels of the Baikal-Amur Railway in the cold period of the year // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2022. V. 991. Art. 012033. doi: 10.1088/1755-1315/991/1/012033
19. Гендлер С.Г. Проблемы проветривания транспортных тоннелей // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2005. № S2. С. 282–295.
20. Куликова О.А., Лугин И.В. Исследование интенсивности процесса теплообмена при движении поезда по протяженному железнодорожному тоннелю в холодный период года // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2017. Т. 2, № 2. С. 85–88.
21. Lugin I.V. Mathematical modeling of air distribution dynamics due to piston effect of trains in long railway tunnels // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2022. V. 991. Art. 012034. doi: 10.1088/1755-1315/991/1/012034
22. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., Zhu J. A New Eddy Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows // Computers Fluids. 1995. V. 24 (3). P. 227–238. doi: 10.1016/0045-7930(94)00032-T

References

1. Zhou X., Zeng Y., Fan L. (2016) Temperature field analysis of a cold-region railway tunnel considering mechanical and train-induced ventilation effects. *Applied Thermal Engineering*. 100. pp. 114–124. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2016.01.070
2. Zeng Y., Liu K., Zhou X., Fan L. (2017) Tunnel temperature fields analysis under the couple effect of convection-conduction in cold regions. *Applied Thermal Engineering*. 120. pp. 378–392. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2017.03.143
3. Liu C., Li P., Wang X., Yu H., Lyu M., Wu H., Guo Z. (2024) Thermal environment analysis for the deep-buried TBM construction tunnel considering the influences of surrounding rock heat transfer and ventilation system. *Thermal Science and Engineering Progress*. 48. Article 102406. doi: 10.1016/j.tsep.2024.102406
4. Tao Y., Hu H., Zhang H., Zhang G., Hao Z., Wang L. (2022) A new ventilation system for extra-long railway tunnel construction by using the air cabin relay: A case study on optimization of air cabin parameters length. *Journal of Building Engineering*. 45. Article 103480. doi: 10.1016/j.jobbe.2021.103480
5. Gendler S.G., Savenkov E.A. (2015) Ispl'zovanie struynykh ventilyatorov dlya provetrivaniya zhelezнодорожных tonneley [Usage pattern of jet fans for ventilation of railway tunnels]. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten' (nauchno-tehnicheskiy zhurnal) – Mining Information and Analytical Bulletin (Scientific and Technical Journal)*. S7. pp. 26–31.
6. Zeng Y., Tao L., Ye X., Zhou X., Fang Y., Fan L., Liu X., Yang Z. (2020) Temperature reduction for extra-long railway tunnel with high geotemperature by longitudinal ventilation. *Tunnelling and Underground Space Technology*. 99. Article 103381. doi: 10.1016/j.tust.2020.103381
7. Zhang G., Jiang Z., Wang H., Jing X., Si M., Zeng F., Yang B., Yang X., Feng R. (2023) The coupled cooling effect of ventilation and spray in the deep-buried high-temperature tunnel. *Case Studies in Thermal Engineering*. 45. Article 103011. doi: 10.1016/j.csite.2023.103011
8. Niu J., Sui Y., Yu Q., Cao X., Yuan Y. (2020) Aerodynamics of railway train/tunnel system: A review of recent research. *Energy and Built Environment*. 1(4). pp. 351–375. doi: 10.1016/j.enbenv.2020.03.003

9. Krasnyuk A.M., Lugin I.V., Alferova E.L. (2020) Air distribution in long transportation tunnels of the Baikal Amur Mainline (BAM). *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 523. Article 012011. doi: 10.1088/1755-1315/523/1/012011
10. Krasnyuk A.M., Lugin I.V., Alferova E.L. (2019) Issledovanie vozdukhoraspredeleniya v protyazhennykh transportnykh tonnellyakh BAM [Study of air distribution at elongated transport tunnels of Baikal-Amur mainline]. *Interexpo Geo-Sibir*. 2(4). pp. 114–121. doi: 10.33764/2618-981X-2019-2-4-114-121
11. Lugin I.V., Alferova E.L. (2019) Teplopoteri pri dvizhenii poezda po podzemnomu tonnelyu pri razlichnykh usloviyakh ekspluatatsii [Heat losses during train movement in an underground tunnel under various operating conditions]. *Fundamental'nye i prikladnye voprosy gornykh nauk – Fundamental and Applied Issues of Mining*. 6(2). pp. 181–185. doi: 10.15372/FPVGN2019060231
12. Gendler S.G., Belov M.R. (2019) Osnovnye napravleniya modernizatsii teploventilyatsionnoy sistemy Severomuyskogo tonnellya pri uvelichenii dvizheniya podvizhnogo sostava [Main directions of upgrading Severomuysky railway tunnel ventilation when there is an increase of the amount of traffic of the rolling stock]. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten' (nauchno-tehnicheskiy zhurnal) – Mining Informational and Analytical Bulletin (Scientific and Technical Journal)*. S6. pp. 45–57. doi: 10.25018/0236-1493-2019-4-6-45-57
13. Kiyanita L.A., Lugin I.V., Krasnyuk A.M. (2021) The analysis of thermal conditions in extra-long railway tunnels during the cold season. *Journal of Mining Science*. 57(1). pp. 154–170. doi: 10.1134/S1062739121010166
14. Gendler S.G., Sinyavina S.V. (2017) Method of determining characteristics for air heating system in railway tunnels in harsh climatic conditions. *Journal of Mining Institute*. 224. pp. 215–222. doi: 10.18454/PMI.2017.2.215
15. Kiyanita L.A., Lugin I.V., Krasnyuk A.M. (2020) Puti obespecheniya temperaturnykh rezhimov protyazhennykh transportnykh tonney BAM v kholodnyy period goda [Means of providing temperature regimes for extended transport tunnels of the Baikal-Amur railway in the cold period of the year]. *Fundamental'nye i prikladnye voprosy gornykh nauk – Fundamental and Applied Issues of Mining*. 7(1). pp. 298–303. doi: 10.15372/FPVGN2020070147
16. Gendler S.G., Sinyavina S.V. (2015) Osobennosti upravleniya ventilyatsionnym rezhimom novogo Baykal'skogo zheleznodorozhnogo tonnellya [Features of control of the new Baykalsk railway tunnel ventilating mode]. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten' (nauchno-tehnicheskiy zhurnal) – Mining Information and Analytical Bulletin (Scientific and Technical Journal)*. 11. pp.173–179.
17. Gendler S.G., Smirnyakov V.V., Terent'ev R.P. (2001) Povyshenie effektivnosti obespecheniya bezopasnoy ekspluatatsii zheleznodorozhnykh tonney v surovyykh klimaticheskikh usloviyakh [Improving the efficiency of safe operation of railway tunnels in severe climatic conditions]. *Zapiski gornogo instituta – Journal of Mining Institute*. 147. pp. 86–94.
18. Kiyanita L.A., Lugin I.V., Krasnyuk A.M. (2022) Means of providing temperature regimes for extended transport tunnels of the Baikal-Amur Railway in the cold period of the year. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 991. Article 012033. doi: 10.1088/1755-1315/991/1/012033
19. Gendler S.G. (2005) Problemy provetrivaniya transportnykh tonney [Ventilation problems in transport tunnels]. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten' – Mining Information Analytical Bulletin*. S2. pp. 282–295.
20. Kulikova O.A., Lugin I.V. (2017) Issledovanie intensivnosti protsessa teploobmena pri dvizhenii poezda po protyazhennomu tonnelyu v kholodnyy period goda [Investigation into heat exchange intensity in freight train motion at a long-extended railway tunnel in cold season period]. *Interexpo Geo-Sibir*. 2(2). pp. 85–88.
21. Lugin I.V. (2022) Mathematical modeling of air distribution dynamics due to piston effect of trains in long railway tunnels. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 991. Article 012034. doi: 10.1088/1755-1315/991/1/012034

22. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., Zhu J. (1995) A new eddy viscosity model for high Reynolds number turbulent flows. *Computers Fluids*. 24(3). pp. 227–238. doi: 10.1016/0045-7930(94)00032-T

Сведения об авторах:

Оберемок Андрей Александрович – аспирант кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: oberemokaa@minesoft.ru

Крайнов Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

Миньков Леонид Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Information about the authors:

Oberemok Andrey A. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: oberemok@minesoft.ru

Krainov Aleksey Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

Min'kov Leonid L. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 22.04.2024; принята к публикации 07.02.2025

The article was submitted 22.04.2024; accepted for publication 07.02.2025

Научная статья

УДК 623.52, 544.452, 533.1

doi: 10.17223/19988621/93/13

Исследование горения высокоплотного топлива в условиях комбинированной схемы заряжания

Константин Сергеевич Рогаев¹, Алексей Сергеевич Дьячковский²,
Нина Михайловна Саморокова³, Александр Николаевич Ищенко⁴,
Алексей Дмитриевич Сидоров⁵, Антон Юрьевич Саммель⁶,
Валерий Арсеньевич Бураков⁷, Алена Сергеевна Шестопалова⁸

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ rogaev@ftf.tsu.ru

² lex_okha@mail.ru

³ Samorokova_nina@mail.ru

⁴ ichan@niipmm.tsu.ru

⁵ alex_sid92@mail.ru

⁶ anton_sammel@mail.ru

⁷ valera_buracov@mail.ru

⁸ shestopalova@ftf.tsu.ru

Аннотация. Рассмотрены особенности диспергирования и горения высокоплотного пастообразного топлива в условиях модельной баллистической установки. Проведена серия экспериментальных исследований с включением в состав метательного заряда высокоплотных топлив. Выполнен газодинамический анализ картины метания при использовании классической и комбинированной схем заряжания с включением высокоплотных топлив. Получен прирост дульной скорости метаемого элемента при использовании комбинированной схемы заряжания в сравнении с классической схемой заряжания при сохранении максимального давления на дно ускорительного канала.

Ключевые слова: баллистический стенд, модельное топливо, пастообразное топливо, горение, комбинированная схема заряжания, газовая динамика, внутренняя баллистика

Благодарности: Экспериментальные исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-10054, <https://rscf.ru/project/21-79-10054/>. Теоретические исследования выполнены при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

Для цитирования: Рогаев К.С., Дьячковский А.С., Саморокова Н.М., Ищенко А.Н., Сидоров А.Д., Саммель А.Ю., Бураков В.А., Шестопалова А.С. Исследование горения высокоплотного топлива в условиях комбинированной схемы заряжания // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 160–171. doi: 10.17223/19988621/93/13

A study of high-density propellant combustion in the framework of a combined loading scheme

Konstantin S. Rogaev¹, Aleksey S. D'yachkovskiy², Nina M. Samorokova³, Aleksandr N. Ishchenko⁴, Aleksey D. Sidorov⁵, Anton Yu. Sammel⁶, Valeriy A. Burakov⁷, Alyona S. Shestopalova⁸

^{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ rogaev@ftf.tsu.ru

² lex_okha@mail.ru

³ Samorokova_nina@mail.ru

⁴ ichan@niipmm.tsu.ru

⁵ alex_sid92@mail.ru

⁶ anton_sammel@mail.ru

⁷ valera_buracov@mail.ru

⁸ shestopalova@ftf.tsu.ru

Abstract. This paper examines the application of high-density propellants as part of propellant charge. The design and scheme of a ballistic test setup with a packaged model ballistic installation are presented. A series of experimental studies is carried out with the use of high-density propellants as part of the propellant charge. Thus, the basic ballistic characteristics of projectile launching are obtained. Using gas-dynamic methods developed at the Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, the dispersion and combustion of a high-density propellant as part of a combined loading scheme are considered. A gas-dynamic analysis of the launching pattern is performed using the classical and combined loading schemes with the addition of high-density propellants. It is revealed that a portion of the high-density propellant is pushed out of the loading chamber into the accelerator channel following the projectile and burns in the space around the projectile. As a result, the pressure on the projectile bottom decreases at a slower rate. An increase in the muzzle velocity of the projectile is obtained when using a combined loading scheme compared with the classical scheme at the same maximum pressure on the bottom of the accelerator channel.

Keywords: ballistic test setup, model propellant, paste-like propellant, combustion, combined loading scheme, gas dynamics, internal ballistics

Acknowledgments: The experimental study was carried out at the expenses of the Russian Science Foundation (project No. 21-79-10054, <https://rscf.ru/project/21-79-10054/>). The theoretical study was financially supported by the Tomsk State University Development Program (Priority 2030).

For citation: Rogaev, K.S., D'yachkovskiy, A.S., Samorokova, N.M., Ishchenko, A.N., Sidorov, A.D., Sammel', A.Yu., Burakov, V.A., Shestopalova, A.S. (2025) A study of high-density propellant combustion in the framework of a combined loading scheme. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 160–171. doi: 10.17223/19988621/93/13

Введение

Перспективным в области ствольных систем метания является использование нетрадиционных схем заряжения с включением новых топлив для повышения начальной скорости метания [1–4]. Одна из таких схем – комбинированная схема заряжения, где топливо размещается в верхнем полузаряде [5–6]. Использование данной схемы обладает такими преимуществами, как повышение средней плотности заряжения (при использовании топлив, насыпная плотность которых превышает 1 г/см^3) и перераспределение энергии продуктов сгорания в заснарядном пространстве [7–8]. Для использования данных преимуществ на практике необходимо учитывать фундаментальные основы по горению и диспергированию данных топлив в процессе выстрела в заснарядном пространстве метательной установки.

Цель настоящего исследования – получение газодинамической картины выстрела в условиях модельной ствольной установки с применением комбинированной схемы заряжения. Комбинированная схема заряжения использует традиционный зерненный метательный заряд с модельным высокоплотным топливом, располагаемым в верхнем полузаряде.

Экспериментальные исследования

В качестве метательной установки использовалась модельная баллистическая установка калибром 12.7 мм с длиной канала ускорителя 89 см. Внешний вид и схема баллистического стенда с модульной модельной баллистической установкой представлены на рис. 1.

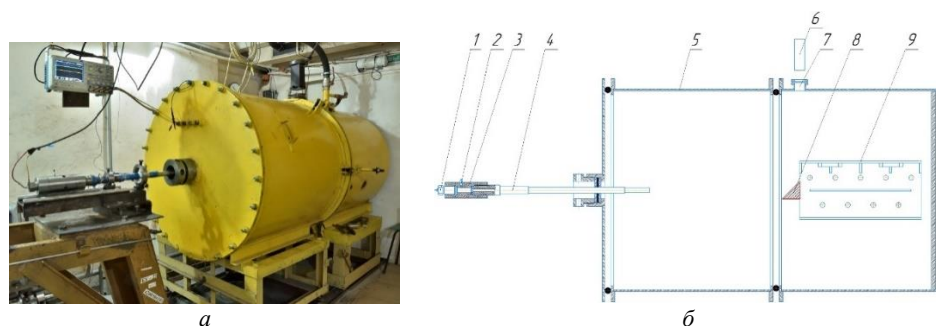


Рис. 1. Внешний вид (а) и схема (б) баллистического стенда с модульной модельной баллистической установкой: 1 – винтовой затвор с воспламенителем; 2 – датчик давления; 3 – камера заряжения; 4 – канал ускорителя; 5 – вакуумный глушитель; 6 – СВЧ-радар; 7 – иллюминатор; 8 – зеркало для СВЧ-радара; 9 – пулеприемник

Fig. 1. (a) Design and (b) scheme of a ballistic test setup with a packaged model ballistic installation: 1, screwed closure with igniter; 2, pressure sensor; 3, loading chamber; 4, accelerator channel; 5, vacuum suppressor; 6, microwave radar; 7, viewport; 8, mirror for microwave radar; and 9, bullet receiver

При проведении экспериментальных исследований регистрировались следующие параметры: давление газа, скорость, ускорение метаемого элемента (МЭ) и его положение в канале ускорителя. Зависимость давления в камере заряжения от времени измерялась при помощи пьезокварцевых датчиков 2Т6000 и комплек-

са аппаратуры «Нейва-10000», погрешность измерения согласно паспорту прибора составляет не более 3%. Для регистрации скорости МЭ в канале ускорителя в экспериментах использовался СВЧ-радар, принцип работы которого основан на эффекте Доплера, погрешность измерения согласно паспорту прибора составляет не более 1%. Регистрация момента вылета МЭ из ствола осуществлялась оптическим способом по наличию дульной вспышки при помощи фотодетектора, основанного на фотодиоде BPW34 и располагавшегося недалеко от дульного среза ускорителя. Регистрация и обработка всех сигналов осуществлялись на измерительно-регистрирующем комплексе НИИ ПММ ТГУ.

В работе рассматривались классическая и комбинированная схемы заряжания при использовании модельных высокоплотных топлив, представленные на рис. 2. Классическая схема заряжания использует в своем составе только традиционный зерненный одноканальный метательный заряд. Комбинированная схема заряжания с модельным высокоплотным топливом реализовывалась за счет замещения части традиционного заряда на пастообразное модельное высокоплотное топливо, располагаемое в камере заряжания.

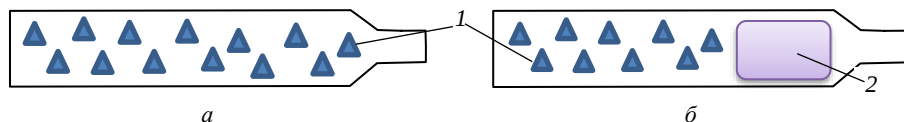


Рис. 2. Схемы заряжания: *а* – классическая схема заряжания; *б* – комбинированная схема заряжания; 1 – традиционный заряд; 2 – модельное высокоплотное топливо

Fig. 2. (a) Classical and (b) combined loading schemes: 1, traditional charge and 2, model high-density propellant

Для проверки работоспособности основных узлов и технических решений модельной баллистической установки и отработки систем измерений проведены эксперименты с применением классической схемы заряжания при использовании одноканального зернового заряда. При проведении экспериментов получены зависимости давления в камере заряжания и скорости МЭ от времени, отметка вылета МЭ из канала ускорителя.

Под модельным высокоплотным топливом понимается топливо, насыпная плотность которого составляет $\sim 1.5 \text{ г/см}^3$, что на 50% больше в сравнении с традиционными зерновыми зарядами (1 г/см^3). Применение высокоплотных топлив позволяет повысить энергетику выстрела без изменения геометрии камеры заряжания – за счет повышения плотности заряжания. Чтобы снизить максимальное давление в камере заряжания необходимо часть заряда воспламенить с некоторой задержкой. Для формирования некоторой величины задержки воспламенения модельного высокоплотного топлива, располагаемого около метающей сборки, его помещали в полиэтиленовый картуз. На рис. 3 показан внешний вид традиционного метательного заряда, находящегося в бумажном картузе, и модельного высокоплотного топлива в полиэтиленовом картузе.

Так как топливо пастообразное, наличие деформируемого картуза позволяет части высокоплотного топлива во время выстрела переместиться в канал ускорителя непосредственно в заснарядное пространство, где и происходит его основное горение, локально повышающее давление. Перераспределение энергии в засна-

рядном пространстве позволяет повысить дульную скорость МЭ при сохранении уровня максимального давления в камере заряжания.

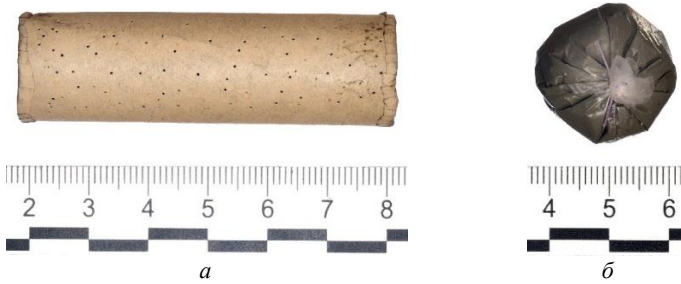


Рис. 3. Внешний вид картузов с традиционным зарядом (а) и модельным высокоплотным топливом (б)

Fig. 3. Cartridge bag design with (a) traditional charge and (b) model high-density propellant

Для правильного понимания всех процессов, происходящих во время выстрела с модельным высокоплотным топливом, проведен опыт, позволяющий разделить энергетический вклад зернового заряда и топлива в газодинамическую картину. Особенностью опыта является формирование условий горения зернового заряда, максимально близких к условиям применения высокоплотного топлива до момента его воспламенения. Для этого вместо исследуемого топлива в заряд помещается пастообразный инертный (не горящий) заряд, по физическим характеристикам максимально приближенный к исследуемому топливу. На рис. 4 представлены результаты экспериментов с одинаковой навеской с инертным составом и высокоплотными топливами марок Т1 и Т2.

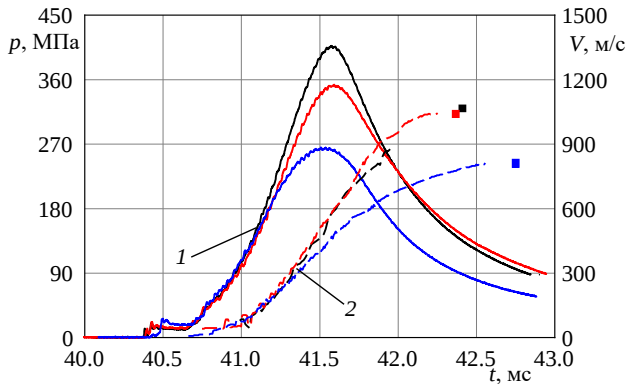


Рис. 4. Экспериментальные зависимости давления газа и скорости МЭ от времени:
■ – скорость в момент вылета МЭ; 1 – давление газа; 2 – скорость МЭ;
— — с инертным зарядом; — — с топливом Т1; — — с топливом Т2

Fig. 4. Experimental time dependences of gas pressure and projectile speed:
■ – projectile speed when leaving the barrel; 1, gas pressure; 2, projectile speed;
— — with inert charge; — — with T1 propellant; and — — with T2 propellant

Из рис. 4 можно наглядно увидеть, что на начальном этапе горения все зависимости давления в камере заряжания от времени совпадают, а начиная с опреде-

ленного (для каждого топлива своего) момента начинают расходиться. Момент расхождения восходящих кривых давления характеризует начало горения исследуемого топлива.

На рис. 5 показана зависимость дульной скорости от максимального давления для всех проведенных экспериментов. В опытах с высокоплотным топливом его масса одинакова, менялась масса зернового заряда. Из графика хорошо прослеживается зависимость влияния массы топлива на увеличение дульной скорости. Скорость в комбинированной схеме заряжания выше, чем в классической, при сохранении максимального давления. Также видно, что зависимость для опытов с топливом марки Т2 на графике находится выше, чем с топливом Т1, и имеет другой характер.

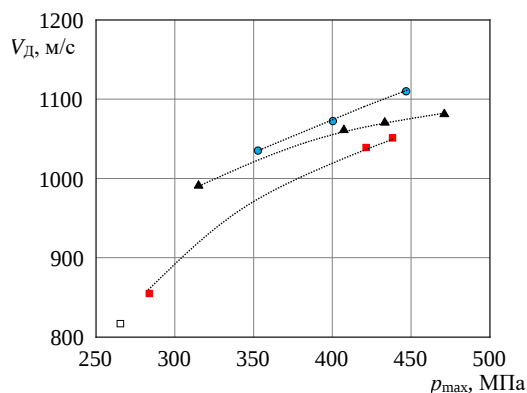


Рис. 5. Зависимость дульной скорости МЭ от максимально давления при использовании классической и комбинированной схемы заряжания:
 ■ – классическая схема заряжания; □ – комбинированная схема заряжания с инертным топливом; ▲ – комбинированная схема заряжания с топливом Т1; ● – комбинированная схема заряжания с топливом Т2

Fig. 5. Muzzle velocity of the projectile as a function of maximum pressure when using the classical and combined loading schemes:
 ■ – classical loading scheme; □ – combined loading scheme with inert propellant; ▲ – combined loading scheme with T1 propellant; and ● – combined loading scheme with T2 propellant

Выполнено экспериментальное исследование, направленное на изучение механизма диспергирования и горения высокоплотных топлив в составе комбинированной схемы заряжания для модельной баллистической установки.

Результаты экспериментально-теоретического исследования

Для численного моделирования процессов, происходящих в заснарядном объеме модельной ствольной системы, использовалась численная методика, разработанная в НИИ ПММ ТГУ [9]. В математической модели приняты следующие допущения, касающиеся поведения высокоплотного топлива в процессе выстрела. Считается что часть высокоплотного топлива, располагаемого в верхнем полузаряде, горит в режиме присоединенного заряда, а часть диспергируется на сферические частицы. В работах [7–8] было показано, что данный тип топлив имеет две стадии: медленное послыное горение и ускоренный режим горения. Переход

от одной стадии к другой в математической модели происходит по достижении импульса давления либо на фронте горения присоединенного заряда, либо в области расположения топлива в случае сферических частиц. Для каждой из частей высокоплотных топлив запишем импульс перехода от стадии медленного послойного горения в ускоренный режим горения: для диспергированных частиц

$$I_k = \int_{t_0}^t p dt \text{ — импульс давления в камере; } I_\phi = \int_{t_0}^t p_\phi dt \text{ — импульс давления на}$$

фронте горения, где t_0 — время начала расчета, p_ϕ — давление газа на фронте.

После воспламенения традиционного зернового заряда происходит процесс диспергирования высокоплотного, а также формирования присоединенного заряда до $I_k = I_1$. К этому моменту метаемый элемент проходит расстояние x_1 , считаем $L_{пз} = x_1$, масса присоединенного заряда $m_{пз} = \pi D^2/4 L \delta_{пт}$, остальное высокоплотное топливо диспергирует на частицы диаметром d . К моменту $I_k = I_2$ происходит воспламенение диспергированных частиц и присоединенного заряда. Для высокоплотного топлива Т2 послойные скорости горения частиц U_1 и присоединенного заряда $U_{пз}$ получены в замкнутом и полузамкнутом объемах [7–8]:

$$U_1 = \begin{cases} 2.7 \cdot 10^{-9} \cdot P^{2.2}, & \text{при } 0 < P < 80 \\ 8.0 \cdot 10^{-6} \cdot P, & \text{при } 80 \leq P < 200. \end{cases}$$

$$U_{пз} = U_1 \left(1 + \frac{2.679}{D} \right) = 1.2488 \cdot 10^{-5},$$

где $D = 1.27$ см — диаметр канала ускорителя и, соответственно, присоединенного заряда, $P = p/p_0$, $p_0 = 0.1$ МПа.

Для данного высокоплотного топлива в режиме присоединенного заряда характерен переход в конвективный режим горения, который реализуется при падении давления на фронте горения и достижении необходимой величины $dp/dt < 0$. Для этого момента определяется $I_\phi = I_3$, при $I_\phi > I_3$ присоединенный заряд горит со скоростью U_d с образованием частиц диаметром d и скоростью горения U_1 , при этом на фронте сгорает часть частицы, равная ψ_0 .

Величины I_1 , I_2 , I_3 , ψ_0 , d , U_d определяются на основании сравнения расчетных и экспериментальных результатов. В качестве параметров сравнения выступают основные баллистические параметры ($p_{\max}$ — максимальное давление в камере заряжания, V_d — дульная скорость МЭ) и временные зависимости $p(t)$ — давления в камере заряжания, $V(t)$ — скорости МЭ в канале ускорителя. Сравнение расчетно-экспериментальных данных при использовании классической (а) и комбинированной (б) схем заряжания представлено на рис. 6. Хорошее совпадение зависимостей давления в камере заряжания и скорости МЭ в канале ствольной системы говорит о том, что математическая модель и принятые допущения адекватно описывают происходящие процессы и могут быть использованы для газодинамического анализа выстрела с использованием классической и комбинированной схем заряжания.

Из газодинамического анализа получено, что использование высокоплотного топлива в составе метательного заряда увеличивает площадь под временной зависимостью давления в камере заряжания (рис. 7) при одинаковой величине $p_{\max}$. Данная особенность связана с большим и более длительным газоприходом от метательного заряда в процессе горения данного заряда.

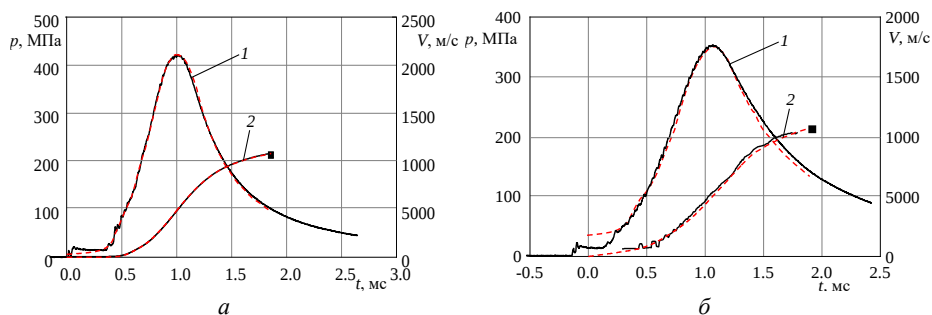


Рис. 6. Зависимость давления в камере заряжания и скорости от времени: *a* – классическая схема; *б* – комбинированная схема; ■ – скорость в момент вылета МЭ; 1 – давление газа; 2 – скорость МЭ; — – эксперимент; - - - - расчет

Fig. 6. Time dependences of the pressure in the loading chamber and projectile speed: (a) classical and (b) combined loading schemes: ■ – projectile speed when leaving the barrel; 1, gas pressure; 2, projectile speed; — – experiment and - - - - calculation

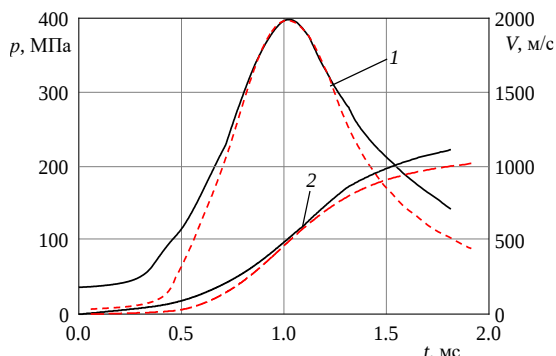


Рис. 7. Зависимость давления в камере заряжания и скорости от времени:

- - - - классическая схема; — – комбинированная схема;
1 – давление газа; 2 – скорость МЭ

Fig. 7. Time dependences of the pressure in the loading chamber and projectile speed:
- - - - classical loading scheme; — – combined loading scheme;
1, gas pressure and 2, projectile speed

Как уже было упомянуто выше, часть высокоплотного топлива выталкивается из камеры заряжания в канал ускорителя вслед за МЭ и горит в околоснарядном пространстве, вследствие чего происходит более медленное падение давления на дно МЭ (рис. 8).

На начальном участке канала ускорителя ($x < 15$ см) при использовании классической схемы заряжания давление на МЭ выше, что приводит к более быстрому набору скорости; при $x > 15$ см выше давление в случае комбинированной схемы, особенно при конвективном горении присоединенного заряда, что дает дополнительный прирост скорости.

Увеличение дульной скорости МЭ при использовании комбинированной схемы заряжания за счет включения модельного высокоплотного топлива составляет 56 м/с (5.6%) в сравнении с классической схемой заряжания при сохранении максимального давления.

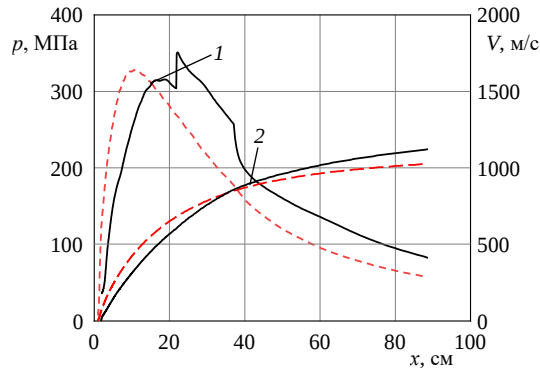


Рис. 8. Зависимость давления на дно МЭ и скорости МЭ от координаты МЭ:

--- классическая схема; ——— комбинированная схема;

1 – давление газа; 2 – скорость МЭ

Fig. 8. Pressure on the projectile bottom and projectile speed as the functions of projectile coordinates: --- classical loading scheme; ——— combined loading scheme; 1, gas pressure and 2, projectile speed

На рис. 9 представлена зависимость объемного содержания частиц метательного заряда в разные моменты времени. Использование комбинированной схемы заряжения приводит к перераспределению метательного заряда в процессе метания. В случае использования классической схемы заряжения элементы метательного заряда продвигаются в процессе движения по каналу ускорителя на 25 см и полностью сгорают при $t = 1.2$ мс, а при использовании в составе метательного заряда высокоплотных топлив частицы метательного заряда присутствуют на протяжении всего процесса и в области дна метаемого элемента, что снижает влияние эффекта насыщения.

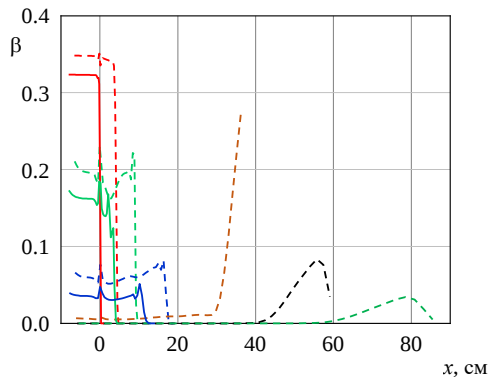


Рис. 9. Объемное содержание частиц метательного заряда в различные моменты времени:

——— классическая схема; ——— комбинированная схема

Fig. 9. Volumetric content of propellant charge particles at different time instants: ——— classical loading scheme and ——— combined loading scheme

Аналогично определялись параметры горения для серии опытов с топливом Т2. Основные отличия горения от топлива Т1 имеются на начальном этапе, здесь

чем выше давление в опыте, тем больше топлива диспергирует на частицы и, соответственно, меньше масса присоединенного заряда. Этим и объясняется меньший выигрыш по скорости при высоких давлениях (см. рис. 5). В опыте с $p_{\max} = 471$ МПа диспергирует все топливо на начальном этапе.

Заключение

В результате проведенного экспериментально-теоретического исследования горения высокоплотного топлива в условиях комбинированной схемы заряжания и модельной баллистической установки определены основные принципы диспергирования и горения данных топлив. Получена и проанализирована газодинамическая картина выстрела с использованием классической и комбинированной схем заряжания. Увеличение дульной скорости элемента при использовании комбинированной схемы заряжания за счет включения модельного высокоплотного топлива Т2 составляет 59 м/с (5.6%) в сравнении с классической схемой заряжания при сохранении максимального давления.

Список источников

1. Ермолаев Б.С., Сулимов А.А., Романьков А.В. Присоединенный высокоплотный заряд конвективного горения в комбинированной схеме выстрела: новые результаты // Горение и взрыв. 2013. № 6. С. 206–210.
2. Ермолаев Б.С., Сулимов А.А., Романьков А.В., Храповский В.Е., Беляев А.А., Кроули А.Б. Конвективное горение блочных зарядов из семиканальных пороховых зерен, ингибированных поливинилбутиралем // Химическая физика. 2015. Т. 34, № 5. С. 47–57.
3. Пенский О.Г., Русаков С.В. К расчету истечения пороховых газов из сосуда с соплом // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы : межвуз. сб. науч. тр. Пермь : Пермский гос. ун-т, 2007. Вып. 39. С. 184–196.
4. Новожилов Б.В., Каганова З.И., Беляев А.А. Нестационарные режимы горения пороха в полужамкнутом объеме // Химическая физика. 2009. Т. 28, № 12. С. 31–39.
5. Маршаков В.Н., Новожилов Б.В. Переходные режимы горения баллистического пороха в полужамкнутом объеме // Химическая физика. 2011. Т. 30, № 1. С. 25–37.
6. Иванов С.М., Цуканов Н.А. Оценка динамических характеристик нестационарного горения твердого топлива в полужамкнутом объеме по измерениям регулируемого давления // Физика горения и взрыва. 2002. Т. 38, № 1. С. 80–91.
7. Rogaev K.S., Dyachkovskii A.S., Ishchenko A.N., Samorokova N.M., Shestopalova A.S. Assessment of the possibility of ignition of paste-like fuel in a nozzle bomb // Springer Proceedings in Physics. 2024. 1067 SPPHY. P. 276–282.
8. Розаев К.С., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Саморокова Н.М., Степанов Е.Ю., Гимаева Н.Р. Исследование особенностей зажигания и горения высокоплотных зарядов в условиях постоянного объема // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 123–132. doi: 10.17223/19988621/81/11
9. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.

References

1. Ermolaev B.S., Sulimov A.A., Roman'kov A.V. (2013) Prisoedinyonnyy vysokoplotnyy zaryad konvektivnogo gorennya v kombinirovannoy skheme vystrela: Novye rezul'taty [Traveling high-density charge of convective burning in the hybrid configuration: new results]. *Gorennyye i vzryvy – Combustion and Explosion*. 6. pp. 206–210.

2. Ermolaev B.S., Sulimov A.A., Roman'kov A.V., Khrapovskiy V.E., Belyaev A.A., Crowley A.B. (2015) Convective burning of block charges prepared from seven-perforation propellant powder grains inhibited by polyvinyl butyral. *Russian Journal of Physical Chemistry B*. 9(3). pp. 375–384. doi: 10.7868/S0207401X15050040
3. Penskiy O.G., Rusakov S.V. (2007) K raschetu istecheniya porokhovyykh gazov iz sosudov s soplom [To the calculation of the outflow of powder gases from vessels with a nozzle]. *Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelineynye ob"emnye sistemy*. 39. pp. 184–196.
4. Novozhilov B.V., Kaganova Z.I., Belyaev A.A. (2009) Unsteady regimes of propellant combustion in a semiclosed space. *Russian Journal of Physical Chemistry B*. 3(6). pp. 945–952.
5. Marshakov V.N., Novozhilov B.V. (2011) Transient modes of double-base propellant combustion in a semiclosed volume. *Russian Journal of Physical Chemistry B*. 5(1). pp. 45–56.
6. Ivanov S.M., Tsukanov N.A. (2002) Estimate of the dynamic characteristics of unsteady combustion of a solid propellant in a semi-closed volume from measurements of variable pressure. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 38(1). pp. 71–80.
7. Rogaev K.S., Dyachkovskii A.S., Ishchenko A.N., Samorokova N.M., Shestopalova A.S. (2024) Assessment of the possibility of ignition of paste-like fuel in a nozzle bomb. In: *Proceedings of the XII All Russian Scientific Conference on Current Issues of Continuum Mechanics and Celestial Mechanics. Springer Proceedings in Physics*. 1067. pp. 276–282. doi: 10.1007/978-981-97-1872-6_38
8. Rogaev K.S., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Samorokova N.M., Stepanov E.Yu., Gimaeva N.R. (2023) Issledovanie osobennostey zazhiganiya i goreniya vysokoplotnykh zaryadov v usloviyakh postoyannogo ob"ema [A study of the ignition and combustion of high-density charges under constant volume conditions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 123–132. doi: 10.17223/19988621/81/11
9. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematic simulation of intraballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: Siberian Branch of the Russian Academy of Science.

Сведения об авторах:

Робаев Константин Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru.

Дьячковский Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: lex_okha@mail.ru

Саморокова Нина Михайловна – научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: Samorokova_nina@mail.ru.

Ищенко Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Сидоров Алексей Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: alex_sid92@mail.ru

Саммель Антон Юрьевич – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: anton_sammel@mail.ru

Бураков Валерий Арсентьевич – научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: valera_buracov@mail.ru

Шестопалова Алена Сергеевна – техник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: shestopalova@ftf.tsu.ru

Information about the authors:

Rogaev Konstantin S. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru

D'yachkovskiy Aleksey S. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex_okha@mail.ru

Samorokova Nina M. (Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Samorokova_nina@mail.ru

Ishchenko Aleksandr N. (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Sidorov Aleksey D. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: alex_sid92@mail.ru

Sammel' Anton Yu. (Junior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anton_sammel@mail.ru

Burakov Valeriy A. (Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: valera_buracov@mail.ru

Shestopalova Alyona S. (Laboratory Technician, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: shestopalova@ftf.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 27.04.2024; принята к публикации 07.02.2025

The article was submitted 27.04.2024; accepted for publication 07.02.2025

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/93/14

Механическое поведение трехслойных структур из алюминиевого сплава со слоями ауксетического метаматериала при динамических воздействиях в диапазоне температур от 153 до 473 К

Владимир Владимирович Скрипняк¹,
Евгения Георгиевна Скрипняк², Владимир Альбертович Скрипняк³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ skrp2012@yandex.ru

² eva.skrp@mail.ru

³ skrp2006@yandex.ru

Аннотация. Цель исследования – изучение деформации, разрушения и возможности поглощения энергии трехслойными структурами с прослойкой из ауксетического метаматериала при динамических нагрузках в диапазоне температур от 153 до 473 К. Исследовался отклик слоистых структур из алюминиевого сплава 1520 на динамические нагрузки при ударно-импульсных воздействиях и циклическом знакопеременном нагружении в зависимости от начальных температур. Рассмотрены трехмерные слоистые структуры с прослойкой ауксетического метаматериала, обладающие способностью эффективно поглощать и рассеивать энергию импульсных и циклических воздействий в температурном диапазоне от 153 до 473 К. Показано, что изменение диссипативных свойств рассмотренных трехслойных структур при динамических воздействиях обусловлено как уплотнением слоя ауксетического метаматериала, так и повреждением и разрушением его каркасных элементов. Резкое снижение коэффициента диссипации энергии при импульсном нагружении структур происходит при превышающей 69% деформации сжатия слоя ауксетического метаматериала с рассмотренными топологическими характеристиками. Влияние повышения температуры за счет диссипации энергии в условиях рассмотренных динамических воздействий на геометрические параметры метаматериала и его физико-механические и теплофизические характеристики незначительно. Более существенным является влияние изменения характеристик за счет вариации начальной температуры в диапазоне от 153 до 473 К.

Ключевые слова: слоистые структуры, ауксетический метаматериал, импульсные нагрузки, поглощение энергии, диссипативные свойства, влияние температуры

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 23-29-00349).

Для цитирования: Скрипняк В.В., Скрипняк Е.Г., Скрипняк В.А. Механическое поведение трехслойных структур из алюминиевого сплава со слоями ауксетического метаматериала при динамических воздействиях в диапазоне температур от 153 до 473 К // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 172–185. doi: 10.17223/19988621/93/14

Mechanical behavior of three-layer structures made of aluminum alloy with layers of auxetic metamaterial under dynamic impacts in the temperature range of 153–473 K

Vladimir V. Skripnyak¹, Evgeniya G. Skripnyak², Vladimir A. Skripnyak³

^{1,2,3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ skrp2012@yandex.ru

² eva.skrp@mail.ru

³ skrp2006@yandex.ru

Abstract. This paper presents the results of a numerical study of deformation, fracture, and energy absorption by three-layer structures with an auxetic metamaterial interlayer under dynamic loads in the temperature range of 153–473 K. The response of layered systems made of aluminum alloy 1520 to the shock-pulse impacts and cyclic loading at initial temperatures within the specified range is investigated. The 3D layered structures with the auxetic metamaterial interlayer that can effectively absorb and dissipate the energy of pulse impacts are considered. It is shown that a decrease in the dissipative properties of the three-layer structures with the auxetic metamaterial layer made of aluminum alloy 1520 under dynamic loading is a result of the irreversible compaction of the metamaterial layer and concurrent damages and fractures of the metamaterial elements. A sharp decrease in the energy dissipation factor occurs when the compression strain of the auxetic metamaterial layer exceeds 69% regardless of the initial temperature. The effect of increasing temperature due to energy dissipation on the geometric, physical, mechanical, and thermal characteristics of the metamaterial layer is inconsiderable. These characteristics are significantly affected by initial temperature variations in the range of 153–473 K.

Keywords: layered systems, auxetic metamaterial, pulse loads, energy absorption, dissipative properties, temperature effect

Acknowledgments: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-29-00349).

For citation: Skripnyak, V.V., Skripnyak, E.G., Skripnyak, V.A. (2025) Mechanical behavior of three-layer structures made of aluminum alloy with layers of auxetic metamaterial under dynamic impacts in the temperature range of 153–473 K. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 172–185. doi: 10.17223/19988621/93/14

Введение

Интенсивность экспериментальных и теоретических исследований свойств и закономерностей механической реакции при квазистатических и динамических режимах нагружения пространственных 2D и 3D каркасных структур и метаматериалов на их основе обусловлена расширением возможностей производства новых типов полимерных и металлических метаматериалов с использованием 3D-печати. Большой интерес проявляется к особенностям механического поведения ауксетических метаматериалов, обладающих, в отличие от традиционных

конструкционных металлических, керамических и полимерных материалов, отрицательным коэффициентом Пуассона. В последние годы в связи с перспективами использования в различных технических и медицинских приложениях поведение в условиях динамического нагружения слоистых структур, содержащих прослойки ауксетических метаматериалов, интенсивно изучалось экспериментально и с применением методов численного моделирования. Механическое поведение 3D-объемов из ауксетических метаматериалов, изготовленных из разных материалов: алюминиевого сплава, АБС (Акрилонитрил Бутадиен Стирола) пластика и стали авторами было исследовано при динамическом изгибе и сжатии со скоростями 5 и 25 м/с [1]. Показано, что в отличие от механического поведения ауксетических метаматериалов в условиях квазистатического нагружения их отклик на динамические воздействия, приводящие к сжатию и изгибу, зависит не только от их относительной массовой плотности и топологических параметров элементарных ячеек, но и от эффективной скорости деформации (скорости деформации представительного объема метаматериала), а также прочностных свойств конструкционных материалов, используемых для изготовления каркасных элементов.

При сжатии в широком диапазоне скоростей деформации объемы рассмотренных ауксетических метаматериалов показывают относительно высокие пиковые напряжения в области упругих деформаций и высокие удельные характеристики диссипации механической энергии, обусловленные пластической деформацией каркасных элементов. Было установлено, что при переходе от АБС пластика на алюминиевый сплав при создании метаматериалов с эквивалентными структурными параметрами пиковое напряжение увеличивается в 6,3 раза, а величина диссипируемой энергии – в 47,6 раза. Полученные в [1] результаты указывают на перспективность применения алюминиевых ауксетических метаматериалов в качестве демпфирующих структур.

Авторы [2] выполнили экспериментальные и численные исследования поведения при динамических воздействиях с амплитудами скорости от 1 до 70 м/с модельных возвратных ауксетических структур с вогнутыми каркасными элементами, изготовленных из АБС полимерного материала по технологии 3D-печати. Было показано, что при увеличении угла между каркасными элементами в элементарных ячейках возвратного ауксетического метаматериала сопротивление ударному воздействию уменьшается, а количество поглощенной энергии увеличивается. При фиксированном начальном указанном угле с увеличением скорости удара напряжение деформирования и величина поглощенной энергии возрастают.

Авторы [3] исследовали поглощение механической энергии при динамическом воздействии на модельные структуры ауксетических метаматериалов с криволинейными каркасными элементами. Ими показано, что градиентная настройка толщины стенок каркасных элементов приводит к увеличению абсолютной величины отрицательного коэффициента Пуассона на 44,6%, а настройка отношения высоты к длине элементарной ячейки увеличивает максимальную эффективность поглощения энергии на 14,7%. Экспериментальные исследования ударного воздействия на модельную структуру трехслойной панели с прослойкой из ауксетического метаматериала показали, что гофрированная градиентная структура имеет лучшие характеристики рассеивания энергии, чем гофрированная классическая возвратная структура.

Авторы [4] выполнили экспериментальные и конечно-элементные численные исследования колебаний трехслойных структур с промежуточным слоем из ауксетического метаматериала с каркасными элементами, созданными из полимерного композита с эпоксидной матрицей, армированной углеродным волокном. Они показали, что для рассмотренных трехслойных структур полученные результаты численного моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными о собственных частотах шести первых мод. Обнаружено, что собственные частоты рассмотренных трехслойных пластин зависят от толщины и площади слоя ауксетического метаматериала и увеличиваются с ростом его относительной плотности.

Авторы [5] выполнили экспериментальные и численные исследования ауксетических метаматериалов, изготовленных по технологии 3D-печати из полимерного материала WEILA 8000, при вибрационных воздействиях в диапазоне частот 0–16 кГц. Было показано, что ауксетические возвратные метаматериалы обладают способностью поглощения энергии и обеспечивают виброизоляцию на низких и высоких частотах.

Отметим, что исследования механических и функциональных свойств слоистых структур и ауксетических метаматериалов при квазистатических и динамических нагрузках проводились преимущественно при комнатной температуре. В то же время существует большое количество технических и медицинских задач, требующих демпфирования динамических нагрузок и диссипации энергии механических воздействий при повышенных и пониженных температурах относительно комнатной температуры.

Цель исследования, результаты которого представлены ниже, – изучение деформации, разрушения и возможности поглощения и диссипации энергии трехслойными структурами с промежуточным слоем из ауксетического метаматериала при динамических нагрузках в температурном диапазоне от 153 до 473 К.

1. Модель трехслойной структуры с прослойкой из ауксетического метаматериала

Численно исследован механический отклик модельного трехслойного демпфера из алюминиевого сплава 1520 (AA5052 H32) с внутренним слоем из алюминиевого ауксетического метаматериала при температурах до начала нагружения 153, 295 и 474 К при воздействии на поверхность верхней панели интенсивных ударных импульсов с амплитудами от 100 до 25 м/с и длительностью до 10 мс или интенсивных гармонических нагрузок.

Трехслойный механический демпфер с внутренним слоем из ауксетического метаматериала, рассмотренный в данном исследовании, представлен на рис. 1, *a*.

Геометрические параметры элементарной ячейки ауксетического метаматериала представлены на рис. 1, *b*. Изучался отклик модельного объема трехслойного демпфера механических нагрузок с размерными параметрами $L = 120$ мм, $H = 87$ мм, $w = 20$ мм, $t = 1$ мм, $l = 11,87$ мм, $h = 28$ мм, $\theta = 47,9^\circ$. Масса трехслойной конструкции составляет 0,1524 кг. Масса прослойки ауксетического метаматериала равна 0,1224 кг, средняя массовая плотность прослойки метаматериала 522 кг/м³.

Геометрические параметры элементарной ячейки метаматериала определяют его эффективные физико-механические характеристики: массовую плотность, модули упругости и предел текучести, а также коэффициенты теплового расши-

рения [6]. Геометрические характеристики элементарной ячейки метаматериала меняются при воздействии нагрузок или при отклонении температуры от комнатной. Вследствие указанных изменений топологических параметров элементарной ячейки меняются и эффективные механические и тепловые характеристики деформированного метаматериала.

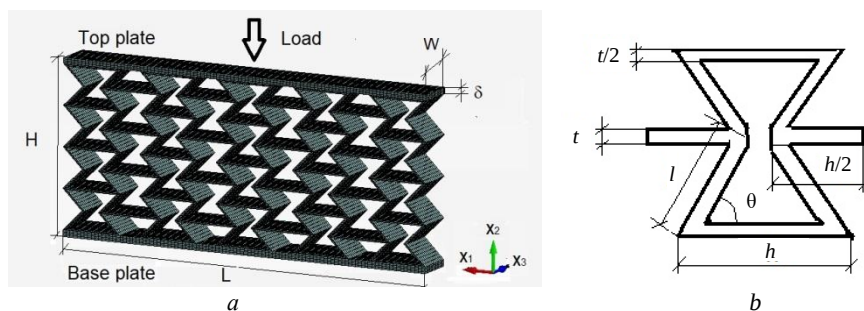


Рис. 1. Трехслойный механический демпфер с внутренним слоем из ауксетического метаматериала (a); геометрические параметры элементарной ячейки ауксетического метаматериала (b)

Fig. 1. (a) Three-layer mechanical damper with an inner layer of the auxetic metamaterial and (b) geometric parameters of a unit cell of the auxetic metamaterial

Отметим, что зависимость геометрических параметров и эффективных модулей упругости метаматериала от начальной температуры приводит к изменению частот собственных мод колебаний, что учитывалось при анализе воздействия циклических нагрузок на демпфер.

2. Модель механического поведения алюминиевой трехслойной структуры с прослойкой из ауксетического метаматериала

Вычислительная модель механического поведения алюминиевой трехслойной структуры с прослойкой из ауксетического метаматериала использует теоретическую основу механики сплошных сред с повреждениями [6–11]. Для характеристики диссипативных свойств слоистых структур с межслоевым каркасом из метаматериала при высоких скоростях деформации применялся коэффициент диссипации энергии λ [12]:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \int_0^t \frac{W^s(t) - W_{\text{int}}^s(t)}{W^s(t)} dt, \\ W^s(t) &= \int_0^t F_{TP}(t) v dt, \\ W_{\text{int}}^s(t) &= \int_V \left[\int_0^{\varepsilon_{ij}(t)} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right] dV + 0.5 \int_V \rho v^2 dV, \\ W^{\text{diss}}(t) &= \int_V \left[\int_0^{\varepsilon_{ij}^p(t)} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \right] dV, \end{aligned} \quad (1)$$

$$W^k(t) = \int_V 0.5 \rho v^2 dV.$$

где $W^S(t)$ – величина поглощенной энергии, изменяющаяся во времени в процессе нагружения слоистой структуры, W_{int}^S – величина внутренней энергии слоистой структуры, зависящая от времени деформирования, ρ – массовая плотность материалов элементов слоистой структуры, в том числе каркасных элементов метаматериала, W^k – кинетическая энергия слоистой структуры в момент времени t , W^{diss} – величина диссипированной энергии, v – модуль вектора скорости материальных частиц в элементах слоистой структуры, $F_{TP}(t)$ – усилие нагружения, приложенное к верхней поверхности слоистой структуры, $\sigma_{ij}(t)$ – компоненты тензора напряжений, $d\varepsilon_{ij}$ – приращение компонент тензора деформаций материальных частиц каркасных элементов, $d\varepsilon_{ij}^p$ – приращение компонент тензора пластических деформаций материальных частиц каркасных элементов, V – объем конденсированной фазы материалов в элементах трехслойной структуры.

Поскольку в объеме метаматериала между элементами каркаса присутствует поровое пространство, объем которого уменьшается в процессе деформации сжатия метаматериала, при вычислении энергетических характеристик слоистой структуры с использованием (1) интегрирование выполняется по объему конструктивных материалов, из которых изготовлены элементы слоистой структуры. Отметим, что, в отличие от квазистатического нагружения, при динамических воздействиях часть энергии внешнего воздействия, поглощаемой демпфером, определяется кинетической энергией элементов его конструкции, учитываемой в W_{int}^S .

3. Результаты и обсуждение

Механический отклик трехслойной структуры с внутренним слоем ауксетического метаматериала на динамические нагрузки моделировался с использованием трехмерных лагранжевых элементов и контроля эффекта «песочных часов» искажения элемента сетки. Моделирование выполнялось с использованием явного решателя WB ANSYS LS DYNA 19.2. В расчетах использовалась сетка из восьми узловых гексаэдрических твердотельных элементов со средним размером 0.3 мм. При численном решении достигнута сходимость расчетных параметров напряженно-деформированного состояния и параметров процесса рассеяния энергии, связанного с развитием повреждений.

Сопротивление сжатию алюминиевого слоя метаматериала в трехслойной структуре уменьшается при повышении начальной температуры. В результате достижение максимального уплотнения слоя метаматериала происходит за меньшее время по сравнению с условиями нагружения при более низких температурах.

Результаты, представленные на рис. 2, свидетельствуют, что на опорной поверхности трехслойной структуры величина нагрузки существенно ниже, чем на верхней поверхности нагружаемой структуры. Таким образом, способность демпфирования импульсных воздействий сохраняется у рассматриваемой слоистой структуры из алюминиевого сплава 1520 как для пониженных температур от 153 К, так и для повышенных – до 473 К. Отметим, что демпфирующие свойства рассматриваемых трехслойных структур определяются деформацией слоя ауксетического метаматериала. Изменение удельной диссипируемой энергии трех-

слоистой алюминиевой структуры с прослойкой из ауксетического метаматериала в исследуемом диапазоне температур обусловлено деформацией каркасных элементов и уплотнением слоя метаматериала.

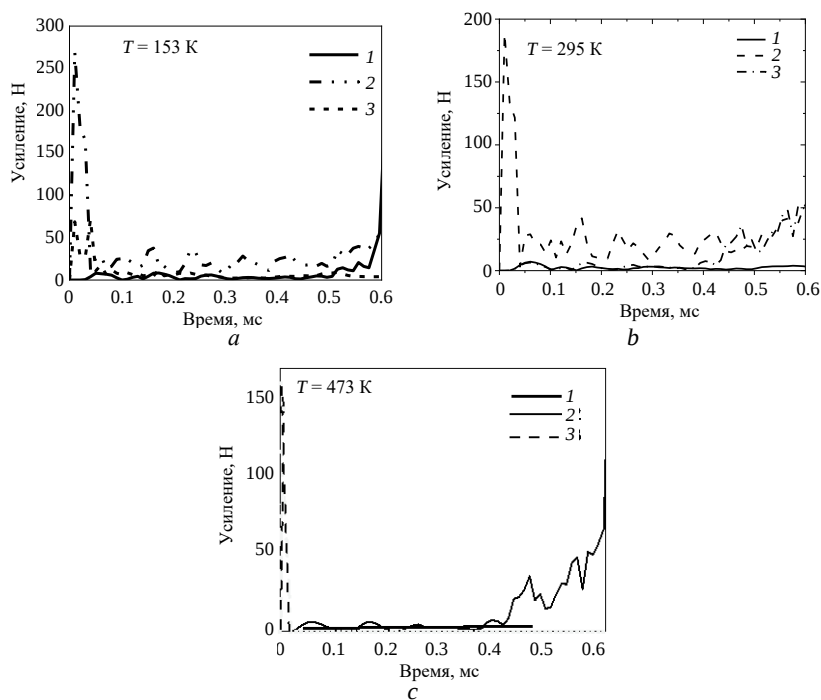


Рис. 2. Расчетная зависимость силы реакции от времени при импульсном нагружении трехслойной алюминиевой структуры со слоем ауксетического метаматериала при начальных температурах 153 К (а), 295 К (b) и 473 К (c) с амплитудами 100 м/с (линии 1, 2) и 50 м/с (линия 3) на опорной поверхности (линия 1) и верхней поверхности (линии 2, 3)

Fig. 2. Calculated reaction force versus time under pulse loading of a three-layer aluminum damper with an auxetic metamaterial layer at the initial temperatures of (a) 153, (b) 295, and (c) 473 K with amplitudes of 100 m/s (curves 1,2) and 50 m/s (curve 3) on the base surface (curve 1) and upper surface (curves 2,3)

На рис. 3 показаны изменения поглощенной, диссипируемой и кинетической энергий трехслойной механической структуры с прослойкой из ауксетического метаматериала при импульсном воздействии с амплитудой 100 м/с на верхнюю поверхность трехслойной структуры при начальных температурах 153, 295 и 473 К. На рис. 3 в качестве деформации указана главная компонента тензора условной деформации, определяемая относительным изменением толщины слоистой структуры при сжатии $\epsilon_1 = \Delta H/H$.

Результаты моделирования показали, что в диапазоне температур от 153 до 473 К рассматриваемая конструкция алюминиевой структуры с внутренним слоем из ауксетического метаматериала обеспечивает поглощение и рассеивание подводимой механической энергии при импульсном нагружении с амплитудой 100 м/с.

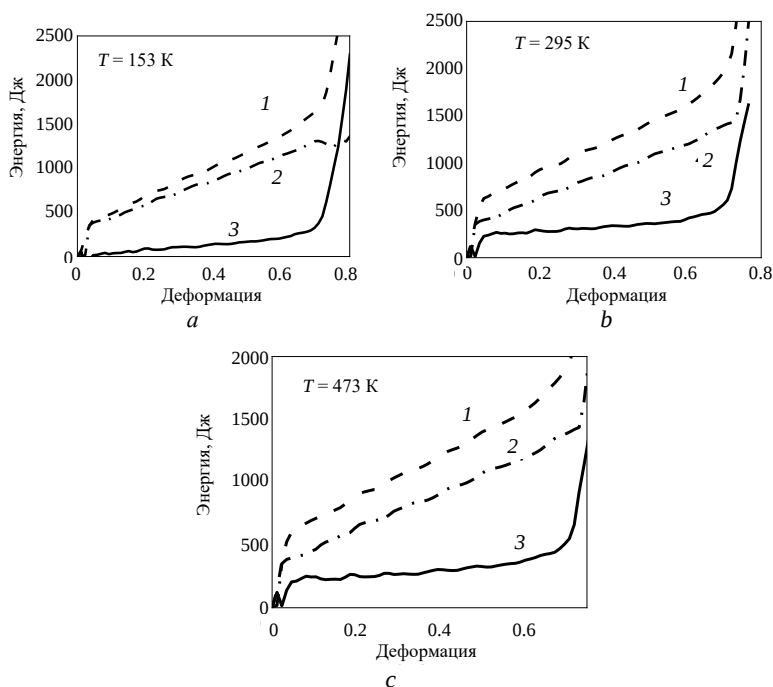


Рис. 3. Зависимости поглощенной энергии (1), внутренней энергии слоистой структуры (2), диссипированной энергии (3) от компоненты главного тензора деформации трехслойного механического демпфера с внутренним слоем ауксетического метаматериала при ударном импульсном нагружении амплитудой 100 м/с при начальной температуре 153 К (а), 295 К (b), 473 К (с)

Fig. 3. (1) Absorbed energy, (2) internal energy of the layered structure, and (3) dissipated energy as the functions of the principal strain of the three-layer mechanical damper with an auxetic metamaterial interlayer under shock pulse loading with an amplitude of 100 m/s at the initial temperatures of (a) 153, (b) 295, and (c) 473 K

На рис. 4, а показано изменение параметра λ нагружения образца трехслойной структуры с прослойкой ауксетического метаматериала. Снижение значений λ при превышении времени до 0,6003 мс указывает на исчерпание диссипативных возможностей у деформированных структур метаматериала. На вкладке к рис. 4, а показано, что в указанный момент времени было достигнуто полное снятие структур ячеек метаматериала. При постоянной скорости сжатия слоистой структуры, равной 100 м/с, к моменту времени 0,6003 мс толщина трехслойной структуры H уменьшится на величину $\Delta H = 60,03$ мм. Степень условной деформации сжатия, при которой рассмотренная трехслойная структура исчерпывает возможность демпфировать импульсную нагрузку, составляет $\Delta H/H = 0.69$. Поскольку деформация сжатия верхней и нижней панелей трехслойной структуры мала, можно считать, что диссипативные свойства прослойки ауксетического метаматериала сохраняются при сжатии до степени $\sim 69\%$.

Потеря устойчивости каркасных элементов метаматериала и их пластическая деформация при уплотнении слоя при сжатии свыше 69% сопровождаются резким снижением коэффициента диссипации энергии λ .

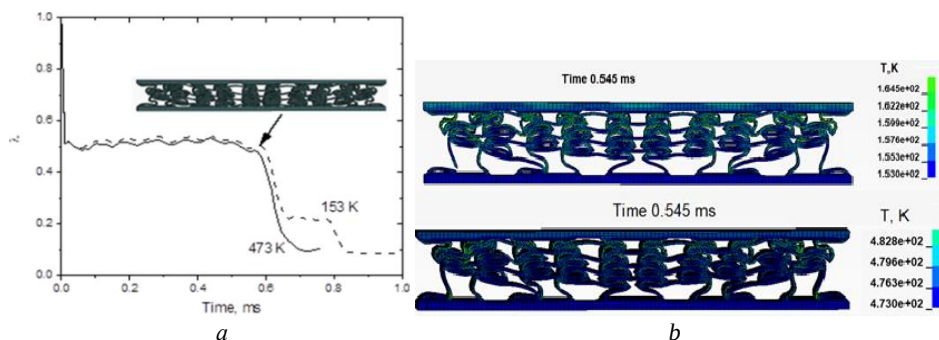


Рис. 4. Зависимость коэффициента рассеяния энергии λ от времени при импульсном нагружении трехслойной структуры с амплитудой 100 м/с при начальных температурах 153 и 473 К (а); расчетная температура в элементах каркаса трехслойной структуры через 0,545 мс после начала импульсного нагружения с амплитудой 100 м/с (b): верхняя вставка соответствует начальной температуре 153 К, нижняя – температуре 473 К

Fig. 4. (a) Time dependence of the energy dissipation coefficient λ for the three-layer damper under shock pulse loading with an amplitude of 100 m/s at the initial temperatures of 153 and 473 K and (b) calculated temperature in the frame elements of the three-layer damper in 0.545 ms after pulse loading initiation with an amplitude of 100 m/s; the upper and the lower images correspond to the initial temperatures of 153 K and 473 K, respectively

Таким образом, способность демпфирования нагрузки трехслойными алюминиевыми структурами с внутренним слоем из ауксетического метаматериала и величина диссипированной механической энергии зависят от длительности процесса уплотнения слоя метаматериала, которая уменьшается с ростом амплитуды скорости нагружения и ростом рабочей температуры.

Температура в пластически деформированных локальных объемах элементов каркаса метаматериала при импульсном нагружении с амплитудой 100 м/с увеличивается на десятки кельвинов, как показано на рис. 4, b. Отметим незначительное влияние указанного повышения температуры на физико-механические и теплофизические характеристики алюминиевого сплава. Более существенными являются изменения физико-механических характеристик (пределов текучести, напряжения пластического течения, деформаций зарождения повреждений, модулей упругости) при изменении начальной температуры в диапазоне от 153 до 473 К.

Результаты моделирования свидетельствуют, что усталостная долговечность слоистых структур из алюминиевого сплава 1520 при начальных температурах 153 и 473 К, гармонических нагрузках с частотами до 2,5 кГц, коэффициентом асимметрии цикла нагружения -1 и амплитуде скорости нагружения 100 м/с существенно отличается от долговечности эквивалентных структур при комнатной температуре.

Уменьшение амплитуды колебаний с ростом расстояния от поверхности нагружения, вызванное диссипацией энергии и частичным разрушением элементов каркаса метаматериала при комнатной температуре, показано на рис. 5.

Полученные результаты свидетельствуют о возможности исследуемой трехслойной структуры из алюминиевого сплава 1520 быть изолятором рассматриваемых гармонических воздействий до разрушения метаматериала.

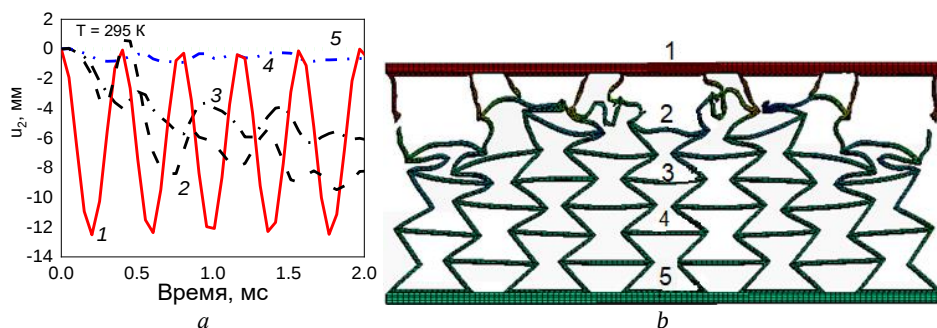


Рис. 5. Временное изменение перемещений в лагранжевых точках 1–5 (а), положения которых указаны на вкладке (b); деформации и частичное разрушение элементов трехслойной структуры при циклическом нагружении с частотой 2,5 кГц и амплитудой скорости нагружения 100 м/с при комнатной температуре (b)

Fig. 5. (a) Time dependence of displacements in the Lagrange points 1-5 arranged as presented in figure (b); (b) deformations and partial fracture of the elements of the three-layer system under cyclic loading with a frequency of 2.5 kHz and a velocity amplitude of 100 m/s at room temperature

Рассматривалось гармоническое нагружение трехслойных структур с частотами, удовлетворяющими условию

$$f_{cycl} > 0,25 v^{amp}/[H_m - m/(\rho_c S)], \quad (2)$$

где f_{cycl} – частота гармонического воздействия, v^{amp} – амплитуда скорости в цикле нагружения вдоль оси x_2 , показанной на рис. 1, $H_m = H - 2\delta$ – толщина прослойки метаматериала, m – масса прослойки метаматериала, ρ_c – массовая плотность материала элемента каркаса метаматериала, S – площадь проекции объема метаматериала на нижнюю опорную поверхность.

Условие (2) обеспечивает сохранение возможности сжатия прослойки метаматериала в цикле нагружения. Результаты численного моделирования механического отклика алюминиевой трехслойной структуры с прослойкой из ауксетического метаматериала на нагружение с коэффициентом асимметрии цикла нагружения $R = -1$ (см. рис. 5) показали способность трехслойной структуры демпфировать вибрационные нагрузки даже при частичном разрушении элементов ауксетического метаматериала. На рис. 5 амплитуда скорости колебаний на уровне точек 4 и 5 мала и близка к нулю, тогда как амплитуда скорости на верхней поверхности вблизи точки 1 составляет 100 м/с. Разрушение рассматриваемых слоистых структур при растяжении в цикле нагружения происходит в слое метаматериала не одновременно. Разрушение изгибаемых элементов каркаса начинается в зонах их соединения в структуре ауксетического метаматериала при нагрузках, нормальных к верхней поверхности. На рис. 6, а результаты численного моделирования показывают, что исследуемая трехслойная структура из алюминиевого сплава 1520 со слоем из ауксетического метаматериала способна демпфировать высокочастотные гармонические нагрузки в диапазоне начальных температур от 153 до 473 К даже при развитии разрушения элементов метаматериала.

Результаты моделирования на рис. 6, b свидетельствуют, что исследуемая трехслойная структура способна демпфировать циклические воздействия в ограниченном диапазоне количества циклов нагружения и времени нагружения.

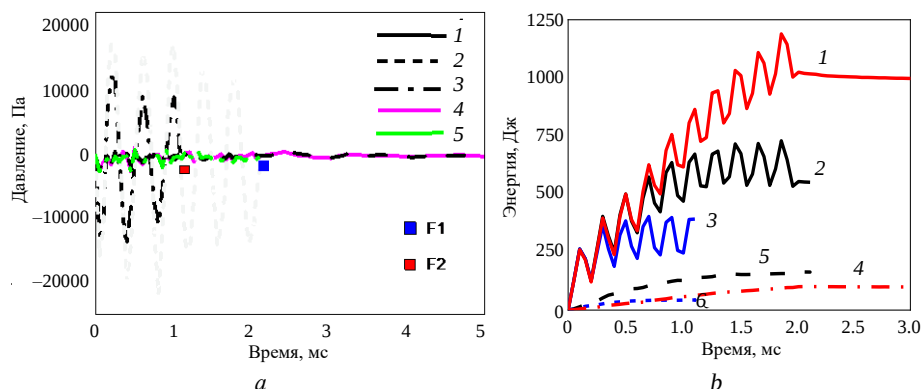


Рис. 6. Изменения давления во времени при циклическом нагружении верхней поверхности трехслойной структуры с прослойкой из ауксетического метаматериала из алюминиевого сплава 1520 с частотой 2,5 кГц и амплитудой скорости 100 м/с и при начальных температурах 473 К (линия 1), 295 К (линия 2), 153 К (линия 3), а также на нижней опорной поверхности при 295 К (линия 4) и 473 К (линия 5) (а); разрушение каркасных элементов метаматериала в зоне контакта с нагружаемой пластиной при начальной температуре 295 К и 153 К показано символами F1 и F2 соответственно; зависимость поглощенной энергии от времени при циклическом воздействии на трехслойную структуру с частотой 2,5 кГц и амплитудой скорости нагружения 100 м/с при начальных температурах 153, 295, 473 К (кривые 1, 2, 3 соответственно) и зависимость диссипированной энергии от времени (кривые 4, 5, 6 соответственно) (b)

Fig. 6. (a) Pressure variation with time during cyclic loading of the top surface of the three-layer structure with an auxetic metamaterial interlayer made of aluminum alloy 1520 at a frequency of 2.5 kHz and a velocity amplitude of 100 m/s with the initial temperatures of 473 K (curve 1), 295 K (curve 2), 153 K (curve 3), and at the bottom base surface of the structure at the temperatures of 295 K (curve 4) and 473 K (curve 5); F1 and F2 indicate the fracture of the metamaterial frame elements in the contact zone with the top surface at the temperatures of 295 K and 153 K, respectively; (b) time dependence of the absorbed energy during cyclic loading of the top surface of the three-layer structure with a frequency of 2.5 kHz and a velocity amplitude of 100 m/s at the initial temperatures of 473 K, 295 K, and 153 K (curves 1, 2, 3, respectively), and time dependence of the dissipated energy (curves 4, 5, 6, respectively)

Усталостная долговечность рассмотренной трехслойной структуры увеличивается с ростом температуры, но диссипируемая энергия при этом уменьшается. При начальной температуре 473 К рассмотренная конструкция из алюминиевой трехслойной структуры с прослойками ауксетического метаматериала способна демпфировать циклические воздействия с частотой 2.5 кГц и амплитудами скорости нагружения 100 м/с более 100 циклов нагружения. Релаксация амплитуды колебаний, вызванная диссипацией энергии и частичным разрушением элементов каркаса метаматериала, ускорится при понижении начальной температуры.

Заключение

Проведено численное исследование слоистых структур с прослойкой из ауксетического метаматериала из алюминиевого сплава 1520 при импульсных воздействиях и гармоническом нагружении в широком диапазоне начальных температур от 152 до 473 К.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

Способность рассмотренных трехслойных структур демпфировать импульсные нагрузки с амплитудами скорости до 100 м/с и циклические механические воздействия с частотами до 2.5 кГц сохраняется в диапазоне начальных температур от 152 до 473 К.

Изменение диссипативных свойств трехслойных структур со слоем из ауксетического метаматериала при динамическом нагружении в диапазоне начальных температур от 152 до 473 К обусловлено не только деформацией уплотнения слоя метаматериала, но и повреждением и разрушением элементов каркаса метаматериала.

Разрушение элементов каркаса ауксетического метаматериала в динамически нагружаемых трехслойных структурах в диапазоне начальных температур от 152 до 473 К начинается при изгибе в зонах их соединения в конструкции ауксетического метаматериала при динамических нагрузках, нормальных к верхней поверхности. Наиболее опасными для сохранения прочности метаматериала являются знакопеременные циклические нагрузки, приводящие к развитию повреждений и разрушению части каркасных элементов ауксетического метаматериала.

Список источников

1. Gao D., Zhang J., Zhang C., You Y. Dynamic compressive and flexural behaviour of re-entrant auxetics: A numerical study // *Materials*. 2023. V. 16. Art. 5219. doi: 10.3390/ma16155219
2. Zhang J., Shi B.-Q., Wang B., Yu G.-Q. Crushing Response and Optimization of a Modified 3D Re-Entrant Honeycomb // *Materials*. 2024. V. 17. Art. 2083. doi: 10.3390/ma17092083
3. Zhang H., Chen P., Zhang Z., Lin G., Sun W. Structural response and energy absorption assessment of corrugated wall mechanical metamaterials under static and dynamic compressive loading // *International Journal of Impact Engineering*. 2023. V. 172. Art. 104427. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2022.104427
4. Jiang W., Zhou J., Jiayi Liu, Zhang M., Huang W. Free vibration behaviours of composite sandwich plates with reentrant honeycomb cores // *Applied Mathematical Modelling*. 2023. V. 116. P. 547–568. doi: 10.1016/j.apm.2022.12.004
5. Gao X., Wei J., Huo J., Wan Z., Li Y. The vibration isolation design of a re-entrant negative poisson's ratio metamaterial // *Applied Sciences*. 2023. V. 13. Art. 944. doi: 10.3390/app13169442
6. Скрипняк В.А., Чирков М., Скрипняк В.В. Механическое поведение алюминиевого сплава 1520 при растяжении в диапазоне скоростей деформации от 10^{-1} до 10^3 с $^{-1}$ // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2023. № 86. С. 120–135. doi: 10.1016/j.mechmat.2023.104605
7. Dæhli L.E.B., Johnsen J., Berstad T., Borvik T., Hopperstad O.S. An experimental-numerical study on the evolution of the Taylor–Quinney coefficient with plastic deformation in metals // *Mechanics of Materials*. 2023. V. 179. Art.104605. doi: 10.17223/19988621/86/9
8. Gurson A.L. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part 1 – Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media // *Journal of Engineering Materials and Technology*. 1977. V. 99. P. 2–15. doi: 10.1115/1.3443401
9. Tvergaard V. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions // *International Journal of Fracture*. 1981. V. 17. P. 389–407. doi: 10.1007/BF00036191
10. Tvergaard V. On localization in ductile materials containing spherical voids // *International Journal of Fracture*. 1982. V. 18. P. 237–252. doi: 10.1007/BF00015686
11. Johnson G.R., Cook W.H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures // *Engineering Fracture Mechanics*. 1985. V. 2. P. 31–48. doi: 10.1016/0013-7944(85)90052-9

12. Skripnyak V.A., Chirkov M.O., Skripnyak V.V. Specific damping capacity of layered structures with a layer of dissipative metamaterial under quasistatic and dynamic impacts // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2024. V. 17. P. 91–96. EDN: QPKVXR

References

1. Gao D., Zhang J., Zhang C., You Y. (2023) Dynamic compressive and flexural behaviour of re-entrant auxetics: A numerical study. *Materials*. 16. Article 5219. doi: 10.3390/ma16155219
2. Zhang J., Shi B.-Q., Wang B., Yu G.-Q. (2024) Crushing response and optimization of a modified 3D re-entrant honeycomb. *Materials*. 17. Article 2083. doi: 10.3390/ma17092083
3. Zhang H., Chen P., Zhang Z., Lin G., Sun W. (2023) Structural response and energy absorption assessment of corrugated wall mechanical metamaterials under static and dynamic compressive loading. *International Journal of Impact Engineering*. 172. Article 104427. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2022.104427
4. Jiang W., Zhou J., Liu J., Zhang M., Huang W. (2023) Free vibration behaviours of composite sandwich plates with reentrant honeycomb cores. *Applied Mathematical Modelling*. 116. pp. 547–568. doi: 10.1016/j.apm.2022.12.004
5. Gao X., Wei J., Huo J., Wan Z., Li Y. (2023) The vibration isolation design of a re-entrant negative poisson's ratio metamaterial. *Applied Sciences*. 13. Article 9442. doi: 10.3390/app13169442
6. Skripnyak V.A., Chirkov M.O., Skripnyak V.V. (2023) Mekhanicheskoe povedenie alyuminiyevogo splava 1520 pri rastyazhenii v diapazone skorostey deformatsii ot 10^{-1} do 10^3 s^{-1} [Mechanical behavior of aluminum alloy 1520 under tension in the range of strain rates from 10^{-1} to 10^3 s^{-1}]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 120–135. doi: 10.17223/19988621/86/9
7. Dæhli L.E.B., Johnsen J., Berstad T., Borvik T., Hopperstad O.S. (2023) An experimental-numerical study on the evolution of the Taylor–Quinney coefficient with plastic deformation in metals. *Mechanics of Materials*. 179. Article 104605. doi: 10.1016/j.mechmat.2023.104605
8. Gurson A.L. (1977) Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: part 1 – yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 99. pp. 2–15. doi: 10.1115/1.3443401
9. Tvergaard V. (1981) Influence of voids on shear band instabilities under plane strain condition. *International Journal of Fracture*. 17. pp. 389–407. doi: 10.1007/BF00036191
10. Tvergaard V. (1982) On localization in ductile materials containing spherical voids. *International Journal of Fracture*. 18. pp. 237–252. doi: 10.1007/BF00015686
11. Johnson G.R., Cook W.H. (1985) Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Engineering Fracture Mechanics*. 2. pp. 31–48. doi: 10.1016/0013-7944(85)90052-9
12. Skripnyak V.A., Chirkov M.O., Skripnyak V.V. (2024) Specific damping capacity of layered structures with a layer of dissipative metamaterial under quasistatic and dynamic impacts. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 17. pp. 91–96. EDN: QPKVXR

Сведения об авторах:

Скрипняк Владимир Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: skrp2012@yandex.ru

Скрипняк Евгения Георгиевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: eva.skrp@mail.ru

Скрипняк Владимир Альбертович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: skrp2006@yandex.ru

Information about the authors:

Skrpnyak Vladimir V. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: skrp2012@yandex.ru

Skrpnyak Evgeniya G. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: eva.skrp@mail.ru

Skrpnyak Vladimir A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: skrp2006@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 22.10.2024; принята к публикации 07.02.2025

The article was submitted 22.10.2024; accepted for publication 07.02.2025

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2025. № 93

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 21.02.2025 г. Формат 70×100^{1/16}.
Печ. л. 11,6; усл. печ. л. 10,8. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 6232.

Дата выхода в свет 25.02.2025 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru