

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2025

№ 94

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimatov, Aleksey M. Bubenichikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36
Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>
Контактный тел./факс: (3822) 529-740
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А. Об одном подклассе почти выпуклых функций, связанных со звездобразными функциями порядка $1/2$	5
Кармуши М., Колесников И.А., Лобода Ю.А. Управляющая функция уравнения Левнера, генерирующая разрез, выходящий из нулевого угла	24
Makhkamov E.M., Bozorov J.T. Bishop's formula for a matrix polyhedron with a non-piecewise smooth boundary	33
Садыгов М.А. О функции точного штрафа в нормированном пространстве	40
Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А. Кольца обобщенных матриц, представляющих эндоморфизмы конечной примарной группы	57

МЕХАНИКА

Архипов В.А., Золоторёв Н.Н., Козлов Е.А., Кузнецов В.Т. Пиролиз полимерных композиционных материалов при воздействии теплового излучения	67
Афонин Г.И., Афонин А.Г. Использование принципа наименьшего действия в исследовании течения идеального газа в дозвуковой части сопла	79
Ахметов А., Смолин И.Ю. Оценка напряженно-деформированного состояния участков литосферы и верхних слоев земной коры на территории Баженовской свиты на основе многоуровневого численного моделирования	93
Ахметов Р.Г., Дылдин Г.П., Макаров В.Н., Макаров Н.В. Математическое моделирование термоаэросепарации аэрозоля в шахтных печах сушки рудных материалов	109
Буркин В.В., Ищенко А.Н., Саммель А.Ю., Хабибуллин М.В. Теоретическая оценка минимально необходимой скорости сквозного пробития разнесенной стальной преграды суперкавитирующим ударником	124
Глаголев В.В., Козлов В.В., Маркин А.А. Условия обратимого деформирования плоских тел, ослабленных вырезом	136
Иванычев Д.А. Решение неосесимметричной задачи термоупругости для трансверсально-изотропных тел вращения	149
Маевский К.К. Численное моделирование высокоэнергетического воздействия на Al_2O_3	163
Порязов В.А., Глотов О.Г., Крайнов А.Ю., Крайнов Д.А. Экспериментальное исследование и моделирование горения металлизированного смесового твердого топлива с учетом распределения агломератов по размерам. II. Результаты численного моделирования	175

CONTENTS

MATHEMATICS

Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A. On a subclass of close-to-convex functions related to starlike functions of order $1/2$	5
Karmushi M., Kolesnikov I.A., Loboda Yu.A. The driving function of the Loewner equation generating slit, emanating from a zero corner	24
Makhkamov E.M., Bozorov J.T. Bishop's formula for a matrix polyhedron with a non-piecewise smooth boundary	33
Sadygov M.A. About the function of the exact penalty in normed space	40
Stepanova A.Yu., Timoshenko E.A. Rings of generalized matrices representing endomorphisms of a finite primary group	57

MECHANICS

Arkhipov V.A., Zolotorev N.N., Kozlov E.A., Kuznetsov V.T. Pyrolysis of polymer composite materials under thermal radiation effect	67
Afonin G.I., Afonin A.G. The use of the principle of least action in a study of ideal gas flow in subsonic parts of a nozzle	79
Akhmetov A., Smolin I.Yu. Evaluation of the stress-strain state of the lithosphere sections and upper layers of Earth's crust in the Bazhenov Suite based on multi-scale numerical modeling	93
Akhmetov R.G., Dyldin G.P., Makarov V.N., Makarov N.V. Mathematical modeling of the aerosol thermoaeroseparation in shaft furnaces for drying ore materials	109
Burkin V.V., Ishchenko A. N., Sammel' A.Yu., Khabibullin M.V. Theoretical assessment of the minimum velocity required for the complete penetration of a supercavitating projectile into a spaced steel barrier	124
Glagolev V.V., Kozlov V.V., Markin A.A. Conditions for the reversible deformation of planar bodies weakened by a cut	136
Ivanychev D.A. Solution to the non-axisymmetric thermoelastic problem for transversely isotropic bodies of rotation	149
Maevskii K.K. Numerical simulation of a high-energy impact on Al_2O_3	163
Poryazov V.A., Glotov O.G., Krainov A.Yu., Krainov D.A. Experimental investigation and modeling of metallized composite solid propellant combustion with allowance for the size distribution of agglomerates. II. Numerical modeling results	175

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 517.54

doi: 10.17223/19988621/94/1

MSC: 30C45

Об одном подклассе почти выпуклых функций, связанных со звездообразными функциями порядка $1/2$ **Федор Федорович Майер¹, Мейрамбек Габдулиевич Тастанов²,
Анар Алтаевна Утемисова³***^{1, 2, 3} Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова,
Костанай, Казахстан**¹ maiyer@mail.ru**² tastao@mail.ru**³ anar_utemisova@mail.ru*

Аннотация. Исследуется специальный подкласс почти выпуклых в единичном круге функций, который задается через звездообразные функции порядка $1/2$. Некоторые близкие подклассы активно изучались в ряде работ, опубликованных в последнее десятилетие. Для данного класса функций и его подклассов найдены точные теоремы искажения и радиусы выпуклости, рассмотрены частные случаи. Получены как новые результаты, так и обобщения ранее известных результатов. Для вывода основных результатов используются полученные в статье точные оценки аналитических функций, обобщающие ранее известные оценки.

Ключевые слова: звездообразные функции, почти выпуклые функции, оценки искажения, радиусы выпуклости

Для цитирования: Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А. Об одном подклассе почти выпуклых функций, связанных со звездообразными функциями порядка $1/2$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 5–23. doi: 10.17223/19988621/94/1

Original article

On a subclass of close-to-convex functions related to starlike functions of order $1/2$ **Fedor F. Maiyer¹, Meyrambek G. Tastanov², Anar A. Utemissova³***^{1, 2, 3} Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan
¹ maiyer@mail.ru*

² *tastao@mail.ru*
³ *anar_utemisova@mail.ru*

Abstract. The article introduces and investigates a special subclass of close-to-convex functions in a unit disk which is defined in terms of starlike functions of the order $1/2$. Functions of this class, as well as starlike functions of the order $1/2$, may have omissions in the decomposition.

Some close subclasses have been actively studied in the works of Gao C.-Y., Zhou S.-Q., Kowalczyk J., Les-Bomba E., Prajapat J.K., and other authors published in the last decade. The class of functions introduced in this paper is characterized by the fact that the range of values of the functional used is contained in the right half of the generalized Bernoulli lemniscate with a nodal point 0 and a given angle between the tangents at the nodal point, which allows us to consider many special cases. For example, a disk of arbitrary radius with a point 0 at the border, an angle with a vertex at point 0 of a given size, and others. For the introduced class of functions and its subclasses, exact distortion theorems and convexity radii are found, and extreme functions are given. Both new results and generalizations of previously known results are obtained.

To solve the extreme problems under consideration, the article provides accurate estimates of the logarithmic derivative in the class of analytical functions, the codomain of values of which are contained in the right half of the generalized Bernoulli lemniscate. These estimates are given both for the case of a standard decomposition of a function in a series, and in the presence of omissions in the decomposition and summarize the well-known results of Goel R.M. and Shaffer D.B.

Keywords: starlike functions, close-to-convex functions, distortion estimates, radii of convexity

For citation: Maiyer, F.F., Tastanov, M.G., Utemissova, A.A. (2025) On a subclass of close-to-convex functions related to starlike functions of order $1/2$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 5–23. doi: 10.17223/19988621/94/1

Введение

Пусть $\mathcal{A}_n$ – класс аналитических в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $\varphi(z)$ с разложением вида: $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, $z \in E$, $\mathcal{P}_n$ – класс функций $\varphi(z) \in \mathcal{A}_n$ с положительной действительной частью $\operatorname{Re} \varphi(z) > 0$, $z \in E$, и $\mathcal{N}_n$ – класс аналитических в E функций $f(z)$ вида: $f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \dots$, $n \geq 1$, $z \in E$. Также положим, что $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_1$, $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}_1$, $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}_1$. Кроме того, через $\mathcal{P}_n(\gamma)$ будем обозначать класс функций $\varphi(z) \in \mathcal{A}_n$, удовлетворяющих условию $|\arg \varphi(z)| < \gamma\pi/2$, $z \in E$. Очевидно, что $\mathcal{P}_n(1) = \mathcal{P}_n$ и $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$ – известный класс Каратеодори.

Через S , S^0 , S^* и K будем обозначать соответственно классы однолистных, выпуклых, звездообразных и почти выпуклых функций $f(z) \in \mathcal{N}$. Кроме того, пусть $S^*(\alpha)$ – класс функций, звездообразных порядка α , т.е. удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$. Также пусть $K(\gamma)$ обозначает класс функций,

почти выпуклых порядка γ [1, 2]. При этом $f(z) \in K(\gamma)$ тогда и только тогда, когда существует функция $g(z) \in S^*$ такая, что выполняется условие

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{g(z)} \right| < \gamma \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad z \in E. \quad (1)$$

При этом $S^0 = K(0) \subset K(\gamma) \subset K(1) = K$.

В 2005 г. Ч.-И. Гао и Ш. Чжоу [3] ввели класс

$$K_S = \left\{ f(z) \in \mathcal{N} : \operatorname{Re} \left(-\frac{z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)} \right) > 0, g(z) \in S^*(1/2), z \in E \right\}$$

аналитических в E функций $f(z)$, являющийся подклассом класса K .

Позже Ж. Ковальчук и Е. Лес-Бомба [4] с помощью условия

$$\operatorname{Re} \left(-\frac{z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)} \right) > \alpha, \quad (2)$$

где $0 \leq \alpha < 1$, $g(z) \in S^*(1/2)$, ввели подкласс $K_S(\alpha)$ функций $f(z) \in \mathcal{N}$. Очевидно, что $K_S(\alpha) \subset K_S(0) = K_S \subset K$.

Обобщая условие (2), авторы [5] ввели класс $\chi_t(\alpha)$ функций $f(z) \in \mathcal{N}$ таких, что в круге E выполняется условие

$$\operatorname{Re} \left(\frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} \right) > \alpha, \quad (3)$$

где $0 \leq \alpha < 1$, $t \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ и $g(z) \in S^*(1/2)$. Легко заметить, что $\chi_{-1}(\alpha) = K_S(\alpha)$ и $\chi_{-1}(0) = K_S$. Кроме того (см., напр.: [5]), $\chi_t(\alpha) \subset K_S(\alpha) \subset K_S \subset K \subset S$.

В работах [3, 4] установлены некоторые свойства функций соответственно классов K_S и $K_S(\gamma)$. В [5] получены свойства (оценки коэффициентов, теоремы искажения и покрытия и радиус выпуклости) функций класса $\chi_t(\alpha)$, в том числе и обобщающие некоторые результаты предыдущих авторов.

В статьях [6, 7] введен класс $K_S(\varphi_0)$ с помощью расширения условия (2) в форме

$$-\frac{z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)} \prec \varphi_0(z), \quad (4)$$

где функция $\varphi_0(z) \in \mathcal{P}$ и является симметричной относительно действительной оси и выпуклой. Здесь в терминах $\varphi_0(z)$ найдены оценки коэффициентов и теоремы искажения, также рассмотрен частный случай $K_S \left(\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z} \right) \equiv K_S(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$.

Развивая идеи статьи [5], введем класс $\chi_t^{n,m}(\alpha, \gamma)$ аналитических в E функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\left| \left(\frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} \right)^{1/\gamma} - \frac{1}{2\alpha} \right| < \frac{1}{2\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \gamma \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \quad z \in E, \quad (5)$$

где $t \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $g(z) \in \mathcal{N}_m \cap S^*(1/2)$, причем будем обозначать $\chi_t(\alpha, \gamma) \equiv \chi_t^{1,1}(\alpha, \gamma)$.

В настоящей статье рассматриваются свойства функций классов $\chi_t^{n,n}(\alpha, \gamma)$, $\chi_t^{n,1}(\alpha, \gamma)$, в частности получены точные теоремы искажения, а также радиус выпуклости. В частных случаях найдены новые результаты для подклассов класса $\chi_t^{n,n}(\alpha, \gamma)$, полученные в виде ограничений на области значений функционала $tz^2 f'(z) / (g(z)g(tz))$, в том числе и для случая (3). При конкретном выборе функции $g(z)$ в классе $\chi_t^{n,1}(\alpha, \gamma)$ вытекают теоремы искажения и радиусы выпуклости для новых классов функций, выпуклых в направлении мнимой оси и выпуклых в положительном направлении действительной оси. Получены как новые оригинальные результаты, так и обобщения ранее известных результатов.

1. Описание некоторых классов функций из $\mathcal{N}$

Пусть $f(z) \in \mathcal{N}_n$ и пусть $f(z) \in \chi_t^{n,m}(\alpha, \gamma)$, т.е. выполняется условие (5). Обозначим

$$G(z) = \frac{g(z)g(tz)}{tz},$$

где $t \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Нетрудно установить, что если $g(z) \in \mathcal{N}_m$, то и $G(z) \in \mathcal{N}_m$. Кроме того, из условия $g(z) \in S^*(1/2)$ сразу вытекает (см. напр.: [5]), что $G(z) \in S^*$.

Поскольку в силу (5) $zf'(z) / G(z) \prec \varphi_0(z)$, где

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-(1-2\alpha)z} \right)^\gamma, \quad (6)$$

то

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{G(z)} \right| \leq \max_{z \in E} |\arg \varphi_0(z)| < |\gamma| \frac{\pi}{2}, \quad |\gamma| \leq 1, \quad \gamma \neq 0, \quad G(z) \in S^*, \quad z \in E.$$

То есть выполняется условие (1) со звездобразной функцией $G(z) \in \mathcal{N}_m$. Поэтому любая функция $f(z)$ из $\chi_t^{n,m}(\alpha, \gamma)$ является почти выпуклой порядка $|\gamma|$, и $\chi_t^{n,m}(\alpha, \gamma) \subset \chi_t(\alpha, \gamma) \subset K(|\gamma|) \subset K$.

При $\gamma = -1$ получаем класс функций

$$\chi_t^{n,m}(\alpha, -1) \equiv \chi_t^{n,m}(\alpha) = \left\{ f(z) \in \mathcal{N}_n : \operatorname{Re} \frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} > \alpha, 0 \leq \alpha < 1, z \in E \right\},$$

который при $n = m = 1$ ранее рассматривался в [5].

Также будут рассматриваться следующие подклассы класса $\chi_t^{n,m}(\alpha, \gamma)$:

$$\begin{aligned}\chi_t^{n,m}(\alpha, 1) &= \left\{ f(z) \in \mathcal{N}_n : \left| \frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} - \frac{1}{2\alpha} \right| < \frac{1}{2\alpha}, 0 < \alpha < 1, z \in E \right\}, \\ \chi_t^{n,m}(0, \gamma) &= \left\{ f(z) \in \mathcal{N}_n : \left| \arg \frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} \right| < \gamma \frac{\pi}{2}, 0 < \gamma \leq 1, z \in E \right\}, \\ \chi_t^{n,m}\left(\frac{1}{2}, 1\right) &= \left\{ f(z) \in \mathcal{N}_n : \left| \frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} - 1 \right| < 1, z \in E \right\}.\end{aligned}$$

2. Оценки в некоторых классах аналитических функций

Будем говорить, что функция $\varphi(z)$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n(\alpha, \gamma)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(z) \in \mathcal{A}_n$ и

$$\left| (\varphi(z))^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{1}{2\alpha} \right| < \frac{1}{2\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \gamma \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \quad z \in E. \quad (7)$$

Лемма 1. Если $\varphi(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha, \gamma)$, то

$$\varphi(z) \prec \varphi_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-(1-2\alpha)z} \right)^\gamma. \quad (8)$$

Действительно, поскольку

$$w(z) = \frac{1+z}{1-(1-2\alpha)z}$$

есть отображение круга E на круг $|w - 1/(2\alpha)| < 1/(2\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, то условие (7) равносильно подчиненности $(\varphi(z))^{1/\gamma} \prec w(z)$, откуда следует (8).

Легко заметить, что при $\alpha \rightarrow 0$ класс $\mathcal{P}_n(\alpha, \gamma)$ сводится к классу $\mathcal{P}_n(\gamma)$. Кроме того, при любом α , $0 < \alpha < 1$, в силу (7) выполняется условие $\operatorname{Re}(\varphi(z))^{\frac{1}{\gamma}} > 0$, т.е.

$|\arg \varphi(z)| < \gamma \frac{\pi}{2}$, $z \in E$. Поэтому при любом α , $0 < \alpha < 1$, область значений $\varphi(E)$ содержится внутри угла $|\arg w| < \gamma \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\mathcal{P}_n(\alpha, \gamma) \subset \mathcal{P}_n(0, \gamma) = \mathcal{P}_n(\gamma) \subset \mathcal{P}_n(0, 1) = \mathcal{P}_n.$$

В случае, когда $0 < \alpha < 1$, $0 < \gamma \leq 1$, условие (7) означает, что область значений $\varphi(E)$ содержится в области D , ограниченной правой половиной лемнискаты Бернулли с узловой точкой $w = 0$ и углом между касательными в узловой точке, равным $\gamma\pi$. При $-1 \leq \gamma < 0$ область значений $\varphi(E)$ содержится в области D_1 , получаемой из D с помощью отображения $\zeta = 1/w$.

Лемма 2. Пусть функция $1 + \Phi(z) \in \mathcal{A}_n$ и удовлетворяет условию

$$\left| \exp \left\{ \frac{1}{\gamma} \Phi(z) \right\} - c \right| < c, \quad c > \frac{1}{2}, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (9)$$

Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеет место точная оценка

$$|\Phi'(z)| \leq \frac{\gamma(2c-1)nr^{n-1}}{(1-r^n)[c+(c-1)r^n]}, \quad (10)$$

которая достигается для функции $\Phi(z) = \Phi_0(z^n)$ в точке $z = \sqrt[n]{-1}r$, где

$$\Phi_0(z) = \gamma \ln \frac{c(1+z)}{c-(c-1)z}.$$

Лемма 2 установлена нами в [8].

Теорема 1. Пусть $\varphi(z) \in \mathcal{P}_n(\alpha, \gamma)$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-r^n}{1+(1-2\alpha)r^n} \right)^\gamma \leq |\varphi(z)| \leq \left(\frac{1+r^n}{1-(1-2\alpha)r^n} \right)^\gamma \quad \text{при } 0 < \gamma \leq 1, \quad (11)$$

$$\left(\frac{1-(1-2\alpha)r^n}{1+r^n} \right)^{-\gamma} \leq |\varphi(z)| \leq \left(\frac{1+(1-2\alpha)r^n}{1-r^n} \right)^{-\gamma} \quad \text{при } -1 \leq \gamma < 0, \quad (12)$$

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{2|\gamma|(1-\alpha)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-2\alpha)r^n)} \quad \text{при } 0 < |\gamma| \leq 1 \quad (13)$$

Экстремальная функция имеет вид: $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, где $\varphi_0(z)$ определяется по формуле (6).

Доказательство. В силу подчиненности (8) с учетом выпуклости функции $\varphi_0(z)$ и свойства ее симметрии $\varphi_0(\bar{z}) = \overline{\varphi_0(z)}$ относительно действительной оси, при любом r , $0 \leq r < 1$, имеем $\varphi(|z| \leq r) \subset \varphi_0(|z| \leq r^n)$. Поэтому при $0 < \gamma \leq 1$ с учетом того, что $\varphi'_0(0) > 0$, получаем неравенство $\varphi_0(-r^n) \leq |\varphi(z)| \leq \varphi_0(r^n)$, откуда вытекает оценка (11). Оценка (12) получается аналогично с учетом того, что при $-1 \leq \gamma < 0$ выполняется условие $\varphi'_0(0) < 0$.

Рассмотрим функции $\Phi(z) = \ln \varphi(z)$, $\Phi_0(z) = \ln \varphi_0(z)$. Поскольку $\Phi(z) \prec \Phi_0(z)$, то условие (9) можно переписать в виде (7), причем $\gamma \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Поэтому при $0 < \gamma \leq 1$ оценка (13) сразу вытекает из оценки (10).

В случае, когда $-1 \leq \gamma < 0$, функция $\psi(z) = 1/\varphi(z)$ удовлетворяет условию (7) $|\psi(z)^{1/\gamma} - 1/(2\alpha)| < 1/(2\alpha)$ с параметром $\gamma \in (0, 1]$. Кроме того, $z\psi'(z)/\psi(z) = -z\varphi'(z)/\varphi(z)$. Поэтому оценка (13) остается справедливой и в этом случае.

Нетрудно установить, что для экстремальной функции $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, где $\varphi_0(z)$ определяется по формуле (6), в оценке (11) знаки равенства слева и справа

достигаются соответственно в точках $z = \sqrt[n]{-1}r$ и $z = r$, в оценке (12) – соответственно в точках $z = r$ и $z = \sqrt[n]{-1}r$.

Кроме того, при $0 < \gamma \leq 1$

$$z \frac{\varphi'_0(z)}{\varphi_0(z)} = \frac{2\gamma(1-\alpha)nz^n}{(1+z^n)(1-(1-2\alpha)z^n)},$$

и в точке $z = \sqrt[n]{-1}r$

$$z \frac{\varphi'_0(z)}{\varphi_0(z)} = -\frac{2\gamma(1-\alpha)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-2\alpha)r^n)}.$$

При $-1 \leq \gamma < 0$ для экстремальной функции

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{1-(1-2\alpha)z}{1+z} \right)^{-\gamma}$$

находим

$$z \frac{\varphi'_0(z)}{\varphi_0(z)} = \frac{2\gamma(1-\alpha)nz^n}{(1+z^n)(1-(1-2\alpha)z^n)}.$$

Поэтому в точке $z = \sqrt[n]{-1}r$

$$z \frac{\varphi'_0(z)}{\varphi_0(z)} = -\frac{2\gamma(1-\alpha)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-2\alpha)r^n)} = \frac{2|\gamma|(1-\alpha)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-2\alpha)r^n)}.$$

Следовательно, для всех $\gamma \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ в оценке (13) достигается знак равенства, и поэтому оценку (13) улучшить нельзя.

Примечание. При $\gamma = 1$, $n \geq 1$ оценки (11), (13) получены в статье [9. Теор. 1, 7], а при $\gamma = n = 1$ – в статьях [10. Лемма 2.1] и [11. Следствие 3].

Кроме того, при $\gamma = n = 1$ случаи $\alpha \rightarrow 0$ ($\operatorname{Re} \varphi(z) > 0$) и $\alpha = 1/2$ ($|\varphi(z) - 1| < 1$) условия (7) приводят к оценкам

$$\left| \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{2}{1-r^2} \quad \text{и} \quad \left| \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{1}{1-r},$$

полученным Т.Х. МакГрегором [12, 13], а для произвольного $n \geq 1$ в классе функций, заданном условием $\operatorname{Re} \varphi(z) > 0$, – к оценке из [14]

$$|z\varphi'(z)/\varphi(z)| \leq 2nr^n/(1-r^{2n}).$$

При $\gamma = \alpha = 1/2$ условие (7) равносильно подчиненности $\varphi(z) \prec \varphi_0(z) = \sqrt{1+z}$. Поэтому из теоремы 1 получаем оценки

$$\sqrt{1-r^n} \leq |\varphi(z)| \leq \sqrt{1+r^n}, \quad \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{nr^n}{2(1-r^n)},$$

которые при $n = 1$ получены в [15].

При $\gamma = -1$ получаем класс $\mathcal{P}_n(\alpha, -1) = \{\varphi(z) \in \mathcal{A}_n : \operatorname{Re} \varphi(z) > \alpha, 0 \leq \alpha < 1, z \in E\}$, которому соответствуют оценки

$$\frac{1-(1-2\alpha)r^n}{1+r^n} \leq |\varphi(z)| \leq \frac{1+(1-2\alpha)r^n}{1-r^n},$$

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{2(1-\alpha)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-2\alpha)r^n)},$$

полученные ранее в [9. Теор. 7; 16. Лемма 2], а при $\gamma = -1$, $\alpha = 0$ – в [14] для класса функций с положительной действительной частью.

При $\gamma = -1$, $n = 1$, $0 \leq \alpha < 1$ получаем оценки из [17. Теор. 3].

Также отметим, что при $\alpha \rightarrow 0$, $0 < \gamma \leq 1$ класс $\mathcal{P}_n(\alpha, \gamma)$ сводится к классу $\mathcal{P}_n(\gamma)$, и мы получаем точные оценки для класса $\mathcal{P}_n(\gamma)$:

$$\left(\frac{1-r^n}{1+r^n} \right)^\gamma \leq |\varphi(z)| \leq \left(\frac{1+r^n}{1-r^n} \right)^\gamma, \quad \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{2\gamma nr^n}{1-r^{2n}}.$$

3. Теорема искажения в классе $\chi_t^{n,n}(\alpha, \gamma)$

Теорема 2. Пусть $f(z) \in \chi_t^{n,n}(\alpha, \gamma)$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-r^n}{1+(1-2\alpha)r^n} \right)^\gamma \frac{1}{(1+r^n)^{2/n}} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1+r^n}{1-(1-2\alpha)r^n} \right)^\gamma \frac{1}{(1-r^n)^{2/n}}, \quad (14)$$

при $0 < \gamma \leq 1$,

$$\left(\frac{1-(1-2\alpha)r^n}{1+r^n} \right)^{-\gamma} \frac{1}{(1+r^n)^{2/n}} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1+(1-2\alpha)r^n}{1-r^n} \right)^{-\gamma} \frac{1}{(1-r^n)^{2/n}} \quad (15)$$

при $-1 \leq \gamma < 0$.

Доказательство. Пусть $0 < \gamma \leq 1$. В силу условия (5) с учетом обозначения $G(z) = g(z)g(tz)/(tz)$ на основе оценки (11) получаем

$$\left(\frac{1-r^n}{1+(1-2\alpha)r^n} \right)^\gamma \leq \left| \frac{zf'(z)}{G(z)} \right| \leq \left(\frac{1+r^n}{1-(1-2\alpha)r^n} \right)^\gamma.$$

Отсюда

$$\left| \frac{G(z)}{z} \right| \left(\frac{1-r^n}{1+(1-2\alpha)r^n} \right)^\gamma \leq |f'(z)| \leq \left| \frac{G(z)}{z} \right| \left(\frac{1+r^n}{1-(1-2\alpha)r^n} \right)^\gamma. \quad (16)$$

Поскольку $G(z) \in \mathcal{N}_n \cap S^*$, то при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеет место следующая оценка (см. напр.: [18. Теор. 3]):

$$\frac{r}{(1+r^n)^{2/n}} \leq |G(z)| \leq \frac{r}{(1-r^n)^{2/n}}.$$

Комбинируя данную оценку с оценкой (16), получим (14).

В случае $-1 \leq \gamma < 0$ доказательство оценки (15) проводится аналогичным образом с использованием оценки (12).

Для доказательства точности оценки (14) рассмотрим экстремальную функцию

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{1+t^n}{1-(1-2\alpha)t^n} \right)^\gamma \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}. \quad (17)$$

Для нее имеем

$$f'_0(z) = \left(\frac{1+z^n}{1-(1-2\alpha)z^n} \right)^\gamma \frac{1}{(1-z^n)^{2/n}}.$$

Поэтому в точках $z = \sqrt[n]{-1}r$ и $z = r$ в оценке (14) соответственно слева и справа достигается знак равенства.

Аналогично при $-1 \leq \gamma < 0$ для функции

$$f_1(z) = \int_0^z \left(\frac{1+(1-2\alpha)r^n}{1-r^n} \right)^{-\gamma} \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}$$

с учетом того, что $-\gamma \in (0; 1]$, получим, что знак равенства в оценке (15) слева и справа достигается соответственно в точках $z = \sqrt[n]{-1}r$ и $z = r$.

Теорема доказана.

4. Радиус выпуклости класса $\chi_t^{n,n}(\alpha, \gamma)$

Теорема 3. Радиус выпуклости r_0 класса $\chi_t^{n,n}(\alpha, \gamma)$ определяется как единственный на интервале $(0; 1)$ корень уравнения $\tau(r, \alpha, \gamma, n) = 0$, где $\tau(r, \alpha, \gamma, n) = (1-2\alpha)r^{3n} - [1-4\alpha+2|\gamma|(1-\alpha)n]r^{2n} - [1+2\alpha+2|\gamma|(1-\alpha)n]r^n + 1$.

При $0 < \gamma \leq 1$ радиус выпуклости является точным и достигается для функции (17).

Доказательство. Если $f(z) \in \chi_t^{n,n}(\alpha, \gamma)$, то существует функция $g(z) \in \mathcal{N}_n \cap S^*(1/2)$ такая, что функция $G(z) = g(z)g(tz)/(tz)$ является звездообразной в круге E . Поэтому, обозначив

$$\varphi(z) = \frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} = \frac{zf'(z)}{G(z)} \in \mathcal{P}_n(\alpha, \gamma),$$

имеем $zf'(z) = G(z)\varphi(z)$. Отсюда

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = z \frac{G'(z)}{G(z)} + z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

и при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$,

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \geq \min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} \left(z \frac{G'(z)}{G(z)} \right) - \max_{|z| \leq r} \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right|. \quad (18)$$

Поскольку $G(z) \in \mathcal{N}_n \cap S^*$, то $z \frac{G'(z)}{G(z)} \prec \frac{1+z}{1-z}$, откуда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, сразу вытекает оценка

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{G'(z)}{G(z)} \right) \geq \frac{1-r^n}{1+r^n}.$$

Поэтому с учетом этой оценки и оценки (13) получаем

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \geq \frac{1-r^n}{1+r^n} - \frac{2|\gamma|(1-\alpha)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-2\alpha)r^n)} = \frac{\tau(r, \alpha, \gamma, n)}{(1-r^{2n})(1+(1-2\alpha)r^n)}.$$

Если r_0 является наименьшим на интервале $(0; 1)$ корнем уравнения $\tau(r, \alpha, \gamma, n) = 0$, то $\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \geq 0$ при $|z| \leq r_0$ и функция $f(z)$ является выпуклой в круге $|z| \leq r_0$.

Покажем, что уравнение $\tau(r, \alpha, \gamma, n) = 0$ на $(0; 1)$ имеет единственный корень r_0 . Действительно, нетрудно установить, что функция $m_1(r) = \frac{1-r^n}{1+r^n}$ монотонно убывает на $[0; 1]$ от $m_1(0) = 1$ до $m_1(1) = 0$, а функция $m_2(r) = \frac{2|\gamma|(1-\alpha)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-2\alpha)r^n)}$ монотонно возрастает на $[0; 1]$ от $m_2(0) = 0$ до $m_2(1) = +\infty$. Поэтому выражение

$$m_1(r) - m_2(r) = \frac{\tau(r, \alpha, \gamma, n)}{(1-r^{2n})(1+(1-2\alpha)r^n)}$$

имеет единственный нуль r_0 на $(0; 1)$, а значит, и уравнение $\tau(r, \alpha, \gamma, n) = 0$ на $(0; 1)$ имеет единственный корень r_0 .

Докажем, что при $0 < \gamma \leq 1$ радиус выпуклости является точным. Для этого рассмотрим экстремальную функцию (17), для которой

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1+z^n}{1-z^n} + \frac{2\gamma(1-\alpha)nz^n}{(1+z^n)(1-(1-2\alpha)z^n)}.$$

Поэтому в точке $z = \sqrt[n]{-1}r$ имеем

$$1 + \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \Big|_{z=\sqrt[n]{-1}r_0} = \frac{1-r_0^n}{1+r_0^n} - \frac{2\gamma(1-\alpha)nr_0^n}{(1-r_0^n)(1+(1-2\alpha)r_0^n)} = \frac{\tau(r_0, \alpha, \gamma, n)}{(1-r_0^{2n})(1+(1-2\alpha)r_0^n)} = 0.$$

Следовательно, при $0 < \gamma \leq 1$ радиус выпуклости улучшить нельзя.

5. Некоторые следствия

Следствие 1 ($\gamma = -1$). Если $f(z) \in \chi_t^{n,n}(\alpha)$, т.е. $\operatorname{Re} \frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} \geq \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, то при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеет место точная оценка

$$\frac{1-(1-2\alpha)r^n}{(1+r^n)^{1+2/n}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+(1-2\alpha)r^n}{(1-r^n)^{1+2/n}} \quad (19)$$

и функция $f(z)$ является выпуклой в круге $|z| \leq r_0$, где r_0 – единственный на интервале $(0; 1)$ корень уравнения

$$(1-2\alpha)r^{3n} - (1-4\alpha+2(1-\alpha)n)r^{2n} - (1+2\alpha+2(1-\alpha)n)r^n + 1 = 0. \quad (20)$$

При $n=1$ оценка (19) дает результат, полученный в [5. Теор. 13].

Следствие 2 ($\alpha \rightarrow 0$, $0 < \gamma \leq 1$). Если $f(z) \in \chi_t^{n,n}(0, \gamma)$, т.е. $\left| \arg \frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} \right| < \gamma \frac{\pi}{2}$,

$0 < \gamma \leq 1$, то при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеет место точная оценка

$$\frac{(1-r^n)^\gamma}{(1+r^n)^{\gamma+2/n}} \leq |f'(z)| \leq \frac{(1+r^n)^\gamma}{(1-r^n)^{\gamma+2/n}} \quad (21)$$

и точный радиус выпуклости r_0 класса $\chi_t^{n,n}(0, \gamma)$ определяется по формуле

$$r_0 = \left(1 + \gamma n - \sqrt{(1 + \gamma n)^2 - 1} \right)^{1/n}. \quad (22)$$

Доказательство. Оценка (21) сразу вытекает из оценки (14) при $\alpha \rightarrow 0$. Уравнение $\tau(r, \alpha, \gamma, n) = 0$ теоремы 3 при $\alpha \rightarrow 0$ преобразуется к виду: $r^{3n} - (1+2\gamma n)r^{2n} - (1+2\gamma n)r^n + 1 = 0$ или $(r^n + 1)(r^{2n} - 2(1+\gamma n)r^n + 1) = 0$, откуда находим радиус выпуклости (22).

Следствие 3 ($\gamma = 1$). Если $f(z) \in \chi_t^{n,n}(\alpha, 1)$, т.е. $\left| \frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} - \frac{1}{2\alpha} \right| < \frac{1}{2\alpha}$, $0 < \alpha < 1$,

то при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеет место точная оценка

$$\frac{1-r^n}{1+(1-2\alpha)r^n} \frac{1}{(1+r^n)^{2/n}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r^n}{1-(1-2\alpha)r^n} \frac{1}{(1-r^n)^{2/n}} \quad (23)$$

и точный радиус выпуклости r_0 класса $\chi_t^{n,n}(\alpha, 1)$ определяется как единственный на интервале $(0; 1)$ корень уравнения (20).

Если в следствии 1 или в следствии 3 $\alpha \rightarrow 0$, то получается класс $\chi_t^{n,n}(0)$, для которого

$$\frac{1-r^n}{(1-r^n)^{1+2/n}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r^n}{(1-r^n)^{1+2/n}}. \quad (24)$$

Кроме того, уравнение (20) преобразуется к виду: $r^{3n} - (1+2n)r^{2n} - (1+2n)r^n + 1 = 0$, откуда точный радиус выпуклости определяется по формуле

$$r_0 = \left(1 + n - \sqrt{(1+n)^2 - 1} \right)^{1/n}.$$

В частности, при $n=1$ получаем радиус выпуклости $r_0 = 2 - \sqrt{3}$ класса $\chi_t(0)$, полученный в [5. Теор. 14].

При $\alpha = 1/2$ с учетом того, что уравнение (20) приобретает вид: $(1-n)r^{2n} - (2+n)r^n + 1 = 0$, из следствия 3 получаем

Следствие 4 ($\gamma = 1$, $\alpha = 1/2$). Если $f(z) \in \chi_t^{n,n}(1/2, 1)$, т.е. $\left| \frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} - 1 \right| < 1$, то при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеет место точная оценка

$$\frac{1-r^n}{(1+r^n)^{2/n}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r^n}{(1-r^n)^{2/n}} \quad (25)$$

и точный радиус выпуклости r_0 класса $\chi_t^{n,n}(1/2, 1)$ определяется по формуле

$$r_0 = \begin{cases} 1/3, & n = 1, \\ \left(\frac{2+n-\sqrt{n(8+n)}}{2(1-n)} \right)^{1/n}, & n > 1. \end{cases} \quad (26)$$

Заметим, что условия из следствий 2–4 применительно к классу χ_t , а также случай, когда $f(z) \in \mathcal{N}_n$ с $n \geq 1$ ранее в публикациях не использовались.

6. Случай, когда $f(z) \in \mathcal{N}$, и его связь с функциями, выпуклыми в направлении

Теорема 4. Пусть $f(z) \in \chi_t^{1,n}(\alpha, \gamma)$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки:

$$\left(\frac{1-r}{1+(1-2\alpha)r} \right)^\gamma \frac{1}{(1+r^n)^{2/n}} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-(1-2\alpha)r} \right)^\gamma \frac{1}{(1-r^n)^{2/n}} \quad (27)$$

при $0 < \gamma \leq 1$,

$$\left(\frac{1-(1-2\alpha)r}{1+r} \right)^{-\gamma} \frac{1}{(1+r^n)^{2/n}} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1+(1-2\alpha)r}{1-r} \right)^{-\gamma} \frac{1}{(1-r^n)^{2/n}} \quad (28)$$

при $-1 \leq \gamma < 0$ и функция $f(z)$ является выпуклой в круге $|z| \leq r_0$ где r_0 – единственный на интервале $(0; 1)$ корень уравнения

$$\frac{1-r^n}{1+r^n} - \frac{2|\gamma|(1-\alpha)r}{(1-r)(1+(1-2\alpha)r)} = 0. \quad (29)$$

При $0 < \gamma \leq 1$ радиус выпуклости является точным и достигается для функции

$$f_2(z) = \int_0^z \left(\frac{1+t}{1-(1-2\alpha)t} \right)^\gamma \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}.$$

Доказательство теоремы 4 полностью аналогично доказательству теорем 2, 3, только оценки (11)–(13) применяются при $n = 1$. Поэтому проверим лишь точность оценок (27)–(28) и радиуса выпуклости.

Точность правой оценки (27) устанавливается рассмотрением экстремальной функции

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{1+t}{1-(1-2\alpha)t} \right)^\gamma \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}},$$

удовлетворяющей условиям теоремы 4 при $0 < \gamma \leq 1$, для которой знак равенства в правой оценке (27) достигается в точке $z = r$ при любом $n \in \mathbf{N}$.

Для доказательства точности левой оценки (27) рассмотрим следующие случаи.

Пусть n – нечетное. Тогда для функции $f_0(z)$ в точке $z = -r$ получаем

$$f_0'(z) = \left(\frac{1-r}{1+(1-2\alpha)r} \right)^\gamma \frac{1}{(1+r^n)^{2/n}},$$

что доказывает точность левой оценки (27) в этом случае.

Если n – четное, то рассмотрим два случая.

1) $n = 2, 6, 10, \dots, 2(2k-1), \dots, k \in \mathbf{N}$. Тогда $i^n = -1$, и для $z = ir$ получаем, что $iz = -r$ и $z^n = -r^n$. Поэтому для функции

$$f_1(z) = \int_0^z \left(\frac{1+it}{1-(1-2\alpha)it} \right)^\gamma \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}$$

в точке $z = ir$ находим

$$f_1'(z) = \left(\frac{1+iz}{1-(1-2\alpha)iz} \right)^\gamma \frac{1}{(1-z^n)^{2/n}} \Big|_{z=ir} = \left(\frac{1-r}{1+(1-2\alpha)r} \right)^\gamma \frac{1}{(1+r^n)^{2/n}},$$

то есть левую оценку (27) в этом случае также улучшить нельзя.

2) $n = 4, 8, 12, \dots, 4k, \dots, k \in \mathbf{N}$. Рассмотрим функцию

$$f_2(z) = \int_0^z \left(\frac{1+\varepsilon t}{1-(1-2\alpha)\varepsilon t} \right)^\gamma \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}},$$

где $\varepsilon = i^{\frac{n-2}{n}}$. В этом случае $i^n = 1$, $-\varepsilon^{-1} = i^{\frac{n+2}{n}}$, $(-\varepsilon^{-1})^n = -1$, и для $z = -\varepsilon^{-1}r$ имеем $\varepsilon z = -r$ и $z^n = -r^n$. Поэтому в точке $z = -\varepsilon^{-1}r$ получаем

$$f_2'(z) = \left(\frac{1+\varepsilon z}{1-(1-2\alpha)\varepsilon z} \right)^\gamma \frac{1}{(1-z^n)^{2/n}} \Big|_{z=-\varepsilon^{-1}r} = \left(\frac{1-r}{1+(1-2\alpha)r} \right)^\gamma \frac{1}{(1+r^n)^{2/n}},$$

что доказывает точность левой оценки (27) и в этом случае.

В случае, когда $-1 \leq \gamma < 0$, с учетом того, что $-\gamma \in (0; 1]$, точность оценки (28) обосновывается аналогичным образом.

Правая оценка (28) достигается для функции

$$f_3(z) = \int_0^z \left(\frac{1+(1-2\alpha)t}{1-t} \right)^{-\gamma} \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}$$

в точке $z = r$ при любом $n \in \mathbf{N}$, левая оценка (28) достигается для функции $f_3(z)$

в точке $z = -r$ при любом нечетном $n \in \mathbf{N}$. Если же n четное, то, рассматривая два случая, когда $n = 2(2k-1)$, $k \in \mathbf{N}$, и $n = 4k$, $k \in \mathbf{N}$, и функции

$$f_4(z) = \int_0^z \left(\frac{1 + (1-2\alpha)it}{1-it} \right)^\gamma \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}, \quad f_5(z) = \int_0^z \left(\frac{1 + (1-2\alpha)\varepsilon t}{1-\varepsilon t} \right)^\gamma \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}},$$

нетрудно доказать, что равенства слева в оценке (28) достигаются соответственно в точке $z = ir$ для функции $f_4(z)$ и в точке $z = -\varepsilon^{-1}r$ для функции $f_5(z)$.

Покажем теперь, что при $0 < \gamma \leq 1$ радиус выпуклости r_0 является точным.

Если n – нечетное, то для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{1+t}{1-(1-2\alpha)t} \right)^\gamma \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}} \in \chi_t^{1,n}(\alpha, \gamma)$$

в точке $z = -r$, где $r = r_0$, в условии выпуклости достигается знак равенства. Действительно,

$$1 + z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} \Big|_{z=-r} = \frac{1+z^n}{1-z^n} + \frac{2\gamma(1-\alpha)z}{(1+z)(1-(1-2\alpha)z)} \Big|_{z=-r} = \frac{1-r^n}{1+r^n} - \frac{2\gamma(1-\alpha)r}{(1-r)(1+(1-2\alpha)r)} = 0.$$

Если n – четное и $n = 2(2k-1)$, $k \in \mathbf{N}$, то $i^n = -1$ и для $z = ir$ получаем, что $z^n = -r^n$, $iz = -r$. Поэтому для функции

$$f_1(z) = \int_0^z \left(\frac{1+it}{1-(1-2\alpha)it} \right)^\gamma \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}} \in \chi_t^{1,n}(\alpha, \gamma)$$

в точке $z = ir$, где $r = r_0$, имеем

$$\begin{aligned} 1 + z \frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} \Big|_{z=ir} &= \left(\frac{1+z^n}{1-z^n} + \frac{2\gamma(1-\alpha)iz}{(1+iz)(1-(1-2\alpha)iz)} \right) \Big|_{z=ir} = \\ &= \frac{1-r^n}{1+r^n} - \frac{2\gamma(1-\alpha)r}{(1-r)(1+(1-2\alpha)r)} = 0. \end{aligned}$$

Если же $n = 4k$, $k \in \mathbf{N}$, то $i^n = 1$ и, если обозначить $\varepsilon = i^{\frac{n+2}{n}}$, то для $z = -\varepsilon r$ находим $z^n = -r^n$, $\varepsilon^{-1}z = -r$. Следовательно, для функции

$$f_2(z) = \int_0^z \left(\frac{1+\varepsilon^{-1}t}{1-(1-2\alpha)\varepsilon^{-1}t} \right)^\gamma \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}} \in \chi_t^{1,n}(\alpha, \gamma)$$

в точке $z = -\varepsilon r$, где $r = r_0$, находим

$$\begin{aligned} 1 + z \frac{f_2''(z)}{f_2'(z)} \Big|_{z=-\varepsilon r} &= \left(\frac{1+z^n}{1-z^n} + \frac{2\gamma(1-\alpha)\varepsilon^{-1}z}{(1+\varepsilon^{-1}z)(1-(1-2\alpha)\varepsilon^{-1}z)} \right) \Big|_{z=-\varepsilon r} = \\ &= \frac{1-r^n}{1+r^n} - \frac{2\gamma(1-\alpha)r}{(1-r)(1+(1-2\alpha)r)} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому в круге $|z| \leq r_0$ при $r > r_0$ условие выпуклости будет нарушаться. То есть радиус выпуклости увеличить нельзя.

Теорема 4 доказана.

Если в теореме 4 в качестве $g(z)$ взять функцию

$$g(z) = \frac{z}{(1-z^n)^{1/n}} \in \mathcal{N}_n \cap S^*(1/2),$$

то при $t=1$ получаем, что

$$G(z) = \frac{g(z)g(tz)}{tz} = \frac{z}{(1-z^n)^{2/n}} \in \mathcal{N}_n \cap S^*,$$

и условие (5) приобретает вид:

$$\left| \left((1-z^n)^{2/n} f'(z) \right)^{1/\gamma} - \frac{1}{2\alpha} \right| < \frac{1}{2\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \quad z \in E. \quad (30)$$

Поэтому при $n=1$ и $n=2$ получаем соответственно следующие следствия.

Следствие 5. Пусть функция $f(z) \in \mathcal{N}$ удовлетворяет условию

$$\left| \left((1-z)^2 f'(z) \right)^{1/\gamma} - 1/(2\alpha) \right| < 1/(2\alpha), \quad 0 < \alpha < 1, \quad \gamma \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \quad z \in E. \quad (31)$$

Тогда при $|z|=r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-r}{1+(1-2\alpha)r} \right)^\gamma \frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-(1-2\alpha)r} \right)^\gamma \frac{1}{(1-r)^2} \quad \text{при } 0 < \gamma \leq 1, \quad (32)$$

$$\left(\frac{1-(1-2\alpha)r}{1+r} \right)^{-\gamma} \frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1+(1-2\alpha)r}{1-r} \right)^{-\gamma} \frac{1}{(1-r)^2} \quad \text{при } -1 \leq \gamma < 0 \quad (33)$$

и функция $f(z)$ является выпуклой в круге $|z| \leq r_0$, где r_0 – единственный на интервале $(0; 1)$ корень уравнения

$$\frac{1-r}{1+r} - \frac{2|\gamma|(1-\alpha)r}{(1-r)(1+(1-2\alpha)r)} = 0. \quad (34)$$

При $0 < \gamma \leq 1$ радиус выпуклости является точным и достигается для функции (17) при $n=1$.

Следствие 6. Пусть функция $f(z) \in \mathcal{N}$ удовлетворяет условию

$$\left| \left((1-z^2) f'(z) \right)^{1/\gamma} - 1/(2\alpha) \right| < 1/(2\alpha), \quad 0 < \alpha < 1, \quad \gamma \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \quad z \in E. \quad (35)$$

Тогда при $|z|=r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-r}{1+(1-2\alpha)r} \right)^\gamma \frac{1}{1+r^2} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-(1-2\alpha)r} \right)^\gamma \frac{1}{1-r^2} \quad \text{при } 0 < \gamma \leq 1, \quad (36)$$

$$\left(\frac{1-(1-2\alpha)r}{1+r} \right)^{-\gamma} \frac{1}{1+r^2} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1+(1-2\alpha)r}{1-r} \right)^{-\gamma} \frac{1}{1-r^2} \quad \text{при } -1 \leq \gamma < 0 \quad (37)$$

и функция $f(z)$ является выпуклой в круге $|z| \leq r_0$, где r_0 – единственный на интервале $(0; 1)$ корень уравнения

$$\frac{1-r^2}{1+r^2} - \frac{2|\gamma|(1-\alpha)r}{(1-r)(1+(1-2\alpha)r)} = 0. \quad (38)$$

При $0 < \gamma \leq 1$ радиус выпуклости является точным и достигается для функции

$$f_5(z) = \int_0^z \left(\frac{1+t}{1-(1-2\alpha)t} \right)^\gamma \frac{dt}{1-t^2}.$$

Нетрудно установить, что при $0 < \alpha < 1$, $0 < \gamma \leq 1$ классы функций, заданные условиями (31) и (35), являются подклассами классов функций, выпуклых в направлении мнимой оси [19] и выпуклых в положительном направлении действительной оси [20], заданных соответственно условиями

$$\operatorname{Re} [(1-z^2) f'(z)] > 0 \text{ и } \operatorname{Re} [(1-z)^2 f'(z)] > 0. \quad (39)$$

Условия (39) получаются из условий (31) и (35) при $\alpha \rightarrow 0$ и $\gamma = 1$. В силу этого следствия 5, 6 являются обобщениями теорем искажения и радиусов выпуклости, найденных в [19, 20]. Кроме того, при $\alpha \rightarrow 0$, $0 < \gamma \leq 1$ получаются соответствующие результаты из [8. Следствия 1–3, теор. 3 при $\lambda = 1$; 21. Теор. 1, 2].

Заключение

В статье найдены теоремы искажения и радиусы выпуклости классов $\chi_t^{n,n}(\alpha, \gamma)$ и $\chi_t^{n,1}(\alpha, \gamma)$ аналитических в единичном круге функций $f(z)$, удовлетворяющих условию (5). Остается неисследованным вопрос об оценках коэффициентов функций данных классов, что мы считаем перспективной задачей. Интересно также было бы исследовать связь этих классов с почти звездообразными функциями, например заданными условием

$$\left| \left((1-z^n)^{2/n} \frac{F(z)}{z} \right)^{1/\gamma} - \frac{1}{2\alpha} \right| < \frac{1}{2\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \quad z \in E$$

(при $n=1$ или при $n=2$, $\gamma=1$, $\alpha \rightarrow 0$; см., напр.: [22–24]), и получить новые свойства почти звездообразных функций.

Также перспективным является применение полученных в настоящей статье оценок аналитических функций для решения экстремальных задач в различных подклассах однолистных функций.

Авторы статьи выражают искреннюю благодарность рецензентам за тщательный анализ представленных материалов и рекомендации, выполнение которых, несомненно, послужило повышению качества статьи.

Список источников

1. Reade M. The coefficients of close-to-convex functions // Duke Math. J. 1956. V. 23 (3). P. 459–462. doi: 10.1215/S0012-7094-56-02342-0
2. Renyi A. Some remarks on univalent functions // Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sec. A. 1959. V. 3. P. 111–121.
3. Gao C.-Y., Zhou S.-Q. On a class of analytic functions related to the class to the starlike functions // Kyungpook Math. J. 2005. V. 45. P. 123–130.
4. Kowalczyk J., Les-Bomba E. On a subclass of close-to-convex functions // Appl. Math. Letters. 2010. V. 23. P. 1147–1151.

5. Prajapat J.K. A new subclass of close-to-convex functions // *Surv. Math. Appl.* 2016. V. 11. P. 11–19. URL: https://www.utgjiu.ro/math/sma/v11/p11_02.pdf
6. Qing-Hua Xu, Srivastava H.M., Zhou Li. A certain subclass of analytic and close-to-convex functions // *Applied Math. Letters*. 2011. V. 24, is. 3. P. 396–401. doi: 10.1016/j.aml.2010.10.0374
7. Cho N.E., Kwon O.S., Ravichandran V. Coefficient, distortion and growth inequalities for certain close-to-convex functions // *J. of Inequalities and Applications*. 2011. V. 2011:100. URL: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1186/1029-242X-2011-100.pdf?pdf=button>
8. Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Байманкулов А.Т. Об обобщении некоторых классов почти выпуклых и типично вещественных функций // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2023. № 85. С. 5–21. doi: 10.17223/19988621/85/1
9. Shaffer D.B. Distortion theorems for a special class of analytic functions // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1973. V. 39 (2). P. 281–287. doi: 10.2307/2039632
10. Goel R.M. A class of close-to-convex functions // *Czechoslovak Math. J.* 1968. V. 18 (93). P. 104–116. doi: 10.21136/CMJ.1968.100815
11. Libera R.J., Livingston A.E. Bounded functions with positive real part // *Czechoslovak Math. J.* 1972. V. 22 (97). P. 195–209. doi: 10.21136/cmj.1972.101090
12. MacGregor T.H. Functions whose derivative has a positive real part // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1962. V. 104. P. 532–537. doi: 10.1090/s0002-9947-1962-0140674-7
13. MacGregor T.H. A class of univalent functions // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1964. V. 15. P. 311–317.
14. MacGregor T.H. The radius of univalence of certain analytic functions // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1963. V. 14. P. 514–520.
15. Rosihan M.Ali, Ravichandran V., Sharma K. Starlikeness of Analytic Functions with Subordinate Ratios // *Hindawi J. of Math.* 2021. V. 2021. P. 1–8. doi: 10.1155/2021/8373209
16. Shah G.M. On the univalence of some analytic functions // *Pacific J. Math.* 1972. V. 43 (1). P. 239–250. doi: 10.2140/pjm.1972.43.239
17. Shaffer D.B. On bounds for the derivative of analytic functions // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1973. V. 37. P. 517–520. doi: 10.11568/kjm.2021.29.4.785
18. Graham I., Varolin D. Bloch constants in one and several variables // *Pacific J. Math.* 1996. V. 174 (2). P. 347–357.
19. Hengartner W., Schober G. Analytic functions close to mappings convex in one direction // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1971. V. 28 (2). P. 519–524. URL: <https://www.ams.org/journals/proc/1971-028-02/S0002-9939-1971-0277704-9/S0002-9939-1971-0277704-9.pdf>
20. Bshouty D., Lyzzaik A. Univalent functions starlike with respect to a boundary point // *Contemp. Math.* 2005. V. 382. P. 83–87.
21. Майер Ф.Ф. Геометрические свойства некоторых классов аналитических в круге функций, выпуклых в направлении мнимой оси // *Вестник науки КГУ им. А. Байтурсынова. Сер. естественно-технических наук*. 2002. Т. 6, № 2. С. 48–50. URL: https://nauka.kz/page.php?page_id=372&lang=3&page=5931
22. Khatter K., Lee S.K., Ravichandran V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions // *arXiv preprint arXiv: 2006.11744*. URL: <https://arxiv.org/abs/2006.11744>
23. El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. Starlikeness of certain analytic functions // *arXiv preprint arXiv:2006.11734*. URL: <https://arxiv.org/abs/2006.11734>
24. Sebastianc A., Ravichandran V. Radius of starlikeness of certain analytic functions // *Math. Slovaca*. 2021. V. 71 (1). P. 83–104. doi: 10.1515/ms-2017-0454

References

1. Reade M. (1956) The coefficients of close-to-convex functions. *Duke Mathematical Journal*. 23(3), pp. 459–462. DOI: 10.1215/S0012-7094-56-02342-0.

2. Renyi A. (1959) Some remarks on univalent functions. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska Sectio A*. 3. pp. 111–121.
3. Gao C.-Y., Zhou S.-Q. (2005) On a class of analytic functions related to the class to the starlike functions. *Kyungpook Mathematical Journal*. 45. pp. 123–130.
4. Kowalczyk J., Les-Bomba E. (2010) On a subclass of close-to-convex functions. *Applied Mathematics Letters*. 23. pp. 1147–1151.
5. Prajapat J.K. (2016) A new subclass of close-to-convex functions. *Surveys in Mathematics and its Applications*. 11. pp. 11–19.
6. Xua Qing-Hu, Srivastava H.M., Zhou Li. (2011) A certain subclass of analytic and close-to-convex functions. *Applied Mathematics Letters*. 24(3). pp. 396–401. DOI: 10.1016/j.aml.2010.10.0374.
7. Cho N.E., Kwon O.S., Ravichandran V. (2011) Coefficient, distortion and growth inequalities for certain close-to-convex functions. *Journal of Inequalities and Applications*. 2011:100. DOI: 10.1186/1029-242X-2011-100.
8. Maier F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A., Baimankulov A.T. (2023) Ob obobshchenii nekotorykh klassov pochty vypuklykh i tipichno veshchestvennykh funktsiy [On the generalization of some classes of close-to-convex and typically real functions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 5–21. DOI: 10.17223/19988621/85/1.
9. Shaffer D.B. (1973) Distortion theorems for a special class of analytic functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 39(2). pp. 281–287. DOI: 10.2307/2039632.
10. Goel R.M. (1968) A class of close-to-convex functions. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 18(93). pp. 104–116. DOI: 10.21136/CMJ.1968.100815.
11. Libera R.J., Livingston A.E. (1972) Bounded functions with positive real part. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 22 (97). pp. 195–209. DOI: 10.21136/cmj.1972.101090.
12. MacGregor T.H. (1962) Functions whose derivative has a positive real part. *Transactions of the American Mathematical Society*. 104. pp. 532–537. DOI: 10.1090/s0002-9947-1962-0140674-7.
13. MacGregor T.H. (1964) A class of univalent functions. *Transactions of the American Mathematical Society*. 15. pp. 311–317.
14. MacGregor T.H. (1963) The radius of univalence of certain analytic functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*. 14. pp. 514–520.
15. Rosihan M.Ali, Ravichandran V., Sharma K. (2021) Starlikeness of analytic functions with subordinate ratios. *Journal of Mathematics Hindawi*. 1. pp. 1–8. DOI: 10.1155/2021/8373209.
16. Shah G.M. (1972) On the univalence of some analytic functions. *Pacific Journal of Mathematics*. 43(1). pp. 239–250. DOI: 10.2140/pjm.1972.43.239.
17. Shaffer D.B. (1973) On bounds for the derivative of analytic functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 37. pp. 517–520. DOI: 10.11568/kjm.2021.29.4.785.
18. Graham I., Varolin D. (1996) Bloch constants in one and several variables. *Pacific Journal of Mathematics*. 174(2). pp. 347–357.
19. Hengartner W., Schober G. (1971) Analytic functions close to mappings convex in one direction. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 28(2). pp. 519–524.
20. Bshouty D., Lyzzaik A. (2005) Univalent functions starlike with respect to a boundary point. *Contemporary Mathematics*. 382. pp. 83–87.
21. Maier F.F. (2002) Geometricheskiye svoystva nekotorykh klassov analiticheskikh v krughe funktsiy, vypuklykh v napravlenii mnimoy osi [Geometric properties of some classes of analytic functions in a circle in the direction of the imaginary axis]. *Vestnik nauki Kostanayskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya estestvenno-tekhnicheskikh nauk*. 6(2) pp. 48–50.
22. Khatter K., Lee S. K., Ravichandran V. (2020) Radius of starlikeness for classes of analytic functions. Access mode: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744>

23. El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. (2020) Starlikeness of certain analytic functions. Access mode: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734>
24. Sebastianc A., Ravichandran V. (2021) Radius of starlikeness of certain analytic functions. *Mathematica Slovaca*. 71(1). pp. 83–104. DOI: 10.1515/ms-2017-0454.

Сведения об авторах:

Майер Федор Федорович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова (Костанай, Казахстан). E-mail: maiyer@mail.ru

Тастанов Мейрамбек Габдуллевич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова (Костанай, Казахстан). E-mail: tastao@mail.ru

Утемисова Анар Алтаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова (Костанай, Казахстан). E-mail: anar_utemisova@mail.ru

Information about the authors:

Maiyer Fedor F. (Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: maiyer@mail.ru

Tastanov Meyrambek G. (Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: tastao@mail.ru

Utemissova Anar A. (Associate Professor, Candidate of Pedagogical Sciences, Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: anar_utemisova@mail.ru

The article was submitted 25.01.2024; accepted for publication 10.04.2025

Статья поступила в редакцию 25.01.2024; принята к публикации 10.04.2025

Научная статья

УДК 517.54

MSC: 30C20, 30C30

doi: 10.17223/19988621/94/2

Управляющая функция уравнения Левнера, генерирующая разрез, выходящий из нулевого угла

Махер Кармуши¹, Иван Александрович Колесников²,
Юлия Анатольевна Лобода³

^{1,2,3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ maherkarmoushi1996@gmail.com

² ia.kolesnikov@mail.ru

³ ysenchurova@yandex.ru

Аннотация. Строится семейство отображений $f = f(z, \tau)$, $\tau \in [0, \tau_0]$. При фиксированном τ отображение f переводит полуплоскость на полосу с разрезом (длина разреза зависит от параметра τ) вдоль луча γ , уходящего на бесконечность. Разрез образует нулевые углы с границей полосы. Получено разложение управляющей функции $\lambda(\tau)$ уравнения Лёвнера в точке $\tau = 0$, $\tau > 0$, генерирующей такое семейство областей. Сформулирована гипотеза о поведении управляющей функции, генерирующей разрез, выходящий из нулевого угла некоторой односвязной области вдоль дуги окружности. Гипотеза проверена на одном частном случае.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Левнера, конформное отображение, интеграл Кристоффеля–Шварца, акцессорные параметры

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2025-1728/2)»

Для цитирования: Кармуши М., Колесников И.А., Лобода Ю.А. Управляющая функция уравнения Левнера, генерирующая разрез, выходящий из нулевого угла // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 24–32. doi: 10.17223/19988621/94/2

Original article

The driving function of the Loewner equation generating slit, emanating from a zero corner

Maher Karmushi¹, Ivan A. Kolesnikov², Yulia A. Loboda³

^{1,2,3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ maherkarmoushi1996@gmail.com

² ia.kolesnikov@mail.ru

³ ysenchurova@yandex.ru

Abstract. It is well known that if the driving function λ of the Loewner equation generates a quasislit not tangential to the boundary, then λ is Hölder continuous with an exponent $1/2$. For

a tangential slit, the behavior of the driving function is more complicated. It is known that for a tangential slit in the half-plane emanating from the real axis along a circular arc the driving function λ is Hölder continuous with an exponent $1/3$. The paper constructs a family of mappings $f = f(z, \tau)$, $\tau \in [0, \tau_0]$. For a fixed τ , the mapping f takes the half-plane onto a strip with a slit (the length of the slit depends on τ) along a ray, emanating from infinity. The slit forms two zero angles with the strip's boundary. The expansion of the driving function $\lambda(\tau)$ at the point $\tau = 0$, $\tau > 0$, is obtained, which generates such family of domains. A mapping of the half-plane onto a half-strip with slit emanating from infinity is constructed under the assumption that the driving function has the same form as for the strip. The following conjecture is proposed: if λ generates in a simply connected domain D a slit along a circular arc starting from a corner of the domain D with a zero interior angle, then the function λ expands into the series

$$\lambda(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \tau^{\frac{k}{2}}.$$

Keywords: the Loewner differential equation, conformal mapping, the Schwarz–Christoffel integral, accessory parameters

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2025-1728/2).

For citation: Karmushi, M., Kolesnikov, I.A., Loboda, Yu.A. (2025) The driving function of the Loewner equation generating slit, emanating from a zero corner. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 24–32. doi: 10.17223/19988621/94/2

Введение

Пусть $\gamma = \gamma(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_0]$, – простая кривая. Кривая $\gamma(\tau)$ при $\tau \in (0, \tau_0]$ находится в верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im } w > 0\}$, $\gamma(0) \in \mathbb{R}$. Согласно теореме Римана, для фиксированного τ существует конформное отображение $z = g(w, \tau)$, переводящее область $\Pi^+ \setminus \gamma[0, \tau_0]$ на верхнюю полуплоскость Π^+ z -плоскости, имеющее на бесконечности разложение

$$g(w, \tau) = w + \frac{c(\tau)}{w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right). \quad (1)$$

Здесь $c(\tau)$ – возрастающая функция. Можно выбрать такую параметризацию кривой γ , при которой $c(\tau) = \tau$. Такую параметризацию называют стандартной.

Конформное отображение g , нормированное условием (1) с $c(\tau) = \tau$, удовлетворяет уравнению Левнера

$$\frac{\partial g(w, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{g(w) - \lambda(\tau)} \quad (2)$$

с начальным условием $g(w, 0) = w$. Здесь $\lambda(\tau)$ – образ точки $\gamma(\tau)$ при отображении g . Функция $\lambda(\tau)$ непрерывная и вещественнозначная.

Обратное отображение $f(z, \tau) = g^{-1}(z, \tau)$ переводит полуплоскость Π^+ на $\Pi^+ \setminus \gamma[0, \tau_0]$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial f(z, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{z - \lambda(\tau)} \frac{\partial f(z, \tau)}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

с начальным условием $f(z, 0) = z$.

Уравнения (2) и (3) имеют место, если вместо $\Pi^+ \setminus \gamma[0, \tau_0]$ взять односвязную область D с исключенной кривой γ . Действительно, пусть семейство отображений $f = f(z, \tau)$ при фиксированном τ переводит полуплоскость Π^+ на семейство односвязных областей $\Delta(\tau) = D \setminus \gamma(\tau)$, где γ – простая кривая, начинающаяся на границе ∂D . Семейство f нормировано таким образом, что композиция $\omega(z, \tau) = f^{-1}(f(z, \tau), 0)$ раскладывается на бесконечности в ряд $\omega(z, \tau) = z - \frac{\tau}{z} + \frac{c_2(\tau)}{z^2} + \dots$. Тогда отображение ω удовлетворяет уравнению (3), но из правила дифференцирования композиции следует, что f также удовлетворяет уравнению (3).

С другой стороны, уравнение Левнера (2) имеет решение для всякой непрерывной вещественнозначной функции $\lambda(\tau)$. Функция $\lambda(\tau)$ называется управляющей функцией уравнения Левнера. Это решение $g = g(w, \tau)$ порождает семейство вложенных областей $\Delta(\tau)$. Известно, что для непрерывной функции $\lambda(\tau)$ семейство $\Delta(\tau)$ не всегда представляет собой плоскость с разрезом.

Уравнения (2) и (3) называются хордовыми уравнениями Левнера (уравнениями Левнера для полуплоскости). К. Левнер основал параметрический метод, введя радиальное уравнение (для единичного круга) [1]. Классическая теория Левнера описана, например, в [2, 3]. В последнее время возрос интерес к исследованию взаимосвязи между геометрией разреза γ и поведением управляющей функции $\lambda(\tau)$.

В работе [4] для радиального уравнения Левнера и в [5] для хордового показано, что если γ – квазиразрез, не касательный к границе, то управляющая функция $\lambda(\tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера $|\lambda(\tau) - \lambda(\sigma)| \leq C|\tau - \sigma|^{\frac{1}{2}}$, $\forall \tau, \sigma \in [0, \tau_0]$, с показателем $1/2$. Напротив, если управляющая функция $\lambda(\tau)$ непрерывна по Гёльдеру с показателем $1/2$ и $C < 4$, то γ – квазиразрез, подходящий к границе не по касательной.

Для касательного разреза поведение управляющей функции отличается. Так, например, дуга окружности

$$\Gamma(\tau) = \left\{ w = i + e^{is(\tau)} : -\frac{\pi}{2} \leq s(\tau) \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \quad s(0) = -\frac{\pi}{2},$$

образующая нулевой угол с положительной частью вещественной оси и угол π с отрицательной частью вещественной оси, генерируется [6] управляющей функцией $\lambda(\tau)$ непрерывной по Гёльдеру с показателем $1/3$:

$$\lambda(\tau) = C\tau^{\frac{1}{3}} + o\left(\tau^{\frac{1}{3}}\right), \quad C > 0.$$

Результат в [7] показывает, что такое же разложение управляющей функции $\lambda(\tau)$ справедливо для случая разреза $\phi(\Gamma(\tau))$, где $\phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, $a_1 > 0$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. В [8, 9] изучается управляющая функция $\lambda(\tau)$, генерирующая разрез в полуплоскости, имеющий касание с вещественной осью некоторого порядка. Порядок касания разреза γ связан с показателем непрерывности Гёльдера управляющей функции $\lambda(\tau)$.

В первой части статьи строится семейство отображений полуплоскости Π^+ на горизонтальную полосу с разрезом вдоль луча переменной длины. Разрез образует два нулевых угла с границей полосы. Показано, что управляющая функция, соответствующая этому случаю, является непрерывной по Гёльдеру с показателем $1/2$. Во второй части на одном частном случае проверяется гипотеза, что управляющая функция, генерирующая разрез в некоторой односвязной области, выходящий из угла нулевого раствора, также является непрерывной по Гёльдеру с показателем $1/2$.

1. Семейство отображений

Рассмотрим семейство областей $\Delta_0(t)$, представляющее собой горизонтальную полосу $\{w: 0 < \operatorname{Im} w < H\}$ с разрезом по лучу $\{w: \operatorname{Re} w \geq t, \operatorname{Im} w = h\}$, $0 < h < H$, $T \leq t \leq +\infty$. Концевую точку разреза $t + ih$ обозначим через $\Lambda(t)$.

Найдем семейство отображений $f = f(z, t)$, $f: \Pi^+ \times [T, +\infty] \rightarrow \Delta_0(t)$. Обозначим прообразы вершин многоугольника $\Delta_0(t)$ через $b(t)$, $\lambda(t)$, $a(t)$ и $c(t)$, где $f(\lambda(t), t) = \Lambda(t)$, $b(t) < \lambda(t) < a(t) < c(t)$, $T \leq t < +\infty$. Пусть $c(t) = \infty$, $a(+\infty) = b(+\infty) = \lambda(+\infty) = 0$.

Отображение $f = f(z, t)$ при фиксированном t переводит верхнюю полуплоскость Π^+ на многоугольник $\Delta_0(t)$ и может быть записано с помощью интеграла Кристоффеля–Шварца в виде:

$$f(z, t) = c_1(t) \int_{z_0}^z \frac{\zeta - \lambda(t)}{(\zeta - b(t))(\zeta - a(t))} d\zeta + c_2(t). \quad (4)$$

Покажем, что $c_1(t) = -\frac{H}{\pi}$. Рассмотрим композицию $h(\zeta, t) = \xi(f(z(\zeta), t))$,

где $z(\zeta) = -\frac{1}{\zeta}$, $\xi(w) = e^{\frac{\pi}{H}w}$. Функция $h = h(\zeta, t)$ при фиксированном t переводит верхнюю половину δ -окрестности начала координат на верхнюю половину окрестности начала координат, причем интервал $(-\delta, \delta)$ переходит в интервал на вещественной оси. Согласно принципу симметрии Римана–Шварца, отображение h

можно продолжить аналитически на полную окрестность начала координат как голоморфное однолистное отображение. Таким образом, отображение $h = h(\zeta, t)$ в окрестности начала координат имеет разложение

$$\xi(f(z(\zeta), t)) = \gamma_1(t)\zeta + \gamma_2(t)\zeta^2 + \dots, \quad \gamma_1 \neq 0.$$

Отсюда получаем, что отображение f раскладывается на бесконечности в ряд

$$f(z, t) = -\frac{H}{\pi} \ln z + \tilde{\gamma}_0(t) + \frac{\tilde{\gamma}_1(t)}{z} + \dots$$

Здесь выбрана ветвь логарифма $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, для которой $-\pi < \arg z < \pi$. Сравнивая это разложение с разложением f на бесконечности, полученным с помощью (4)

$$f(z, t) = c_1(t) \left(\ln z + \tilde{\gamma}_0(t) + \frac{a(t) + b(t) - \lambda(t)}{z} + \dots \right), \quad (5)$$

находим, что $c_1(t) = -\frac{H}{\pi}$.

Можно нормировать отображения семейства f , потребовав, чтобы в (5)

$$\tilde{\gamma}_0(t) = -i\pi + A, \quad A \in \mathbb{R}, \quad \dot{A} = 0, \quad (6)$$

$$a(t) + b(t) - \lambda(t) = 0. \quad (7)$$

Действительно, $\operatorname{Re} f(-r, t) = 0$ для всех $r > 0$, поэтому $\operatorname{Im} \tilde{\gamma}_0(t) = -\pi$. Композиция $f(qz + p, t)$, $q > 0$, $p \in \mathbb{R}$, переводит полуплоскость Π^+ на область $\Delta_0(t)$ и раскладывается на бесконечности в ряд

$$f(z, t) = -\frac{H}{\pi} \left(\ln z + \tilde{\gamma}_0(t) + \ln q + \frac{p + a(t) + b(t) - \lambda(t)}{qz} + \dots \right).$$

Видим, что q и p можно выбрать так, чтобы в этом разложении коэффициент при z^{-1} равнялся нулю и свободный член равнялся $-A\frac{H}{\pi} + iH$.

Интегрируя (4), с учетом (6) получим

$$f(z, t) = -\frac{H}{\pi} \left(\frac{\lambda(t) - b(t)}{a(t) - b(t)} \ln(b(t) - z) + \frac{a(t) - \lambda(t)}{a(t) - b(t)} \ln(a(t) - z) + A \right). \quad (8)$$

Найдем параметры a , b и λ , используя условие $f(\lambda(t), t) = t + ih$. Отделим в этом равенстве вещественную и мнимую части. Учитывая, что $b - \lambda < 0$, $a - \lambda > 0$, и выбирая ветвь логарифма, для которой $\lim_{z \rightarrow \lambda, z \in \Pi^+} \ln(b - z) = \ln|\lambda - b| - i\pi$, получим

$$-\frac{H}{\pi} \left(\frac{\lambda - b}{a - b} \ln|\lambda - b| + \frac{a - \lambda}{a - b} \ln|a - \lambda| + A \right) = t, \quad (9)$$

$$H \frac{\lambda - b}{a - b} = h. \quad (10)$$

Решая систему уравнений (7), (9), (10), будем иметь

$$a(t) = \left(\frac{H}{h} - 1 \right)^{\frac{h}{H-1}} e^{-t \frac{\pi}{H-A}}, \quad b(t) = - \left(\frac{H}{h} - 1 \right) a(t), \quad \lambda(t) = a(t) + b(t). \quad (11)$$

Отображение (8) теперь примет вид:

$$f(z, t) = -\frac{1}{\pi} \left(h \ln(b(t) - z) + (H - h) \ln(a(t) - z) + AH \right).$$

Дифференцируя это равенство по t и по z , используя (11), получим

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -\frac{\pi}{H} \left(\frac{H}{h} - 1 \right)^{\frac{2h}{H}-1} e^{-2t \frac{\pi}{H}} \frac{1}{\lambda(t) - z} \frac{\partial f(z, t)}{\partial z}. \quad (12)$$

Перейдем к стандартной параметризации. Семейство $\tilde{f} = \tilde{f}(z, \tau) = f(z, t(\tau))$, $\tau = \tau(t)$, $t \in [T, +\infty]$, удовлетворяет (3), $t(0) = +\infty$. Сравнивая (3) и (12), находим

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\pi}{H} \left(\frac{H}{h} - 1 \right)^{\frac{2h}{H}-1} e^{-t \frac{2\pi}{H} - 2A}.$$

Проинтегрировав это равенство с начальным условием $\tau(+\infty) = 0$, получим

$$\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{h} - 1 \right)^{\frac{2h}{H}-1} e^{-t \frac{\pi}{H} - 2A}. \quad (13)$$

Перейдем в (11) к параметру τ , получим

$$\tilde{a}(\tau) = a(t(\tau)) = \sqrt{2\tau \frac{h}{H-h}}, \quad (14)$$

$$\tilde{b}(\tau) = b(t(\tau)) = -\sqrt{2\tau \frac{H-h}{h}},$$

$$\tilde{\lambda}(\tau) = \lambda(t(\tau)) = \frac{2h-H}{\sqrt{h(H-h)}} \sqrt{2\tau}. \quad (15)$$

Подытожим результаты в следующей теореме.

Теорема. Семейство отображений $\tilde{f} = \tilde{f}(z, \tau) = f(z, t(\tau))$, $\tau \in [0, \tau_0]$, переводящее при фиксированном τ верхнюю полуплоскость на область $\tilde{\Delta}_0(\tau) = \{w: 0 < \operatorname{Im} w < H\} \setminus \{w: \operatorname{Re} w \geq t(\tau), \operatorname{Im} w = h\}$, $0 < h < H$, имеющее на бес-

конечности разложение $\tilde{f}(z, \tau) = -\frac{H}{\pi} \left(\ln z + A - i\pi + \ln q + \frac{\gamma_2(\tau)}{z^2} + \dots \right)$, имеет вид:

$$\tilde{f}(z, \tau) = -\frac{1}{\pi} \left(h \ln(\tilde{b}(\tau) - z) + (H - h) \ln(\tilde{a}(\tau) - z) + AH \right),$$

где $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ определяются из (14), и $\tau = \tau(t)$ определяется из (13).

Кроме того, семейство $\tilde{f}$ удовлетворяет уравнению Левнера

$$\frac{\partial \tilde{f}(z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\tilde{\lambda}(\tau) - z} \frac{\partial \tilde{f}(z, \tau)}{\partial z}$$

с начальным условием $\tilde{f}(z, 0) = -\frac{H}{\pi} (\ln z + A + i\pi)$ и управляющей функцией, определяемой по формуле (15).

Заметим, что рассмотренный пример эквивалентен случаю, когда разрез вдоль дуги окружности $\Gamma(\tau) = \left\{ w = ri + re^{is(\tau)} : -\frac{\pi}{2} \leq s(\tau) \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, $r > 1$, $s(0) = -\frac{\pi}{2}$, генерируется в области $\Pi^+ \setminus \{z : |z - i| < 1\}$.

2. Численный эксперимент

Рассмотрим семейство областей

$$\Delta(\tau) = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0, 0 < \operatorname{Im} w < \pi\} \setminus \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \geq t(\tau), \operatorname{Im} w = 1\}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0.$$

Концевую точку разреза обозначим через $\Lambda = \Lambda(\tau)$.

Рассмотрим семейство отображений $f = f(z, \tau)$, $f : \Pi^+ \times [0, \tau_0] \rightarrow \Delta(\tau)$. Зафиксируем τ и обозначим прообразы вершин многоугольника $\Delta(\tau)$ при отображении f через $b(\tau)$, $\lambda(\tau)$, $a(\tau)$, $d(\tau)$ и $c(\tau)$, где $f(\lambda(\tau), \tau) = \Lambda(\tau)$, $b(\tau) < \lambda(\tau) < a(\tau) < d(\tau) < c(\tau)$, $0 < \tau \leq \tau_0$. Пусть $c(\tau) = \infty$, т.е. $f(\infty, \tau) = 0$, и $a(0) = b(0) = \lambda(0) = 0$, $d(0) = 1$.

Отображение $f = f(z, \tau)$, $\tau \in [0, \tau_0]$, можно записать с помощью формулы Кристоффеля–Шварца

$$f(z, \tau) = c_1(\tau) \int_{\infty}^z \frac{\lambda(\tau) - \zeta}{(d(\tau) - \zeta)^{\frac{1}{2}} (b(\tau) - \zeta)(a(\tau) - \zeta)} d\zeta. \quad (16)$$

Отображение $f = f(z, 0)$ имеет вид:

$$f(z, 0) = -c_1(0) \int_{\infty}^z \frac{1}{\zeta(1-\zeta)^{\frac{1}{2}}} d\zeta = c_1(0) \left(i\pi - 2 \arctg \sqrt{1-z} \right).$$

Из условия $f(1, 0) = i\pi$ находим $c_1(0) = 1$.

Функция $f'(z, 0)$ на бесконечности раскладывается в ряд

$$f'(z, 0) = i \left(z^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} z^{-\frac{5}{2}} + \dots \right).$$

Функция $f'(z, \tau)$ на бесконечности раскладывается в ряд

$$f'(z, \tau) = c_1(\tau) i \left(z^{-\frac{3}{2}} + \left(a(\tau) + b(\tau) + \frac{1}{2} d(\tau) - \lambda(\tau) \right) z^{-\frac{5}{2}} + \dots \right).$$

Нормируем отображения семейства f , полагая $c_1(\tau) = 1$ и

$$a(t) + b(t) + \frac{1}{2} d(t) - \lambda(t) = \frac{1}{2}. \quad (17)$$

Из условия $\operatorname{Im}(f(b+r) - f(b-r)) = -h$, $0 < r < \lambda - b$, найдем

$$\lambda(\tau) - b(\tau) = \frac{h}{\pi} (a(\tau) - b(\tau)) \sqrt{d(\tau) - b(\tau)}. \quad (18)$$

Параметры a, b, d и λ удовлетворяют [2] системе дифференциальных уравнений

$$\dot{a}(\tau) = \frac{1}{a(\tau) - \lambda(\tau)}, \quad \dot{b}(\tau) = \frac{1}{b(\tau) - \lambda(\tau)}, \quad \dot{d}(\tau) = \frac{1}{d(\tau) - \lambda(\tau)}. \quad (19)$$

Положим, что параметры a, b, d и λ раскладываются в ряды

$$\lambda(\tau(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x^k, \quad a(\tau(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad b(\tau(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k, \quad d(\tau(x)) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k x^k,$$

где $x = \tau^{\frac{1}{2}}$. Подставляя эти ряды в систему (17), (19), получим единственное решение, удовлетворяющее условиям $b(\tau(x)) < \lambda(\tau(x)) < a(\tau(x)) < d(\tau(x))$. Найдем $\lambda_k = \lambda_k(\lambda_1)$, $k = 2, 3, \dots$, $a_k = a_k(\lambda_1)$, $b_k = b_k(\lambda_1)$, $d_k = d_k(\lambda_1)$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, из системы (17), (19) можно найти все коэффициенты рядов, кроме λ_1 . Коэффициент λ_1 можно найти, подставив эти ряды в (18). Пусть $t = 3$, т.е. разрез в полуполосе $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0, 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$ проходит по лучу $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \geq 3, \operatorname{Im} w = 1\}$.

Найдем приближенное значение параметра $x = \tau^{\frac{1}{2}} \approx 0.133876$ по формуле (13). Вычисляя первые десять коэффициентов рядов при $x = 0.133876$, получаем

$$b(x) = -0.262913\dots, \quad \lambda(x) = -0.119622\dots, \quad a(x) = 0.135082\dots, \quad d(x) = 1.01642\dots$$

Значение отображения (16) в точке $\lambda(x)$ с найденными параметрами $b(x)$, $\lambda(x)$, $a(x)$, $d(x)$ отличается от значения $3+i$ на 10^{-6} .

На основании рассмотренных примеров можно сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза. В односвязной области D разрез вдоль дуги окружности, выходящей из угла нулевого раствора, генерируется функцией λ , имеющей разложение

$$\lambda(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \tau^{\frac{k}{2}}.$$

Список источников

1. Löwner K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. 1923. V. 89. P. 103–121. doi: 10.1007/BF01448091
2. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
3. Duren P.L. Univalent functions. New York: Springer-Verlag, 1983. 382 p.
4. Marshall D.E., Rohde S. The Loewner differential equation and slit mappings // J. Amer. Math. Soc. 2005. V. 18 (4). P. 763–778. doi: 10.1090/S0894-0347-05-00492-3
5. Lind J. A sharp condition for the Loewner equation to generate slits // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2005. V. 30 (1). P. 143–158.
6. Prokhorov D., Vasil'ev A. Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation // Anal. Math. Phys. 2009. P. 455–463. doi: 10.1007/978-3-7643-9906-1_23
7. Wu H.-H., Jiang Y.-P., Dong X.-H. Perturbation of the tangential slit by conformal maps // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 464 (2). P. 1107–1118. doi: 10.1016/j.jmaa.2018.04.042
8. Lau K.S., Wu H.H. On tangential slit solution of the Loewner equation // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2016. V. 41. P. 681–691. doi: 10.5186/aasfm.2016.4142
9. Prokhorov D. Parametric Characteristics of High-Order Tangential Loewner's Slits // Lobachevskii J Math. 2018. V. 39. P. 818–825. doi: 10.1134/S199508021806015X

References

1. Löwner K. (1923) Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. *Mathematische Annalen*. 89. pp. 103–121. DOI: 10.1007/BF01448091.
2. Aleksandrov I.A. (1976) *Parametricheskiye prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy* [Parametric continuations in the theory of univalent functions]. Moscow: Nauka.
3. Duren P.L. (1983) Univalent functions. New York: Springer-Verlag.
4. Marshall D.E., Rohde S. (2005) The Loewner differential equation and slit mappings. *Journal of the American Mathematical Society*. 18(4). pp. 763–778. DOI: 10.1090/S0894-0347-05-00492-3.
5. Lind J. (2005) A sharp condition for the Loewner equation to generate slits. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*. 30(1). pp. 143–158.
6. Prokhorov D., Vasil'ev A. (2009) Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation. *Analysis and Mathematical Physics*. pp. 455–463. DOI: 10.1007/978-3-7643-9906-1_23
7. Wu H.-H., Jiang Y.-P., Dong X.-H. (2018) Perturbation of the tangential slit by conformal maps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 464 (2). pp. 1107–1118. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.04.042.
8. Lau K.S., Wu H.H. (2016) On tangential slit solution of the Loewner equation. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*. 41. pp. 681–691. DOI: 10.5186/aasfm.2016.4142.
9. Prokhorov D. (2018) Parametric Characteristics of high-order tangential Loewner's slits. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 39. pp. 818–825. DOI: 10.1134/S199508021806015X.

Сведения об авторах:

Кармуши Махер – аспирант Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: maherkarmoushi1996@gmail.com

Колесников Иван Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета; доцент кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

Лобода Юлия Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ysenchurova@yandex.ru

Information about the authors:

Karmushi Maher (PhD Student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: maherkarmoushi1996@gmail.com

Kolesnikov Ivan A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

Loboda Yulia A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ysenchurova@yandex.ru

The article was submitted 16.03.2025; accepted for publication 10.04.2025

Статья поступила в редакцию 16.03.2025; принята к публикации 10.04.2025

Original article

UDC 517.55

MSC: 32A10, 32A20, 32A25, 32A26

doi: 10.17223/19988621/94/3

Bishop's formula for a matrix polyhedron with a non-piecewise smooth boundary

Erkin M. Makhkamov¹, Jurabek T. Bozorov²

¹ Non-governmental Organization of Higher Education Perfect University, Tashkent

¹ National University of Uzbekistan, Uzbekistan, Tashkent

² Termez State University, Uzbekistan, Termez

¹ erkin_makhkamov83@mail.ru

² jorabek.bozorov.89@mail.ru

Abstract. In this work, a matrix polyhedral domain is defined using a matrix ball. In this matrix polyhedral domain, an analogue of Bishop's formula for meromorphic functions of a special form is obtained.

Keywords: holomorphic functions and mappings, matrix polyhedral set, matrix polyhedral domain, generalized matrix ball, meromorphic function, Bishop's integral formula

For citation: Makhkamov, E.M., Bozorov, J.T. (2025) Bishop's formula for a matrix polyhedron with a non-piecewise smooth boundary. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 33–39. doi: 10.17223/19988621/94/3

Научная статья

Формула Бишоп для матричного полиэдра с не кусочно гладкой границей

Эркин Мусурманович Махкамов¹,
Жўрабек Тоғаймуротович Бозоров²

¹ Негосударственная организация высшего образования Perfect University, Узбекистан, Ташкент

¹ Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент

² Термезский государственный университет, Узбекистан, Термез

¹ erkin_makhkamov83@mail.ru

² jorabek.bozorov.89@mail.ru

Аннотация. В теории функций многих комплексных переменных интегральные формулы занимают важное место в теории голоморфных и мероморфных функций специального вида. При этом задачи получения новых интегральных формул с помощью локальных вычетов, разложения в ряды голоморфных и мероморфных функций специального типа с помощью интегральных формул считаются целевыми научными исследованиями. В данной работе определена матричная полиэдрическая область с помощью матричного шара. В этой матричной полиэдрической области получен аналог формулы Бишоп для мероморфных функции специального вида.

Ключевые слова: голоморфные функции и отражения, матричное полиэдрическое множество, матричная полиэдрическая область, обобщенный матричный шар, мероморфная функция, интегральная формула Бишопа

Для цитирования: Makhkamov E.M., Bozorov J.T. Bishop's formula for a matrix polyhedron with a non-pieceswise smooth boundary // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 33–39. doi: 10.17223/19988621/94/3

Introduction. Formulation of the problem

In complex analysis of multivariables, integral formulas have been studied by many authors. These results are presented in monographs [1–3] by A.K. Tsikh. A.K. Tsikh proved the Weyl and Bishop integral formulas in a special analytical polyhedron using local residues of multivariables [4]. In the polyhedral domain, A. Weil [5] studied integral formulas with a holomorphic kernel. In the [6–11], a matrix analogue of the integral formula of Cauchy–Weil, Bishop and the Carleman formula was studied.

Recall that an analytic polyhedron is defined by a family of functions $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathcal{O}(G)$, $G \subset \mathbb{C}^n$ (or by a mapping $f = (f_1, f_2, \dots, f_n): G \rightarrow \mathbb{C}^m$), as

$$\Pi_r = \{z \in G : |f_1(z)| < r_1, |f_2(z)| < r_2, \dots, |f_m(z)| < r_m\},$$

if it is relatively compact in G (i.e. $\bar{\Pi}_r \subset G$). If m is equal to n , which is the dimension of space $\mathbb{C}^n$, then the analytic polyhedron Π_r is called special.

Let $f = (f_1, f_2, \dots, f_n): D \rightarrow G$ – holomorphic mapping of domains $D \subset \mathbb{C}_z^n, G \subset \mathbb{C}_w^n$.

Consider meromorphic functions of the form $\frac{h(Z)}{J_f(Z)}$, where $h(z)$ is a holomorphic function, and $J_f(z)$ is the Jacobian of the mapping $f: D \rightarrow G$ which is of finite type. In [4. P. 43], A.K. Tsikh obtained Bishop's integral formula for a special analytic polyhedron an analogue of which we obtain for a generalized matrix ball.

Theorem 1 [4]. At every point $z \in \Pi_r$ in which the Jacobian J_f of the mapping f is nonzero, the following integral formula for the meromorphic function $\frac{h}{J}$, $h \in \mathcal{O}(\bar{\Pi}_r)$ holds,

$$\frac{h}{J} \Omega(z, z) = (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma} \frac{h(\xi) \Omega(z, \xi) d\xi}{f(\xi) - f(z)},$$

where Γ is the skeleton of the polyhedron Π_r , weight function $\Omega(z, \xi) \neq 0$, and holomorphic in the neighborhood $(\Pi_r \times \Pi_r)$.

The main part

Let $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ be a vector, whose entries are quadratic matrices Z_j , $1 \leq j \leq n$, of order m over the field of complex numbers $\mathbb{C}$. It can be assumed that Z is the element of the space $\mathbb{C}^n[m \times m] \cong \mathbb{C}^{nm^2}$ [3].

Define matrix “scalar” multiplication for $Z, W \in \mathbb{C}^n[m \times m]$ as [3]:

$$\langle Z, W \rangle = Z_1 W_1^* + \dots + Z_n W_n^*,$$

where W_j^* is a matrix, which is conjugate and transpose of W .

The domain $B_{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I - \langle Z, Z \rangle > 0\}$, is called a *matrix ball*, where I is the identity matrix of order m .

The *skeleton* of this domain is a manifold of the form:

$$X_{m,n} = \{Z : \langle Z, Z \rangle = I\}.$$

Obviously, the dimension of the skeleton is $m^2(2n-1)$.

When $m = n = 1$, $B_{1,1}$ is the identity disc from $\mathbb{C}$, and $X_{1,1}$ is the identity circle.

Let D be a bounded complete circular convex domain with Shilov boundary S , which is smooth (of class C^1) manifold.

Define the family $H^1(D)$ of all functions f , holomorphic in D , for which

$$\sup_{0 < r < 1} \int_S |f(r\zeta)| d\mu < +\infty,$$

where $r\zeta = (r\zeta_1, \dots, r\zeta_n)$ and $d\mu$ is the normalized Lebesgue measure on a manifold S , invariant under rotations.

Theorem 2 [3]. For any function $f \in H^1(B_{m,n})$, the following formula holds:

$$f(Z) = \int_{X_{m,n}} \frac{f(W) d\sigma(W)}{\det^{mn}(I^{(m)} - \langle Z, W \rangle)}, \quad Z \in B_{m,n} \quad (1)$$

where $d\sigma(W)$ is the normalized Lebesgue measure on the skeleton $X_{m,n}$.

Take a mapping $f = (f_1, \dots, f_{nm^2}) : G \rightarrow \mathbb{C}^{nm^2}$, which is holomorphic in some domain $G \subset \mathbb{C}^{nm^2}$.

In what follows, the mapping $f = (f_1, \dots, f_{nm^2}) : G \rightarrow \mathbb{C}^{nm^2}$ will be considered in the form

$$f(Z) = \left(\begin{pmatrix} f_{11}^1(Z) & \dots & f_{1m}^1(Z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}^1(Z) & \dots & f_{mm}^1(Z) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} f_{11}^n(Z) & \dots & f_{1m}^n(Z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}^n(Z) & \dots & f_{mm}^n(Z) \end{pmatrix} \right) : G \rightarrow \mathbb{C}^n[m \times m].$$

Definition 1. A matrix polyhedral set defined by a holomorphic mapping $f : G \rightarrow \mathbb{C}^n[m \times m]$ is the set

$$f^{-1}(B_{m,n}) = \{Z \in G : r^2 I - \langle f(Z), f(Z) \rangle > 0, r > 0\},$$

which is relatively compact in G , i.e., $f^{-1}(B_{m,n}) \Subset G$.

Definition 2. The connected component of a matrix polyhedral set $f^{-1}(B_{m,n})$ is called a *matrix polyhedron (generalized matrix ball)* which is denoted as $\Theta_{f,r}$. The skeleton of the domain $\Theta_{f,r}$ is defined as

$$\Gamma_{f,r} = \{Z \in G : \langle f(Z), f(Z) \rangle = r^2 I, r > 0\}.$$

Let $f(Z): D \rightarrow G$ be a holomorphic mapping of domains $D \subset \mathbb{C}_Z^n [m \times m]$, $G \subset \mathbb{C}_W^n [m \times m]$ and $H(Z) = \frac{\varphi(Z)}{\psi(Z)}$ meromorphic function in D .

Definition 3 [4]. A mapping $f(Z)$ has a finite type, if for any $W \in G$ the equation $f(Z) = W$ has the same finite number of roots (taking into account multiplicities) in domain D .

Definition 4 [4]. The trace of a function $H(Z)$ related to a mapping $f(Z)$ is the function

$$[\text{Tr } H](W) = \sum_v H(Z^{(v)}(W)), \quad W \in G \setminus f(\psi = 0),$$

where the summation is carried out over all roots (taking into account multiplicities) of the equation $f(Z) = W$.

In this work, using formula (1), we obtain the Bishop integral formula in the domain $\Theta_{f,r}$ for a special function of the form $\frac{h(Z)}{J_f(Z)}$, where $h(Z) \in H^1(\Theta_{f,r})$, $J_f(Z)$ is the Jacobian of the mapping $f(Z)$, which has a finite type.

Let $f: D \rightarrow G$ be a holomorphic mapping of a finite type of the domain $D \subset \mathbb{C}_Z^n [m \times m]$ into $G \subset \mathbb{C}_W^n [m \times m]$ and $W^0 \in G$ be an arbitrary point. Consider a domain $B_{m,n,r}(W^0)$ in G with the center at the point W^0 :

$$B_{m,n,r}(W^0) = \{W : r^2 I - \langle W - W^0, W - W^0 \rangle > 0\} \in G.$$

Theorem 3. Let $H(Z) \in H^1(D)$. Then for the trace $[\text{Tr } H](W)$ in the domain $B_{m,n,r}(W^0)$ the following integral formula holds:

$$[\text{Tr } H](W) = \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{H d\sigma(f(Z))}{\det^{mn}(I^{(m)} - \langle f(Z), W \rangle)}, \quad (2)$$

where $\Gamma_{f,r} = \{Z \in D : \langle f(Z), f(Z) \rangle = r^2 I^{(m)}\}$.

Proof. For simplicity, we prove the theorem when $W^0 = 0$.

According to the proposition in [4. P. 26], for almost all $W \in B_{m,n,r}(W^0)$ the roots of the system of equations $f(Z) - W = 0$ are simple; denote them as $Z^{(1)}(W), \dots, Z^{(u)}(W)$. Let, $U_v \subset D$ be the family of disjoint neighborhoods of points $Z^{(v)}(W)$ and

$$\Gamma_v = \Gamma_{f(Z)-W, \delta} = \{Z \in D : \langle f(Z) - W, f(Z) - W \rangle = \delta^2 I^{(m)}\}$$

is a cycle in U_v .

Then, by the definition of the trace and Cauchy–Szegő formula (1), we have

$$[\text{Tr } H](W) = \sum_{v=1}^u \int_{\Gamma_{Z^{(v)}(W), \delta}} \frac{H d\sigma(f(Z))}{\det^{mn}(I^{(m)} - \langle f(Z), W \rangle)}.$$

Moreover, the sum $\sum_{v=1}^{\mu} \Gamma_v$ is homologous to the cycle $\Gamma_{f,r}$ in the domain of regularity of the subintegral form of (2). Hence, applying the Stokes formula, we obtain

$$\sum_{v=1}^{\mu} \int_{\Gamma_{Z^{(v)}(W), \delta}} \frac{H d\sigma(f(Z))}{\det^{mn}(I^{(m)} - \langle f(Z), W \rangle)} = \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{H d\sigma(f(Z))}{\det^{mn}(I^{(m)} - \langle f(Z), W \rangle)}.$$

The proof is complete.

Now, we present an integral representation for the trace of a meromorphic function of a special form.

Corollary 1. Let $h(Z) \in H^1(D)$, J_f be the Jacobian of the mapping $f : D \rightarrow G$, which has finite type. Then for the trace of the meromorphic function $H = h / J_f$ in $B_{n,m,r}(W^0)$ the following formula holds:

$$[\text{Tr } h / J_f](W) = \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(Z) d\sigma(Z)}{\det^{mn}(I^{(m)} - \langle f(Z), W \rangle)}. \quad (3)$$

Proof. $d\sigma$ is a normalized Lebesgue measure on $\Gamma_{f,r}$; therefore [6. P. 153],

$$d\sigma(f(Z)) = J_f d\sigma(Z).$$

By formula (2) for $W \in B_{n,m,r}(W^0)$ we have

$$\begin{aligned} [\text{Tr } h / J_f](W) &= \sum_v h / J_f(Z^{(v)}(W)) = \\ &= \sum_v \int_{\Gamma_{Z^{(v)}(W), \delta}} \frac{h / J_f d\sigma(f(Z))}{\det^{mn}(I^{(m)} - \langle f(Z), W \rangle)} = \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{h d\sigma(Z)}{\det^{mn}(I^{(m)} - \langle f(Z), W \rangle)}. \end{aligned}$$

The proof is complete.

If the equation $f(Z) - W = 0$ has only one root with multiplicity of 1, we can rewrite the formula (4) as

$$\frac{h(W)}{J_f(W)} = \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(Z) d\sigma(Z)}{\det^{mn}(I^{(m)} - \langle f(Z), W \rangle)}. \quad (4)$$

Corollary 1 allows us to obtain an analogue of Bishop's formula in the matrix polyhedron $\Theta_{f,r} = \{Z \in D : r^2 I^{(m)} - \langle f(Z), f(Z) \rangle > 0, r > 0\}$ for the meromorphic function h / J_f .

Teopema 4. If $h(Z) \in H^1(\Theta_{f,r})$, $Z \in \Theta_{f,r}$ and $J_f(Z) \neq 0$ at this point, then the following integral representation holds for the holomorphic function $\frac{h}{J_f}$:

$$\frac{h(Z)}{J_f(Z)} = \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(X) \Omega(Z, X) d\sigma(X)}{\Omega(Z, Z) \det^{mn}(I - \langle f(Z), f(X) \rangle)}. \quad (5)$$

Proof. From the definition of trace it follows that, when $W = f(X)$, the integral in formula (3) is equal to the sum of the values of the function $\frac{h}{J_f}$ at points $Z = X$, and of the values of this function in $X^\nu(f(X))$, $\nu = 2, \dots, \mu$ at points $W = f(X)$. Consider a weight function $\Omega(Z, X) \not\equiv 0$ having the following properties: for any fixed Z , form

$$\Theta_{f,r} = \{Z \in D : r^2 I^{(m)} - \langle f(Z), f(Z) \rangle > 0, r > 0\} \subseteq D,$$

the function $\Omega(Z, X)$ is equal to zero at all points $Z = X^{(\nu)}$, except for $Z = X$. This function indeed exists. Assume W^0 – non-critical value of the mapping f , and $g(Z)$ – linear function i.e., $g(X^\nu(W^0))$ – are various. Then we can take the function

$$\Omega(Z, X) = \prod_{\nu=2}^{\mu} [g(Z) - g(X^{(\nu)})] = (g(Z) - g(X^{(2)})) \cdot \dots \cdot (g(Z) - g(X^{(\mu)})) \quad (6)$$

where the numbering is taken as $X^{(\nu)} = X^{(\nu)}(Z)$, with the convention that $X^{(1)}(Z) = Z$. Thus, the product in (6) is a polynomial of $g(Z)$, with coefficients holomorphically dependent on X . As a result, we have

$$\Omega(Z, X) = \sum_{k=1}^{\mu-1} c_k(X) g^k(Z),$$

where $c_k(X)$ are holomorphic functions in $\bar{\Theta}_{f,r}$. By construction, we have $\Omega(Z, X^{(\nu)}(Z)) = 0$, for points $X^{(\nu)}(Z) \neq Z$.

By corollary and the constructed weight function $\Omega(Z, X)$, we obtain Bishop's formula in $\Theta_{f,r}$.

Indeed,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \frac{h(Z^{(\nu)}(X)) \Omega(Z, Z^{(\nu)}(X))}{J_f(Z^{(\nu)}(X))} &= \\ &= \frac{h(Z) \Omega(Z, Z)}{J_f(Z)} + \frac{h(Z^{(2)}(X)) \Omega(Z, Z^{(2)}(X))}{J_f(Z^{(2)}(X))} + \dots = \\ &= \frac{h(Z) \Omega(Z, Z)}{J_f(Z)} = \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(X) \Omega(Z, X) d\sigma(X)}{\det^{mn}(I^{(m)} - \langle f(Z), f(X) \rangle)}. \end{aligned}$$

The proof is complete.

Corollary 2. When $m = n = 1$ and $f(z) = z$, the formula (5) yields the Cauchy formula for a circle with a radius r in the complex plane $\mathbb{C}$.

Proof. When $m = n = 1$ and $f(z) = z$, the Jacobian of the mapping $f(z)$ is $J_f = 1$, and in this case by formula (4) the formula (5) yield the Cauchy formula for a circle.

The proof is complete.

When $n = 1$, from the generalized matrix ball $\Theta_{f,r}$ we get the matrix polyhedron in the space $\mathbb{C}[m \times m]$. In this field, B.A. Shaimkulov derived the Bishop integral formula with a different kernel ([3. P. 227]).

References

1. Aizenberg L.A., Yuzhakov A.P. (1983) *Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis*. American Mathematical Society.
2. Arnold V.I., Gusein-Zade S.M., Varchenko A.N. (1988) *Singularities of Differentiable Maps*. Boston: Birkhauser.
3. Khudayberganov G, Kytmanov A.M., Shaimkulov B.A. (2017) *Analysis in Matrix Domains*. Krasnoyarsk: Siberian Federal University.
4. Tsikh A.K. (1992) *Multidimensional Residues and Their Applications*. American Mathematical Society.
5. Weil A. (1935) L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. *Mathematische Annalen*. 111. pp. 178–182. DOI: 10.1007/BF01472212.
6. Aizenberg L.A. (1993) *Carleman's Formulas in Complex Analysis*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
7. Shaimkulov B.A. (2002) Ob odnom integral'nom predstavlenii dlya sleda meromorfnoy funktsii [On an integral representation for the trace of a meromorphic function]. *Uzbek Mathematical Journal*. 1. pp. 84–86.
8. Shaimkulov B.A. (2002) A Special Integral Representation for a Local Residue. *Siberian Mathematical Journal*. 43. pp. 963–966. DOI: 10.1023/A:1020123311262.
9. Shaimkulov B.A. (2003) The integral Cauchy–Weyl representation for matrix functions. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*. 47(2). pp. 67–70.
10. Shaimkulov B.A., Makhkamov E.M. (2011) On an analog of the Weyl integral formula for the polyhedra having not piecewise smooth boundaries. *Siberian Mathematical Journal*. 52(2). pp. 377–380. DOI: 10.1134/S0037446611020224.
11. Shoimkhulov B.A., Bozorov J.T. (2015) Carleman's formula for a matrix polydisk. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 8(2). pp. 371–374. DOI: 10.17516/1997-1397-2015-8-3-371-374.

Information about the authors:

Makhkamov Erkin M. (Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Digital Technologies, Non-Governmental Organization of Higher Education Perfect University; Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, National University of Uzbekistan, Uzbekistan, Tashkent). E-mail: erkin_mahkamov83@mail.ru
Bozorov Jurabek T. (Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Termez State University, Uzbekistan, Termez). E-mail: jorabek.bozorov.89@mail.ru

Сведения об авторах:

Махкамов Эркин Мусурманович – доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам, доцент кафедры цифровых технологий Негосударственной организации высшего образования Perfect University; доцент кафедры математического анализа Национального университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека (Ташкент, Узбекистан). E-mail: erkin_mahkamov83@mail.ru

Бозоров Жўрабек Тоғаймуротович – доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам, заведующий кафедрой математического анализа Термезского государственного университета (Термез, Узбекистан). E-mail: jorabek.bozorov.89@mail.ru

The article was submitted 08.01.2024; accepted for publication 10.04.2025

Статья поступила в редакцию 08.01.2024; принята к публикации 10.04.2025

Научная статья

УДК 517.9

doi: 10.17223/19988621/94/4

MSC: 90C26; 90C30

О функции точного штрафа в нормированном пространстве

Мисраддин Аллахверди оглы Садыгов

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан, misreddin08@rambler.ru

Аннотация. Исследуется класс $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицевых отображений в точке. Приведены классы отображений, удовлетворяющих $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицевому условию в точке. В работе с использованием $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицевых отображений в точке исследуются экстремальные задачи с ограничениями. С помощью функции расстояния в задаче математического программирования получены теоремы о точном штрафе высокого порядка.

Ключевые слова: точный штраф, нормированное пространство, отображение, липшицева функция

Для цитирования: Садыгов М.А. О функции точного штрафа в нормированном пространстве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 40–56. doi: 10.17223/19988621/94/4

Original article

About the function of the exact penalty in normed space

Misraddin A. Sadygov

Baku State University, Baku, Azerbaijan, misreddin08@rambler.ru

Abstract. The paper studies a class of $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ Lipschitz mappings at a point. Classes of mappings satisfying the $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ Lipschitz condition at a point are given. If a Lipschitz function on a space is equal to zero at a given point, then it is shown that the degree $n + 1$ of Lipschitz functions satisfies the $(1, n + 1, 1)$ Lipschitz condition at this point, where $S \equiv 0$, $\omega \equiv 0$, $n \in \mathbb{N}$ and $\delta = +\infty$. If a function satisfies the Lipschitz condition in a δ -neighborhood of a point and is equal to zero at this point, then the degree $n + 1$ of Lipschitz functions satisfies the $(1, n + 1, 1, \delta)$ Lipschitz condition at this point. In particular, it follows from this that the degree $n + 1$ of the distance function at any point of the set satisfies the $(1, n + 1, 1)$ Lipschitz condition. If the coefficients of $\varphi - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ Lipschitz functions at a point are bounded, then it is shown that the supremum of any

family of $\varphi - (\alpha, \beta, v, \delta, \omega)$ Lipschitz functions at a point also satisfies the $\varphi - (\alpha, \beta, v, \delta, \omega)$ Lipschitz condition at that point. In particular, it follows that the supremum of a finite number of $\varphi - (\alpha, \beta, v, \delta, \omega)$ Lipschitz functions at a point also satisfies the $\varphi - (\alpha, \beta, v, \delta, \omega)$ Lipschitz condition at this point. The paper shows that a mapping defined in a neighborhood of a point and satisfying various smoothness conditions also satisfies some $S - (\alpha, \beta, v, \delta)$ Lipschitz conditions at this point.

In this paper, using $S - (\alpha, \beta, v, \delta, \omega)$ Lipschitz mappings at a point, extremal problems with constraints are investigated. Using the distance function in a mathematical programming problem, theorems on high-order exact penalties are obtained. Theorems on high-order exact penalties in a general minimization problem are obtained. Using the type of functions that is the product of the degree of the norm shift and the degree of the distance function, theorems on high-order exact penalties in the general minimization problem are obtained. Using a general minimization problem, high-order exact penalty theorems are obtained in a mathematical programming problem. In a mathematical programming problem, high-order exact penalty theorems are obtained in three ways. In the first case, the equality constraint with the mapping and the set constraint are considered as one constraint. In the second case, the equality constraint is considered to be $(\alpha, \beta, v, \delta)$ regular. In the third case, it is considered that the restriction of the set is an open set and the equality constraint with the mapping covers the given set with a constant.

Keywords: exact penalty, normed space, mapping, Lipschitz function

For citation: Sadygov, M.A. (2025) About the function of the exact penalty in normed space. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 40–56. doi: 10.17223/19988621/94/4

Введение

В задаче минимизации с ограничениями при получении необходимых и достаточных условий экстремума важную роль играет построение функций точного штрафа. В задаче выпуклого программирования функция точного штрафа построена Куна–Таккером в [1]. В задаче математического программирования функция точного штрафа первого порядка изучена А.Д. Иоффе [2], эти вопросы рассмотрены также в книгах [3–7].

В [8, 9] в банаховом пространстве определены $(\alpha, \beta, v, \delta)$ и $S - (\alpha, \beta, v, \delta)$ липшицевые функции и отображения в точке соответственно, изучен ряд их свойств и рассмотрены экстремальные задачи с ограничениями. В [8, 9] с использованием типа функций расстояния в классах $\varphi - (\alpha, \beta, v, \delta, \omega)$ липшицевых функций в точке получен ряд теорем о точном штрафе, а также необходимые и достаточные условия экстремума высшего порядка для экстремальных задач с ограничениями.

В [10–12] в метрическом пространстве определены $\varphi - (\alpha, \beta, v, \delta, \omega)$ и $S - (\alpha, \beta, v, \delta, \omega)$ липшицевые функции и отображения в точке соответственно, изучен ряд их свойств и рассмотрены экстремальные задачи с ограничениями.

Для получения необходимого условия первого порядка в книгах Ф. Кларка [3] и Б. Мордуховича [4] используется точная штрафная функция первого порядка. Для задачи минимизации функции f на множестве C точная штрафная функция

имеет вид $f(x) + Kd_C(x)$, где C подмножество S , функция f удовлетворяет условию Липшица на S с константой K , функция $d_C(x)$ является функцией расстояния множества C . Эту функцию нельзя использовать для получения необходимого условия второго порядка. Верхняя производная второго порядка по направлению этой функции равна $+\infty$, за исключением тривиальных случаев. Если функция f является $\varphi - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицевой с постоянной K в точке x_0 , то для задачи минимизации функции f на множестве C построенная автором точная штрафная функция имеет следующий вид:

$$S_\lambda(x) = f(x) - \varphi(x - x_0) + \lambda(d_D^\alpha(x) + \|x - x_0\|^{\beta - \alpha\nu} d_D^\nu(x)) + \omega(\|x - x_0\|),$$

где $\lambda \geq K$ и $D = \{x \in C : \varphi(x - x_0) \leq 0\}$ (см. теорему 1 ниже). Если $\alpha = 1$, то

$$\tilde{S}_\lambda(x) = f(x) - \varphi(x - x_0) + 2\lambda\|x - x_0\|^{\beta - \nu} d_D^\nu(x) + \omega(\|x - x_0\|),$$

также является точная штрафная функция, и β указывает порядок необходимого условия при $\omega \equiv 0$.

Работа состоит из введения и из трех разделов. В разд. 1 исследуется класс $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицевых отображений в точке. Изучен ряд свойств $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицевых отображений в точке. В разд. 2 получены теоремы о точных штрафах высокого порядка в общей задаче минимизации. В разд. 3 с использованием общей задачи минимизации получены точные штрафные теоремы высокого порядка в задаче математического программирования.

1. Классы $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицевых отображений в точке

Пусть X и Z – нормированные пространства, $G \subset X$, $F : X \rightarrow Z$, $S : X \rightarrow Z$, $f : X \rightarrow R$, $\varphi : X \rightarrow R$, $\alpha > 0$, $\nu > 0$, $\beta > \alpha\nu$, $\delta > 0$ и $\omega : R_+ \rightarrow R_+$, где $\omega(0) = 0$, $R_+ = [0, +\infty)$, $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

Норма в X , а также в Z будет обозначаться одним и тем же символом $\|\cdot\|$.

Отображение $F : G \rightarrow Z$ назовем $S - (\alpha, \beta, \nu, \omega)$ липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x} \in G$ (на множестве G), если F удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \|F(y) - F(x) - S(y - \bar{x}) + S(x - \bar{x})\| \leq \\ \leq K\|y - x\|^\nu (\|x - \bar{x}\|^{\beta - \alpha\nu} + \|y - x\|^{\frac{\beta - \alpha\nu}{\alpha}}) + \omega(\|x - \bar{x}\|) \end{aligned} \quad (1)$$

при $x, y \in G$. Если $\omega(t) \equiv 0$, то отображение $F : G \rightarrow Z$ назовем $S - (\alpha, \beta, \nu)$ липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x} \in G$. Если $\omega(t) \equiv 0$ и $S(x) \equiv 0$, то отображение $F : G \rightarrow Z$ назовем (α, β, ν) липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x} \in G$. Если су-

ществует функция $o : R_+ \rightarrow R_+$, где $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ такая, что $\omega(\|x - \bar{x}\|) = o(\|x - \bar{x}\|^\beta)$,

то $S - (\alpha, \beta, \nu, \omega)$ липшицевое с постоянной K в точке $\bar{x} \in G$ отображение $F : G \rightarrow Z$ назовем $S - (\alpha, \beta, \nu, o(\beta))$ липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x}$.

Отметим, что класс $S - (\alpha, \beta, \nu, \omega)$ липшицевых отображений новые при $\beta > \alpha \nu$. Если $\beta - \alpha \nu = 0$, то считаем, что $S(x) \equiv 0$ и $\|F(y) - F(x)\| \leq K \|y - x\|^\nu$ при $x, y \in G$, т.е. имеем определение класс Гельдеровых отображений.

Если $F(x) = f(x)$, $S(x) = \varphi(x)$ и отображение $F: G \rightarrow R$ является $S - (\alpha, \beta, \nu, \omega)$ липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x} \in G$, то функцию $f: G \rightarrow R$ назовем $\varphi - (\alpha, \beta, \nu, \omega)$ липшицевой с постоянной K в точке $\bar{x} \in G$. Если $\omega(t) \equiv 0$, то функцию $f: G \rightarrow R$ назовем $\varphi - (\alpha, \beta, \nu)$ липшицевой с постоянной K в точке $\bar{x} \in G$. Если $\omega(t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$, то функцию $f: G \rightarrow R$ назовем (α, β, ν) липшицевой с постоянной K в точке $\bar{x} \in G$.

Положим $B(x, \delta) = \{y \in X : \|x - y\| \leq \delta\}$, где $x \in X$, $\delta > 0$. Если $G = B(\bar{x}, \delta)$ и отображение $F: G \rightarrow Z$ является $S - (\alpha, \beta, \nu, \omega)$ липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x}$, то отображение $F: B(\bar{x}, \delta) \rightarrow Z$ назовем $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x}$, а если $F(x) = f(x)$ и $S(x) = \varphi(x)$, то функцию $f: B(\bar{x}, \delta) \rightarrow R$ назовем $\varphi - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицевой с постоянной K в точке $\bar{x}$. Если $\omega(t) \equiv 0$, то отображение $F: B(\bar{x}, \delta) \rightarrow Z$ назовем $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta)$ липшицевым, а функцию f назовем $\varphi - (\alpha, \beta, \nu, \delta)$ липшицевой с постоянной K в точке $\bar{x}$. Если $\omega(t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$, то $F: B(\bar{x}, \delta) \rightarrow Z$ и $f: B(\bar{x}, \delta) \rightarrow R$ назовем $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$ липшицевыми с постоянной K в точке $\bar{x}$.

Из (1) следует, что отображение $F: G \rightarrow Z$ является $S - (\alpha, \beta, \nu, \omega)$ липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x} \in G$ тогда и только тогда, когда

$$\|F(\bar{x} + y) - F(\bar{x} + x) - S(y) + S(x)\| \leq K \|y - x\|^\nu (\|x\|^{\beta - \alpha \nu} + \|y - x\|^{\frac{\beta - \alpha \nu}{\alpha}}) + \omega(\|x\|) \quad (2)$$

при $x, y \in G - \bar{x}$.

Далее считаем, что $S(0) = 0$ и $\varphi(0) = 0$ (если $S(0) \neq 0$, то следует рассмотреть функцию $\tilde{S}(x) = S(x) - S(0)$).

Рассмотрим ряд классов отображений, которые удовлетворяют $S - (\alpha, \beta, \nu)$ липшицеву условию в точке. Считаем, что X и Z нормированные пространства и $B(x_0, \delta) \subset X$. Обозначим через N множество всех натуральных чисел. Пусть $f: X \rightarrow R$. Положим $f^k(x) = (f(x))^k$, где $k \in N$.

Лемма 1. Если функция $f: X \rightarrow R$ является липшицевой с постоянной K на пространстве X и $f(x_0) = 0$, то

$$|f^{n+1}(y) - f^{n+1}(x)| \leq (2^{n+1} - 1) K^{n+1} \|y - x\| (\|x - x_0\|^n + \|y - x\|^n)$$

при $x, y \in X$, $n \in N$, т.е. функция $f^{n+1}(x): X \rightarrow R$ удовлетворяет $(1, n+1, 1)$ липшицеву условию с постоянной $(2^{n+1} - 1) K^{n+1}$ в точке x_0 .

Доказательство. Лемму докажем по методу индукции.

По условию $|f(y) - f(x)| \leq K \|y - x\|$ при $x, y \in X$. Поэтому если $k = 1$, то

$$\begin{aligned} & |f^2(y) - f^2(x)| = \\ & = |(f(y) - f(x))(f(y) - f(x_0) + f(x) - f(x_0))| \leq |f(y) - f(x)|(|f(y) - f(x_0)| + \\ & + |f(x) - f(x_0)|) \leq K^2 \|y - x\|(\|y - x_0\| + \|x - x_0\|) \leq 2K^2 \|y - x\|(\|x - x_0\| + \|y - x\|) \end{aligned}$$

при $x, y \in X$. Предположим, что лемма верна при $k = n - 1$, где $n > 2$, т.е.

$$|f^n(y) - f^n(x)| \leq (2^n - 1)K^n \|y - x\|(\|x - x_0\|^{n-1} + \|y - x\|^{n-1})$$

при $x, y \in X$.

Покажем, что лемма верна при $k = n$. Так как $(q - 1)(q^{n-1} - 1) \geq 0$ при $q \geq 1$, то, поделив на b^n и положив $q = \frac{a}{b}$, имеем, что $a^{n-1}b + ab^{n-1} \leq a^n + b^n$ при $a \geq b > 0$, где $n \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\begin{aligned} & |f^{n+1}(y) - f^{n+1}(x)| = |(f(x) - f(x_0))^n(f(y) - f(x)) + (f(y) - f(x_0))(f^n(y) - f^n(x))| \leq \\ & \leq K^{n+1} \|x - x_0\|^n \|y - x\| + K^{n+1} \|y - x_0\| (2^n - 1) \|y - x\| (\|x - x_0\|^{n-1} + \|y - x\|^{n-1}) \leq \\ & \leq K^{n+1} \|x - x_0\|^n \|y - x\| + K^{n+1} (\|y - x\| + \|x - x_0\|) (2^n - 1) \|y - x\| (\|x - x_0\|^{n-1} + \|y - x\|^{n-1}) \leq \\ & \leq K^{n+1} \|x - x_0\|^n \|y - x\| + K^{n+1} 2(2^n - 1) \|y - x\| (\|x - x_0\|^n + \|y - x\|^n) \leq \\ & \leq K^{n+1} (2^{n+1} - 1) \|y - x\| (\|x - x_0\|^n + \|y - x\|^n) \end{aligned}$$

при $x, y \in X$. Лемма доказана.

Следствие 1. Если отображение $F : X \rightarrow Z$ удовлетворяет липшицеву условию с постоянной K на пространстве X , то

$$\left| \|F(y) - F(x_0)\|^{n+1} - \|F(x) - F(x_0)\|^{n+1} \right| \leq (2^{n+1} - 1)K^{n+1} \|y - x\| (\|x - x_0\|^n + \|y - x\|^n)$$

при $x, y \in X$, где $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Обозначим $f(x) = \|F(x) - F(x_0)\|$ при $x \in X$. Ясно, что $f(x_0) = 0$ и

$$\begin{aligned} & |f(y) - f(x)| = \|F(y) - F(x_0)\| - \|F(x) - F(x_0)\| \leq \\ & \leq \|F(y) - F(x_0) - F(x) + F(x_0)\| = \|F(y) - F(x)\| \leq K \|y - x\| \end{aligned}$$

при $x, y \in X$. Тогда справедливость следствия 1 следует из леммы 1. Следствие доказано.

Пусть $M \subset X$ – непустое множество. Положим $d_M(x) = \inf\{\|u - x\| : u \in M\}$. Обозначим $d_M^n(y) = d_M(y)^n$ при $y \in X$ и $n \in \mathbb{N}$. Так как $|d_M(y) - d_M(x)| \leq \|y - x\|$ при $x, y \in X$ (см.: [13. С. 377]), то из леммы 1 вытекает

Следствие 2. Если $x_0 \in M$, то

$$|d_M^{n+1}(y) - d_M^{n+1}(x)| \leq (2^{n+1} - 1) \|y - x\| (\|x - x_0\|^n + \|y - x\|^n)$$

при $x, y \in X$, где $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $M = \{x_0\}$. Так как $\|y - x_0\| - \|x - x_0\| \leq \|y - x\|$ при $x, y \in X$, то из леммы 1 вытекает

Следствие 3. Если $x_0 \in X$, то

$$\left| \|y - x_0\|^{n+1} - \|x - x_0\|^{n+1} \right| \leq (2^{n+1} - 1) \|y - x\| (\|x - x_0\|^n + \|y - x\|^n)$$

при $x, y \in X$, где $n \in N$.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 1.

Лемма 2. Если функция $f : B(x_0; \delta) \rightarrow R$ является липшицевой с постоянной K на $B(x_0; \delta)$ и $f(x_0) = 0$, то

$$\left| f^{n+1}(y) - f^{n+1}(x) \right| \leq (2^{n+1} - 1) K^{n+1} \|y - x\| (\|x - x_0\|^n + \|y - x\|^n)$$

при $x, y \in B(x_0; \delta)$, где $n \in N$, т.е. функция $f^{n+1}(x) : B(x_0; \delta) \rightarrow R$ удовлетворяет $(1, n+1, 1, \delta)$ липшицеву условию с постоянной $(2^{n+1} - 1) K^{n+1}$ в точке x_0 .

Следствие 4. Если $F : B(x_0, \delta) \rightarrow Z$, где $\delta > 0$, $F(x_0) = 0$, производная $F'(x_0)$ в смысле Фреше существует, отображение F удовлетворяет липшицеву условию с постоянной K на $B(x_0; \delta)$ и $n \in N$, то

$$\begin{aligned} & \left| \|F(y) - F'(x_0)(y - x_0)\|^{n+1} - \|F(x) - F'(x_0)(x - x_0)\|^{n+1} \right| \leq \\ & \leq (2^{n+1} - 1) (K + \|F'(x_0)\|)^{n+1} \|y - x\| (\|x - x_0\|^n + \|y - x\|^n) \end{aligned}$$

при $x, y \in B(x_0; \delta)$.

Доказательство. Обозначив $f(x) = \|F(x) - F'(x_0)(x - x_0)\|$, при $x \in B(x_0; \delta)$ имеем, что

$$\begin{aligned} & |f(y) - f(x)| = \left| \|F(y) - F'(x_0)(y - x_0)\| - \|F(x) - F'(x_0)(x - x_0)\| \right| \leq \\ & \leq \|F(y) - F'(x_0)(y - x_0) - F(x) + F'(x_0)(x - x_0)\| \leq \|F(y) - F(x)\| + \\ & + \|F'(x_0)(y - x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\| \leq K \|y - x\| + \|F'(x_0)\| \|y - x\| = (K + \|F'(x_0)\|) \|y - x\| \end{aligned}$$

при $x, y \in B(x_0; \delta)$, где $f(x_0) = 0$. Тогда справедливость следствия 4 следует из леммы 2. Следствие доказано.

Из леммы 2 вытекает

Следствие 5. Если функция $g : B(x_0; \delta) \rightarrow R$ является липшицевой с постоянной K в $B(x_0; \delta)$, то

$$\left| (g(y) - g(x_0))^{n+1} - (g(x) - g(x_0))^{n+1} \right| \leq (2^{n+1} - 1) K^{n+1} \|y - x\| (\|x - x_0\|^n + \|y - x\|^n)$$

при $x, y \in B(x_0; \delta)$, где $\delta > 0$, $n \in N$.

Пусть $g_k(x) = \|x - x_0\|^{n-k} d_M^k(x)$, где $0 < k < n$, $x_0 \in M$, $n, k \in N$. Считаем, что $g_0(x) = \|x - x_0\|^n$ и $g_n(x) = d_M^n(x)$ при $n \in N$.

Лемма 3. Если $0 < k < n$, $x_0 \in M$, то

$$\left| \|y - x_0\|^{n-k} d_M^k(y) - \|x - x_0\|^{n-k} d_M^k(x) \right| \leq (2^{n+1} - 2) \|y - x\| (\|x - x_0\|^{n-1} + \|y - x\|^{n-1})$$

при $x, y \in X$, $k, n \in N$.

Доказательство. Так как $(a + b)^k \leq 2^k (a^k + b^k)$ при $a \geq 0, b \geq 0$, $(q^{k-1} - 1)(q^{n-k} - 1) \geq 0$ при $q \geq 1$, $\|y - x\|^{n-k-1} \|x - x_0\|^k \leq \|y - x\|^{n-1} + \|x - x_0\|^{n-1}$ и

$\|y-x\|^{n-k} \|x-x_0\|^{k-1} + \|y-x\|^{k-1} \|x-x_0\|^{n-k} \leq \|x-x_0\|^{n-1} + \|y-x\|^{n-1}$ при $x, y \in X$, $k, n \in N$, $0 < k < n$, $n > k+1$, $k > 1$, то, используя следствия 2 и 3, получим

$$\begin{aligned} |g_k(y) - g_k(x)| &= \left| \|y-x_0\|^{n-k} d_M^k(y) - \|x-x_0\|^{n-k} d_M^k(x) \right| = \\ &= \left| \|y-x_0\|^{n-k} d_M^k(y) - \|y-x_0\|^{n-k} d_M^k(x) + \|y-x_0\|^{n-k} d_M^k(x) - \|x-x_0\|^{n-k} d_M^k(x) \right| \leq \\ &\leq \left| \|y-x_0\|^{n-k} (d_M^k(y) - d_M^k(x)) \right| + \left| \|y-x_0\|^{n-k} - \|x-x_0\|^{n-k} \right| (d_M^k(x) - d_M(x_0))^k \leq \\ &\leq (\|y-x\| + \|x-x_0\|)^{n-k} (2^k - 1) \|y-x\| (\|x-x_0\|^{k-1} + \|y-x\|^{k-1}) + \\ &+ (2^{n-k} - 1) \|y-x\| (\|x-x_0\|^{n-k-1} + \|y-x\|^{n-k-1}) \|x-x_0\|^k \leq \\ &\leq 2^{n-k} (\|y-x\|^{n-k} + \|x-x_0\|^{n-k}) (2^k - 1) \|y-x\| (\|x-x_0\|^{k-1} + \|y-x\|^{k-1}) + \\ &+ (2^{n-k} - 1) \|y-x\| (\|x-x_0\|^{n-1} + \|y-x\|^{n-k-1} \|x-x_0\|^k) \leq \\ &\leq 2^{n-k+1} (2^k - 1) \|y-x\| (\|x-x_0\|^{n-1} + \|y-x\|^{n-1}) + 2(2^{n-k} - 1) \times \\ &\times \|y-x\| (\|x-x_0\|^{n-1} + \|y-x\|^{n-1}) \leq (2^{n+1} - 2) \|y-x\| (\|x-x_0\|^{n-1} + \|y-x\|^{n-1}) \end{aligned}$$

при $x, y \in X$.

Также, используя следствия 2 и 3, случай $k=1$ или $n=k+1$, $k \geq 2$, можно проверить непосредственно. Лемма доказана.

Если X – нормированное пространство, $g_k(x) = \|x-x_0\|^{n-k} d_M^k(x)$, где $0 < k < n$, и $x_0 \in M$, $k, n \in N$, то из леммы 3 следует, что

$$\begin{aligned} |g_k(x_0+y) - g_k(x_0+x)| &= \left| \|y\|^{n-k} d_M^k(x_0+y) - \|x\|^{n-k} d_M^k(x_0+x) \right| \leq \\ &\leq (2^{n+1} - 2) \|y-x\| (\|x\|^{n-1} + \|y-x\|^{n-1}) \end{aligned}$$

при $x, y \in X$.

Лемма 4. Если $F: B(x_0, \delta) \rightarrow Z$, где $\delta > 0$, $F(x_0) = 0$, производная $F'(x_0)$ в смысле Фреше существует, отображение F удовлетворяет липшицеву условию с постоянной K на $B(x_0; \delta)$, $0 < k < n$, где $k, n \in N$, то

$$\begin{aligned} \left| \|y-x_0\|^{n-k} \|F(y) - F'(x_0)(y-x_0)\|^k - \|x-x_0\|^{n-k} \|F(x) - F'(x_0)(x-x_0)\|^k \right| \leq \\ \leq (2^{n+1} - 2) (K + \|F'(x_0)\|)^k \|y-x\| (\|x-x_0\|^{n-1} + \|y-x\|^{n-1}) \end{aligned}$$

при $x, y \in B(x_0; \delta)$.

Доказательство. Положим $f_k(x) = \|x-x_0\|^{n-k} \|F(x) - F'(x_0)(x-x_0)\|^k$. Так как $\|F(x) - F'(x_0)(x-x_0)\| \leq \|F(x) - F(x_0)\| + \|F'(x_0)(x-x_0)\| \leq (K + \|F'(x_0)\|) \|x-x_0\|$ при $x \in B(x_0; \delta)$ и $\|y-x\|^{n-k} \|x-x_0\|^{k-1} + \|y-x\|^{k-1} \|x-x_0\|^{n-k} \leq \|x-x_0\|^{n-1} + \|y-x\|^{n-1}$ при $x, y \in X$, $k, n \in N$, $0 < k < n$, $k > 1$, то из следствий 3 и 4 имеем, что

$$\begin{aligned} |f_k(y) - f_k(x)| &= \left| \|y-x_0\|^{n-k} \|F(y) - F'(x_0)(y-x_0)\|^k - \|x-x_0\|^{n-k} \|F(x) - F'(x_0)(x-x_0)\|^k \right| \leq \\ &\leq \left| \|y-x_0\|^{n-k} (\|F(y) - F'(x_0)(y-x_0)\|^k - \|F(x) - F'(x_0)(x-x_0)\|^k) \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left| (\|y - x_0\|^{n-k} - \|x - x_0\|^{n-k}) \|F(x) - F'(x_0)(x - x_0)\|^k \right| \leq \\
 & \leq (\|y - x\| + \|x - x_0\|)^{n-k} (2^k - 1)(K + \|F'(x_0)\|)^k \|y - x\| (\|x - x_0\|^{k-1} + \|y - x\|^{k-1}) + \\
 & + (2^{n-k} - 1) \|y - x\| (\|x - x_0\|^{n-k-1} + \|y - x\|^{n-k-1}) (K + \|F'(x_0)\|)^k \|x - x_0\|^k \leq \\
 & \leq 2^{n-k} (2^k - 1)(K + \|F'(x_0)\|)^k (\|y - x\|^{n-k} + \|x - x_0\|^{n-k}) \|y - x\| (\|x - x_0\|^{k-1} + \|y - x\|^{k-1}) + \\
 & + (2^{n-k} - 1)(K + \|F'(x_0)\|)^k \|y - x\| (\|x - x_0\|^{n-1} + \|y - x\|^{n-k-1} \|x - x_0\|^k) \leq \\
 & \leq 2^{n-k+1} (2^k - 1)(K + \|F'(x_0)\|)^k \|y - x\| (\|x - x_0\|^{n-1} + \|y - x\|^{n-1}) + \\
 & + 2(2^{n-k} - 1)(K + \|F'(x_0)\|)^k \|y - x\| (\|x - x_0\|^{n-1} + \|y - x\|^{n-1}) = \\
 & = (2^{n+1} - 2)(K + \|F'(x_0)\|)^k \|y - x\| (\|x - x_0\|^{n-1} + \|y - x\|^{n-1})
 \end{aligned}$$

при $x, y \in B(x_0; \delta)$.

Также, используя следствия 3 и 4, случай $k=1$ или $n=k+1$, $k \geq 2$, можно проверить непосредственно. Лемма доказана.

Из следствия 4 и леммы 4 вытекает

Следствие 6. Если удовлетворяются условия леммы 4, то

$$\|F(x) - F'(x_0)(x - x_0)\|^n + \|x - x_0\|^{n-k} \|F(x) - F'(x_0)(x - x_0)\|^k$$

удовлетворяет $(1, n, 1, \delta)$ липшицеву условию с постоянной $(2^n - 1)(K + \|F'(x_0)\|)^n + (2^{n+1} - 2)(K + \|F'(x_0)\|)^k$ в точке x_0 .

Лемма 5. Пусть $F: X \rightarrow Z$, $U \subset X$ — выпуклое множество, производная $F'(y)$ в смысле Фреше существует при $y \in U$ и найдется $L > 0$ такое, что $\|F'(u) - F'(v)\| \leq L \|u - v\|^\gamma (\|v - x_0\|^{\beta-\gamma} + \|u - v\|^{\beta-\gamma})$ при $u, v \in U$, где $\beta > \gamma > 0$, $x_0 \in U$. Тогда

$$\|F(u) - F(v) - F'(x_0)(u - v)\| \leq 2L \|u - v\| (\|v - x_0\|^\beta + \|u - v\|^\beta)$$

при $u, v \in U$, т.е. отображение $F: U \rightarrow Z$ удовлетворяет $F'(x_0)(x) - (1, \beta + 1, 1)$ липшицеву условию с постоянной $2L$ в точке x_0 на U .

Доказательство. Так как $\|u - v\|^\gamma \|v - x_0\|^{\beta-\gamma} \leq \|u - v\|^\beta + \|v - x_0\|^\beta$, то по теореме о среднем [14. С. 135] имеем, что

$$\begin{aligned}
 \|F(u) - F(v) - F'(x_0)(u - v)\| &= \|F(u) - F(v) - F'(x_0)(u - v) - F'(v)(u - v) + F'(v)(u - v)\| \leq \\
 &\leq \|F'(v)(u - v) - F'(x_0)(u - v)\| + \\
 &+ \|F(u) - F(v) - F'(v)(u - v)\| \leq \|F'(v) - F'(x_0)\| \|u - v\| + \\
 &+ \sup_{\xi \in [u, v]} \|F'(\xi) - F'(v)\| \cdot \|u - v\| \leq \\
 L \|v - x_0\|^\gamma \|v - x_0\|^{\beta-\gamma} \|u - v\| &+ L \|u - v\|^\gamma (\|v - x_0\|^{\beta-\gamma} + \|u - v\|^{\beta-\gamma}) \|u - v\| \leq \\
 &\leq L \|u - v\| (\|v - x_0\|^\beta + \|u - v\|^\beta) + \\
 &+ \|u - v\|^\beta \leq 2L \|u - v\| (\|v - x_0\|^\beta + \|u - v\|^\beta)
 \end{aligned}$$

при $u, v \in U$. Лемма доказана.

Из леммы 5 следует следующее следствие.

Следствие 7. Пусть $F : X \rightarrow Z$, производная $F'(y)$ в смысле Фреше существует при $y \in B(x_0; \delta)$ и найдется $L > 0$ такое, что $\|F'(u) - F'(v)\| \leq L \|u - v\|^\nu (\|v - x_0\|^{\beta-\nu} + \|u - v\|^{\beta-\nu})$ при $u, v \in B(x_0; \delta)$, где $\beta > \nu > 0$. Тогда

$$\|F(x_0 + y) - F(x_0 + x) - F'(x_0)(y - x)\| \leq 2L \|y - x\| (\|x\|^\beta + \|y - x\|^\beta)$$

при $x, y \in \delta B$, т.е. отображение $F : B(x_0; \delta) \rightarrow Z$ удовлетворяет $F'(x_0)(x) - (1, \beta + 1, 1, \delta)$ липшицеву условию с постоянной $2L$ в точке x_0 .

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 5 (см.: [12. Лемма. 4.1.3]).

Лемма 6. Пусть $F : X \rightarrow Z$, производная $F'(y)$ в смысле Фреше существует при $y \in B(x_0; \delta)$ и найдется $L > 0$ такое, что $\|F'(u) - F'(v)\| \leq L \|u - v\|^\theta$ при $u, v \in B(x_0; \delta)$, где $0 < \theta \leq 1$. Тогда

$$\|F(x_0 + y) - F(x_0 + x) - F'(x_0)(y - x)\| \leq L \|y - x\| (\|x\|^\theta + \|y - x\|^\theta)$$

при $x, y \in \delta B$, т.е. отображение $F : B(x_0; \delta) \rightarrow Z$ удовлетворяет $F'(x_0)(x) - (1, 1 + \theta, 1, \delta)$ липшицеву условию с постоянной L в точке x_0 .

Пусть X и Z – нормированные пространства, $F : B(x_0; \delta) \rightarrow Z$, где $\delta > 0$. Обозначим

$$W_k(x) = F'(x_0)(x) + \frac{1}{2} F''(x_0)(x, x) + \dots + \frac{1}{(k-1)!} F^{(k-1)}(x_0)(x, \dots, x) + r_k(x),$$

где $r_k(x) = r(x) \|x\|^k$ – остаточный член в формуле Тейлора [14. С. 159], $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) = r(0) = 0$, $k \in N$.

С использованием формулы Тейлора следующая лемма доказывается аналогично лемме 4.4.4 [12].

Лемма 7. Если $F : B(x_0; \delta) \rightarrow Z$, где $\delta > 0$, $F^{(k)}(x_0)$ в смысле Фреше существует, где $k \in N$, $k \geq 2$, то найдется число $K > 0$ такое, что

$$\|F(x_0 + y) - F(x_0 + x) - W_k(y) + W_k(x)\| \leq K \|y - x\| (\|x\|^{k-1} + \|y - x\|^{k-1})$$

при $x, y \in \delta B$, т.е. отображение $F : B(x_0; \delta) \rightarrow Z$ удовлетворяет $W_k(x) - (1, k, 1, \delta)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 .

Лемма 8. Если функции $f_\tau : G \rightarrow R$ удовлетворяют $\varphi - (\alpha, \beta, \nu, \omega)$ липшицеву условию с постоянной L_τ в точке $\bar{x}$ на множестве G при $\tau \in \Omega$, где $\bar{x} \in G$, $L = \sup_{\tau \in \Omega} L_\tau < +\infty$ и $f(x) = \sup_{\tau \in \Omega} f_\tau(x)$, то $f : G \rightarrow R$ также удовлетворяет $\varphi - (\alpha, \beta, \nu, \omega)$ липшицеву условию с постоянной L в точке $\bar{x}$ на множестве G .

Доказательство. Если $x, y \in G$, то

$$\begin{aligned} f(y) - \varphi(y - \bar{x}) - f(x) + \varphi(x - \bar{x}) &= \sup_{\tau \in \Omega} (f_\tau(y) - \varphi(y - \bar{x})) - \sup_{\tau \in \Omega} (f_\tau(x) - \varphi(x - \bar{x})) \leq \\ &\leq \sup_{\tau \in \Omega} (f_\tau(y) - \varphi(y - \bar{x}) - f_\tau(x) + \varphi(x - \bar{x})) \leq \\ &\leq L \|y - x\|^\nu (\|x - \bar{x}\|^{\beta-\alpha\nu} + \|y - x\|^{\beta-\alpha\nu}) + \omega(\|x - \bar{x}\|), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 f(y) - \varphi(y - \bar{x}) - f(x) + \varphi(x - \bar{x}) &= \sup_{\tau \in \Omega} (f_\tau(y) - \varphi(y - \bar{x})) + \inf_{\tau \in \Omega} (-f_\tau(x) + \varphi(x - \bar{x})) \geq \\
 &\geq \inf_{\tau \in \Omega} (f_\tau(y) - \varphi(y - \bar{x}) - f_\tau(x) + \varphi(x - \bar{x})) \geq \\
 &\geq -L \|y - x\|^v (\|x - \bar{x}\|^{\beta - \alpha v} + \|y - x\|^{\frac{\beta - \alpha v}{\alpha}}) - \omega(\|x - \bar{x}\|).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Из соотношений (3), (4) вытекает, что $f : G \rightarrow R$ удовлетворяет $\varphi - (\alpha, \beta, v, \omega)$ локально липшицеву условию с постоянной L в точке $\bar{x}$. Лемма доказана.

2. Точные штрафные теоремы в общей задаче минимизации

Пусть X – нормированное пространство, $G \subset X$, $C \subset G$, $f : G \rightarrow R$ и $x_0 \in C$. Положим $d_C(x) = \inf\{\|u - x\| : u \in C\}$. Для простоты ниже предполагаем, что $\beta > \alpha v$.

Лемма 9. Пусть x_0 – точка минимума функции f на множестве C , $f : G \rightarrow R$ удовлетворяет $(\alpha, \beta, v, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 на множестве G , и $C \subset G$. Тогда для любого $\lambda \geq K$ функция

$$\bar{S}_\lambda(x) = f(x) + \lambda(d_C^\alpha(x) + \|x - x_0\|^{\beta - \alpha v} d_C^v(x)) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на множестве G в точке x_0 , и если $\lambda > K$ и C замкнуто, то любая точка, минимизирующая $\bar{S}_\lambda(x)$ на множестве G , принадлежит C .

Доказательство. Предположим противное. Пусть существуют точка $y \in G$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\bar{S}_\lambda(y) < f(x_0) - \lambda\varepsilon$, где $\lambda \geq K$. Возьмем точку $c \in C$ такую, что $\|y - c\|^\frac{\beta}{\alpha} + \|y - x_0\|^{\beta - \alpha v} \|y - c\|^v \leq d_C^\alpha(y) + \|y - x_0\|^{\beta - \alpha v} d_C^v(y) + \varepsilon$. Так как f удовлетворяет $(\alpha, \beta, v, \omega)$ липшицеву условию в точке x_0 на множестве G с постоянной K , то

$$\begin{aligned}
 f(c) &\leq f(y) + K(\|y - c\|^\frac{\beta}{\alpha} + \|y - c\|^v \cdot \|y - x_0\|^{\beta - \alpha v}) + \omega(\|y - x_0\|) \leq \\
 &\leq f(y) + \lambda(\|y - c\|^\frac{\beta}{\alpha} + \|y - c\|^v \cdot \|y - x_0\|^{\beta - \alpha v}) + \omega(\|y - x_0\|) \leq \\
 &\leq f(y) + \lambda(d_C^\alpha(y) + \|y - x_0\|^{\beta - \alpha v} d_C^v(y)) + \omega(\|y - x_0\|) + \lambda\varepsilon < f(x_0).
 \end{aligned}$$

Это противоречит предположению, что f достигает минимума в точке x_0 на множестве C .

Если $\lambda > K$ и $y \in G$ также минимизирует функции $\bar{S}_\lambda(x)$ на множестве G , то из первой части теоремы получим

$$\begin{aligned}
 f(y) + \lambda(d_C^\alpha(y) + \|y - x_0\|^{\beta - \alpha v} d_C^v(y)) + \omega(\|y - x_0\|) &= f(x_0) \leq f(y) + \\
 &+ \frac{\lambda + K}{2}(d_C^\alpha(y) + \|y - x_0\|^{\beta - \alpha v} d_C^v(y)) + \omega(\|y - x_0\|).
 \end{aligned}$$

Отсюда получим, что $d_C^\alpha(y) + \|y - x_0\|^{\beta - \alpha v} d_C^v(y) = 0$. Поэтому $d_C(y) = 0$. Так как C замкнуто, то $y \in C$. Теорема доказана.

Отметим, что $d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(x) = \inf \{ \|u - x\|^{\frac{\beta}{\alpha}} + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} \|u - x\|^{\nu} : u \in C \}$ при $x \in X$.

Замечание 1. Если $\beta = \alpha\nu$ и $0 < \nu \leq 1$, то считаем, что $\bar{S}_{\lambda}(x) = f(x) + \lambda d_C^{\nu}(x) + \omega(\|x - x_0\|)$ при $x \in G$, где $\lambda \geq K$. Если $\nu = 1$ и $\omega(x) \equiv 0$, то отсюда следует предложение 2.4.3 [3. С. 55].

Теорема 1. Пусть x_0 – точка минимума функции f на множестве C , $f : G \rightarrow R$ удовлетворяет $\varphi - (\alpha, \beta, \nu, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 на множестве G , $C \subset G$, и $D = \{x \in C : \varphi(x - x_0) \leq 0\}$. Тогда для любого $\lambda \geq K$ функция

$$S_{\lambda}(x) = f(x) - \varphi(x - x_0) + \lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(x)) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на множестве G в точке x_0 , и если $\lambda > K$ и D замкнуто, то любая точка, минимизирующая $S_{\lambda}(x)$ на множестве G , принадлежит D .

Доказательство. Ясно, что x_0 – точка минимума функции $f(x) - \varphi(x - x_0)$ на множестве $D = \{x \in C : \varphi(x - x_0) \leq 0\}$, и функция $f(x) - \varphi(x - x_0)$ удовлетворяет $(\alpha, \beta, \nu, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 на множестве G . Применяя лемму 9, получим, что для любого $\lambda \geq K$ функция

$$S_{\lambda}(x) = f(x) - \varphi(x - x_0) + \lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(x)) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на множестве G в точке x_0 .

Из леммы 9 также следует, что если $\lambda > K$ и D замкнуто, то любая точка, минимизирующая $S_{\lambda}(x)$ на множестве G , принадлежит D . Теорема доказана.

Так как $d_D^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) \leq \|x - x_0\|^{\beta-\nu} d_D^{\nu}(x)$ при $x \in X$, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 8. Пусть x_0 – точка минимума функции f на множестве C , $f : G \rightarrow R$ удовлетворяет $\varphi - (1, \beta, \nu, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 на множестве G , $C \subset G$, и $D = \{x \in C : \varphi(x - x_0) \leq 0\}$. Тогда для любого $\lambda \geq K$ функция

$$\tilde{S}_{\lambda}(x) = f(x) - \varphi(x - x_0) + 2\lambda\|x - x_0\|^{\beta-\nu} d_D^{\nu}(x) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на G в точке x_0 , и если $\lambda > K$ и D замкнуто, то любая точка, минимизирующая $\tilde{S}_{\lambda}(x)$ на множестве G , принадлежит D .

Ясно, что при условиях лемм 5–7 условия теоремы 1 выполняются.

3. Теорема о точном штрафе для задачи математического программирования

Пусть X и Z – нормированные пространства, $G \subset X$, $f_i : G \rightarrow R$, $i = 0, 1, \dots, n$, $F : G \rightarrow Z$ и $C \subset G$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(y) \rightarrow \min, \quad y \in \{x \in C : f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, n, F(x) = 0\}. \quad (5)$$

Положим $H = \{x \in C : \varphi_i(x - x_0) \leq 0, i = 0, 1, \dots, n, F(x) = 0\}$, $E(x) = \max\{r_0(f_0(x) - \varphi_0(x - x_0) - f_0(x_0)) + \sum_{i=1}^n r_i(f_i(x) - \varphi_i(x - x_0)) : r_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n, \sum_{i=0}^n r_i = 1\}$.

Теорема 2. Пусть x_0 – точка минимума в задаче (5), функции $f_i : G \rightarrow R$ удовлетворяют $\varphi_i - (\alpha, \beta, \nu, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 на множестве G при $i = 0, 1, \dots, n$, $C \subset G$. Тогда для любого $\lambda \geq K$ функция

$$E_\lambda(x) = E(x) + \lambda(d_H^\beta(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_H^\nu(x)) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на G в точке x_0 , и если $\lambda > K$ и H замкнуто, то любая точка, минимизирующая $E_\lambda(x)$ на множестве G , принадлежит H .

Доказательство. Предполагая противное, имеем, что функция $E(x)$ неотрицательна на множестве $H = \{x \in C : \varphi_i(x - x_0) \leq 0, i = 0, 1, \dots, n, F(x) = 0\}$ и точка x_0 минимизирует функцию $E(x)$ на множестве H и $E(x_0) = 0$. Так как функции $f_0(x) - \varphi_0(x - x_0) - f_0(x_0)$, $f_i(x) - \varphi_i(x - x_0)$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют $(\alpha, \beta, \nu, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 на множестве G , то по лемме 8 функция $E(x)$ удовлетворяет $(\alpha, \beta, \nu, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 на множестве G . Применяя лемму 9, имеем, что для любого $\lambda \geq K$ функция $E_\lambda(y) = E(y) + \lambda(d_H^\beta(y) + \|y - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_H^\nu(y)) + \omega(\|y - x_0\|)$ достигает минимума на G в точке x_0 . Из леммы 9 также следует, что если $\lambda > K$ и H замкнуто, то любая точка, минимизирующая E_λ на множестве G , принадлежит H . Теорема доказана.

Если $\varphi_i(x) \equiv 0$ при $i = 0, 1, \dots, n$, то $H = \{x \in C : F(x) = 0\}$ и

$$E(x) = \max\{\alpha_0(f_0(x) - f_0(x_0)) + \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) : \alpha_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n, \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1\}.$$

Если положить

$$E(x) = \max\{f_0(x) - \varphi_0(x - x_0) - f_0(x_0), f_1(x) - \varphi_1(x - x_0), \dots, f_n(x) - \varphi_n(x - x_0)\},$$

то теорема 2 также остается справедливой.

Пусть X и Z – нормированные пространства, $F : X \rightarrow Z$ – произвольное отображение. Обозначим $E = \{x \in D : F(x) = F(x_0)\}$, где $D \subset C$. Отображение F будем называть $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$ -регулярным в точке $x_0 \in E$ относительно множества D , если существует такое число $r_D > 0$, что

$$d_E^\beta(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_E^\nu(x) \leq r_D(\|F(x) - F(x_0)\|^\alpha + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} \|F(x) - F(x_0)\|^\nu)$$

при $x \in D$, $\|x - x_0\| \leq \delta$.

В следующих теоремах 3 и 4 рассмотрены задачи математического программирования с регулярным ограничением равенств. Ряд достаточных условий регулярности равенства ограничений получен в [4. С. 98–104; 15. С. 59, 151].

Для простоты далее считаем, что $G = B(x_0, \delta)$. Пусть $S : X \rightarrow Z$, $\varphi_i : X \rightarrow R$, $i = 0, 1, \dots, n$, $F(x_0) = 0$.

Положим

$$D = \{x \in C : \varphi_i(x - x_0) \leq 0, i = 0, 1, \dots, n, S(x - x_0) = 0\},$$

$$D_1 = \{x \in C : \varphi_i(x - x_0) \leq 0, i = 0, 1, \dots, n\},$$

$$Q(x) = \|F(x) - S(x - x_0)\|_{\alpha}^{\beta} + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} \|F(x) - S(x - x_0)\|^{\nu},$$

$$h(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_0) - \varphi_0(x - x_0), f_1(x) - \varphi_1(x - x_0), \dots, f_n(x) - \varphi_n(x - x_0)\}.$$

Теорема 3. Пусть x_0 – точка минимума в задаче (5), функции f_i удовлетворяют $\varphi_i - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 при $i = 0, 1, \dots, n$, отображение F в точке x_0 $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$ -регулярно относительно множества D_1 с коэффициентом регулярности r , функции $Q(x)$ и $\omega(\|x - x_0\|)$ удовлетворяют $(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 , и $C \subset B(x_0, \delta)$. Тогда для любого $\mu \geq \max\{2K + K^2r, Kr\}$ функция

$$h_{\mu}(x) = h(x) + \mu Q(x) + 2\omega(\|x - x_0\|) + \mu(d_D^{\alpha}(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_D^{\nu}(x))$$

достигает минимума на $B(x_0, \delta)$ в точке x_0 , и если D замкнуто и $\mu > \max\{2K + K^2r, Kr\}$, то любая точка, минимизирующая $h_{\mu}(x)$ на множестве $B(x_0, \delta)$, принадлежит D .

Доказательство. Так как x_0 – точка минимума в задаче (5), то, предположив противное, имеем, что x_0 является минимумом h на множестве $V = \{x \in C : \varphi_i(x - x_0) \leq 0, i = 0, 1, \dots, n, F(x) = 0\}$.

По условию функции $f_0(x) - f_0(x_0) - \varphi_0(x - x_0)$ и $f_i(x) - \varphi_i(x - x_0)$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют $(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке $x_0 \in C$, тогда по лемме 8 имеем, что h удовлетворяет $(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 . Применяя лемму 9 при $G = B(x_0, \delta)$ на пары множеств V и D_1 имеем, что для любого $\lambda \geq K$ функция

$$\bar{h}_{\lambda}(x) = h(x) + \lambda(d_V^{\alpha}(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_V^{\nu}(x)) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на множестве D_1 в точке x_0 (и если $\lambda > K$ и V замкнуто, то любая точка, минимизирующая $\bar{h}_{\lambda}(x)$ на множестве D_1 , принадлежит V).

Так как отображение F является $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$ -регулярным в точке $x_0 \in V$ относительно множества D_1 , то существует такое число $r > 0$, что

$$d_V^{\alpha}(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_V^{\nu}(x) \leq r(\|F(x)\|_{\alpha}^{\beta} + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} \|F(x)\|^{\nu})$$

при $x \in D_1$. Отсюда следует, что

$$d_V^{\alpha}(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_V^{\nu}(x) \leq r(\|F(x) - S(x - x_0)\|_{\alpha}^{\beta} + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} \|F(x) - S(x - x_0)\|^{\nu})$$

при $x \in D$. Поэтому для любого $\lambda \geq K$ функция

$$h(x) + \lambda r(\|F(x) - S(x - x_0)\|_{\alpha}^{\beta} + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} \|F(x) - S(x - x_0)\|^{\nu}) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на D в точке x_0 . Так как функция $h(x) + KrQ(x) + \omega(\|x - x_0\|)$ в точке x_0 удовлетворяет $(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицеву условию с постоянной $2K + K^2r$, то из леммы 9 при $G = B(x_0, \delta)$ имеем, что для любого $\mu \geq 2K + K^2r$ функция $h(x) + KrQ(x) + 2\omega(\|x - x_0\|) + \mu(d_D^\beta(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_D^\nu(x))$ достигает минимума на $B(x_0, \delta)$ в точке x_0 . Поэтому для любого $\mu \geq \max\{2K + K^2r, Kr\}$ функция $h_\mu(x) = h(x) + \mu Q(x) + 2\omega(\|x - x_0\|) + \mu(d_D^\beta(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_D^\nu(x))$ достигает минимума на $B(x_0, \delta)$ в точке x_0 , и если $\mu > \max\{2K + K^2r, Kr\}$ и D замкнуто, то по лемме 9 любая точка, минимизирующая $h_\mu(x)$ на множестве $B(x_0, \delta)$, принадлежит D . Теорема доказана.

Если положить

$$h(x) = \max\{\alpha_0(f_0(x) - f_0(x_0) - \varphi_0(x - x_0)) + \\ + \sum_{i=1}^n \alpha_i(f_i(x) - \varphi_i(x - x_0)) : \alpha_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n, \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1\},$$

то теорема 3 также остается верной.

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства, $F : X \rightarrow Y$ – оператор, $B_X(x, r)$ – шар радиуса r с центром в точке x в X , $B_Y(y, r)$ – шар радиуса r с центром в точке y в Y . Пусть $U \subset X$ – открытое множество. Будем говорить, что оператор F накрывает множество U с константой $a > 0$, если включение $F(B_X(x, r)) \supset B_Y(F(x), ar)$ выполняется для любого $B_X(x, r) \subset U$ (см.: [15. Р. 52]).

Пусть $G = B(x_0; \delta)$, $S : X \rightarrow R$. Положим

$$D = \{x \in C : S(x - x_0) = 0\}, \quad f(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_0), f_1(x), \dots, f_n(x)\},$$

$$Q(x) = \|F(x) - S(x - x_0)\|_a^\beta + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} \|F(x) - S(x - x_0)\|_U^\nu.$$

Теорема 4. Пусть X – банахово пространство, x_0 – точка минимума в задаче (5), функции f_i , $i = 0, 1, \dots, n$, в точке x_0 удовлетворяют $(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K , C – непустое открытое множество, непрерывное отображение $F : C \rightarrow Z$ накрывает с константой $a > 0$ на множестве C и $C \subset B(x_0, \delta)$, функции $Q(x)$ и $\omega(\|x - x_0\|)$ удовлетворяют $(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K . Тогда существуют числа $m_0 > 0$ и $t > 0$ такие, что для любого $\mu \geq m_0$ функция

$$S_\mu(x) = f(x) + \mu Q(x) + 2\omega(\|x - x_0\|) + \mu(d_U^\beta(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_U^\nu(x))$$

достигает минимума на $B(x_0, \delta)$ в точке x_0 , где $U = B(x_0, t) \cap D$, $0 < t < \delta$, а если D замкнуто и $\mu > m_0$, то любая точка, минимизирующая $S_\mu(x)$ на множестве $B(x_0, \delta)$, принадлежит U .

Доказательство. Положим $f(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_0), f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ при $x \in B(x_0, \delta)$. Так как x_0 – точка минимума в задаче (5), то x_0 также минимизирует функцию f на множестве $E = \{x \in C : F(x) = 0\}$. Если функции f_i , $i = 0, 1, \dots, n$,

удовлетворяют $(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 , то по лемме 8 имеем, что функция f также удовлетворяет $(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 . Полагая $E = \{x \in C : F(x) = 0\}$, по лемме 9 имеем, что для любого $\lambda \geq K$ функция

$$S_\lambda(x) = f(x) + \lambda(d_E^\alpha(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_E^\nu(x)) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на $B(x_0, \delta)$ в точке x_0 (и если $\lambda > K$ и E замкнуто, то любая точка, минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве $B(x_0, \delta)$, принадлежит E). Так как непрерывное отображение $F : C \rightarrow Y$ покрывает с константой $a > 0$ на открытом множестве C , то по лемме 44 [15. С. 151] существуют числа $m > 0$ и $t > 0$ такие, что выполняется неравенство $d_E(x) \leq m\|F(x)\|$ при $x \in B(x_0, t)$, где $B(x_0, t) \subset C$. Поэтому для любого $\lambda \geq K$ имеем, что

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leq f(x) + \lambda(d_E^\alpha(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_E^\nu(x)) + \omega(\|x - x_0\|) \leq f(x) + \\ &+ \lambda\bar{r}(\|F(x)\|^\alpha + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} \|F(x)\|^\nu) + \omega(\|x - x_0\|) \end{aligned}$$

при $x \in B(x_0, t)$, где $\bar{r} = \max\{m^\alpha, m^\nu\}$. Отсюда следует, что функция $f(x) + \lambda\bar{r}Q(x) + \omega(\|x - x_0\|)$ достигает минимума на $U = D \cap B(x_0, t)$ в точке x_0 . Так как функция $\tilde{S}(x) = f(x) + K\bar{r}Q(x) + \omega(\|x - x_0\|)$ в точке x_0 удовлетворяет $(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицеву условию (см.: [12. С. 200. Лемма 4.4.1]) с постоянной $K^2\bar{r} + 2K$, то по лемме 9 для любого $\mu \geq \bar{r}K^2 + 2K$ функция

$$S(x) = f(x) + K\bar{r}Q(x) + 2\omega(\|x - x_0\|) + \mu(d_U^\alpha(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_U^\nu(x))$$

достигает минимума на $B(x_0, \delta)$ в точке x_0 . Поэтому для любого $\mu \geq \max\{K^2\bar{r} + 2K, K\bar{r}\}$ функция

$$S_\mu(x) = f(x) + \mu Q(x) + 2\omega(\|x - x_0\|) + \mu(d_U^\alpha(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_U^\nu(x))$$

достигает минимума на $B(x_0, \delta)$ в точке x_0 . Если D замкнуто и $\mu > \max\{K^2\bar{r} + 2K, K\bar{r}\}$, то по лемме 9 любая точка, минимизирующая $S_\mu(x)$ на множестве $B(x_0, \delta)$, принадлежит U . Теорема доказана.

Отметим, что из теоремы точного штрафа высокого порядка легко можно получить необходимые условия экстремума высокого порядка (см.: [12]).

Список источников

1. Kuhn H.W., Tucker A.W. Nonlinear programming // Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability. Univ. of Calif. Press. 1951. P. 481–482.
2. Ioffe A.D. Necessary and sufficient conditions for a local minima. I // SIAM J. Contr. Optimiz. 1979. V. 17, № 2. P. 245–250.
3. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.

4. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 350 с.
5. Clarke F. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. London: Springer-Verlag, 2013. 591 p.
6. Penot J.P. *Calculus Without Derivatives, Graduate Texts in Mathematics*. New York: Springer, 2013. 524 p.
7. Mordukhovich B.S. *Variational analysis and applications*. Cham: Springer, 2018. 622 p.
8. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. Баку: Изд-во Азербайджанского технического университета, 1996. 148 с.
9. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач. Баку: Элм, 2002. 125 с.
10. Садыгов М.А. Экстремальные задачи с ограничением в метрическом пространстве // Доклады Академии наук. 2012. Т. 447, № 6. С. 615–618.
11. Садыгов М.А. Задачи на экстремум с ограничениями в метрическом пространстве // Доклады Академии наук. 2013. Т. 452, № 5. С. 490–493.
12. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. 359 p.
13. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
14. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление*. М.: Наука, 1979. 432 с.
15. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. *Принцип максимума в оптимальном управлении*. М.: Изд-во МГУ, 2004. 168 с.

References

1. Kuhn H.W., Tucker A.W. (1951) Nonlinear programming. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability*. University of California Press. pp. 481–482.
2. Ioffe A.D. (1979) Necessary and sufficient conditions for a local minima. I. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 17(2). pp. 245–250.
3. Clarke F. (1983) *Optimization and Nonsmooth Analysis*. New York: Wiley.
4. Mordukhovich B.S. (1988) *Metody approksimatsii v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Approximation methods in optimization and control problems]. Moscow: Nauka.
5. Clarke F. (2013) *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. London: Springer-Verlag.
6. Penot J.-P. (2013) *Calculus without Derivatives*. New York: Springer.
7. Mordukhovich B.S. (2018) *Variational analysis and applications*. Cham: Springer.
8. Sadygov M.A. (1996) *Ekstremal'nyye zadachi dlya negladkikh sistem* [Extremum Problems for Nonsmooth Systems]. Baku: Azerbaijan Technical University.
9. Sadygov M.A. (2002) *Issledovaniye negladkikh optimizatsionnykh zadach* [Study of nonsmooth optimization problems]. Baku: Elm.
10. Sadygov M.A. (2012) Extremum Problems with Constraints in a Metric Space. *Doklady Mathematics*. 86(3). pp. 861–864.
11. Sadygov M.A. (2013) Extremum Problems in the Presence of Restrictions in the Metric Space. *Doklady Mathematics*. 88(2). pp. 573–576.
12. Sadygov M.A. (2014) *Subdifferential of High Orders and Optimization*. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing.
13. Engelking R. (1968) *Outline of General Topology*. North-Holland Publishing Company.
14. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. (1979) *Optimal'noye upravleniye* [Optimal control]. Moscow: Fizmatlit.
15. Milyutin A.A., Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. (2004) *Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii* [The principle of maximum in optimal control]. Moscow: Moscow State University.

Сведения об авторе:

Садыгов Мисрадин Аллахверди оглы – доктор физико-математических наук, профессор Бакинского государственного университета (Баку, Азербайджан). E-mail: misreddin08@rambler.ru

Information about the author:

Sadygov Misraddin A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Baku State University, Baku, Azerbaijan). E-mail: misreddin08@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 20.01.2024; принята к публикации 10.04.2025

The article was submitted 20.01.2024; accepted for publication 10.04.2025

Научная статья

УДК 512.541+512.552

MSC: 16S50

doi: 10.17223/19988621/94/5

Кольца обобщенных матриц, представляющих эндоморфизмы конечной примарной группы

Александра Юрьевна Степанова¹, Егор Александрович Тимошенко²

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ stepanova.alexa@mail.ru

² tea471@mail.tsu.ru

Аннотация. Для кольца эндоморфизмов конечной примарной группы построено изоморфное ему кольцо обобщенных матриц. Установлен критерий обратимости таких обобщенных матриц, описан алгоритм нахождения обратной матрицы в указанном кольце.

Ключевые слова: примарная группа, кольцо эндоморфизмов, кольцо обобщенных матриц, обратная матрица

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2025-1728/2).

Для цитирования: Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А. Кольца обобщенных матриц, представляющих эндоморфизмы конечной примарной группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 57–66. doi: 10.17223/19988621/94/5

Original article

Rings of generalized matrices representing endomorphisms of a finite primary group

Aleksandra Yu. Stepanova¹, Egor A. Timoshenko²

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ stepanova.alexa@mail.ru

² tea471@mail.tsu.ru

Abstract. A finite Abelian p -group can be identified with a group $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_l$ with $H_i = \mathbf{Z}/p^{n_i}\mathbf{Z}$ and $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l = n > 0$. The endomorphisms of this group H are in one-to-one correspondence with the elements of the following set of matrices:

$$R = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^{n_1}\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^{n_2}\mathbf{Z} & \dots & \mathbf{Z}/p^{n_l}\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^{n_2}\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^{n_3}\mathbf{Z} & \dots & \mathbf{Z}/p^{n_l}\mathbf{Z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Z}/p^{n_l}\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^{n_l}\mathbf{Z} & \dots & \mathbf{Z}/p^{n_l}\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

We endow R with a multiplication such that R becomes a ring which is isomorphic to the endomorphism ring $\text{End } H$ of H . For $A \in R$, we define the determinant $|A| \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ so that $|AA'| = |A| \cdot |A'|$. The main result is that the following are equivalent:

- The element $|A|$ is invertible in $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.
- The matrix A is left invertible in R .
- The matrix A is right invertible in R .
- The matrix A is invertible in R .

We also give an algorithm for finding A^{-1} .

Keywords: primary group, endomorphism ring, generalized matrix ring, inverse matrix

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2025-1728/2).

For citation: Stepanova, A.Yu., Timoshenko, E.A. (2025) Rings of generalized matrices representing endomorphisms of a finite primary group. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 57–66. doi: 10.17223/19988621/94/5

Кольца обобщенных, или формальных, матриц возникли в связи с понятием контекста Мориты (подробнее см.: [1, 2]). За последние десятилетия появилось немало работ о кольцах обобщенных матриц, среди которых особенно выделим книгу П. Крылова и А. Туганбаева [3]. В некоторых кольцах обобщенных матриц удастся ввести понятие определителя (см.: [4, 5]); ряд идей из этих статей мы используем ниже.

Кольца обобщенных матриц часто возникают в процессе исследования колец эндоморфизмов прямых сумм абелевых групп и модулей. Ранее в работе [6] мы показали, как представлять обобщенными матрицами эндоморфизмы конечных примарных групп рангов 2 и 3; были также получены формулы для нахождения обратной матрицы. В настоящей статье будет построено аналогичное представление уже для эндоморфизмов конечных примарных групп произвольного ранга и указан алгоритм вычисления обратной матрицы для этого случая.

Все группы, встречающиеся в статье, абелевы. Через $\mathbb{Z}$ мы обозначаем кольцо (и группу) целых чисел; ■ – символ конца доказательства либо его отсутствия.

Хорошо известно, что если $m \geq n > 0$ и p – простое число, то:

1) элементы группы гомоморфизмов $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (сопоставляем смежный класс $a + p^n\mathbb{Z}$ гомоморфизму $\psi \in \text{Hom}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ такому, что для любого $z \in \mathbb{Z}$ выполнено $\psi(z + p^m\mathbb{Z}) = az + p^n\mathbb{Z}$);

2) элементы группы гомоморфизмов $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (сопоставляем смежный класс $b + p^n\mathbb{Z}$ гомоморфизму $\psi \in \text{Hom}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ такому, что для любого $z \in \mathbb{Z}$ выполнено $\psi(z + p^n\mathbb{Z}) = p^{m-n}bz + p^m\mathbb{Z}$).

Ясно, что обе указанные биекции представляют собой изоморфизмы групп.

Любую конечную p -группу ранга l можно отождествить с подходящей прямой суммой $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_l$, где $H_i = \mathbb{Z}/p^{n_i}\mathbb{Z}$ и $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l > 0$. Элементы такой группы H будем записывать как векторы вида

$$\left(z_k + p^{n_k}\mathbb{Z} \right)_{k=1}^l, \quad (1)$$

где $z_k \in \mathbf{Z}$ (удобно представлять себе такой вектор как вектор-столбец). Далее для $i, j, k \in \{1, 2, \dots, l\}$ введём обозначения

$$T_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \geq j, \\ p^{n_i - n_j}, & \text{если } i < j, \end{cases}$$

$$S_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \leq j \leq k, \\ p^{n_k - n_j}, & \text{если } i \leq k < j, \\ p^{n_j - n_i}, & \text{если } j < i \leq k, \\ p^{n_j - n_k}, & \text{если } j < k < i, \\ p^{n_i - n_j}, & \text{если } k < i \leq j, \\ 1, & \text{если } k \leq j \leq i. \end{cases}$$

Несложно видеть, что даже со знаками нестрогого неравенства эти определения являются корректными. Из сказанного ранее ясно, что эндоморфизмы группы H находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества

$$R = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^{n_1}\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^{n_2}\mathbf{Z} & \dots & \mathbf{Z}/p^{n_l}\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^{n_2}\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^{n_2}\mathbf{Z} & \dots & \mathbf{Z}/p^{n_l}\mathbf{Z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Z}/p^{n_l}\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^{n_l}\mathbf{Z} & \dots & \mathbf{Z}/p^{n_l}\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

состоящего из обобщенных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} + p^{n_1}\mathbf{Z} & a_{12} + p^{n_2}\mathbf{Z} & \dots & a_{1l} + p^{n_l}\mathbf{Z} \\ a_{21} + p^{n_2}\mathbf{Z} & a_{22} + p^{n_2}\mathbf{Z} & \dots & a_{2l} + p^{n_l}\mathbf{Z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} + p^{n_l}\mathbf{Z} & a_{l2} + p^{n_l}\mathbf{Z} & \dots & a_{ll} + p^{n_l}\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \left(a_{ij} + p^{\min(n_i, n_j)}\mathbf{Z} \right)_{i,j=1}^l \quad (2)$$

таких, что $a_{ij} \in \mathbf{Z}$. При этом эндоморфизму φ группы H мы сопоставляем матрицу вида (2) с тем свойством, что φ переводит всякий вектор вида (1) в вектор

$$\left(\sum_{k=1}^l T_{jk} a_{jk} z_k + p^{n_j} \mathbf{Z} \right)_{j=1}^l.$$

Ясно, что указанное соответствие:

- является групповым изоморфизмом;
- сопоставляет тождественному эндоморфизму группы H матрицу

$$E = \begin{pmatrix} 1 + p^{n_1}\mathbf{Z} & 0 + p^{n_2}\mathbf{Z} & \dots & 0 + p^{n_l}\mathbf{Z} \\ 0 + p^{n_2}\mathbf{Z} & 1 + p^{n_2}\mathbf{Z} & \dots & 0 + p^{n_l}\mathbf{Z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 + p^{n_l}\mathbf{Z} & 0 + p^{n_l}\mathbf{Z} & \dots & 1 + p^{n_l}\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \left(\delta_{ij} + p^{\min(n_i, n_j)}\mathbf{Z} \right)_{i,j=1}^l, \quad (3)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Установим некоторые свойства коэффициентов T_{ij} и S_{ijk} :

- Лемма 1.** а) Для любых $i, j, k \in \{1, 2, \dots, l\}$ выполнено $T_{ik}S_{ijk} = T_{ij}T_{jk}$ и $S_{kji} = S_{ijk}$.
 б) Для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$ выполнено $T_{ij} = S_{ij1}$ и $S_{ijj} = 1$.

Доказательство. а) Достаточно рассмотреть шесть возможных случаев:

- если $i \leq j \leq k$, то $T_{ik}S_{ijk} = p^{n_i-n_k} \cdot 1 = p^{n_i-n_j} \cdot p^{n_j-n_k} = T_{ij}T_{jk}$ и $S_{kji} = 1$,
- если $i \leq k \leq j$, то $T_{ik}S_{ijk} = p^{n_i-n_k} \cdot p^{n_k-n_j} = p^{n_i-n_j} \cdot 1 = T_{ij}T_{jk}$ и $S_{kji} = p^{n_k-n_j}$,
- если $j \leq i \leq k$, то $T_{ik}S_{ijk} = p^{n_i-n_k} \cdot p^{n_j-n_i} = 1 \cdot p^{n_j-n_k} = T_{ij}T_{jk}$ и $S_{kji} = p^{n_j-n_i}$,
- если $j \leq k \leq i$, то $T_{ik}S_{ijk} = 1 \cdot p^{n_j-n_k} = T_{ij}T_{jk}$ и $S_{kji} = p^{n_j-n_k}$,
- если $k \leq i \leq j$, то $T_{ik}S_{ijk} = 1 \cdot p^{n_i-n_j} = p^{n_i-n_j} \cdot 1 = T_{ij}T_{jk}$ и $S_{kji} = p^{n_i-n_j}$,
- если $k \leq j \leq i$, то $T_{ik}S_{ijk} = 1 \cdot 1 = T_{ij}T_{jk}$ и $S_{kji} = 1$.

В каждом из этих случаев видим, что $S_{kji} = S_{ijk}$.

б) Непосредственно проверяется, что требуемые равенства верны как при $i \leq j$, так и при $i \geq j$. ■

Заметим, что приведенные свойства в целом совпадают со свойствами систем множителей, с помощью которых можно задавать операцию умножения в кольце обобщенных матриц над некоторым кольцом с единицей (см.: [3, 4]).

Если эндоморфизму φ группы H соответствует матрица A , задаваемая равенством (2), а эндоморфизму φ' – матрица

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} + p^{n_1} \mathbf{Z} & a'_{12} + p^{n_2} \mathbf{Z} & \dots & a'_{1l} + p^{n_l} \mathbf{Z} \\ a'_{21} + p^{n_2} \mathbf{Z} & a'_{22} + p^{n_2} \mathbf{Z} & \dots & a'_{2l} + p^{n_l} \mathbf{Z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{l1} + p^{n_l} \mathbf{Z} & a'_{l2} + p^{n_l} \mathbf{Z} & \dots & a'_{ll} + p^{n_l} \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

то φ' переводит всякий вектор вида (1) в вектор $\left(\sum_{k=1}^l T_{jk} a'_{jk} z_k + p^{n_j} \mathbf{Z} \right)_{j=1}^l$, поэтому

$\varphi\varphi'$ переводит (1) в вектор, равный

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^l T_{ij} a_{ij} \sum_{k=1}^l T_{jk} a'_{jk} z_k + p^{n_i} \mathbf{Z} \right)_{i=1}^l = \left(\sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^l T_{ij} T_{jk} a_{ij} a'_{jk} z_k + p^{n_i} \mathbf{Z} \right)_{i=1}^l = \\ & = \left(\sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^l T_{ik} S_{ijk} a_{ij} a'_{jk} z_k + p^{n_i} \mathbf{Z} \right)_{i=1}^l = \left(\sum_{k=1}^l T_{ik} \sum_{j=1}^l S_{ijk} a_{ij} a'_{jk} z_k + p^{n_i} \mathbf{Z} \right)_{i=1}^l \end{aligned}$$

(здесь мы использовали лемму 1). Введем на множестве R операцию умножения, считая, что для матриц (2) и (4) выполнено

$$AA' = \left(\sum_{j=1}^l S_{ijk} a_{ij} a'_{jk} + p^{\min(n_i, n_k)} \mathbf{Z} \right)_{i,k=1}^l. \quad (5)$$

Из наших рассуждений следует, что эта операция задана корректно и что верна

Теорема 2. Множество обобщенных матриц R с поэлементным сложением и операцией умножения, задаваемой равенством (5), образует кольцо, изоморфное кольцу эндоморфизмов $\text{End } H$ группы H . Единичным элементом кольца R служит матрица (3). ■

Кольцо R в частном случае $n_i = l + 1 - i$ рассматривалось также в работе [7], где оно было использовано для построения криптосистемы.

Далее будем использовать обозначение $n = n_l$. Про целочисленную матрицу

$$X = \begin{pmatrix} T_{11}a_{11} & T_{12}a_{12} & \dots & T_{1l}a_{1l} \\ T_{21}a_{21} & T_{22}a_{22} & \dots & T_{2l}a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{l1}a_{l1} & T_{l2}a_{l2} & \dots & T_{ll}a_{ll} \end{pmatrix} = (T_{ij}a_{ij})_{i,j=1}^l \quad (6)$$

будем говорить, что она порождает матрицу (2); ясно, что для всякой матрицы $A \in R$ существует бесконечно много порождающих целочисленных матриц. Если

$$X' = \begin{pmatrix} T_{11}a'_{11} & T_{12}a'_{12} & \dots & T_{1l}a'_{1l} \\ T_{21}a'_{21} & T_{22}a'_{22} & \dots & T_{2l}a'_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{l1}a'_{l1} & T_{l2}a'_{l2} & \dots & T_{ll}a'_{ll} \end{pmatrix} = (T_{ij}a'_{ij})_{i,j=1}^l \quad (7)$$

есть еще одна порождающая матрица для (2), то $a'_{ij} \equiv a_{ij} \pmod{p^n}$ для любых i и j , отсюда $T_{ij}a'_{ij} \equiv T_{ij}a_{ij} \pmod{p^n}$ и, значит, $\det X' \equiv \det X \pmod{p^n}$, где символ $\det$ обозначает обычный определитель. Это позволяет нам дать следующее

Определение 3. *Определителем* матрицы $A \in R$, заданной соотношением (2), назовем смежный класс $|A| = \det X + p^n\mathbb{Z}$, где X есть произвольная целочисленная матрица, порождающая матрицу A .

Так как E порождается единичной целочисленной матрицей, то $|E| = 1 + p^n\mathbb{Z}$.

Теорема 4. Для любых $A, A' \in R$ выполнено $|AA'| = |A| \cdot |A'|$.

Доказательство. Пусть матрицы A и A' заданы равенствами (2) и (4). Задавая X и X' равенствами (6) и (7), с учетом леммы 1 имеем

$$XX' = \left(\sum_{j=1}^l (T_{ij}a_{ij})(T_{jk}a'_{jk}) \right)_{i,k=1}^l = \left(T_{ik} \sum_{j=1}^l S_{ijk}a_{ij}a'_{jk} \right)_{i,k=1}^l.$$

Сопоставляя эти равенства с записью (5), видим, что матрица XX' порождает AA' , а значит,

$$|AA'| = \det(XX') + p^n\mathbb{Z} = (\det X + p^n\mathbb{Z})(\det X' + p^n\mathbb{Z}) = |A| \cdot |A'|,$$

что и требовалось. ■

Из следующего известного факта вытекает, что в кольце R обратимость обобщенной матрицы слева (или справа) эквивалентна ее двусторонней обратимости:

Предложение 5. В конечном кольце с единицей каждый левый (или правый) обратный элемент является также двусторонним обратным. ■

Если $n_l = n$, то R – это множество всех матриц порядка l над $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. При этом для всех $i, j, k \in \{1, 2, \dots, l\}$ выполнено $S_{ijk} = T_{ij} = 1$, а значит, операция умножения и определитель в R будут совпадать с обычными; поэтому вопрос об обратимости матриц решается стандартным образом в соответствии с теоремой 6:

Теорема 6 [8]. а) В кольце Γ_l матриц порядка l над коммутативным кольцом с единицей Γ для всякой матрицы A выполнено

$$AA^* = A^*A = (\delta_{ij} \cdot \det A)_{i,j=1}^l,$$

где A^* – союзная матрица.

б) Матрица A обратима в Γ_l тогда и только тогда, когда ее определитель $\det A$ обратим в Γ . Обратная матрица в этом случае имеет вид: $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot A^*$. ■

Если $n_1 > n$, то существует число s такое, что $n_s > n_{s+1} = n$. Пусть матрица $A \in R$ задана соотношением (2). Мы будем разбивать матрицы из R и порождающие их целочисленные матрицы на блоки, левый верхний из которых имеет размер $s \times s$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Всякая обобщенная матрица вида A_{11} представляет подходящий эндоморфизм прямой суммы $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_s$. Умножение в кольце R_s всех таких обобщенных матриц, изоморфном $\text{End}(H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_s)$, задается с помощью той же системы множителей S_{ijk} , что и в R (с ограничением $i, j, k \in \{1, 2, \dots, s\}$).

Единичный элемент кольца R_s , который совпадает с левым верхним блоком матрицы (3), обозначим через E_s ; далее через E_{l-s} будем обозначать единичную матрицу порядка $l - s$ над кольцом $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. Если $A_{12} = 0$ или $A_{21} = 0$, то

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_s & A_{12} \\ A_{21} & E_{l-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s & -A_{12} \\ -A_{21} & E_{l-s} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -\begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= E - \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}^2 = E. \end{aligned} \quad (9)$$

Следующий результат является ключевым для установления критерия обратимости матриц из кольца R и, по сути, содержит алгоритм нахождения обратной матрицы. При построении этого алгоритма существенно используются формулы, которые позволяют строить обратную матрицу в кольце обобщенных матриц над некоторым коммутативным кольцом с единицей (см. [3, 4]).

Теорема 7. Пусть матрица $A \in R$ вида (2) такова, что ее блок A_{11} обратим в R_s . Если при этом для матрицы (6), порождающей A , выполнено условие $\det X \notin p\mathbf{Z}$, то матрица A обратима в R .

Доказательство. Пусть $X = (x_{ij})_{i,j=1}^l$ и A_{11}^{-1} – элемент кольца R_s , обратный к матрице A_{11} . Рассмотрим матрицу

$$U = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \in R,$$

у которой при $i > s$ на пересечении i -й строки и j -го столбца находится смежный класс $b_{ij} + p^n\mathbf{Z} = (\det X + p^n\mathbf{Z})^{-1} \cdot (X_{ji} + p^n\mathbf{Z})$, где через X_{ji} , как обычно, обозначено алгебраическое дополнение элемента x_{ji} матрицы X .

Пусть $i > s$. Тогда для любых j и k выполняется $T_{ij} = T_{ik} = 1$, откуда по лемме 1 получаем $S_{ijk} = T_{jk}$. Учитывая утверждение а) из теоремы 6, мы можем заключить, что для любого k справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^l S_{ijk} X_{ji} a_{jk} = \sum_{j=1}^l X_{ji} (T_{jk} a_{jk}) = \sum_{j=1}^l X_{ji} x_{jk} = \delta_{ik} \cdot \det X$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l S_{ijk} b_{ij} a_{jk} + p^n \mathbf{Z} &= (\det X + p^n \mathbf{Z})^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^l S_{ijk} X_{ji} a_{jk} + p^n \mathbf{Z} \right) = \\ &= (\det X + p^n \mathbf{Z})^{-1} \cdot (\delta_{ik} + p^n \mathbf{Z})(\det X + p^n \mathbf{Z}) = \delta_{ik} + p^n \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что матрица UA является блочно-унитреугольной:

$$UA = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s & * \\ 0 & E_{l-s} \end{pmatrix}.$$

Учитывая (9), получаем, что для A существует левая обратная матрица, которая имеет вид:

$$(UA)^{-1}U = \begin{pmatrix} E_s & * \\ 0 & E_{l-s} \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} * & * \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь алгебраическое дополнение X_{ji} элемента x_{ji} матрицы X для случая $i \leq s < j$. Всякое входящее в X_{ji} слагаемое содержит множитель, имеющий вид: $x_{i i_1} x_{i_1 i_2} \dots x_{i_{t-1} i_t} x_{i_t j}$, где $t \geq 0$ и $i_1, i_2, \dots, i_t \in \{1, 2, \dots, l\}$. Ввиду леммы 1 из этого следует, что каждое такое слагаемое будет содержать множитель, равный

$$\begin{aligned} T_{i i_1} T_{i_1 i_2} \dots T_{i_{t-1} i_t} T_{i_t j} &= S_{i i_1 i_2} T_{i i_2} T_{i_2 i_3} \dots T_{i_{t-1} i_t} T_{i_t j} = S_{i i_1 i_2} S_{i i_2 i_3} T_{i i_3} \dots T_{i_{t-1} i_t} T_{i_t j} = \\ &= S_{i i_1 i_2} S_{i i_2 i_3} \dots S_{i i_{t-1} i_t} T_{i i_t} T_{i_t j} = S_{i i_1 i_2} S_{i i_2 i_3} \dots S_{i i_{t-1} i_t} S_{i i_t j} T_{i j}. \end{aligned}$$

Тем самым показано, что X_{ji} делится на T_{ij} ; обозначим через Y_{ij} целое число, для которого $X_{ji} = T_{ij} Y_{ij}$. Чтобы последнее равенство выполнялось при $j > s$ для всех i , положим $Y_{ij} = X_{ji}$ при любых $i, j \in \{s+1, s+2, \dots, l\}$. Рассмотрим матрицу

$$V = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \in R,$$

у которой при $j > s$ на пересечении i -й строки и j -го столбца находится смежный класс $b_{ij} + p^n \mathbf{Z} = (\det X + p^n \mathbf{Z})^{-1} \cdot (Y_{ij} + p^n \mathbf{Z})$. Из определения Y_{ij} следует, что блок B_{22} в матрицах U и V — это действительно одна и та же матрица.

Для любых i и k выполняется $T_{ik} \delta_{ik} = \delta_{ik}$. Если $k > s$, то по лемме 1 и теореме 6 получаем, что для любого i справедливы равенства

$$T_{ik} \sum_{j=1}^l S_{ijk} a_{ij} Y_{jk} = \sum_{j=1}^l (T_{ij} a_{ij})(T_{jk} Y_{jk}) = \sum_{j=1}^l x_{ij} X_{kj} = \delta_{ik} \cdot \det X,$$

отсюда $\sum_{j=1}^l S_{ijk} a_{ij} Y_{jk} = T_{ik}^{-1} \cdot \delta_{ik} \cdot \det X = \delta_{ik} \cdot \det X$ и, далее,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l S_{ijk} a_{ij} b_{jk} + p^n \mathbf{Z} &= (\det X + p^n \mathbf{Z})^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^l S_{ijk} a_{ij} Y_{jk} + p^n \mathbf{Z} \right) = \\ &= (\det X + p^n \mathbf{Z})^{-1} \cdot (\delta_{ik} + p^n \mathbf{Z})(\det X + p^n \mathbf{Z}) = \delta_{ik} + p^n \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Это означает, что матрица AV также является блочно-унитреугольной:

$$AV = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ * & E_{l-s} \end{pmatrix}.$$

С учетом (9) получаем, что для A существует правая обратная матрица, имеющая следующий вид:

$$V(AV)^{-1} = V \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ * & E_{l-s} \end{pmatrix} = V \left(E + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} * & B_{12} \\ * & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Из предложения 5 вытекает, что найденная правая обратная матрица обязательно совпадает с левой обратной, т.е.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} A^{-1}.$$

Выше показано, как можно найти блоки B_{12} , B_{21} и B_{22} , используя алгебраические дополнения к элементам матрицы X . Далее из соотношений

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

легко выразить матрицы $B_{11}A_{11}$ и $A_{11}B_{11}$. Зная одну из этих матриц, можно найти блок B_{11} , воспользовавшись обратимостью матрицы $A_{11} \in R_s$. ■

Теперь мы готовы сформулировать и доказать критерий обратимости матриц в кольце R . Пусть m совпадает хотя бы с одним из чисел $n_1, n_2, \dots, n_l$. Будем называть *диагональным m -блоком* матрицы $A \in R$ ту ее подматрицу, элементы которой находятся в A в позициях (i, j) таких, что $n_i = n_j = m$. Очевидно, что всякий m -блок представляет собой обычную квадратную матрицу над $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$. Соответствующие подматрицы целочисленной матрицы X , порождающей A , тоже будем называть ее диагональными блоками (элементы $T_{ij}a_{ij}$ таких блоков – это просто числа a_{ij}).

Теорема 8. Пусть матрица $A \in R$ и порождающая ее целочисленная матрица X заданы равенствами (2) и (6) соответственно. Следующие условия эквивалентны:

1. Матрица A обратима в кольце R .
2. Элемент $|A|$ обратим в кольце $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$.
3. Число $\det X \in \mathbf{Z}$ не делится на p .
4. Для всякого m диагональный m -блок матрицы A обратим в соответствующем матричном кольце.
5. Для всякого m определитель диагонального m -блока матрицы A обратим в кольце $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$.
6. Определители всех диагональных блоков матрицы X не делятся на p .

Доказательство. Предположим, что эквивалентность перечисленных шести условий уже установлена для ситуации, когда матрицы из кольца R представляют эндоморфизмы p -группы ранга $< l$. Рассмотрим два случая.

I. Пусть $n_1 = n$. Как уже отмечено ранее, в этом случае R есть обычное кольцо квадратных матриц порядка l над $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. Ясно, что условия 4, 5 и 6 совпадают соответственно с условиями 1, 2 и 3. Наконец, условия 1 и 2 эквивалентны по теореме 6, а условия 2 и 3 – в силу равенства $|A| = \det X + p^n\mathbf{Z}$.

II. Пусть $n_1 > n$. Условия 4, 5 и 6 эквивалентны ввиду сказанного выше при рассмотрении случая I.

Импликация $1 \Rightarrow 2$ верна, так как для обратимой матрицы $A \in R$ выполнено $|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1 + p^n\mathbf{Z}$.

Если элемент $|A|$ кольца $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ обратим, то из $|A| = \det X + p^n\mathbf{Z}$ получаем, что $\det X \notin p\mathbf{Z}$, т.е. импликация $2 \Rightarrow 3$ тоже справедлива.

Для завершения доказательства рассмотрим представление (8) матрицы X . Если $i \leq s < j$, то $n_i > n_j$ и, следовательно, $T_{ij} \in p\mathbb{Z}$. Поэтому, разлагая определитель $\det X$ по первым s строкам в соответствии с теоремой Лапласа, приходим к сравнению $\det X \equiv \det W_{11} \cdot \det W_{22} \pmod{p}$. Это значит, что $\det X \notin p\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $\det W_{11} \notin p\mathbb{Z}$ и $\det W_{22} \notin p\mathbb{Z}$. Применяя к матрице W_{11} предположение индукции, можем сделать вывод, что условие $\det W_{11} \notin p\mathbb{Z}$ равносильно тому, что определители всех диагональных блоков из W_{11} не делятся на число p . Тем самым мы показали, что условия 3 и 6 для матрицы X эквивалентны.

Остается доказать импликацию $3 \Rightarrow 1$. Как мы уже знаем, из условия 3 следует, что определители всех диагональных блоков из W_{11} не делятся на p . В силу предположения индукции это означает, что порождаемая матрицей W_{11} матрица A_{11} обратима в R_s . По теореме 7 получаем, что матрица A обратима в R . ■

Матрица A^{-1} единственна (если она вообще существует). Отсюда, в частности, немедленно вытекает, что механизм построения A^{-1} , описанный в теоремах 7 и 8, приводит к одному и тому же результату вне зависимости от того, какая именно порождающая матрица X была выбрана для A .

Список источников

1. Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. Sect. A. 1958. V. 6. P. 83–142.
2. Loustaunau P., Shapiro J. Morita contexts // Non-Commutative Ring Theory. Springer, 1990. P. 80–92. (Lecture Notes in Mathematics; v. 1448). doi: 10.1007/BFb0091253
3. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. М.: МЦНМО, 2017.
4. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Формальные матрицы и их определители // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. № 1 (19). С. 65–119.
5. Крылов П.А. Определители обобщенных матриц порядка 2 // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. № 5 (20). С. 95–112.
6. Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 30–42. doi: 10.17223/19988621/74/4
7. Climent J.-J., López-Ramos J.A. Public key protocols over the ring $E_p^{(m)}$ // Adv. Math. Commun. 2016. V. 10 (4). P. 861–870. doi: 10.3934/amc.2016046
8. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра. М.: Гелиос АРВ, 2003. Т. 1.

References

1. Morita K. (1958) Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*. 6. pp. 83–142.
2. Loustaunau P., Shapiro J. (1990) Morita contexts. *Non-Commutative Ring Theory* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1448). Springer. pp. 80–92. DOI: 10.1007/BFb0091253.
3. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal Matrices*. (Algebra and Applications, Vol. 23). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-53907-2.
4. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2015) Formal matrices and their determinants. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 211(3). pp. 341–380. DOI: 10.1007/s10958-015-2610-3.
5. Krylov P.A. (2018) Determinants of generalized matrices of order 2. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 230(3). pp. 414–427. DOI: 10.1007/s10958-018-3748-6.
6. Stepanova A.Yu., Timoshenko E.A. (2021) *Matrichnoye predstavleniye endomorfizmov primarnykh grupp malyykh rangov* [Matrix representation of endomorphisms of primary groups

- of small ranks]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 30–42. DOI: 10.17223/19988621/74/4.
7. Climent J.-J., López-Ramos J.A. (2016) Public key protocols over the ring $E_p^{(m)}$. *Advances in Mathematics of Communications*. 10(4). pp. 861–870. DOI: 10.3934/amc.2016046.
8. Glukhov M.M., Elizarov V.P., Nechaev A.A. (2003) *Algebra* [Algebra]. Vol. 1. Moscow: Gelios ARV.

Сведения об авторах:

Степанова Александра Юрьевна – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: stepanova.alexa@mail.ru

Тимошенко Егор Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

Information about the authors:

Stepanova Aleksandra Yu. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: stepanova.alexa@mail.ru

Timoshenko Egor A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 06.01.2025; принята к публикации 10.04.2025

The article was submitted 06.01.2025; accepted for publication 10.04.2025

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 533.72, 66.092-977

doi: 10.17223/19988621/94/6

**Пиролиз полимерных композиционных материалов
при воздействии теплового излучения****Владимир Афанасьевич Архипов¹, Николай Николаевич Золоторёв²,
Евгений Александрович Козлов³, Валерий Тихонович Кузнецов⁴***1, 2, 3, 4 Томский государственный университет, Томск, Россия**¹ leva@niipmm.tsu.ru**² nikzolotorev@mail.ru**³ leva@niipmm.tsu.ru**⁴ leva@niipmm.tsu.ru*

Аннотация. Представлены методика и результаты экспериментального исследования закономерностей пиролиза образцов двух типов полимерных композиционных материалов (органопластика и поликарбоната) при воздействии теплового излучения ксеноновой лампы. Получены значения энергии абляции для плотности лучистого теплового потока в диапазоне $(42 \div 105)$ Вт/см², рассчитанные по измеренной массовой скорости газификации образцов.

Ключевые слова: полимерный композиционный материал, тепловое излучение, пиролиз, энергия абляции, экспериментальное исследование

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

Для цитирования: Архипов В.А., Золоторёв Н.Н., Козлов Е.А., Кузнецов В.Т. Пиролиз полимерных композиционных материалов при воздействии теплового излучения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 67–78. doi: 10.17223/19988621/94/6

Original article

**Pyrolysis of polymer composite materials
under thermal radiation effect****Vladimir A. Arkhipov¹, Nikolay N. Zolotorev²,
Evgeniy A. Kozlov³, Valeriy T. Kuznetsov⁴***1, 2, 3, 4 Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation**¹ leva@niipmm.tsu.ru*

² nikzolotorev@mail.ru

³ leva@niipmm.tsu.ru

⁴ leva@niipmm.tsu.ru

Abstract. The development of industries that actively use polymer composite materials leads to the accumulation of a large amount of waste in terms of spent products and their elements, resulting in serious environmental problems. This paper presents the method and results of an experimental study aimed at solving the urgent problem of recycling polymer composite materials. Recycling is implemented via pyrolysis induced by thermal radiation effect. The URAN-1 setup is used as a source of thermal radiation to generate a directed radiant heat flux of a given power on the sample under study. The experiments are carried using the polymer composite materials based on organoplastic and polycarbonate. The effect of heat flux density and exposure time on ablation rate and energy is revealed and analyzed. For the organoplastic material, the ablation energy decreases from 5.8 to 3.6 kJ/g with an increase in the heat flux density in the range $(42 \div 105)$ W/cm², and for the polycarbonate material, the ablation energy remains constant. The obtained results can be used to optimize the pyrolysis of polymer composite materials when solving the issues of recycling and reducing the volume of environmental pollution.

Keywords: polymer composite material, thermal radiation, pyrolysis, ablation energy, experimental study

Acknowledgments: This study was supported by the Tomsk State University Development Programme (Priority 2030).

For citation: Arkhipov, V.A., Zolotorev, N.N., Kozlov, E.A., Kuznetsov, V.T. Pyrolysis of polymer composite materials under thermal radiation effect (2025) Pyrolysis of polymer composite materials under thermal radiation effect. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 67–78. doi: 10.17223/19988621/94/6

Введение

С появлением современных полимерных композиционных материалов (ПКМ) стало возможным создание легких, прочных и долговечных изделий, которые находят широкое применение в авиации, ракетно-космической технике, автомобилестроении, строительстве и в других областях промышленности. Изделия и детали из таких материалов после отработки и выполнения своих функций требуют утилизации для предотвращения негативных экологических последствий (образование космического мусора, загрязнение арктического побережья пластиковой тарой для завозимого горючего и оборудования, загрязнение Мирового океана микропластиками и т.д.). Из возможных методов утилизации наиболее распространенными и реализованными на промышленном уровне являются механические способы – измельчение, дробление, прессование и брикетирование твердых бытовых, строительных и промышленных отходов [1]. Особую сложность представляет собой утилизация ПКМ, армированных непрерывными волокнистыми наполнителями, такими как стекловолокно и некоторые марки углеродных волокон. Для таких ПКМ используют, как правило, термические методы утилизации – сжигание, пиролиз и газификацию [2, 3].

В настоящей работе представлены методика и результаты экспериментального исследования утилизации образцов ПКМ методом пиролиза при воздействии теплового излучения. Получены количественные характеристики процесса терми-

ческого разложения двух типов материалов в зависимости от плотности потока интегрального теплового излучения и времени облучения образца.

Экспериментальная установка

Экспериментальные исследования по пиролизу выбранных ПКМ проводились на установке «УРАН-1» [4, 5], схема которой представлена на рис. 1.

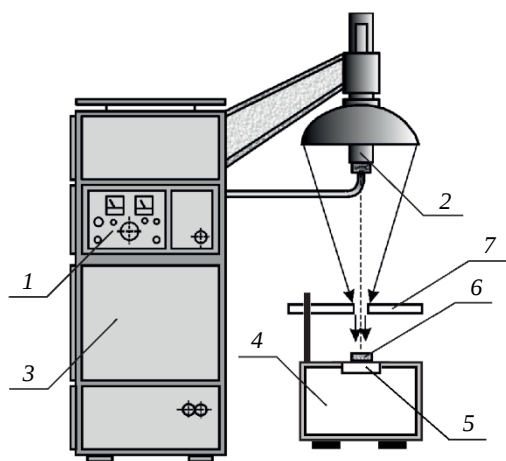


Рис. 1. Схема экспериментальной установки «УРАН-1»:

1 – блок управления; 2 – ксеноновая лампа; 3 – блок питания; 4 – система регистрации; 5 – фиксатор образца; 6 – исследуемый образец; 7 – затвор

Fig. 1. Design of the “URAN-1” experimental setup:

1, control unit; 2, xenon lamp; 3, power supply; 4, registration system; 5, sample clamp; 6, sample under study; and 7, shutter

Экспериментальная установка состоит из блока управления 1, ксеноновой лампы с эллиптическим отражателем 2, блока питания 3, системы регистрации 4 и области проведения экспериментов – воздействия лучистого теплового потока на исследуемый образец. Блок управления 1 отвечает за подачу напряжения поджигающего импульса на ксеноновую лампу 2 марки ДКСР-10000 и плавную регулировку мощности излучения. Ксеноновая лампа размещается в первом фокусе отражателя, во втором фокусе создается увеличенная проекция поперечного сечения электрической дуги лампы. Блок питания 3 обеспечивает потребляемую мощность установки (20 кВт). Система регистрации состоит из датчика лучистого теплового потока, фотодиодов, реле времени и осциллографа. Эта система позволяет измерять плотность теплового потока, регистрировать время воздействия и фиксировать момент возникновения пламени, а также контролировать условия эксперимента. На рабочем столе в области проведения экспериментов, расположенном в плоскости второго фокуса эллиптического отражателя, находится фиксатор образца 5 с защитным экраном, в который закреплен исследуемый образец ПКМ 6. Для подачи теплового излучения на образец в течение заданного промежутка времени Δt использовался затвор 7, шторки которого приводятся в движение с помощью электропривода. Заслонка защищает ослабители и лепестки затвора от перегрева при включении лампы и во время достижения заданного режима работы. Центральный затвор имеет две шторки, приводимые в движение с помощью электромагнитов.

Распределение интенсивности излучения $\bar{I}_\lambda = I_\lambda / I_{\lambda \max}$ ксеноновой лампы в зависимости от длины волны излучения λ представлено на рис. 2 [4].

Интенсивность излучения в ультрафиолетовой области ($\lambda < 0.38$ мкм) составляет 0.5 кВт (9%), в видимой области ($0.38 < \lambda < 0.78$ мкм) – 2 кВт (36%), в инфра-

красной области ($\lambda > 0.78$ мкм) – 3 кВт (55%). Установка обеспечивала стабильность излучения во времени не ниже 95% и равномерное распределение лучистого теплового потока в пятне диаметром 10 мм не ниже 90%. Максимальная мощность излучения, падающая на образец, составляла ~ 0.6 кВт и соответствовала интегральному излучению абсолютно черного тела при температуре ~ 3110 К (см. рис. 2). Отклонение от фокальной плоскости по оптической оси на расстояние 1 мм вызывает изменение плотности лучистого теплового потока не более чем на 5%.

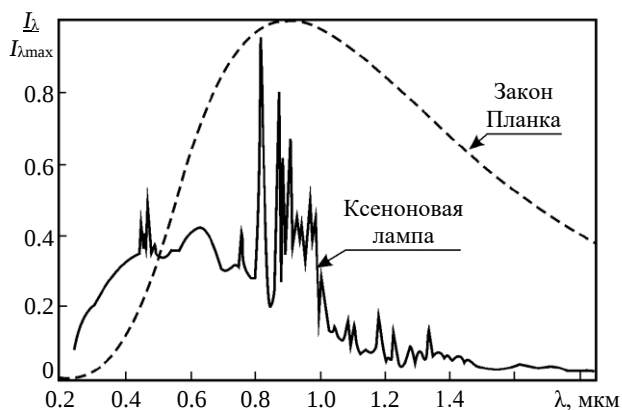


Рис. 2. Распределение интенсивности излучения ксеноновой лампы по спектру

Fig. 2. Spectral distribution of the xenon lamp radiation

При проведении экспериментов проводилась скоростная видеосъемка процесса пиролиза, а также измерялась скорость пиролиза в зависимости от интенсивности теплового излучения и времени экспозиции.

Методика проведения экспериментов

Плотность теплового потока излучения при проведении экспериментов варьировала в диапазоне $q = (42 \div 105)$ Вт/см², а время воздействия теплового излучения Δt изменялось от 3.1 до 15.2 с. Необходимые значения плотности лучистого теплового потока в фокальном пятне получены с использованием ослабителей излучения и постепенного изменения электрической мощности напряжения, подаваемого на ксеноновую лампу. Интенсивность теплового потока излучения, действующего на образец, измерялась калориметрическим методом.

Калориметр представляет собой медный диск (диаметр 10 мм, высота 3 мм, масса 1.49 г), в который впаяна медь-константановая термопара диаметром 0.15 мм. Облучаемая поверхность калориметра покрыта тонким слоем ламповой сажи для снижения коэффициента отражения теплового излучения $k_0 \approx 0$ [6]. Плотность потока излучения рассчитывалась по формуле [7] для измеренной в эксперименте скорости нагрева $\Delta T/\Delta t$ медного диска:

$$q = \frac{mc}{(1-k_0)S} \frac{\Delta T}{\Delta t}, \quad (1)$$

где m – масса диска, c – удельная теплоемкость меди, k_0 – коэффициент отражения, S – площадь облучаемой поверхности диска, ΔT – изменение температуры за время Δt .

После проведения градуировки калориметра проводилась серия экспериментов по облучению образцов ПКМ.

Величина массовой скорости пиролиза на единицу облучаемой поверхности определялась по формуле

$$M = \frac{M_0 - M_1}{tS} = \frac{\Delta M}{tS}, \quad (2)$$

где M_0 – начальная масса образца, M_1 – масса образца после опыта, Δt – время облучения, S – площадь облучаемой поверхности образца.

Время облучения Δt выбиралось на участке равномерного нарастания ΔM на графике: $t_1 < t < t_2$ (см. ниже рис. 3). Масса исследуемого образца ПКМ измерялась до облучения и после воздействия лучистого теплового потока с помощью электронных весов марки AND GX-200 с классом точности II и погрешностью измерения 0.001 г. Для каждого типа образца ПКМ проводились пять дублирующих измерений и их статистическая обработка.

Линейную скорость газификации определяли на стационарном участке процесса, фиксируя массу образца за конкретный временной интервал.

$$u = \frac{M}{\rho}, \quad (3)$$

где ρ – плотность исследуемого материала.

Необходимая для начала газификации энергия (энергия абляции) рассчитывалась с использованием формулы [8]

$$E = q \cdot S \frac{(1-k)t}{\Delta M}, \quad (4)$$

где k – коэффициент отражения поверхности исследуемого образца.

Усредненный коэффициент отражения исследуемых ПКМ измеряли на шаровом фотоэлектрическом фотометре ФМШ-56М в диапазоне длин волн $(0.36 \div 1.1)$ мкм. Погрешность измерения коэффициента отражения не превышает 1%.

Результаты исследований

Выбор полимерных композиционных материалов в качестве объекта исследования проводился совместно со специалистами Омского государственного технического университета [9]. Для экспериментов было выбрано два типа перспективных полимерных композиционных материалов: органопластик на основе пара-арамидной ткани с эпоксидным связующим ЭДТ-10, тип образца ПКМ (ОП), и поликарбонат марки РС-022 с углеродными добавками, тип образца ПКМ (ПК). Выбранные материалы рекомендованы как наиболее применяемые для конструктивных элементов в промышленности, ракетно-космической области и не уступают по своим характеристикам традиционно используемым сплавам алюминия. Для проведения эксперимента из предоставленных пластин ПКМ были изготовлены образцы с диаметром 10 мм. В табл. 1 приведены толщина исследуемых образцов h , значения плотности ρ , удельной теплоемкости c , коэффициента теплопроводности при 25°C $\lambda_{\text{ПКМ}}$ и измеренные усредненные коэффициенты отражения образцов k .

С учетом энергетических характеристик ксеноновой лампы ДКсР-10000 получены усредненные коэффициенты отражения образцов ПКМ. Характеристики исследуемых образцов ПКМ также приведены в табл. 1.

Характеристики исследуемых ПКМ

Тип образца	h , мм	ρ , г/см ³	c , Дж/(кг·К)	λ , Вт/(м·К)	k
ПКМ (ОП)	1	1.06	1 200	0.154	0.33
ПКМ (ПК)	2	1.23	1 260	0.304	0.11

Типичная зависимость потери массы образца ΔM от времени воздействия тепловым излучением приведена на рис. 3.

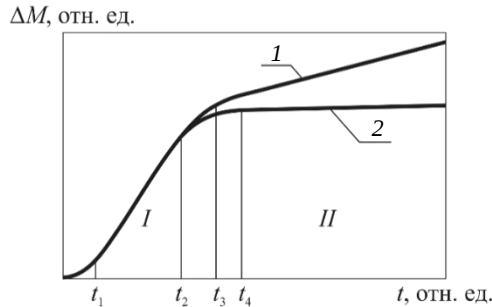


Рис. 3. Зависимость потери массы от времени облучения для полимеров:

1 – режим без затухания образца; 2 – режим с затуханием образца

Fig. 3. Dependence of the mass loss on the irradiation time for polymers in the mode (1) without and (2) with sample attenuation

На рис. 3 отмечены следующие времена процесса: t_1 – время нестационарной абляции, t_2 – время абляции ПКМ до образования коксового слоя, t_3 – время нарастания коксового слоя, t_4 – время до начала режима равновесия между подводом энергии и ее диссипацией [8].

Видно, что по достижении времени t_4 наблюдается равновесие между подводом энергии и ее отводом за счет конвекции, теплопроводности и т.д. Толщина коксового слоя уже не нарастает, он остается раскаленным. Такой режим можно назвать режимом самостабилизации абляции с затуханием. В этом режиме коксовый слой увеличивается за счет нарастания до момента времени t_4 . В режиме самостабилизации абляции происходит равномерное движение фронта химической реакции вглубь образца, что приводит к образованию коксового слоя и его равномерному уносу.

Рассмотрим результаты исследования пиролиза рассматриваемых ПКМ при воздействии теплового потока. На рис. 4, 5 приведены фотографии исходных образцов и образцов после воздействия лучистой энергией. Глубина коксового слоя ($l = u_1 t$) увеличивается с ростом плотности теплового потока и времени его воздействия на образец ПКМ. Видно, что при значении плотности теплового потока $q > 70$ Вт/см² и времени экспозиции ~ 6 с образец из ПКМ (ОП) толщиной 1 мм разрушается практически полностью.

Необходимо отметить, что для каждого конкретного полимера и определенной плотности мощности лазерного излучения существуют строгие кинетические закономерности, определяющие соотношение между скоростью нарастания и удаления коксового слоя. Так, при воздействии излучения $q < 50$ Вт/см² на образцы из поликарбоната образование коксового слоя нарастает (увеличивается) до 3 и более

миллиметров. При увеличении мощности теплового потока излучения до $q > 200 \text{ Вт/см}^2$ образование коксового слоя на поверхности не наблюдается, так как скорость его формирования равна или меньше скорости абляции в результате сублимации [10]. Теплофизические параметры, связанные с морфологией и структурой пор кокса (размер, замкнутость или открытость и т.д.), оказывают значительное влияние на скорость нарастания коксового слоя и его изолирующие от излучения свойства. Такие параметры необходимо учитывать при измерении абляционной стойкости.

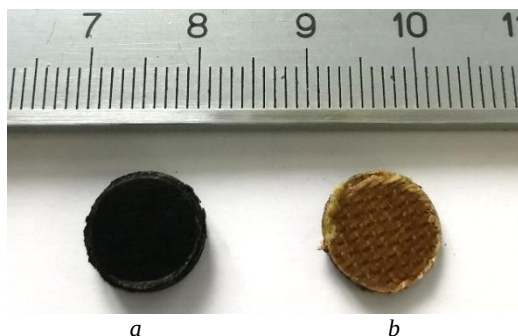


Рис. 4. Фотография исходных образцов из ПКМ (ПК) (a) и ПКМ (ОП) (b)
Fig. 4. Photo of the initial samples made of (a) PCM (PC) and (b) PCM (OP)



Рис. 5. Фотографии образцов ПКМ (ПК) (a) и ПКМ (ОП) (b)
после воздействия лучистого теплового потока
Fig. 5. Photos of the samples made of (a) PCM (PC) and (b) PCM (OP)
after exposure to a radiant heat flux

С учетом суммарной потери массы ΔM , времени экспозиции Δt , величины поглощенной энергии излучения были рассчитаны значения энергии абляции E , величина которой характеризует затраты для газификации единицы массы в установившемся режиме разрушения ПКМ. Результаты оценочных расчетов E по формуле (4) для ПКМ (ОП) и ПКМ (ПК) приведены в табл. 2 и на рис. 6.

Таблица 2

Значения энергии абляции ПКМ при воздействии лучистой энергии в среде воздуха

q , Вт/см ²	ПКМ (ОП)		ПКМ (ПК)	
	u , см/с	E , кДж/г	u , см/с	E , кДж/г
42	$(3.9 \pm 1.3) \cdot 10^{-3}$	5.8 ± 0.5	$(5.8 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$	5.2 ± 0.2
70	$(7.1 \pm 2.5) \cdot 10^{-3}$	5.4 ± 0.6	$(10.1 \pm 1.1) \cdot 10^{-3}$	5.1 ± 0.2
105	$(16.0 \pm 6.5) \cdot 10^{-3}$	3.6 ± 0.6	$(14.2 \pm 3.9) \cdot 10^{-3}$	5.1 ± 0.2

Результаты оценки необходимой энергии для разрушения исследуемых в настоящей работе ПКМ достаточно хорошо согласуются с численными оценками энергии разрушения головного обтекателя ракеты-носителя «Союз-2.16», приведенными в работе [11].

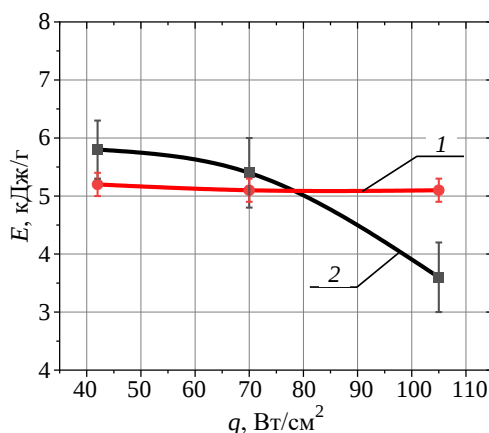


Рис. 6. Зависимость энергии абляции ПКМ от плотности теплового потока:

1 – образец ПКМ (ПК); 2 – образец ПКМ (ОП)

Fig. 6. Ablation energy of the PCM as a function of the heat flux density:

(1) PCM (PC) and (2) PCM (OP) samples

Необходимо отметить, что значения E не являются постоянными при изменении интенсивности воздействующего излучения: при увеличении плотности теплового потока значения E уменьшаются и стабилизируются. Изменения величины E могут быть связаны с дополнительными затратами энергии на прогрев полимера при длительном облучении и низкой плотности мощности (увеличение конвективных теплопотерь и отток через теплопроводность). При $q > 40$ Вт/см² доля энергии на нагрев полимерного образца сильно снижается [12, 13].

Расчет величины E включает в себя учет потери массы за счет суммарного воздействия множества процессов. К таким процессам могут относиться рост конверсии мономеров с выделением низкомолекулярных продуктов, разрывы главных и

боковых цепей, деполимеризация, унос фрагментов и олигомерных продуктов и т.д. При определении конечной энергии абляции полимера необходимо учитывать и минимизировать потери энергии за счет конвекции, переизлучения и других факторов.

При воздействии теплового потока на композиционные материалы в воздушной среде может начаться процесс горения, который усиливает и усложняет процесс разрушения [14]. Разрушение перестает быть чем-то поверхностным и может достигать глубоких слоев. Появление пламени у поверхности образца наблюдалось в опытах при пиролизе на воздухе исследуемых композиций ПКМ (ОП) и ПКМ (ПК). Однако свечение пламени слабое, и после окончания внешнего теплового воздействия горение образца прекращалось. По-видимому, прекращение горения образца связано с образованием коксового слоя на его поверхности, который выполняет роль защитного экрана [15].

Заключение

Анализ полученных результатов показал, что с ростом теплового потока увеличиваются потеря массы вещества и линейная скорость пиролиза. При увеличении времени экспозиции от 3 до 15 с линейная скорость пиролиза, как правило, снижается в связи с появлением на поверхности образца коксового слоя, который экранирует лучистый тепловой поток и затрудняет выход газообразных продуктов пиролиза из глубоких слоев образцов ПКМ.

Получено, что образцы органопластика на основе пара-aramидной ткани и эпоксидного связующего ЭДТ-10 имеют наименьшие временные затраты до полного сгорания (включая армирующие арамидные волокна), что соответствует и меньшим энергетическим затратам на сжигание по сравнению с образцами из поликарбоната.

Показано, что для материала из органопластика происходит снижение значения энергии абляции от 5.8 до 3.6 кДж/г при увеличении плотности теплового потока в диапазоне $(42 \div 105) \text{ Вт/см}^2$, а для материала из поликарбоната значение энергии абляции оставалось постоянным.

Результаты оценки необходимой энергии для разрушения исследуемых ПКМ достаточно хорошо совпадают с численной оценкой энергии разрушения головного обтекателя ракеты-носителя «Союз-2.1б», приведенной в работе [11].

Список источников

1. Петров А.В., Дориомедов М.С., Скрипачев С.Ю. Технологии утилизации полимерных композиционных материалов (обзор) // Труды ВИАМ. 2015. № 8. С. 60–71.
2. Клинков А.С., Беляев П.С., Однолько В.Г., Соколов М.В., Макеев П.В., Шашков И.В. Утилизация и переработка твердых бытовых отходов : учеб. пособие. Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2015. 188 с.
3. Трушляков В.И., Федюхин А.В., Давыдович Д.Ю. Разработка комплексной теоретико-экспериментальной методики оценки параметров утилизации методом пиролиза полимерных композиционных материалов на основе поликарбоната и полиэтилена // Химическая физика. 2024. Т. 43, № 4. С. 97–109. doi: 10.31857/S0207401X24040126
4. Лопатина Г.Г., Сасоров В.П., Спицын Б.В., Федосеев А.В. Оптические печи. М.: Металлургия, 1969. 215 с.

5. Basalaev S.A., Kuznetsov V.T., Rashkovskiy S.A. Pyrolysis of boron-containing compositions upon exposure to radiant energy // *Journal of Physics: Conference Series*. 2022. V. 2233. Art. 012011. P. 1–6. doi: 10.1088/1742-6596/2233/1/012011
6. Михеев В.Ф., Ковальский А.А., Хлевной С.С. Зажигание баллиститного пороха световым излучением // *Физика горения и взрыва*. 1968. Т. 4, № 1. С. 3–9.
7. Архипов В.А., Жарова И.К., Гольдин В.Д., Куриленко Н.И., Мамонтов Г.Я. Анализ нестационарного метода измерения интегрального коэффициента излучения // *Теплофизика и аэромеханика*. 2012. Т. 19, № 6. С. 751–760.
8. Саид-Галиев Э.Е., Никитин Л.Н. Абляция полимеров и композитов под действием излучения CO₂-лазера (обзор) // *Механика композитных материалов*. 1992. № 2. С. 152–171.
9. Трушляков В.И., Русских Г.С., Давыдович Д.Ю. и др. Способ разработки полимерного композиционного материала с учетом его последующей утилизации и устройство для его реализации : пат. № 2776312 РФ, C08J 5/04 (2021.08), C08L 23/18 (2021.08). Оpubл. 18.07.2022.
10. Красовский А.М., Толстомятов Е.М. Использование лазерного излучения для формирования полимерных пленок в вакууме на поверхности твердого тела // *Поверхность. Физика, химия, механика*. 1985. № 1. С. 143–149.
11. Лемперт Д.Б., Трушляков В.И., Зарко В.Е. Оценка массы пиротехнической смеси для сжигания головного обтекателя космической ракеты // *Физика горения и взрыва*. 2015. Т. 51, № 5. С. 121–125. doi: 10.15372/FGV20150514
12. Длугоунович В.А., Снопко В.И. Поведение коэффициента отражения текстолитов при лазерном нагревании // *Инженерно-физический журнал*. 1987. Т. 53, № 2. С. 258–264.
13. Бычков С.Г., Ксандопуло Г.И., Десятков А.В., Бикетов А.А. Разрушение композитных полимерных материалов под действием излучения непрерывного CO₂-лазера // *Механика композитных материалов*. 1985. № 3. С. 547–549.
14. Асеева Р.М., Заиков Г.Е. Горение полимерных материалов. М.: Наука, 1981. 280 с.
15. Бычков С.Г. Макрокинетика лазерного разрушения эпоксидных композиций: автореф. дис. ... канд. хим. наук. Тбилиси, 1986. 24 с.

References

1. Petrov A.V., Doriomedov M.S., Skripachev S.Yu. (2015) Tekhnologii utilizatsii polimernykh kompozitsionnykh materialov (obzor) [Technologies for recycling polymer composite materials (a review)]. *Trudy VIAM – Proceedings of VIAM*. 8. pp. 60–71.
2. Klinkov A.S., Belyaev P.S., Odnolkov V.G., Sokolov M.V., Makeev P.V., Shashkov I.V. (2015) *Utilizatsiya i pererabotka bol'shogo kolichestva otkhodov: uchebnoe posobie* [Recovery and processing of solid domestic waste: a textbook]. Tambov: TSTU Publishing House.
3. Trushlyakov V.I., Fedyukhin A.V., Davydovich D.Yu. (2024) Development of a comprehensive theoretical and experimental methodology for evaluating the parameters of recycling by the pyrolysis of plastic based on polycarbonate and polyethylene. *Russian Journal of Physical Chemistry B*. 18. pp. 582–591. doi: 10.1134/S1990793124020325
4. Lopatina G.G., Sazorov V.P., Spitsyn B.V., Fedoseev A.V. (1969) *Opticheskie pechi* [Optical furnaces]. Moscow: Metallurgiya.
5. Basalaev S.A., Kuznetsov V.T., Rashkovskiy S.A. (2022) Pyrolysis of boron-containing compositions upon exposure to radiant energy. *Journal of Physics: Conference Series*. 2233. Article 012011. pp. 1–6. doi: 10.1088/1742-6596/2233/1/012011
6. Mikheev V.F., Koval'skii A.A., Khlevnoy S.S. (1968) Ignition of a ballistite propellant by light radiation. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 4. pp. 1–4. doi: 10.1007/BF00843062
7. Arkhipov V.A., Zharova I.K., Gol'din V.D., Kurilenko N.I., Mamontov G.Ya. (2012) Analiz nestatsionarnogo metoda izmereniya integral'nogo koeffitsienta izlucheniya [Analysis of a non-stationary method for measuring the integral radiation coefficient]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 19(6). pp. 751–760.

8. Said-Galiev E.E., Nikitin L.N. (1992) Ablation of polymers and composites when exposed to CO₂ laser radiation (review). *Mechanics of Composite Materials*. 28. pp. 97–114. doi: 10.1007/BF00613315
9. Trushlyakov V.I., Russkikh G.S., Davydovich D.Yu., Iordan Y.V., Fateev P.D. (2022) *Sposob razrabotki polimernogo kompozitsionnogo materiala s uchyotom ego posleduyushchey utilizatsii i ustroystvo dlya ego realizatsii* [Method for developing a polymer composite material that accounts for subsequent disposal and an apparatus for its implementation]. RF Patent 2776312.
10. Krasovskiy A.M., Tolstopyatov E.M. (1985) Ispol'zovanie lazernogo izlucheniya dlya formirovaniya polimernykh plyonok na poverkhnosti tverdogo tela [Application of laser radiation to form polymer films on the surface of a solid]. *Poverkhnost'. Fizika, khimiya, mekhanika – Physics, Chemistry and Mechanics of Surfaces*. 1. pp. 143–149.
11. Lempert D.B., Trushlyakov V.I., Zarko V.E. (2015) Estimating the mass of a pyrotechnic mixture for burning the launch vehicle nose fairing. *Combustion Explosion and Shock Waves*. 51(5). pp. 121–125. doi: 10.15372/FGV20150514
12. Dlugunovich V.A., Snopko V.N. (1987) Behavior of the reflection coefficients of textolites under laser heating. *Journal of Engineering Physics*. 53. pp. 928–932. doi: 10.1007/BF00872419
13. Bychkov S.G., Ksandopulo G.I., Desyatkov A.V., Biketov A.A. (1985) Razrushenie kompozitnykh polimernykh materialov pod deystviem izlucheniya nepreryvnogo CO₂-lazera [Destruction of composite polymer materials under the influence of continuous CO₂-laser radiation]. *Mekhanika kompozitnykh materialov – Mechanics of Composite Materials*. 3. pp. 547–549.
14. Aseeva R.M., Zaykov G.E. (1981) *Gorenie polimernykh materialov* [Combustion of polymeric materials]. Moscow: Nauka.
15. Bychkov S.G. (1986) *Makrokinetika lazernogo razrusheniya epoksidnykh kompozitsiy* [Macrokinetics of laser destruction of epoxy compositions]. Dissertation abstract. Tbilisi State University.

Сведения об авторах:

Архинов Владимир Афанасьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом газовой динамики и физики взрыва Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Золоторёв Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nikzolotorev@mail.ru

Козлов Евгений Александрович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Кузнецов Валерий Тихонович – кандидат технических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Arkhipov Vladimir A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Zolotorev Nikolay N. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nikzolotorev@mail.ru

Kozlov Evgeniy A. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Kuznetsov Valeriy T. (Candidate of Technical Sciences, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 13.12.2024; принята к публикации 10.04.2025

The article was submitted 13.12.2024; accepted for publication 10.04.2025

Научная статья

УДК 533.6.011.34

doi: 10.17223/19988621/94/7

Использование принципа наименьшего действия в исследовании течения идеального газа в дозвуковой части сопла

Геннадий Иванович Афонин¹, Антон Геннадьевич Афонин²

^{1, 2} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *agi@niipmm.tsu.ru*

² *aag@niipmm.tsu.ru*

Аннотация. Формулируется принцип наименьшего действия применительно к стационарному потоку невязкого и нетеплопроводного идеального газа в осесимметричном канале переменного сечения. Задача о минимуме действия для стационарного потока сводится к вариационной задаче о минимуме лагранжиана в произвольном сечении при заданном расходе. Используя полученное условие оптимальности, строится маршевый метод восстановления параметров течения и формы канала как вниз, так и вверх по потоку относительно условного начального сечения (сечения «входа»), где при задании наклона линий тока предварительно определяются параметры течения и расход газа в канале. Это в дальнейшем позволяет провести численное исследование структуры оптимального (по принципу наименьшего действия) контура канала.

Ключевые слова: идеальная газ, принцип наименьшего действия, вариационная задача, условие оптимальности, краевой экстремум, закон сохранения энергии

Для цитирования: Афонин Г.И., Афонин А.Г. Использование принципа наименьшего действия в исследовании течения идеального газа в дозвуковой части сопла // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 79–92. doi: 10.17223/19988621/94/7

Original article

The use of the principle of least action in a study of ideal gas flow in subsonic parts of a nozzle

Gennadiy I. Afonin¹, Anton G. Afonin²

^{1, 2} *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *agi@niipmm.tsu.ru*

² *aag@niipmm.tsu.ru*

Abstract. The principle of least action is formulated for a steady flow of an inviscid non-heat conducting ideal gas in an axisymmetric channel of variable cross section. The

problem on the minimum of action for a steady flow is reduced to a variational problem on the minimum of the Lagrangian in an arbitrary cross section at a given flow rate. Using the obtained optimality condition, a marching method is constructed to derive the flow parameters and channel shape both downstream and upstream relative to a conditional initial section referred to as the "inlet" section, where the flow parameters and gas flow rate in the channel are preliminarily determined by specifying the slope of the streamlines. After this, the structure of the optimal (in accordance with the principle of least action) channel contour is numerically studied.

Keywords: ideal gas, principle of least action, variational problem, optimality condition (Euler equation), boundary extreme value, energy conservation law

For citation: Afonin, G.I. Afonin, A.G. (2025) The use of the principle of least action in a study of ideal gas flow in subsonic parts of a nozzle. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 79–92. doi: 10.17223/19988621/94/7

Введение

К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных теоретическому исследованию стационарных газодинамических внутренних течений (в соплах), основанных на решении уравнений в частных производных. Эти уравнения описывают смешанное течение, т.е. такое, в котором имеются области как дозвуковых, так и сверхзвуковых скоростей. Смешанный характер течения существенно усложняет численное решение системы уравнений, прежде всего из-за принципиального различия методов интегрирования систем гиперболического и эллиптического типов. Подробное изложение большинства имеющихся в настоящее время результатов как для равновесных, так и для неравновесных течений газа в соплах проведено в монографии [1].

Ниже рассматривается принцип наименьшего действия для стационарного потока невязкого, нетеплопроводного идеального газа (ИГ) в осесимметричном канале переменного сечения (КПС). Принцип наименьшего действия (ПНД) относится к интегральным вариационным принципам. Данный принцип утверждает, что истинным среди возможных кинематических движений системы тел между двумя ее положениями в моменты времени t_0 и t_1 является то, для которого среднее значение разности между кинетической и потенциальной энергией за данный промежуток времени будет величиной, самой малой из всех возможных [2]. ПНД показал высокую эффективность и универсальность в математических моделях физики [3]. Однако в гидродинамике он не получил должного развития и используется лишь как еще один способ получения известных уравнений движения для элемента жидкости единичной массы. В [2] подробно обсуждаются трудности применимости ПНД. Они заключаются, прежде всего, в определении двух видов энергии: кинетической и потенциальной. Преодолеть возникающие трудности удастся в случае, когда материальные точки в изолированной системе находятся под действием консервативных сил.

Здесь построение лагранжиана для определения действия и постановка вариационной задачи о минимуме действия проводятся так же, как это было сделано в работе [4] для идеальной несжимаемой жидкости. Полученное условие оптимальности совместно с уравнением движения для поперечной составляющей вектора скорости позволило построить эффективный маршевый метод расчета не

только параметров в до- и транзвуковой области течения, но одновременно и формы канала. Параметры определяются во всей области течения от начала на бесконечном удалении до сечения, где модуль вектора скорости всюду равен или больше скорости звука. Проведенные расчеты выявили необходимость рассмотрения вариационной задачи с краевым экстремумом. Так, в начальной области истечения рассматривалась вариационная задача с краевым экстремумом, когда часть сечения является линией тока. В транзвуковой области течения рассматривалось два случая: течение со скоростью звука, т.е. при постоянном давлении, и сверхзвуковое течение при заданном контуре транзвукового участка канала. Таким образом, было выяснено, что оптимальный контур состоит из трех участков: начального прямолинейного вертикального участка, участка двухстороннего экстремума (участок разворота течения) и участка краевого экстремума, который либо задается и в результате формируется сверхзвуковое течение в выходном сечении, либо происходит дальнейшее «распрямление» стенки канала до достижения скорости звука во всем сечении потока.

1. Принцип наименьшего действия

Рассмотрим стационарный поток невязкого, нетеплопроводного идеального газа в осесимметричном канале переменного сечения. Пусть x, y – прямоугольные координаты в меридиональной плоскости, ось x направлена по оси симметрии в сторону движения потока ИГ слева направо. Поток ИГ характеризуется показателем адиабаты k плотностью ρ , давлением p и вектором скорости $\mathbf{V} = (u, v)$.

Известно, что каждая единица массы ИГ при движении обладает энергией $\frac{u^2 + v^2}{2} + h$, где h – энтальпия. Для ИГ:

$$h = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}.$$

Энергия E потока газа с массовым расходом μ

$$\mu = 2\pi \int_0^{y_1} \rho u y dy \quad (1.1)$$

в сечении x (ортогональном оси симметрии) с ординатой контура канала $y_1(x)$ определяется выражением

$$E = 2\pi \left[\int_0^{y_1} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) \rho u y dy + \frac{k}{k-1} \int_0^{y_1} p u y dy \right]. \quad (1.2)$$

В стационарном случае для ИГ E постоянна. Выражение (1.2) представляет собой закон сохранения потока энергии для ИГ в КПС. В (1.2) первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию T потока ИГ, второе – энтальпию потока U . Следует заметить, что в механике и в принципе наименьшего действия при рассмотрении закона сохранения энергии пользуются терминами «кинетическая энергия» и «потенциальная энергия». Поэтому для второго члена в (1.2) в дальнейшем будем использовать термин «потенциальная энергия».

Проведя аналогичные рассуждения и действия, как и в [4] для потока несжимаемой жидкости, и перейдя к безразмерным параметрам p (давление), ρ (плотность), u и v (составляющие вектора скорости), которые отнесены параметрам затормо-

женного ИГ p_t , ρ_t и $u_c = \sqrt{2 p_t / \rho_t}$; x, y – к ординате стенки канала в условном начальном сечении, получим Лагранжиан

$$S = 2 \int_0^{y_1} \left(u^2 + v^2 - \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} \right) \rho u y dy. \quad (1.3)$$

Такое обезразмеривание при $k \rightarrow \infty$ для ИГ дает Лагранжиан несжимаемой жидкости [4]. Следует отметить, что расход (1.1) при принятых безразмерных величинах совпадает с коэффициентом расхода.

Минимум (1.3) в каждом сечении x обеспечивает и минимум действия $I = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$ на промежутке времени $[t_0, t_1]$.

Лагранжиан (1.3) в дальнейшем так же, как и в [4], будем называть действием. В (1.3) и далее параметры течения представляются только в безразмерном виде при тех же обозначениях.

Размерная скорость звука заторможенного газа a_t связана с размерной критической скоростью звука a_* и масштабом скорости u_c соотношениями

$$a_t^2 = k \frac{p_t}{\rho_t} = \frac{k+1}{2} a_*^2 = \frac{k}{2} u_c^2,$$

откуда для безразмерных a_t и a_* имеют место

$$a_t = \sqrt{0.5k}, \quad a_* = \sqrt{k/(k+1)}.$$

2. Постановка вариационной задачи в условном начальном сечении канала

Вариационная задача для функционала (1.3) с неизвестными функциями одной переменной $u(y)$, $v(y)$, $p(y)$ и $\rho(y)$ во входном сечении канала x_0 с ординатой стенки канала $y_1(x_0) = 1$ с ограничением в форме заданного расхода μ_0 ,

$$\mu_0 = 2 \int_0^1 \rho u y dy, \quad (2.1)$$

сводится к задаче на безусловный экстремум [6] функционала

$$I = 2 \int_0^1 \left(u^2 + v^2 - \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} - \lambda \right) \rho u y dy,$$

где $\lambda = \text{const}$ – множитель Лагранжа.

Воспользуемся уравнением Бернулли в безразмерном виде:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + u^2 + v^2 = \frac{k}{k-1}, \quad (2.2)$$

и упростим выражение для I . В результате получим

$$I = 2 \int_0^1 \left(2(u^2 + v^2) - \frac{k}{k-1} - \lambda \right) \rho u y dy. \quad (2.3)$$

Учитывая условие изоэнтропичности ИГ (в безразмерном виде)

$$p = \rho^k, \quad (2.4)$$

из (2.2), получим соотношение для плотности ρ в виде:

$$\rho = \left[1 - \frac{k-1}{k} (u^2 + v^2) \right]^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2.5)$$

В (2.3) и далее для плотности ρ следует иметь в виду выражение (2.5).

Подынтегральная функция в (2.3) имеет вид:

$$F(y, u, v) = \left[2(u^2 + v^2) - \frac{k}{k-1} - \lambda \right] \rho u v.$$

Отсюда следуют следующие два уравнения Эйлера [5] для функций $u(y)$ и $v(y)$:

$$\left(6u^2 + 2v^2 - \frac{k}{k-1} - \lambda \right) \rho + \left[2(u^2 + v^2) - \frac{k}{k-1} - \lambda \right] u \frac{\partial \rho}{\partial u} = 0, \quad (2.6a)$$

$$4v\rho + \left[2(u^2 + v^2) - \frac{k}{k-1} - \lambda \right] u \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0. \quad (2.6b)$$

Частные производные от ρ находятся из (2.5):

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = -\frac{2}{k} \frac{\rho}{\rho^{k-1}} u, \quad \frac{\partial \rho}{\partial v} = -\frac{2}{k} \frac{\rho}{\rho^{k-1}} v. \quad (2.7)$$

Подставляя в уравнение (2.6a) соотношения (2.5) и (2.7), получим

$$\begin{aligned} & 2 \frac{3k-1}{k} u^4 - \left(\frac{7k-5}{k-1} + \frac{k+1}{k} \lambda - 4 \frac{2k-1}{k} v^2 \right) u^2 + \\ & + 2 \frac{k-1}{k} v^4 - \frac{3k+(k-1)\lambda}{k} v^2 + \frac{k}{k-1} + \lambda = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из уравнения (2.6b) следует соотношение $v = 0$. С учетом этого (2.8) упрощается и дает уравнение для определения скорости на оси симметрии u_0 во «входном» сечении канала:

$$2 \frac{3k-1}{k} u_0^4 - \left(\frac{7k-5}{k-1} + \frac{k+1}{k} \lambda \right) u_0^2 + \frac{k}{k-1} + \lambda = 0. \quad (2.9)$$

Это уравнение, преобразованное относительно λ , становится значительно нагляднее и удобнее для расчетов:

$$\left(\frac{k+1}{k} u_0^2 - 1 \right) \lambda = 2 \frac{3k-1}{k} u_0^4 - \frac{7k-5}{k-1} u_0^2 + \frac{k}{k-1}. \quad (2.10)$$

Вся совокупность возможных течений в канале определяется дозвуковой скоростью ИГ $0 \leq u_0 \leq \sqrt{k/(k+1)}$ в сечении «входа», при этом для λ из (2.10) следует $k/(1-k) \leq \lambda \leq \infty$. Максимальный расход μ_{0m} реализуется при скорости $u_{0m} = \sqrt{k/(k+1)}$.

3. Течение в канале с бесконечно медленным изменением площади поперечного сечения

Рассмотрим поставленную выше вариационную задачу в сечении входа в канал для произвольного сечения канала x с ординатой стенки $y_1(x)$. Вспомогательный функционал для этой задачи имеет следующий аналогичный (2.3) вид:

$$I = 2 \int_0^{y_1} \left(2(u^2 + v^2) - \frac{k}{k-1} - \lambda \right) \rho u v dy. \quad (3.1)$$

Из (3.1) видим, что подинтегральные функции вспомогательных функционалов (2.3) и (3.2) совпадают. В связи с этим условия оптимальности для функционала (3.1) совпадают с условиями оптимальности (2.8) и $v = 0$ для функционала (2.3). Следует иметь в виду, что если ранее (см. разд. 2) во «входном» сечении заданием λ определялись скорость на оси симметрии u_0 (и наоборот) и расход μ_0 , то здесь в каждом сечении x с ординатой стенки $y_1(x)$ с помощью λ обеспечивается условие выполнения равенства расхода μ расходу в сечении «входа» μ_0 .

Таким образом, видим, что при отсутствии ограничений на скорости u и v минимальное действие реализуется в канале с бесконечно медленным изменением площади поперечного сечения при монотонном изменении скорости потока.

Соотношение (2.10) показывает изменение λ от скорости u_0 потока ИГ на оси. Так, в начальной области истечения (область до сечения «входа») скоростям в диапазоне $0 \leq u_0 \leq a_* = \sqrt{k/(k+1)}$ соответствует $k/(1-k) \leq \lambda \leq \infty$. Для сверхзвукового течения в расширяющейся части канала, где $a_* \leq u_0 \leq \sqrt{k/(k-1)}$, из (2.10) следует, что $-\infty \leq \lambda \leq k/(k-1)$.

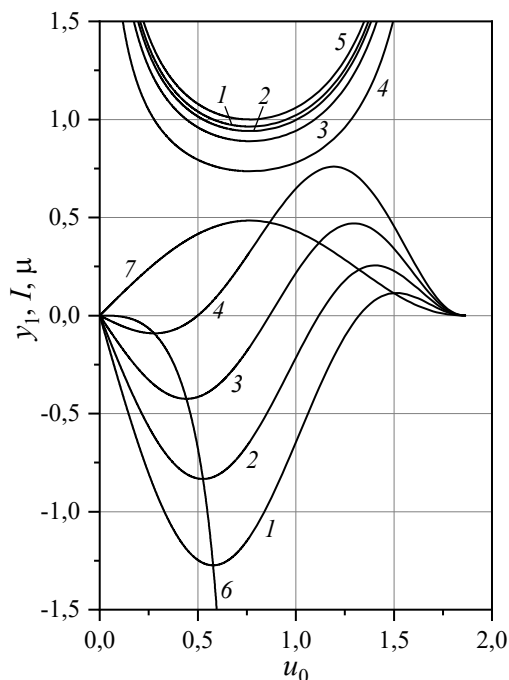


Рис. 1. Профили канала при разных λ (верхние сплошные кривые 1–5); соответствующие $I(u_0)$ – нижние сплошные кривые 1–4; 6 – положения минимумов функционала $I(u_0)$ в сечении «входа»; 7 – μ_0

Fig. 1. Channel profiles for various λ (upper solid curves 1–5) and the corresponding $I(u_0)$ (lower solid curves 1–4); curve 6, positions of the minima of the functional $I(u_0)$ in the “inlet” section; curve 7, the flow rate in the “inlet” section μ_0

На рис. 1 показаны профили каналов с бесконечно медленным изменением площади сечения для течения ИГ ($k = 1.4$). Кривая 1 соответствует $\lambda = 0$ ($\mu \approx 0.4498$), кривая 2 – $\lambda = -1$ ($\mu \approx 0.4284$), 3 – $\lambda = -2$ ($\mu \approx 0.3829$), 4 – $\lambda = -3$ ($\mu \approx 0.2623$), 5 – $\lambda = \infty$ ($\mu \approx 0.4842$). Соответствующие изменения функционала (2.3) показаны кривыми с номерами 1–4 в нижней части рисунка. Кривая 6 представляет собой положения минимумов функционала (2.3) в сечении «входа» для различных λ . Кривая 7 – это совокупность возможных расходов в сечении «входа» при изменении λ ($-3.5 < \lambda < \infty$).

4. Определение параметров течения в условном начальном сечении

Рассмотрим в некотором произвольном сечении x канала вариационную задачу о минимуме функционала (3.2), считая при этом $v(y)$ известной функцией. Для данной постановки задачи из (2.6) видим, что остается только условие оптимальности для $u(y)$ в виде (2.8). Возможность нахождения скорости $u(y)$ из (2.8) в сечении «входа» при известной скорости $v(y)$ позволяет определить расход μ в канале, давление и плотность. Задавая во «входном» сечении канала тангенс угла наклона линий тока $y'(y)$ (далее просто наклон), исключая при этом скорость $v = y'u$ из (2.8), получим следующее уравнение для определения продольной скорости $u(y)$ в сечении «входа»:

$$\left(2 \frac{3k-1}{k} + 4 \frac{2k-1}{k} (y')^2 + 2 \frac{k-1}{k} (y')^4\right) u^4 - \left(-\frac{7k-5}{k-1} + \frac{k+1}{k} \lambda + \frac{3k+(k-1)\lambda}{k} (y')^2\right) u^2 + \frac{k}{k-1} + \lambda = 0. \quad (4.1)$$

Из (4.1) видим, что при заданном распределении наклона линий тока y' расход μ является функцией λ . Для того, чтобы определить возможный диапазон изменения λ , необходимо рассмотреть предельный случай, когда на стенке канала при наклоне $y'_1(x_0)$ в сечении «входа» модуль вектора скорости равен критической скорости звука, т.е. $\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{k/(k+1)} = a_*$. Из этого условия в сечении «входа» на стенке канала для предельной скорости u_{1m} следует

$$u_{1m} = \sqrt{\frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{1+(y'_1)^2}}. \quad (4.2)$$

Для определения предельного $\lambda_m(y'_1)$ из (4.1) при условии (4.2) следует уравнение

$$\left(2 \frac{3k-1}{k} + 4 \frac{2k-1}{k} (y'_1)^2 + 2 \frac{k-1}{k} (y'_1)^4\right) u_{1m}^4 - \left(-\frac{7k-5}{k-1} + 3(y'_1)^2\right) u_{1m}^2 + \frac{k}{k-1} = -\frac{2}{k+1} \frac{(y'_1)^2}{1+(y'_1)^2} \lambda_m. \quad (4.3)$$

Из (4.3) видим, что λ_m не зависит от задания закона распределения наклона линий тока $y'(y)$. Таким образом, для λ следует $k/(1-k) \leq \lambda \leq \lambda_m$. Для $y'_1 = 0$ изменение λ , как было показано выше, определяется неравенством $k/(1-k) \leq \lambda \leq \infty$. Для расхода при $k=1.4$ следует $0 \leq \mu \leq 0.4842$. При $y'_1 \rightarrow -\infty$ $u_{1m} \rightarrow 0$, $\lambda_m \rightarrow k(k-3)/(k^2-1)$, и для $k=1.4$ $\lambda_m \rightarrow -2.33(3)$. Уравнение (2.9) при $\lambda_m = k(k-3)/(k^2-1)$ преобразуется к виду:

$$\frac{3k-1}{k}u_{0m}^4 - 4u_{0m}^2 + \frac{k}{k+1} = 0.$$

Отсюда следует выражение для предельной скорости на оси симметрии канала u_{0m} :

$$u_{0m} = \sqrt{\frac{k}{3k-1} \left(2 - \sqrt{\frac{k+5}{k+1}} \right)}. \quad (4.4)$$

На рис. 2 представлены предельные значения параметров возможных решений при изменении y'_1 . Кривая 1 – u_{0m} получено согласно (2.9) при условиях (4.2) и (4.3), 2 – скорость u_{1m} согласно (4.2), 3 – скорость $v_{1m} = y'_1 u_{1m}$, 4 – λ_m , 5 – μ_m , 6 – S_m .

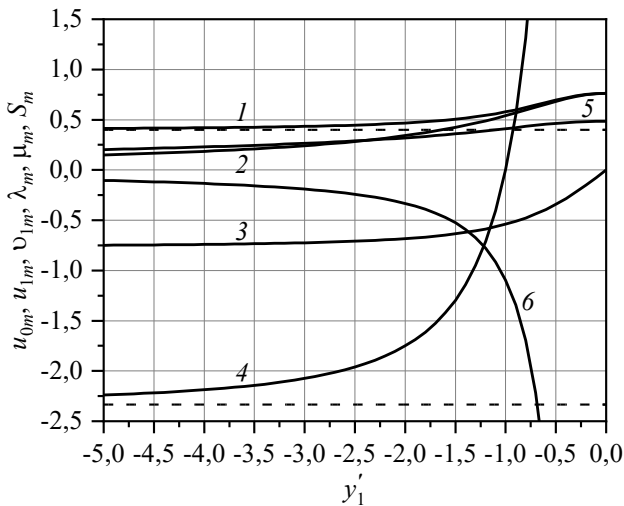


Рис. 2. Предельные значения параметров возможных решений при изменении y'_1

Fig. 2. Limit values of the parameters of possible solutions at various y'_1

На рис. 3 представлены все возможные решения $\mu = \mu(u_0)$ для линейного закона распределения наклона линий тока: $y'(y) = y'_1 y$. Сплошная кривая 1 построена для $y'_1 = 0$, 2 – для $y'_1 = -1$, 3 – для $y'_1 = -2$, 4 – $y'_1 = -5$. Пунктирные линии соответствуют тем же значениям y'_1 , для квадратичного закона распределения наклона: $y'(y) = y'_1 y^2$. Кроме этих кривых на рис. 3 представлены их огибающие μ_m для всего диапазона изменения y'_1 ($0 \leq y'_1 < \infty$). Пунктирными прямыми отмечены

максимальное значение μ , соответствующее $y'_1 = 0$ и критическому значению модуля скорости.

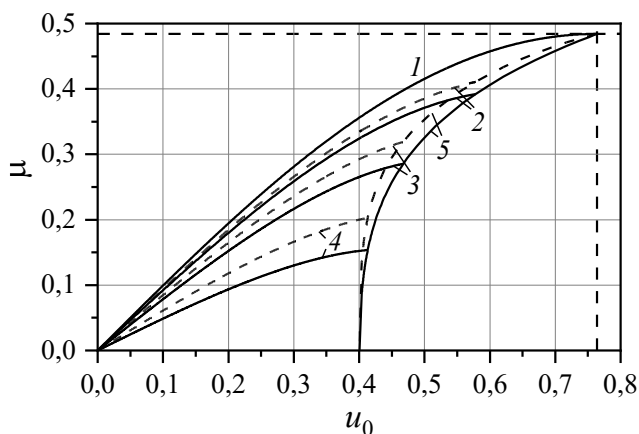


Рис. 3. $\mu = \mu(u_0)$ для линейного и квадратичного законов распределения наклона линий тока
Fig. 3. $\mu = \mu(u_0)$ for the linear and quadratic laws of the streamline slope distribution

5. Определение формы канала дозвукового течения

Система уравнений для нахождения параметров потока в сечениях канала ниже «входного» состоит из уравнения (2.8) для скорости u , уравнения для линии тока

$$uy' - v = 0 \quad (5.1)$$

и уравнения для определения скорости v на линиях тока

$$uv' + \frac{p_y}{2\rho} = 0, \quad (5.2)$$

где $v' = \frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{u} \frac{\partial v}{\partial y}$. Плотность определяется согласно (2.5), а давление находится из (2.4).

Проведение расчета течения с помощью этих уравнений показало, что в рамках данной вариационной задачи существует два типа краевого экстремума. Первый – когда в части рассматриваемого сечения имеет место дозвуковое течение ИГ, и к нему примыкает часть краевого экстремума, где модуль вектора скорости на всех линиях тока равен скорости звука. Второй тип краевого экстремума соответствует части сечения, примыкающей к заданной стенке канала, где поток движется со сверхзвуковыми скоростями.

Рассмотрим крайевой экстремум, когда модуль вектора скорости на линии тока достигает скорости звука и дальнейшее движение вдоль линии тока происходит при постоянной скорости и постоянном давлении. Первый раз это происходит на стенке контура. Часть сечения со звуковым течением ИГ монотонно увеличивается при приближении скорости потока на оси u_0 к скорости звука и, когда $u_0 = a$, становится равной всему сечению. Таким образом, в выходном сечении формируется поток ИГ, который движется параллельно оси симметрии со скоростью звука $u = a$.

Условие оптимальности (2.8) в области краевого экстремума дает уравнение для определения скорости v

$$\left(\frac{3k-1}{k-1} + \frac{k+1}{k} \lambda \right) v^2 = \frac{4k}{k+1}. \quad (5.3)$$

Из (5.3) видим, что на отрезке краевого экстремума при звуковом течении скорость v постоянна.

Другой краевой экстремум требует задания контура канала для того, чтобы формировать область сверхзвуковых скоростей. Причем следует отметить, что он не должен пересекать контур канала, который получен при условии $u^2 + v^2 = a^2$. Понятно, что в этом случае вместо соотношения (2.8) необходимо использовать уравнение движения для скорости u . Определение параметров на участке краевого экстремума ведется методами расчета сверхзвуковых течений, в данном случае удобно использовать обратный метод характеристик.

При определении параметров потока вверх от «входного» сечения канала система уравнений остается неизменной. Здесь, также как и в [4], возникает необходимость рассмотрения вариационной задачи с краевым экстремумом. Расчет параметров потока в области краевого экстремума осуществляется следующим образом из соотношения (2.8) на границе $\bar{y}$ ($u = 0$) следует

$$2 \frac{k-1}{k} \bar{v}^4 - \frac{3k+(k-1)\lambda}{k} \bar{v}^2 + \frac{k}{k-1} + \lambda = 0. \quad (5.4)$$

Далее плотность $\bar{\rho}$ определяется из (2.5). Параметры потока ρ и v в области краевого экстремума определяются (вдоль линии тока) из соотношений

$$\begin{aligned} \rho^2 (1 - \rho^{k-1}) &= \frac{k-1}{k} \left(\frac{\bar{\rho} \bar{v} \bar{y}}{y} \right)^2 \\ v &= \frac{\bar{\rho} \bar{v} \bar{y}}{\rho y}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Численный расчет течения вверх от сечения «входа» осуществляется таким образом, что при достижении начала первого краевого экстремума для линии тока соответствующей стенки контура $u_N = 0$. Далее расчет продолжается и ведется последовательно для всех линий тока от $i = (N-1)$ до достижения $u_i = 0$ при условии выполнения для каждого соответствующего коэффициента расхода μ_i . Начало области краевого экстремума x_0 находится путем интерполяции вдоль границы $\bar{y}_i(x_i)$ на ось симметрии.

На рис. 4 для канала с линейным распределением наклона линий тока в сечении «входа» $y' = y'_1 y$ ($y'_1 = -0.5$) представлены линии тока. Пунктирные линии показывают границы начала области крайевых экстремумов и линию тока (вертикальная линия), которую можно считать границей между неподвижной областью постоянного давления (слева) и движущимся потоком (справа). Характерным для области краевого экстремума первого типа является резкое «распрямление» линий тока, которое связано с торможением потока в том смысле, что ускоренное движение в этой области переходит в движение без ускорения.

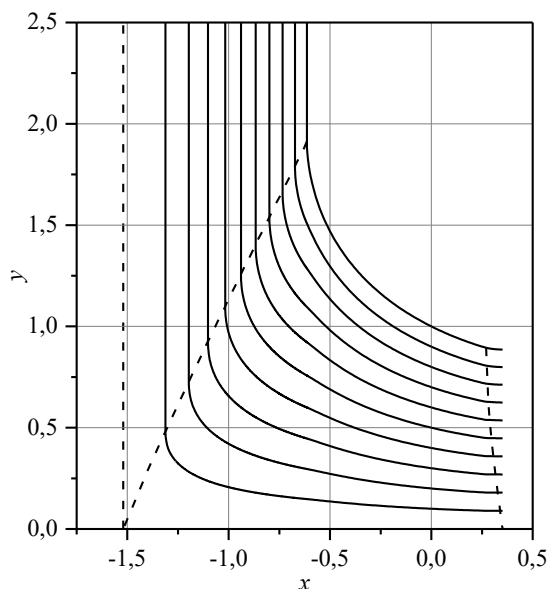


Рис. 4. Линии тока в канале с $y'_1 = -0.5$

Fig. 4. Streamlines in the channel at $y'_1 = -0.5$

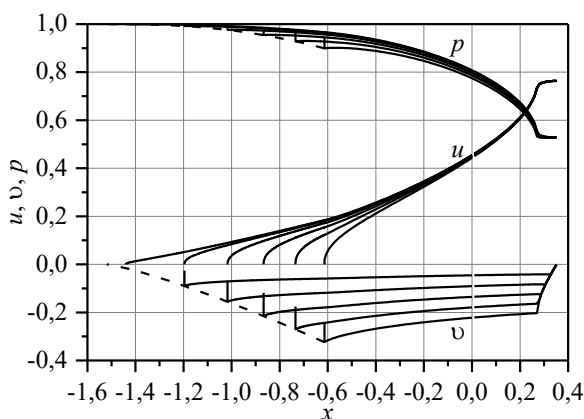


Рис. 5. Параметры течения u , v и p вдоль линий тока

Fig. 5. Velocities u , v and pressure p along the streamlines

На рис. 5 представлены параметры течения u , v и p на линиях тока. Вертикальные прямолинейные участки соответствуют краевому экстремуму $u = 0$. Из рисунка видим, что наибольшее влияние краевой экстремум $u^2 + v^2 = a^2$ оказывает на скорость v , так на граничной линии тока она изменяется от -0.2 до нуля при постоянном давлении и практически неизменной скорости u .

На рис. 6 в различных поперечных сечениях канала представлены скорости u , v . В положительной полуплоскости показаны продольные составляющие u . Пунктирная линия показывает изменение u в сечении, где на стенке канала $u = 0$. Ниже

этой линии показаны изменения u в сечениях, где часть сечения соответствует крайнему экстремуму $u = 0$.

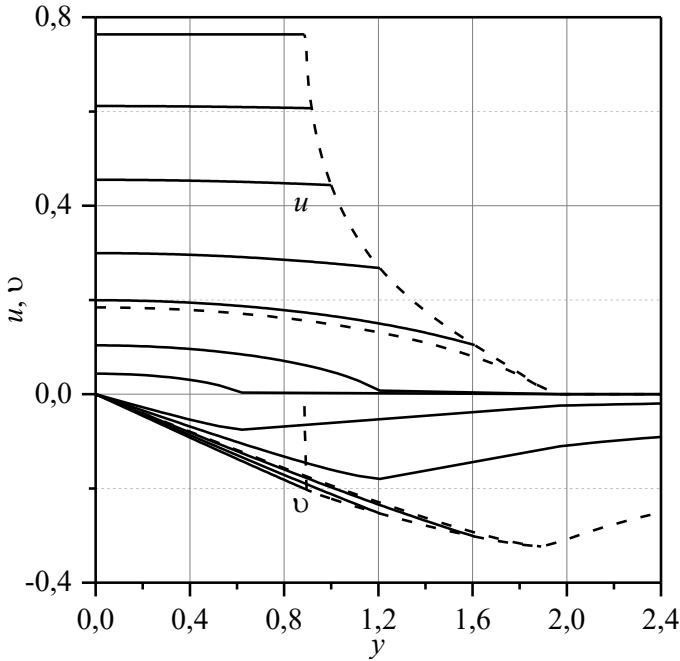


Рис. 6. Скорости u, v в различных сечениях канала
Fig. 6. Velocities u, v in different sections of the channel

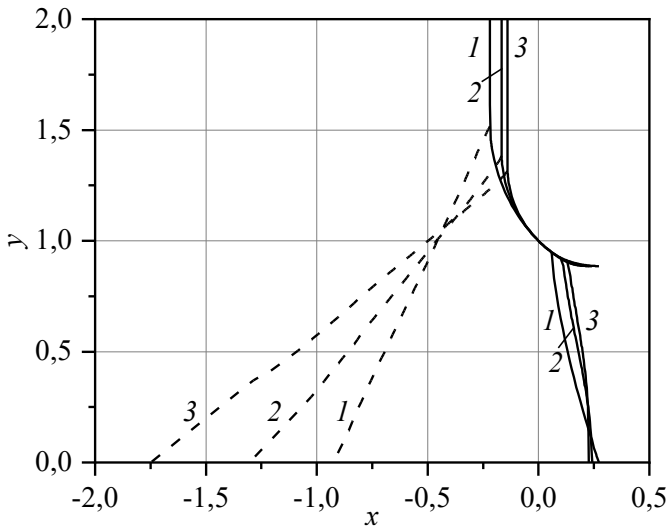


Рис. 7. Области движения ИГ ($y'_1 = -1$): 1 – $y' = y'_1 y$, 2 – $y' = y'_1 y^2$, 3 – $y' = y'_1 y^3$
Fig. 7. Areas with moving ideal gas ($y'_1 = -1$): $y' = (1) y'_1 y$, (2) $y'_1 y^2$, and (3) $y'_1 y^3$

В отрицательной полуплоскости показаны поперечные составляющие вектора скорости v в тех же сечениях, что и скорости u . Нижняя пунктирная кривая показывает изменение v вдоль контура. Практически вертикальный участок этой кривой – это зона действия краевого экстремума $u^2 + v^2 = a^2$, где v определяется из (5.3). Кривые после излома показывают изменение v на вертикальном участке линий тока, где v определяется из (5.5). В бесконечно удаленной точке согласно (5.4) эта скорость достигает нуля.

На рис. 7 представлены три области истечения ИГ с одинаковым значением $y'_1 = -1$. В канале 1 наклон линий тока изменяется по закону $y' = y'_1 u = -u$, в канале 2 – по закону $y' = y'_1 u^2 = -u^2$, в канале 3 – по закону $y' = y'_1 u^3 = -u^3$. Видим, что чем выше нелинейность y' , тем больше расход ИГ и больше область движущегося потока.

Заключение

Основываясь на утверждении, что управление движением тел (в данном случае жидкости или газа) осуществляется двумя экспериментальными законами: законом сохранения энергии и ПНД, – удалось построить законченную модель течения идеального газа в КПС в смысле нахождения его параметров и формы канала от бесконечно удаленной области торможения до достижения сверхзвуковых скоростей потока. Условие оптимальности вариационной задачи о минимуме действия стационарного потока ИГ в КПС положено в основу метода определения параметров течения и формы канала. Численное исследование структуры оптимального контура, проведенное данным методом, показало наличие краевых экстремумов: область краевого экстремума со звуковым течением в итоге дает плоскую переходную поверхность, если же рассматривается область краевого экстремума со сверхзвуковым течением, то задается контур канала и условие оптимальности заменяется уравнением движения для продольной составляющей вектора скорости. В дозвуковой области течения краевой экстремум представляет собой границу области вертикального движения идеального газа.

Знание структуры оптимального контура расширяет возможности при проектировании до- и трансзвуковой части сопла с заданными геометрическими параметрами и заданным расходом газа.

Список источников

1. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Газовая динамика сопел. М.: Наука, 1990. 364 с.
2. Пуанкаре А. Наука и гипотеза. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 235 с.
3. Полак Л.С. Вариационные принципы механики. Их развитие и применение в физике. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 600 с.
4. Афонин Г.И. К вопросу о принципе наименьшего действия при течении несжимаемой жидкости в осесимметричном канале переменного сечения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 73–86. doi: 10.17223/19988621/81/7
5. Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. СПб.: Лань, 2009. 320 с.

References

1. Pirumov U.G., Roslyakov G.S. (1990) *Gazovaya dinamika v soplakh*. [Gas dynamics in nozzles]. Moscow: Nauka.
2. Poincare A. (1905) *Science and Hypothesis*. London: Walter Scott Publishing.
3. Polak L.S. (2010) *Variatsionnye printsipy mekhaniki. Ikh razvitie i primeneniye v fizike* [Variational principles of mechanics. Their development and application in physics]. Moscow: LIBROKOM.
4. Afonin G.I. (2023) *K voprosu o printsipe naimen'shego deystviya pri techenii neszhimaemoy zhidkosti v osesimmetrichnom kanale peremennogo secheniya* [On the principle of least action in terms of incompressible fluid flow in a channel of variable cross-section]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 73–86. doi: 10.17223/19988621/81/7
5. Günther N.M. (2009) *Kurs variatsionnogo ischisleniya* [A course in the calculus of variations]. Saint Petersburg: Lan'.

Сведения об авторах:

Афонин Геннадий Иванович – кандидат физико-математических наук, сотрудник отдела математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: agi@niipmm.tsu.ru

Афонин Антон Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, сотрудник отдела математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: aag@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Afonin Gennadiy I. (Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: agi@niipmm.tsu.ru

Afonin Anton G. (Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aag@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 15.10.2024; принята к публикации 10.04.2025

The article was submitted 15.10.2024; accepted for publication 10.04.2025

Научная статья

УДК 539.3+551.24

doi: 10.17223/19988621/94/8

Оценка напряженно-деформированного состояния участков литосферы и верхних слоев земной коры на территории Баженовской свиты на основе многоуровневого численного моделирования

Аян Ахметов¹, Игорь Юрьевич Смолин²

*^{1, 2} Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения
Российской академии наук, Томск, Россия*

¹ ayan.akhmetov93@gmail.com

² smolin@ispms.ru

Аннотация. Статья посвящена анализу напряженно-деформированного состояния участков литосферы и верхних слоев земной коры в нефтегазовых районах Западной Сибири. В качестве объектов исследования выбраны двумерные компьютерные модели структур нефтегазовых областей Баженовской свиты на основе геологического профиля «Рубин–2–1990». Для расчета распределений неупругой деформации и напряжений применена модель упругопластической среды Друкера–Прагера–Николаевского, для определения параметров которой использована модель напряженного состояния континентальной литосферы *cratonic jelly sandwich*. Показано, что зоны локализации пластической деформации и положительных значений горизонтальных напряжений соответствуют местоположениям ловушек углеводородов и залежей нефти и газа.

Ключевые слова: численное моделирование, Баженовская свита, упругопластическая среда, геологический профиль «Рубин–2–1990», литосфера, земная кора, напряженно-деформированное состояние

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01086, <https://rscf.ru/project/23-71-01086/>

Для цитирования: Ахметов А., Смолин И.Ю. Оценка напряженно-деформированного состояния участков литосферы и верхних слоев земной коры на территории Баженовской свиты на основе многоуровневого численного моделирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 93–108. doi: 10.17223/19988621/94/8

Evaluation of the stress-strain state of the lithosphere sections and upper layers of Earth's crust in the Bazhenov Suite based on multi-scale numerical modeling

Ayan Akhmetov¹, Igor' Yu. Smolin²

^{1,2} *Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation*

¹ *ayan.akhmetov93@gmail.com*

² *smolin@ispms.ru*

Abstract. This paper presents the results of multiscale numerical modeling of the stress-strain state of the lithosphere sections and upper crustal layers in one of the West Siberian Plate regions containing oil and gas deposits. Two-dimensional computer models of the structure of lithosphere sections and upper crustal layers of the Bazhenov Suite's oil and gas areas based on the Rubin–2–1990 geologic profile were selected as the objects of research. To calculate the inelastic deformation and stress fields in the lithosphere and crust, the model of elastic-plastic medium with Drucker-Prager-Nikolaevsky yield criterion and plastic potential was used. Constitutive equation parameters for the structurally inhomogeneous lithosphere were determined from the geologic profile data and the cratonic jelly sandwich strength model applicable to the continental lithosphere. Calculations at different scales show that zones of inelastic deformation localization and positive horizontal stresses are concentrated in the upper layers of Earth's crust, where faults and damages are located according to geophysical data. These areas correspond to the locations of hydrocarbon traps and oil and gas deposits in the Bazhenov Suite. The results of this study may be useful for geologists and geophysicists who study the processes of mineral formation in Earth's crust.

Keywords: numerical modeling, Bazhenov Suite, elastoplastic medium, “Rubin–2–1990” geological profile, lithosphere, Earth's crust, stress-strain state

Acknowledgments: This study was financially supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-71-01086), <https://rscf.ru/en/project/23-71-01086/>

For citation: Akhmetov, A., Smolin, I.Yu. (2025) Evaluation of the stress-strain state of the lithosphere sections and upper layers of Earth's crust in the Bazhenov Suite based on multi-scale numerical modeling. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 93–108. doi: 10.17223/19988621/94/8

Введение

В настоящее время одной из фундаментальных задач в науках о Земле является оценка деформационных процессов в литосфере. Структура земной коры и верхней мантии очень неоднородна из-за активных геодинамических процессов, которые постепенно изменяют облик Земли. Следствие данных процессов – возникновение землетрясений, оползней, обвалов и т.д., а также месторождений полезных ископаемых в определенных регионах [1]. Прогноз опасных геодинамических процессов с целью возможного предотвращения их губительных последствий, а также

условий образования ловушек углеводородов с целью выявления потенциальных областей их месторождений основан в том числе и на знании напряженно-деформированного состояния верхних слоев земной коры.

Современный уровень развития вычислительной техники, численных методов, физических представлений и моделей сделал возможным исследование напряженно-деформированного состояния участков литосферы с помощью компьютерного моделирования на разных масштабных уровнях. Можно отметить следующие достижения в развитии данного научного направления. На основе численного исследования напряженно-деформированного состояния земной коры на разных масштабных уровнях исследованы эволюции полей пластической деформации и напряжений в слоях земной коры, выполнено сопоставление зон локализации неупругой деформации и пониженного горного давления с местами расположения залежей нефти, газа и золота, тем самым представлены подтверждения одного из механизмов зарождения полезных ископаемых в слоях консолидированной земной коры [2, 3]. С развитием фундаментальных наук о Земле и накоплением экспериментальных данных на основе геолого-геофизических изысканий удалось создать теоретические представления о составе элементов литосферы, изучить механизмы возникновения и процессы развития сложных геотектонических процессов, таких как коллизия, спрединг, надвиги и растяжения. При этом активная компьютеризация получения численных и экспериментальных данных позволила детально и скрупулезно оценить физико-химические изменения структуры литосферы в ходе глобальных и локальных геодинамических процессов [4, 5].

Согласно современным представлениям геологии, наиболее вероятными местами для поиска залегающих нефти и газа видятся районы разломов, разрывов и поврежденностей в верхних слоях земной коры. Для выявления действительных месторождений углеводородов необходимо скомбинировать знания геологии, геофизики, тектонофизики и механики деформируемого твердого тела. Так, в работах Ю.П. Стефанова, Ю.Л. Ребецкого, М.С. Леонова представлены результаты разносторонних исследований возникновения крупных семейств разломов на разных участках земной коры, в которых с течением времени могут формироваться скопления полезных ископаемых в силу наличия пустот и ловушек [2, 3, 6, 7].

В условиях сложной геодинамической ситуации на территории Западно-Сибирской плиты выявлены крупные семейства разломов, новейшие структурные разрывы, в которых были найдены залежи нефти и газа. Особое место на территории Сибири занимает Баженовская свита, которая в настоящее время рассматривается как главный потенциальный источник трудноизвлекаемых нефтегазовых запасов [8–10]. Поэтому в качестве объекта исследования настоящей работы были выбраны регионы, относящиеся к Баженовской свите, на территории которых прогнозируются залежи нефти и газа. Заметим, что напряженно-деформированное состояние литосферы в этих регионах до сих пор детально не исследовано. В силу этого результаты изучения напряженно-деформированного состояния участков литосферы разной мощности в данном регионе имеют важное научно-техническое значение.

Для исследования структурно-неоднородных материалов и сред в последние десятилетия плодотворно применяется многоуровневый подход. Он позволяет изучить влияние особенностей иерархически организованной структуры различных конструкционных и функциональных материалов, а также геологических сред

на развитие процессов их неупругого деформирования и разрушения. Литосфера имеет сложную структуру, в которой кроме очевидных слоев земной коры и верхней мантии также выделяются блоки разных размеров. В связи с этим применение многоуровневого моделирования для такого объекта является предпочтительным.

Целью данной работы стала попытка выявления расположений ловушек углеводородов и залежей нефти и газа на основе анализа напряженно-деформированного состояния участков литосферы и верхних слоев земной коры вдоль геологического профиля «Рубин–2–1990» по результатам численного моделирования.

Структурные модели геологических областей Западно-Сибирской плиты

На основе геолого-геофизических исследований на территории Сибири в годы позднего СССР были получены в том числе геофизические данные профиля «Рубин–2–1990», который проходит по интересующему нас региону [11]. На рис. 1 представлено расположение геологического профиля, а черным прямоугольником выделена область, в которой выявлены основные нефтегазовые залежи.

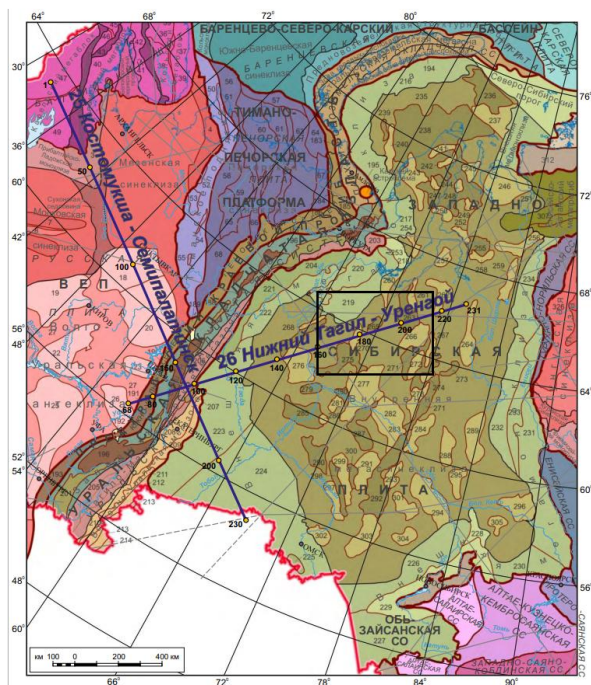


Рис. 1. Положение геологического профиля «Рубин–2–1990» на территории Западно-Сибирской плиты

Fig. 1. Location of the “Rubin–2–1990” geological profile in the West Siberian Plate

Для учета в расчетах блочно-слоистой структуры литосферы необходимо создать структурные модели исследуемых областей. В ходе выполнения государственного проекта в годы позднего СССР на территории Сибири крупными научными группами были исследованы глубинные структуры литосферы [12]. Результаты

этих исследований на территории Западно-Сибирской плиты позволяют строить компьютерные модели блочно-слоистой структуры элементов литосферы для выбранного геологического профиля. На рис. 2, а представлена часть геологического профиля «Рубин–2–1990» с такими геофизическими данными, как скорости продельных и поперечных волн, расположение границы кристаллического фундамента и границы Мохо, которая является границей раздела земной коры и мантии, геологические обозначение рек и т.д., необходимыми для создания компьютерных моделей глубинной геологической структуры выбранного региона [11]. На основе указанных геофизических данных для геологического профиля «Рубин–2–1990» была построена подробная слоисто-блочная компьютерная модель структуры участка литосферы, показанная на рис. 2, б, которая разделена на серию блоков с разными толщинами и физическими свойствами, объединенных в слои.

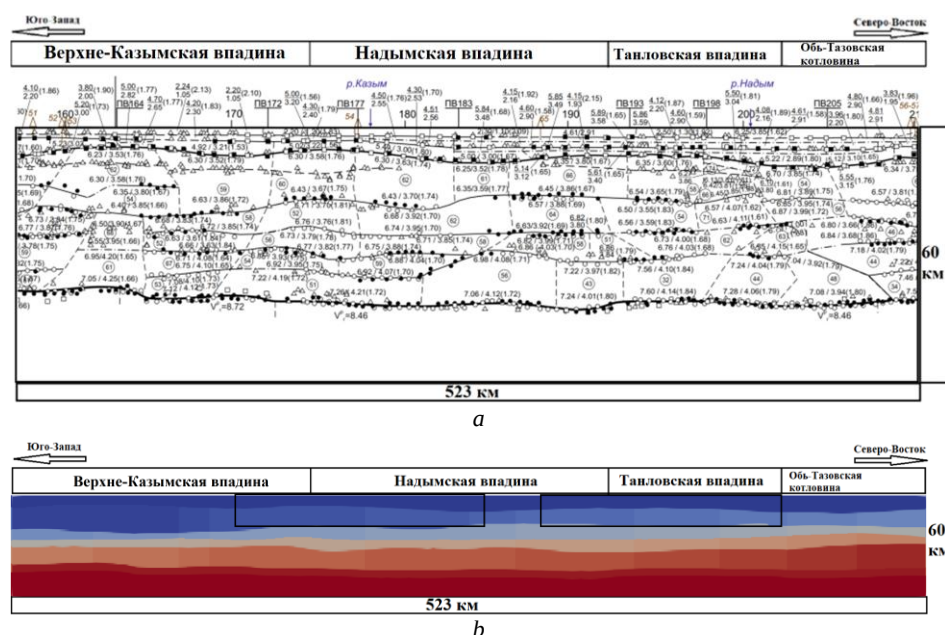


Рис. 2. Часть геологического профиля «Рубин–2–1990» с геофизическими данными (а) и полученная на его основе двумерная компьютерная модель участка литосферы на территории Западно-Сибирской плиты (б)

Fig. 2. (a) Part of the “Rubin–2–1990” geological profile with geophysical data and (b) two-dimensional computer model of the part of the lithosphere in the West Siberian Plate

Слои на рисунке имеют разный цвет, а блоки внутри слоев – разную интенсивность цвета. Особенность данного профиля – подробное описание слоев осадочного чехла и наличие блочной структуры, отражающее неравномерное распределение физических свойств геосреды. Верхний слой земной коры, охватывающий осадочный слой и кристаллический фундамент, лежит на глубине 10–12 км, а граница Мохо расположена на глубине 37–40 км.

Построенная компьютерная модель структуры части профиля «Рубин–2–1990» простирается от северо-востока до юго-запада Западной Сибири, имеет протяженность 523 км и глубину 60 км. Она пересекает такие геологические области, как

Верхне-Казымская впадина, Надымская впадина, Обь-Тазовская котловина и Тавловская впадина. Представленные области находятся на территории нефтегазовых залежей Западно-Сибирской плиты.

В рамках многоуровневого исследования необходимо также построить более подробные модели меньшего размера, являющиеся частями общей крупной модели (модели верхнего структурного уровня). Данные области выделены черными прямоугольниками на рис. 2, *b*. Эти модели можно назвать моделями структурного мезоуровня. В результате геологического обследования нефтегазовых регионов, через которые проходит выбранный участок геологического профиля, было выбрано два участка для построения структурных моделей верхних слоев земной коры (осадочного чехла и верхней части кристаллического фундамента) глубиной 20 км и меньшей протяженностью, в которых наблюдаются залежи нефти и газа [13]. Они представлены на рис. 3.

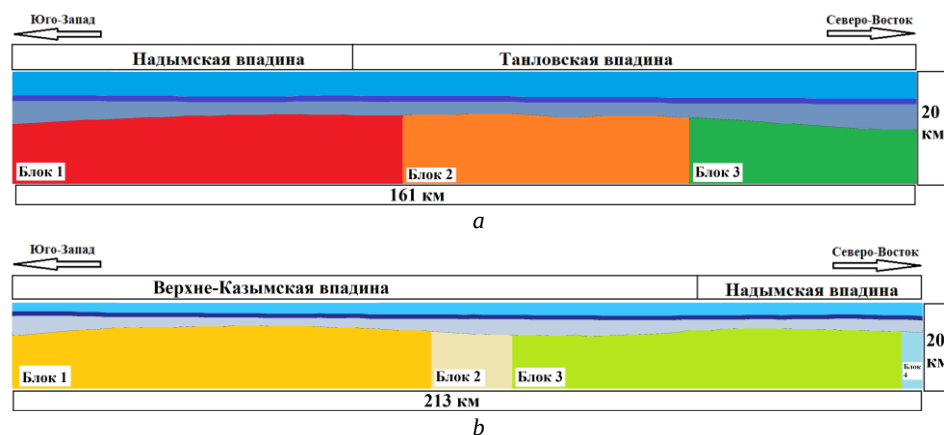


Рис. 3. Структурные модели мезоуровней верхних слоев земной коры: М-1 (*a*) и М-2 (*b*)

Fig. 3. Meso-scale structural models of the upper layers of Earth's crust: (a) M-1 and (b) M-2

Особенность представленных моделей заключается в том, что согласно геофизическим данным геологического профиля «Рубин–2–1990» осадочный слой разделен на серию слоев, а кристаллический фундамент представлен одним слоем, разделенным на серию блоков. При этом каждый из элементов земной коры имеет индивидуальные физические свойства, представленные в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Плотность и упругие свойства верхних слоев земной коры модели М-1

	Осадочный слой 1	Осадочный слой 2	Осадочный слой 3	Блок 1	Блок 2	Блок 3
Плотность, г/см ³	2.38	2.3825	2.3875	2.4998	2.4998	2.4988
Модуль сдвига, ГПа	35.277	13.99	21.919	29.914	32.835	36.52
Модуль всесто- роннего сжатия, ГПа	45.93	24.49	34.836	42.156	60.014	51.429

Таблица 2

Плотность и упругие свойства верхних слоев земной коры модели М-2

	 Осадочный слой 1	 Осадочный слой 2	 Осадочный слой 3	 Блок 1	 Блок 2	 Блок 3	 Блок 4
Плотность, г/см ³	2.38	2.3825	2.3875	2.4998	2.498	2.4988	2.4988
Модуль сдвига, ГПа	4.257	11.795	23.59	34.024	34.023	33.56	31.57
Модуль всестороннего сжатия, ГПа	11.795	24.323	32.102	54.44	33.564	31.579	57.07

На основе созданных блочно-слоистых моделей теперь можно более детально исследовать напряженно-деформированное состояние верхних слоев земной коры. В ходе численного моделирования выявленная структура будет иметь неравномерное распределение напряжений и деформаций, которые могут быть использованы при выявлении местонахождений залежей нефти и газа.

Математическая постановка задачи

Для численного моделирования и оценки напряженно-деформированного состояния участков литосферы и верхних слоев земной коры были использованы уравнения механики деформируемого твердого тела, включающие базовые уравнения сохранения и определяющие соотношения упругопластической среды [14].

Для описания неупругого деформирования элементов литосферы принята модель Друкера–Прагера–Николаевского, которая позволяет независимо описать процессы дилатансии и внутреннего трения [14]. Условие текучести и пластический потенциал представлены формулами

$$f(\sigma_{ij}) = -\alpha P + J_2^{1/2} - Y = 0, \quad g(\sigma_{ij}) = J_2 - \Lambda P(2Y + \alpha P) + const, \quad (1)$$

где J_2 – второй инвариант девиатора тензора напряжений, Y – когезия, α – коэффициент внутреннего трения, P – давление, Λ – коэффициент дилатансии.

Для того чтобы выбрать параметры принятой модели среды, следует заметить, что с начала XX в., начиная от пионерских работ А. Вегенера и Дж. Барелла, стали создаваться и развиваться теоретические модели, учитывающие влияние геолого-геофизических параметров на физические свойства геосреды. На сегодняшний день в силу активного развития мощностей вычислительных машин стало возможным учитывать много параметров, необходимых для описания физических свойств геосреды и моделирования геодинамических процессов. В связи с этим обратим внимание на модели, использующие такое понятие, как разность главных нормальных напряжений, позволяющее учитывать неявным способом влияния нескольких параметров и физико-химических превращений горных пород. В данной работе выбрана одна из теоретических моделей, называемая *cratonic jelly sandwich*, которая подходит для описания прочности горных пород в континентальной коре [15]. Она определяет разность главных нормальных напряжений в литосфере с ростом глубины залегания слоев. Чтобы определить значения параметров модели Друкера–

Прагера–Николаевского для разных слоев литосферы, нужно связать их с разностью главных нормальных напряжений.

На основе связи второго инварианта девиатора тензора напряжений с максимальными касательными напряжениями

$$J_2 = (1 - \mu_\sigma^2/3)\tau^2, \quad (2)$$

и связи последних с разностью главных нормальных напряжений

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \Delta\sigma/2 \quad (3)$$

получаем следующее выражение:

$$\Delta\sigma = 2(Y + \alpha P)(1 - \mu_\sigma^2/3)^{-1/2}, \quad (4)$$

представляющее собой искомую связь разности главных нормальных напряжений с параметрами модели Друкера–Прагера (когезией и коэффициентом внутреннего трения). Здесь $\mu_\sigma = 2(\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3) - 1$ – параметр Лоде–Надаи.

Формула (4) позволяет адаптировать выбранную упругопластическую модель для решения задач о распределении напряжений и деформаций в элементах литосферы.

Особенности распределения разности главных нормальных напряжений, когезии и коэффициента внутреннего трения по глубине литосферы подробно представлены в статьях [16, 17] и на рис. 4.

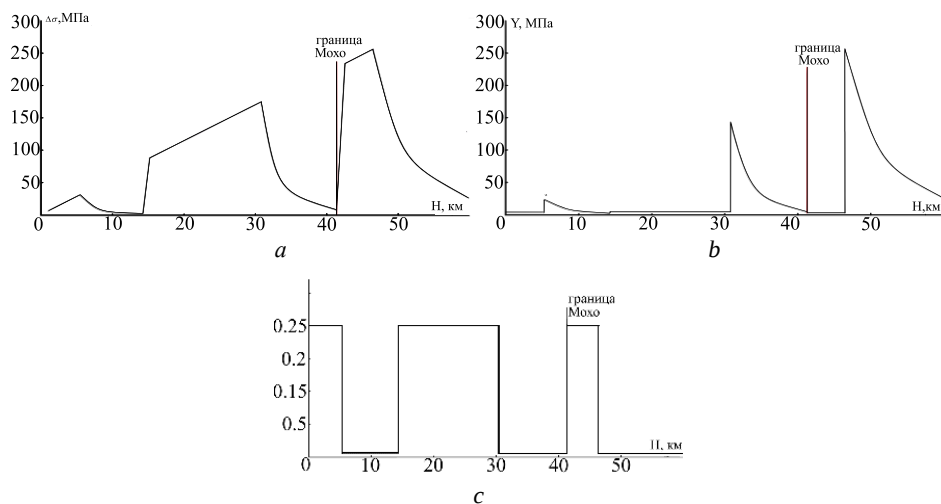


Рис. 4. Графики изменения $\Delta\sigma$ (a), Y (b) и α (c) в слоях литосферы

Fig. 4. Graphs of varying characteristics (a) $\Delta\sigma$, (b) Y , and (c) α in the layers of the lithosphere

В случае анализа напряженно-деформированного состояния участков верхних слоев земной коры в рамках прочностной модели *cratonic jelly sandwich* зависимости разности главных нормальных напряжений, сцепления и коэффициента внутреннего трения от глубины представлены на рис. 5.

Для задания граничных условий при расчете учтем геодинамическую ситуацию, имеющую место в настоящий момент на территории Западно-Сибирской плиты. Она складывается из процесса субмеридианального сжатия со стороны Арктики, влияния коллизии Индийского континента с юга и сжатий по границам между Западно-Сибирской плитой, Восточно-Европейской платформой и Сибирским кратоном [7, 18]. Также для глубинных слоев литосферы следует учесть движения

в мантии и воздействия силы тяжести, которые приводят к возникновению сложных геодинамических обстановок. Поэтому вдоль геологического профиля «Рубин–2–1990» наблюдается комбинированный процесс сжатия-растяжения, возникающий в результате сложных движений литосферных плит Земли [7].

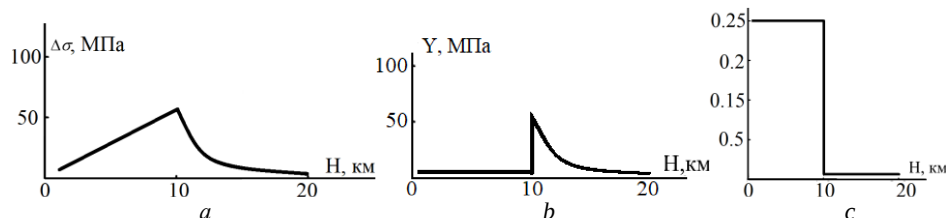


Рис. 5. Графики изменения $\Delta\sigma$ (a), Y (b) и α (c) в верхних слоях земной коры
Fig. 5. Graphs of varying characteristics (a) $\Delta\sigma$, (b) Y , and (c) α in the upper layers of Earth's crust

Представленная на рис. 6 схема нагружения отражает сложную геодинамическую обстановку, которая характерна для выбранного региона. Наблюдается постепенный переход от горизонтального растяжения у земной поверхности, вызванного субмеридиональным сжатием Западно-Сибирской плиты, в горизонтальное сжатие нижних слоев земной коры и верхней мантии, вызванное влиянием высоких давлений мантийного слоя.



Рис. 6. Схема граничных условий для численных экспериментов для слоев земной коры и верхней мантии
Fig. 6. Schematic representation of the boundary conditions in numerical experiments for the layers of the lithosphere

В случае анализа напряженно-деформированного состояния верхних слоев земной коры, будут использоваться граничные условия, показанные на рис. 7, которые соответствуют процессу горизонтального растяжения.

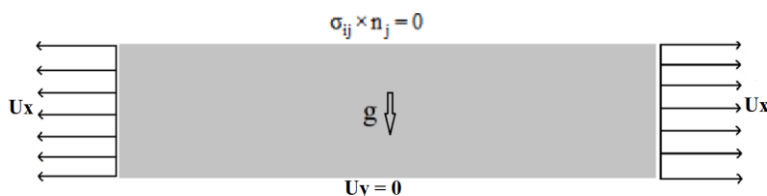


Рис. 7. Схема граничных условий для численного эксперимента для верхних слоев земной коры
Fig. 7. Schematic representation of the boundary conditions in a numerical experiment for the upper layers of Earth's crust

В ранее опубликованных статьях [16, 17] и книге М.Л. Уилкинса [19] были представлены методы и способы численного решения данной задачи.

Результаты моделирования и их обсуждение

Исследование напряженно-деформированного состояния литосферы выполнено в рамках многоуровневого подхода. Его суть состоит в том, чтобы сначала проанализировать напряженно-деформированное состояние участков литосферы глубиной 60 км, а затем на основе полученных результатов рассмотреть напряженно-деформированное состояние верхних слоев земной коры глубиной 20 км, в которых можно более подробно учесть структуру осадочного чехла, где расположены полезные ископаемые.

Численное моделирование механического поведения участков литосферы в условиях комбинированного процесса растяжения-сжатия на территории Западно-Сибирской плиты было выполнено с использованием адаптированной четырехугольной расчетной сетки со средним размером ячейки 500 м [16, 17].

Для оценки напряженно-деформированного состояния были выбраны следующие его параметры: интенсивность пластической деформации и компонента тензора напряжений σ_{xx} (горизонтальные напряжения). Зоны повышенной неупругой деформации представляют интерес, поскольку в этих местах геосреда является сильно поврежденной, что способствует образованию ловушек углеводородов. В силу принятых граничных условий и неоднородности литосферы в изучаемых регионах возможно образование областей локального горизонтального растяжения. Такие места в верхних слоях земной коры также представляют интерес с точки зрения потенциальных местоположений залежей нефти и газа.

Как видно на рис. 8, в верхних слоях литосферы пластическая деформация локализована в районах Танловской впадины, Верхне-Казымской впадины и на границе Надымской и Верхне-Казымской впадин. На расположение полос локализованной деформации в верхнем слое земной коры кроме границы раздела между слоями также оказывает влияние различие в механических свойствах внутрислоевых блоков.

На рис. 8, *б* в районах Верхне-Казымской впадины и на границе Верхне-Казымской и Надымской впадин выявлены положительные значения горизонтальных напряжений, свидетельствующие о наличии поврежденности и пустот в верхних слоях земной коры, где могут находиться нефтегазовые залежи.

Результаты моделирования подтверждаются геологическими данными, по которым в районах Надымской, Верхне-Казымской и Танловской впадин залежи нефти и газа расположены в юрско-меловых отложениях, а разнонаправленная амплитуда нетектонических движений поспособствовала формированию месторождений смешанного типа [13, 20].

Для более детального исследования напряженно-деформированного состояния верхних слоев литосферы в этих регионах было проведено компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния участков верхних слоев земной коры глубиной 20 км. На рис. 9, *а* локализация пластической деформации сосредоточена на тех же территориях Верхне-Казымской и Надымской впадин, что было получено ранее в расчетах на более крупной модели. Очаги положительных горизонтальных напряжений расположены в районах Верхне-Казымской и Надым-

ской впадин (рис. 9, *b*), в которых также отмечается локализация пластической деформации и сосредоточены крупные залежи нефти и газа.

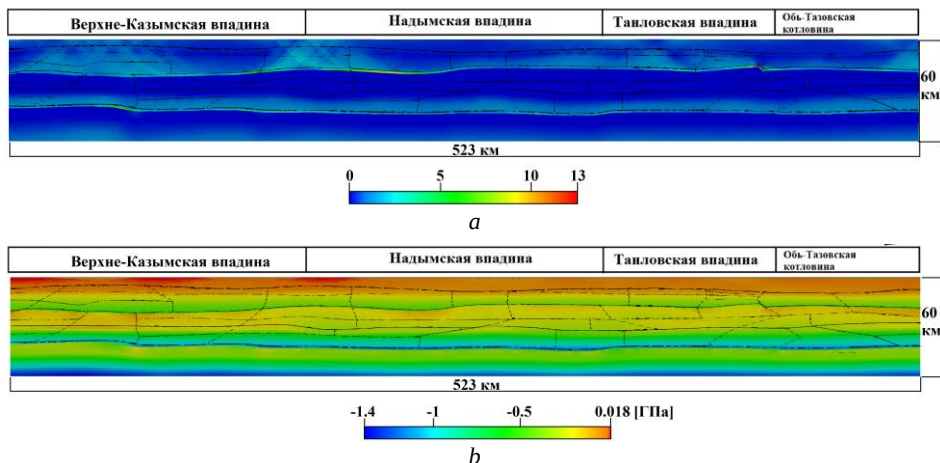


Рис. 8. Распределения пластической деформации (*a*) и горизонтальных напряжений (*b*) в слоях литосферы вдоль геологического профиля «Рубин–2–1990»

Fig. 8. Distribution of (*a*) plastic strain and (*b*) horizontal stresses in the lithosphere layers along the "Rubin-2-1990" geological profile

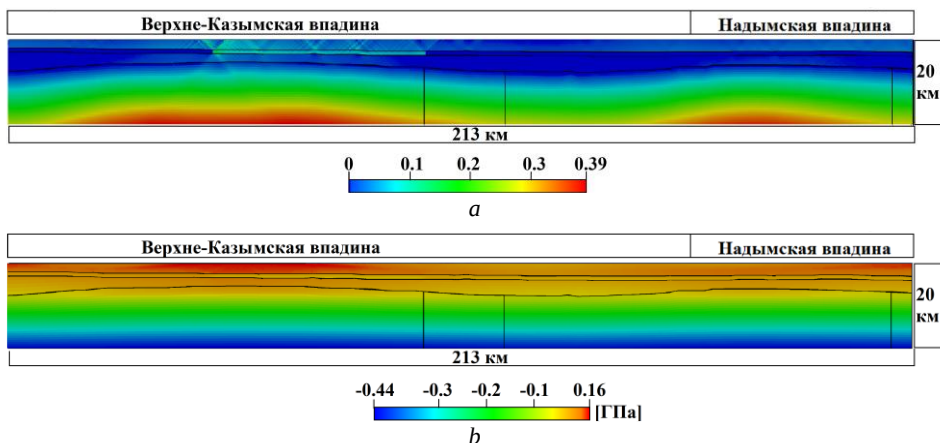


Рис. 9. Распределение пластической деформации (*a*) и горизонтальных напряжений (*b*) в слоях земной коры вдоль южной части геологического профиля «Рубин–2–1990» (для модели М-1)

Fig. 9. Distribution of (*a*) plastic strain and (*b*) horizontal stresses in Earth's crust layers along the south end of the "Rubin-2-1990" geological profile (M-1 model)

На рис. 10 представлены распределения пластической деформации и горизонтальных напряжений на территориях Надымской и Тимловской впадин. Высокая локализация пластической деформации наблюдается в районе Тимловской впадины. Заметим, что в процессе расчета отмечался следующий механизм распространения пластической деформации: сначала на границе раздела между осадочным чехлом

и кристаллическим фундаментом образуется полоса локализованной деформации, затем область пластически деформированной среды распространяется до земной поверхности, приводя к поврежденности осадочного чехла. В результате данного механизма формируются семейства разломов, который могут стать ловушками углеводородов.

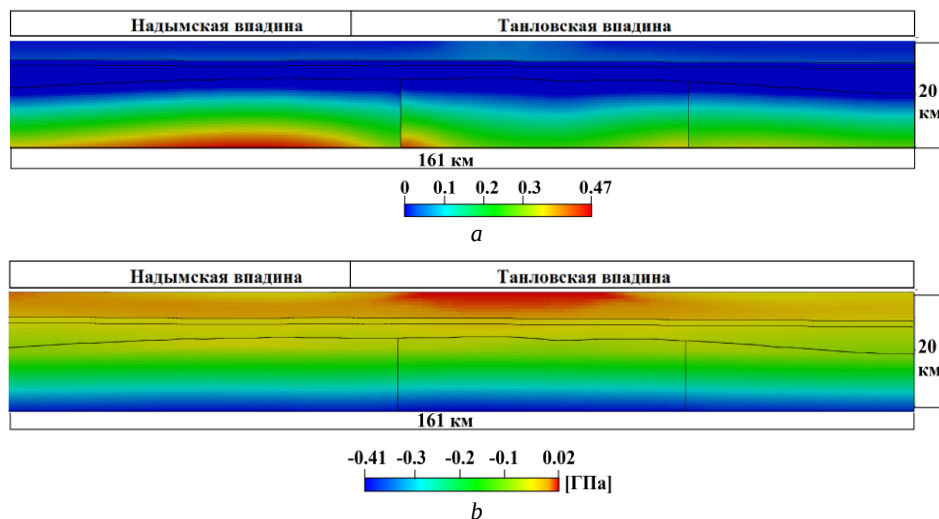


Рис. 10. Распределения пластической деформации (a) и горизонтальных напряжений (b) в слоях земной коры вдоль северной части геологического профиля «Рубин–2–1990» (для модели М-2)

Fig. 10. Distribution of (a) plastic strain and (b) horizontal stresses in Earth's crust layers along the north end of the "Rubin-2-1990" geological profile (M-2 model)

Зона положительных значений горизонтальных напряжений в осадочном чехле, которая выделяется на рис. 10, b, совпадает с областью повышенных пластических деформаций, что свидетельствует о возможной поврежденности осадочного чехла в указанном месте и наличии в нем ловушек углеводородов или нефтегазовых залежей. Результаты моделирования подтверждаются результатами геологических исследований, проведенных Р.И. Сафиным и Е.А. Мануиловой [13, 20, 21]. Ими было выявлено, что в данном регионе прогнозируется большое количество ловушек углеводородов, и на территории Ярудейского нефтегазового региона проявляются признаки наличия залежей нефти и газа [21]. При сопоставлениях месторождений нефти и газа и структур, окружающих эти месторождения, было обнаружено, что подавляющее большинство залежей нефти и газа приурочено к долинам и впадинам и границам различных новейших структур. Также установлено, что залежи углеводородов расположены в областях пересечения разломов со сдвигами земной коры и различных типов новейших разрывов [13, 20–22].

Заключение

В представленной статье использован многоуровневый подход, позволивший детально проанализировать напряженно-деформированное состояние как более

протяженного и глубокого участка литосферы, так и меньших по размерам участков верхних слоев земной коры. Это стало возможно благодаря геофизическим данным геологического профиля «Рубин–2–1990», которые позволили создать компьютерные блочно-слоистые модели геоструктур, и математической модели, способной описать напряженно-деформированное состояние в литосфере. В качестве объекта исследования были выбраны нефтегазовые области Баженовской свиты на территории Западно-Сибирской плиты.

Показано, что в результате растяжения-сжатия в районах Танловской впадины, Верхне-Казымской впадины и на границе Надымской и Верхне-Казымской впадин отмечаются области локализации неупругой деформации и зоны положительных горизонтальных напряжений, соответствующие местоположениям ловушек углеводородов и залежей нефти и газа. В выделенных областях были проведены более детальные исследования распределений напряжений и деформаций в верхних слоях земной коры. На основе выполненных исследований были более точно определены места локализации пластической деформации на территориях Верхне-Казымской и Надымской впадин, которые были выявлены в расчетах для участка литосферы глубиной 60 км. Очаги положительных горизонтальных напряжений расположены в районах Верхне-Казымской и Надымской впадин, в которых локализована пластическая деформация и сосредоточены крупные залежи нефти и газа. На территориях Надымской и Танловской впадин зоны положительных горизонтальных напряжений в осадочном чехле совпадают с областью локализации пластической деформации, что свидетельствует о возможной поврежденности осадочного чехла и наличии в нем ловушек углеводородов или нефтегазовых залежей.

Список источников

1. *Turcotte D., Schubert G. Geodynamics. Cambridge: Cambridge University Press. 2014.*
2. *Леонов М.Г. Кристаллические протрузии как типовая структурно-тектоническая модель интраванитных залежей углеводородов // Геотектоника. 2019. № 3. С. 24–41. doi: 10.31857/S0016-853X2019324-41*
3. *Леонов М.Г., Морозов Ю.А., Пржиялговский Е.С., Рыбин А.К., Бакеев Р.А., Лаврушина Е.В., Стефанов Ю.П. Тектоническая эволюция системы «фундамент–чехол» и морфоструктурная дифференциация осадочных бассейнов // Геотектоника. 2020. № 2. С. 3–31. doi: 10.31857/S0016853X20020083*
4. *Koptev A., Nettesheim M., Ehlers T.A. Plate corner subduction and rapid localized exhumation: Insights from 3D coupled geodynamic and geomorphological modelling // Terra Nova. 2022. V. 34 (3). P. 210–223. doi: 10.1111/ter.12581*
5. *Artemieva I.M., Thybo H., Cherepanova Y. Isopycnicity of cratonic mantle restricted to kimberlite provinces // Earth and Planetary Letters. 2019 V. 505. P. 13–19. doi: 10.1016/j.epsl.2018.09.034*
6. *Стефанов Ю.П., Татаурова А.А. Влияние трения и прочностных свойств среды на формирование зон локализации деформации в надвиговых структурах // Физическая мезомеханика. 2019. Т. 21 (5). С. 46–55. doi: 10.24411/1683-805X-2018-15005*
7. *Ребецкий Ю.Л. Поле глобальных коровых напряжений Земли // Геотектоника. 2020. № 6. С. 3–24. doi: 10.31857/S0016853X200 60119*
8. *Гурари Ф.Г. Геология и перспективы нефтегазоносности Обь-Иртышского междуречья. Ленинград: Гостехиздательство, 1959.*
9. *Контарович А.Э., Буриштейн Л.М., Казаненков В.А., Контарович В.А., Костырева Е.А., Пономарева Е.В., Рыжкова С.В., Ян П.А. Баженовская свита – главный источник*

- ресурсов нетрадиционной нефти в России // Георесурсы, геоэнергетика, геополитика. 2014. № 2(10). С. 1–8.
10. Конторович А.Э., Пономарева Е.В., Буриштейн Л.М., Глинских В.Н., Ким Н.С., Костырева Е.А., Павлова М.А., Родченко А.П., Ян П.А. Распределение органического вещества в породах баженовского горизонта (Западная Сибирь) // Геология и геофизика. 2018. Т. 59, № 3. С. 357–371. doi: 10.15372/GiG20180307
 11. Проект РУБИН–1990. Профиль РУБИН-1 – г. Костомукша – г. Семипалатинск, профиль РУБИН-2 – г. Нижний Тагил – г. Уренгой // Атлас «Опорные геолого-геофизические профили России». Глубинные сейсмические разрезы по профилям ГСЗ, отработанным в период с 1972 по 1995 год. СПб.: ВСЕГЕИ, 2013. С. 21–22. URL: <https://web-ftp.vsegei.ru/glubgeoph/seism48.pdf>
 12. Cherepanova Yu., Artemieva I.M., Thybo H., Chemia Z. Crustal structure of the Siberian craton and the West Siberian basin: An appraisal of existing seismic data // Tectonophysics. 2013. V. 609. P. 154–183. doi: 10.1016/j.tecto.2013.05.004
 13. Мануилова Е.А. Локализация месторождений нефти и газа в зависимости от типов новейших структур на территории Западно-Сибирской плиты // Вестник Московского университета. Сер. 4. Геология. 2021. № 6. С. 10–19. doi: 10.33623/0579-9406-2021-6-10-19
 14. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Стефанов Ю.П., Кузнецов П.В., Трубицын А.А., Трубицына Н.В., Ворошилов С.П., Ворошилов С.П. Нелинейная механика геоматериалов и геосред. Новосибирск: Гео, 2007.
 15. Burov E.B. Rheology and strength of lithosphere // Marine and Petroleum Geology. 2011. V. 28 (8). P. 1402–1443. doi: 10.1016/j.marpetgeo.2011.05.008
 16. Ахметов А.Ж., Смолин И.Ю. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния Якутско-Вилюйской изверженной провинции для анализа геотектонических процессов в Сибирском кратоне // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. С. 53–68. doi: 10.17223/19988621/69/5
 17. Ахметов А.Ж., Смолин И.Ю. Компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния Тунгусской синеклизы и Якутско-Вилюйской крупной изверженной провинции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 75. С. 52–66. doi: 10.17223/19988621/75/5
 18. Буслов М.М. Террейновая тектоника Центрально-Азиатского складчатого пояса // Геодинамика и тектонофизика. 2014. Т. 5, № 3. С. 641–665. doi: 10.5800/GT-2014-5-3-0147
 19. Wilkins M.L. Computer simulation of dynamic phenomena. Berlin: Springer-Verlag. 1999.
 20. Мануилова Е.А. Взаимосвязь дислокаций фундамента и осадочного чехла с новейшим структурным планом Западно-Сибирской плиты // Вестник Московского университета. Сер. 4. Геология. 2021. № 4. С. 23–31. doi: 10.33623/0579-9406-2021-4-23-31
 21. Сафин Р.И. Перспективные объекты на нефть и газ в Надымской впадине // Известия вузов. Нефть и газ. 2016. № 5. С. 33–37. doi: 10.31660/0445-0108-2016-5-33-37
 22. Коcharян Г.Г., Остапчук А.А. Мезоструктура зоны скольжения тектонического разлома // Физическая мезомеханика. 2022. Т. 25, № 5. С. 94–105. doi: 10.55652/1683-805X_2022_25_5_94

References

1. Turcotte D., Schubert G. (2014) *Geodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press.
2. Leonov M.G. (2019) Crystalline protrusion as the typical structural–tectonic model of intra-granite hydrocarbon accumulation. *Geotectonics*. 53(3). pp. 319–336. doi: 10.1134/S0016852119030075
3. Leonov M.G., Przhivalgovskii E.S., Lavrushina E.V., Morozov Y.A., Rybin A.K., Bakeev R.A., Stefanov Y.P. (2020) Tectonic evolution of the basement–sedimentary cover system and morphostructural differentiation of sedimentary basins. *Geotectonics*. 54(2). pp. 147–172. doi: 10.1134/S0016852120020089

4. Koptev A., Nettesheim M., Ehlers T.A. (2022) Plate corner subduction and rapid localized exhumation: Insights from 3D coupled geodynamic and geomorphological modelling. *Terra Nova*. 34(3). pp. 210–223. doi: 10.1111/ter.12581
5. Artemieva I.M., Thybo H., Cherepanova Y. (2019) Isopycnicity of cratonic mantle restricted to kimberlite provinces. *Earth and Planetary Letters*. 505. pp. 13–19. doi: 10.1016/j.epsl.2018.09.034
6. Stefanov Yu.P., Tataurova A.A. (2019) Effect of friction and strength properties of the medium on shear band formation in thrust structures. *Physical Mesomechanics*. 22(6). pp. 463–472. doi: 10.1134/S1029959919060031
7. Rebetskiy Y.L. (2020) Pattern of global crustal stresses of the Earth. *Geotectonics*. 54(6). pp. 723–740. doi: 10.1134/S0016852120060114
8. Gurari F.G. (1959) *Geologiya i perspektivy neftegazonosnosti Ob'-Irtyskogo mezhdurech'ya* [Geology and prospects for oil and gas potential of the Ob-Irtysh interfluvium]. Leningrad: Gostekhizdatel'stvo.
9. Kontorovich A.E., Burshteyn L.M., Kazanenkov V.A., Kontorovich V.A., Kostyreva E.A., Ponomareva E.V., Ryzhkova S.V., Yan P.A. (2014) Bazhenovskaya svita – glavnyy istochnik resursov netraditsionnoy nefti v Rossii [The Bazhenov Suite is the main reserve of unconventional oil in Russia]. *Georesursy, Geoenergetika, Geopolitika*. 2(10). pp. 1–8.
10. Kontorovich A.E., Ponomareva E.V., Burshtein L.M., Glinskikh V.N., Kim N.S., Kostyreva E.A., Pavlova M.A., Rodchenko A.P., Yan P.A. (2018) Distribution of organic matter in rocks of the Bazhenov horizon (West Siberia). *Russian Geology and Geophysics*. 59(3). pp. 285–298. doi: 10.1016/j.rgg.2018.03.007
11. Proekt RUBIN – 1990. Profil' RUBIN-1 – g. Kostomuksha – g. Semipalatinsk, profil' RUBIN-2 – g. Nizhniy Tagil – g. Urengoy [Project RUBIN – 1990. Profile RUBIN-1 - Kostomuksha - Semipalatinsk, profile RUBIN-2 - Nizhny Tagil - Urengoy] (2013) Atlas «Opornye geologo-geofizicheskie profili Rossii». Glubinye seismicheskie razrezy po profilyam GSZ, otrabotannym v period s 1972 po 1995 god [Atlas "Reference geological and geophysical profiles of Russia". Deep seismic sections along DSS profiles worked out in the period from 1972 to 1995]. Saint Petersburg: "VSEGEI". p. 21–22. Access mode: <https://webftp.vsegei.ru/glubgeoph/seism48.pdf>
12. Cherepanova Yu., Artemieva I.M., Thybo H., Chemia Z. (2013) Crustal structure of the Siberian craton and the West Siberian basin: An appraisal of existing seismic data. *Tectonophysics*. 609. pp. 154–183. doi: 10.1016/j.tecto.2013.05.004
13. Manuilova E.A. (2021) Lokalizatsiya mestorozhdeniy nefti i gaza v zavisimosti ot tipov noveyshikh struktur na territorii Zapadno-Sibirskoy plity [Localization of oil and gas deposits depending on the types of new structures on the territory of the West Siberian Plate]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 4 Geologiya – Moscow University Bulletin. Series 4. Geology*. 6. pp. 10–19. doi: 10.33623/0579-9406-2021-6-10-19
14. Makarov P.V., Smolin I.Yu., Stefanov Yu.P., Kuznetsov P.V., Trubitsyn A.A., Trubitsyna N.V., Voroshilov S.P., Voroshilov Ya.S. (2007) *Nelineynaya mekhanika geomaterialov i geosred* [Nonlinear mechanics of geomaterials and geomedial]. Novosibirsk: "Geo" Academic Publishing House
15. Burov E.B. (2011) Rheology and strength of lithosphere. *Marine and Petroleum Geology*. 28(8). pp. 1402–1443. doi: 10.1016/j.marpetgeo.2011.05.008
16. Akhmetov A.Zh., Smolin I.Yu. (2021) Chislennoe modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya Yakutsko-Vilyuyskoy izverzhennoy provintsii dlya analiza geotektonicheskikh protsessov v Sibirskom kratone [Numerical modeling of the stress-strain state of the Yakutsk-Vilyui large igneous province for the analysis of geotectonic processes in the Siberian Craton]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. pp. 53–68. doi: 10.17223/19988621/69/5

17. Akhmetov A.Zh., Smolin I.Yu. (2022) Komp'yuternoe modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya Tungusskoy sineklizy i Yakutsko-Vilyuyskoy krupnoy izverzhennoy provintsii [Computer modelling of the state of stress and strain of the Tunguska and Vilyui Synclises]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 75. pp. 52–66. doi: 10.17223/19988621/75/5
18. Buslov M.M. (2014) Terreynovaya tektonika Tsentral'noAziatskogo skladchatogo poyasa [Terrain tectonics of the Central Asian folded belt]. *Geodinamika i tektonofizika – Geodynamics & Tectonophysics*. 5(3). pp. 641–665. doi: 10.5800/GT-2014-5-3-0147
19. Wilkins M.L. (1999) *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*. Berlin: Springer-Verlag.
20. Manuilova E.A. (2021) Vzaimosvyaz' dislokatsiy fundamenta i osadochnogo chekhla s novyishim strukturnym planom Zapadno-Sibirskoy plity [The interconnection of platform's dislocations and sediment cover with the latest structure plan of the West Siberian plate]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 4 Geologiya – Moscow University Bulletin. Series 4. Geology*. 4. pp. 23–31. doi: 10.33623/0579-9406-2021-4-23-31
21. Safin R.I. (2016) Perspektivnye ob'ekty na nef't' i gaz v Nadym'skoy vpadine [Promising sites for oil and gas Nadym Depressions]. *Izvestiya Vuzov. Nef't' i gaz – Oil and Gas Studies*. 5. pp. 33–37. doi: 10.31660/0445-0108-2016-5-33-37
22. Kocharyan G.G., Ostapchuk A.A. (2023) Mesostructure of a tectonic fault slip zone. *Physical Mesomechanics*. 26(1). pp. 82–92. doi: 10.1134/S1029959923010095

Сведения об авторах:

Ахметов Аян – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории нелинейной механики метаматериалов и многоуровневых систем Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук (Томск, Россия). E-mail: ayan.akhmetov93@gmail.com

Смолин Игорь Юрьевич – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник лаборатории нелинейной механики метаматериалов и многоуровневых систем Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук (Томск, Россия). E-mail: smolin@ispms.ru

Information about the authors:

Akhmetov Ayan (Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ayan.akhmetov93@gmail.com

Smolin Igor' Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: smolin@ispms.ru

Статья поступила в редакцию 29.04.2024; принята к публикации 10.04.2025

The article was submitted 29.04.2024; accepted for publication 10.04.2025

Научная статья

УДК 532.529

doi: 10.17223/19988621/94/9

Математическое моделирование термоаэросепарации аэрозоля в шахтных печах сушки рудных материалов

Рустам Гумарович Ахметов¹, Герман Петрович Дылдин²,
Владимир Николаевич Макаров³, Николай Владимирович Макаров⁴

¹ АО «Костанайские минералы», Житикара, Казахстан

^{2,3,4} Уральский государственный горный университет, Екатеринбург, Россия

¹ info@km.kz

² German.Dyldin@yandex.ru

³ uk.intelnedra@gmail.com

⁴ mnikolay84@mail.ru

Аннотация. Предложена математическая модель термоаэрационной сепарации частиц пыли в сушиле печи в зависимости от параметров теплоносителя и сепаратора, а также формат компьютерного анализа параметров аэрозоля в процессе сепарации. Установлена доминанта экологической эффективности шахтных печей. Верификация математической и компьютерной моделей сепарации двухфазной среды в сушиле подтвердила повышение экологической эффективности печи на 62%, снижение концентрации пыли на выходе в 2,6 раза с доверительной вероятностью 0,95 при погрешности 11%.
Ключевые слова: термоаэросепарация, экологическая эффективность, аэрозоль, входной коллектор, критерий Стокса, критерий Фруда, пылесадительная камера

Для цитирования: Ахметов Р.Г., Дылдин Г.П., Макаров В.Н., Макаров Н.В. Математическое моделирование термоаэросепарации аэрозоля в шахтных печах сушки рудных материалов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 109–123. doi: 10.17223/19988621/94/9

Original article

Mathematical modeling of the aerosol thermoaeroseparation in shaft furnaces for drying ore materials

Rustam G. Akhmetov¹, German P. Dyldin²,
Vladimir N. Makarov³, Nikolay V. Makarov⁴

¹ JSC “Kostanay Minerals”, Zhitikara, Kazakhstan

^{2,3,4} Ural State Mining University, Ekaterinburg, Russian Federation

¹ info@km.kz

² German.Dyldin@yandex.ru

³ ur.intelnedra@mail.com

⁴ mnikolay84@mail.ru

Abstract. This paper considers dust thermoaeroseparation mechanics directly in a vertical shaft drying furnace (VSDF) to substantiate an innovative technology for improving

the efficiency of dust collection and develop a methodology for creating environmentally efficient furnaces.

The novelty of theoretical studies on the two-phase medium separation in a VSDF is based on a scientifically proven hypothesis about the dominant effect on the VSDF ecological efficiency of the aerosol parameters determining the quality of dust collection: concentration, median size, dispersion, temperature, and humidity of dust at the furnace outlet. The proposed hypothesis is adequate to the nature-like commensurability of the drying process with the feedback drying of suspended aerosol particles to the parameters providing maximum dust collection efficiency.

The mathematical model of thermoaeroseparation in the VSDF is verified in JSC "Kostanay Minerals". The results confirm an increase in the ecological efficiency of the furnace by 62 % with a confidence level of 0.95 and an error of less than 11 %. Thus, the obtained data can be considered when modernizing shaft furnaces to improve their environmental efficiency.

Keywords: thermoaeroseparation, environmental efficiency, aerosol, inlet collector, Stokes forces, Froude criterion, dust-collecting chamber

For citation: Akhmetov, R.G., Dyldin, G.P., Makarov, V.N., Makarov, N.V. (2025) Mathematical modeling of the aerosol thermoaeroseparation in shaft furnaces for drying ore materials. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 109–123. doi: 10.17223/19988621/94/9

Введение

Актуальность задачи повышения энергоэффективности пылеулавливания обусловлена постоянным ростом затрат на снижение экологической нагрузки на окружающую среду, составляющих в настоящее время не менее 5% в структуре ВВП РФ.

Снижение запыленности может быть обеспечено заменой капиталоемких систем аспирации на энергосберегающие и экологически эффективные устройства, встраиваемые непосредственно в сушила печей [1–3].

Оптимизация дисперсного состава и физических параметров пыли в процессе сушки рудных материалов, снижение концентрации мелкодисперсных частиц аэрозоля на выходе в газоходы повышают экологическую эффективность непосредственно печи, способствуют улучшению работы пылегазоулавливающего оборудования, обеспечивая рост энергоэффективности процесса сушки и качества готового продукта [4–6].

Известные методы расчета параметров пылеулавливающих устройств, математического моделирования физических процессов в двухфазных средах, в том числе на базе инженерного компьютерного анализа, не исследуют процессы пылеобразования непосредственно в сушильной печи [7–9].

Объектом и предметом исследований статьи являются вертикальная шахтная сушильная печь (ВШСП) и использование механизма аэротермодинамических процессов сепарации пыли в ее сушиле для повышения экологической эффективности, т.е. минимизации запыленности газового потока, снижения негативной нагрузки на окружающую среду.

Постановка задачи

Цель данной исследовательской работы – создание математической модели определения минимального диаметра сепарируемых частиц пыли непосредственно в процессе сушки рудных материалов в ВШСП и формата компьютерного

моделирования аэротермодинамических процессов. Несмотря на сложность и многофакторность термодинамических процессов в сушиле печи, учитывая, что конечной целью является инерционная сепарация и связанное с ней время движения частиц пыли в сепараторе, в работе использована линейная модель уравнений Стокса с временным параметром релаксации и термического баланса для тонких частиц пыли. Минимальный диаметр улавливаемых частиц пыли при заданном гранулометрическом составе рудного материала фактически определяет их концентрацию в аэрозоле на выходе из печи, т.е. ее экологическую эффективность. Моделирование и эксперименты по термосепарации частиц пыли рудного материала осуществлялись во встроенном в сушило печи запатентованном воздушном инерционно-гравитационном противоточно-поворотном сепараторе [10]. Проводились расчет температуры, концентрации частиц пыли и теплоносителя в сепараторе печи и на выходе из нее, компьютерный анализ, а также верификация полученных результатов по итогам промышленных испытаний в цехе ДиСхр АО «Костанайские минералы». При этом на первом этапе по результатам промышленных испытаний показана актуальность сепарации частиц пыли непосредственно в печи, поскольку было доказано, что печь является интенсивным источником дополнительного пылеобразования в процессе сушки [10–12].

Для компьютерного анализа двухфазного течения, состоящего из теплоносителя и частиц пыли, в работе использована модель на базе уравнений Эйлера и Лагранжа, позволяющая исследовать траектории движения частиц пыли в форме Discrete Phase Model (ДПМ) [12, 13].

Новизна теоретических исследований сепарации двухфазной среды в ВСШП базируется на идее о существенном влиянии физико-химических характеристик теплоносителя и частиц пыли, термоаэродинамических параметров аэрозоля, которые коррелируют с геометрическими параметрами сепаратора, на энергоэффективность улавливания пыли, снижение экологической нагрузки на внешнюю систему пылеулавливания. Данная идея отражает принцип природоподобия, обуславливающий необходимость непрерывной обратной связи процесса досушивания взвешенных частиц аэрозоля до требуемой влажности, температуры и концентрации на выходе из сушила, при которых обеспечивается максимальная эффективность пылеулавливания [3, 10].

Результаты исследований

Комплексные исследования процесса термосепарации аэрозоля в ВСШП включали в себя два этапа. На первом этапе были проведены промышленные испытания в цехе ДиСхр АО «Костанайские минералы» по определению фактической корреляции параметров сушки в двухфазной среде с геометрией сушила. На втором этапе была построена математическая модель термоаэросепарации с учетом установленных в процессе испытаний закономерностей сепарации, проведены компьютерный анализ на базе Ansys-Fluent в модели ДПМ с учетом однонаправленного влияния теплоносителя на частицы руды и определение погрешности полученных результатов для оценки возможности использования в инженерных расчетах сепараторов, встраиваемых в сушило печей.

На рис. 1 представлены данные экспериментов по определению корреляции между медианным диаметром d_m , дисперсией σ_d взвешенных частиц исходной руды, подачей теплоносителя Q и коэффициентом пылевыведения $k_{пв}$, а также

фотографии рентгеноспектрального микроанализа асбестовой пыли в разгрузочном и загрузочном устройствах печи.

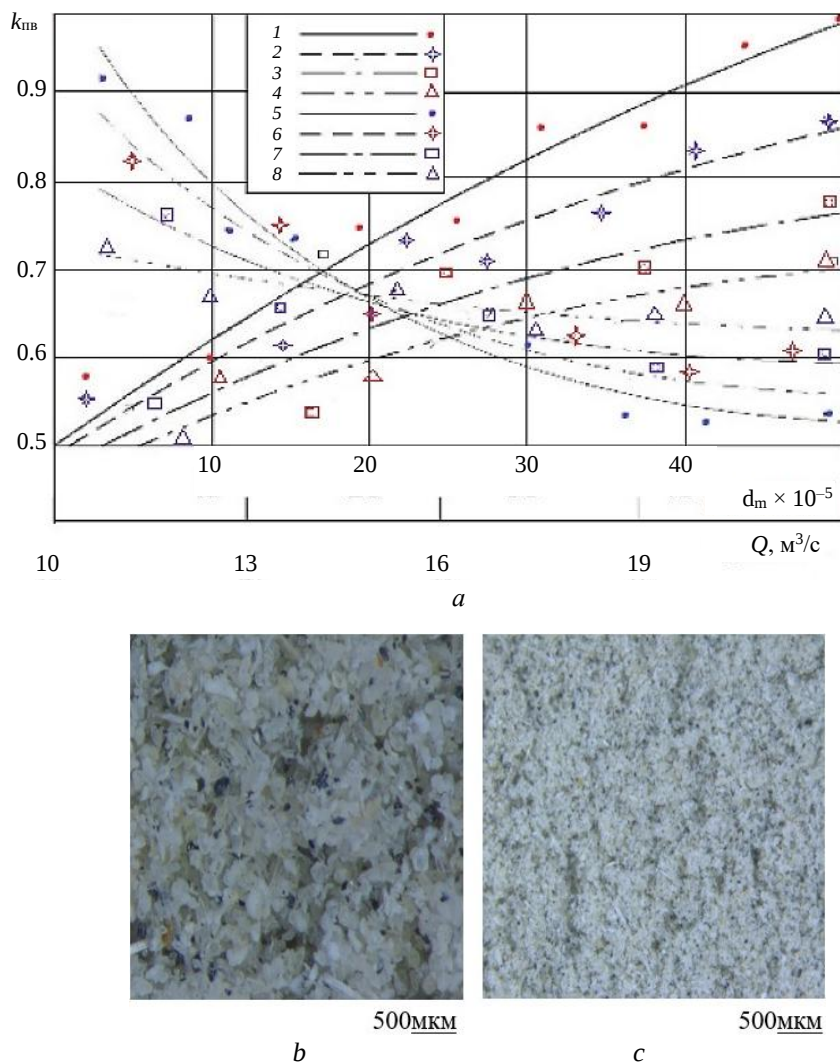


Рис. 1. (a) Зависимости коэффициента пылевыведения печи от медианного диаметра пыли при $Q = 15 \text{ m}^3/\text{c}$: 1 – $\sigma_d = \pm 0.1d_m$; 2 – $\sigma_d = \pm 0.2d_m$; 3 – $\sigma_d = \pm 0.3d_m$; 4 – $\sigma_d = \pm 0.4d_m$; и подачи теплоносителя при $\sigma_d = \pm 0.15d_m$: 5 – $d_m = 10^{-4} \text{ м}$; 6 – $d_m = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}$; 7 – $d_m = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$; 8 – $d_m = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}$;

Фотографии хризотил асбестовой пыли при 56-кратном увеличении:

(b) в разгрузочном устройстве; (c) в загрузочном устройстве

Fig. 1. (a) Dust emission coefficient of the vertical shaft drying furnace (VSDF) as a function of the median dust diameter at $Q = 15 \text{ m}^3/\text{c}$ for $\sigma_d = (1) \pm 0.1d_m$; (2) $\pm 0.2d_m$; (3) $\pm 0.3d_m$; (4) $\pm 0.4d_m$ and the coolant flow rate at $\sigma_d = \pm 0.15d_m$ for $d_m = (5) 10^{-4}$; (6) $2 \cdot 10^{-4}$; (7) $2.5 \cdot 10^{-4}$; and (8) $3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. Photos of the chrysotile-asbestos dust at 56-fold magnification in the (b) unloading and (c) loading devices

Из анализа рис. 1 видно, что с уменьшением d_m взвешенных частиц происходит заметный рост $k_{пв}$, особенно в диапазоне $d_m < 2 \cdot 10^{-4}$ м. При этом с увеличением дисперсии медианного диаметра рост $k_{пв}$ более существен. Это приводит к повышению экологической нагрузки на пылеулавливающее оборудование и требует тщательного подхода к определению и контролю гранулометрического состава исходной руды. Увеличение скорости теплоносителя в противотоке также приводит к росту $k_{пв}$, причем в большей степени для фракций с меньшим диаметром взвешенных частиц исходной руды. Полученные результаты согласуются с известным фактом о необходимости снижения аспирируемого, в том числе инжектируемого, теплоносителя и подсоса воздуха через неплотности в ВШСП для повышения экологической эффективности сушки [2, 7, 14]. Снижение скорости и расхода теплоносителя приводит к падению коэффициента пылевыведения, причем в большей степени для фракций меньшего диаметра частиц исходной руды, что подтверждает целесообразность снижения расхода теплоносителя при сохранении тепловой мощности для повышения экологической эффективности печей.

Из анализа приведенных фотографий, полученных с использованием электронного микроскопа TESCAN VEGA LMS, видно увеличение медианного диаметра, т.е. снижение степени дисперсности взвешенных частиц рудного материала, в процессе сушки. Данные исследования подтверждают фактически происходящий процесс интенсивного агрегатирования мелкодисперсных частиц пыли непосредственно в аэрозоле в процессе сушки при конвективном теплообмене за счет их столкновения, действия сил Сафмана и компрессионного сдвигания, что приводит к росту размера частиц на выходе из печи по сравнению с дисперсным составом исходной руды в загрузочном устройстве. Кроме того, указанное обусловлено тем, что мелкие частицы дробятся менее эффективно в силу меньших значений инерционных и компрессионных сил в процессе их контактов. Промышленные испытания аэротермодинамических процессов, происходящих в двухфазной среде «асбестовая пыль–газовый поток» ВШСП показали существенное влияние на температуру и влажность асбестовой пыли на выходе из нее температуры и влажности газового потока и исходной асбестовой руды в прямотоке.

Вследствие существенно более значимого влияния на частицы руды в прямотоке поверхностных аэродинамических сил, характеризующихся критерием Фруда по отношению к объемным силам инерции, определяющих критерии Стокса, Архимеда, на выход из ВШСП поступает значительно большее количество влажной асбестовой пыли низкой температуры из прямотока по отношению к более сухой высокотемпературной пыли из противотока. Дополнительно при этом повышается вероятность конденсации влаги в рукавном фильтре при прочих равных условиях [14, 15].

Для устранения причин низкой экологической эффективности печей предложено запатентованное устройство термоинерционной сепарации, встроенное в их сушило [10].

Процесс сушки сыпучего материала в ВШСП предлагаемой конструкции включает в себя 3 последовательных этапа (рис. 2). На 1-м этапе в сыпучем материале, поступающем через загрузочное устройство 1, за счет роста динамического давления, обусловленного увеличением его скорости под действием сил гравитации, происходит нарушение аутогезионных связей пылевых частиц, формирование аэродисперсной системы, т.е. пылевого аэрозоля, состоящего из пылевых частиц и теплоносителя. На 2-м этапе за счет конфузного канала 2, образованного стенками 3,

примыкающими к верхней прямоточной части сушила 4 и являющимися ее продолжением, происходит ускорение движения аэрозоля и частичное расслоение мелкодисперсных частиц материала, в том числе пыли, за счет действия на них инерционной сепарации от контакта со стенками 3, силы Стокса, обусловленной вязкостью теплоносителя, сил Магнуса, Сафмана и Кориолиса, обуславливающих криволинейное движение из верхней прямоточной части сушила 4 в нижнюю противоточную часть 5 к горизонтальному входу 6 диффузорного канала входного коллектора 7. Траектории движения пыли определяются скоростью теплоносителя, парусностью, т.е. их плотностью, диаметром, миделевым сечением. На 3-й стадии в области нижней противоточной части сушила 5 в вертикальном диффузорном канале входного коллектора 7 и пылеосадительной камере 8 в процессе аэрационной сепарации за счет динамического витания влажные частицы пыли, оседая вследствие малой парусности, т.е. большей силы гравитации по отношению к динамическому давлению аэрозоля в область повышенных температур теплоносителя в противоточной части сушила 5, отдают влагу за счет конвективного теплообмена с ним, достигают достаточной влажности и температуры, при которой их парусности достаточно для подъема по вертикальному диффузорному каналу входного коллектора 7 и пылеосадительной камере 8 на выход из печи [10, 14, 15].

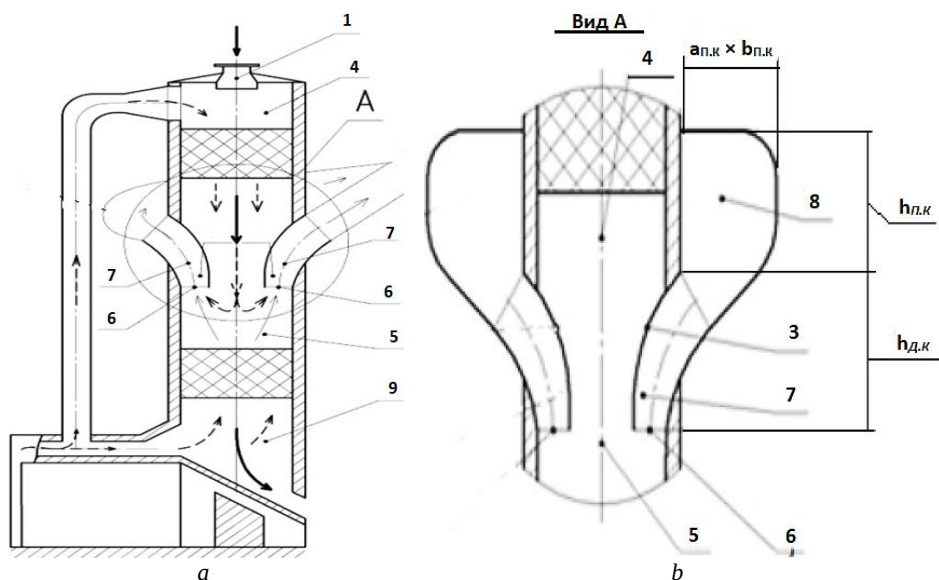


Рис. 2. Схема вертикальной шахтной сушильной печи (а);
схема устройства термоинерционной сепарации пыли (b)

Fig. 2. Design of the (a) VSDF and (b) device for thermal inertial dust separation

Парусность частиц пыли определяется их формой, размерами, физическими свойствами, а аэротермодинамические параметры прямотока и противотока зависят от их расхода, температуры, геометрии сушила, вертикального диффузорного канала входного коллектора и пылеосадительной камеры. На этом базируются математическая модель и формат компьютерного анализа с учетом результатов экспериментальных исследований для расчета параметров термоаэросепаратора и

пылеосадительной камеры, обеспечивающих вынос из сушила пыли с диаметром менее заданного, определяющего максимально допустимую концентрацию аэрозоля, поступающего на выход из печи. При этом частицы рудного материала диаметром больше выше указанного, двигаясь под действием силы гравитации в противоточной части сушила, будут поступать в устройство выгрузки 9 [16–18].

Математическая модель термоаэросепарации в виде уравнений вертикального движения частиц пыли диаметром d_i и теплового баланса для термически тонких частиц пыли при граничных условиях третьего рода, постоянной температуре теплоносителя, в том числе на входе, установившемся режиме конвективного теплообмена с постоянным коэффициентом теплоотдачи, без теплообмена с окружающей средой при малых значениях критериев Рейнольдса, Стокса и Био в термоинерционном сепараторе с учетом [16, 19, 20] может быть представлена в виде:

$$\frac{m_i dV_{bi}}{dt} = 3\pi\mu d_i k_i \cdot \left[u(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_i}} + g\tau_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right] - \frac{\pi}{6} d_i^3 (\rho_i - \rho_r) g; \quad (1)$$

$$\frac{dT_i}{d\gamma} = 6\Delta T_i \frac{\alpha}{\rho_i \gamma} e^{-\frac{6\alpha t_i}{\rho_i d_i \gamma}}, \quad \frac{dT_i}{d\gamma} = 6\Delta T_i \frac{\alpha}{\rho_i \gamma} e^{-\frac{6\alpha t_i}{\rho_i d_i \gamma}}, \quad (2)$$

где $m_i = \frac{\pi d_i^3}{6} \rho_i$ – масса i -й частицы пыли, кг; μ – динамическая вязкость теплоносителя, Па·с; $\tau_i = \frac{d_i^2 \cdot \rho_d}{18 \cdot \mu k_\phi}$ – время релаксации i -й частицы пыли, с; ρ_i, ρ_r – плотность частицы пыли диаметром d_i и теплоносителя соответственно кг/м³; V_{bi} – скорость i -й частицы пыли по вертикальной оси сушила, м/с; k_i – коэффициент формы i -й частицы пыли; $u(t) = \frac{Q_1 + Q_2}{S_k(h)}$ – скорость аэрозоля в инерционном сепараторе, м/с; Q_1, Q_2 – расход теплоносителя прямотока и противотока соответственно м³/с; $S_k(h)$ – площадь инерционного сепаратора, м²; $h(t)$ – текущая высота диффузорного канала входного коллектора, м; T_i, T_r – температура i -й частицы пыли и теплоносителя на входе в коллектор, К; $\Delta T_i = (T_r - T_i)$ – температурный напор между i -й частицей пыли и теплоносителем на входе в коллектор, К; α – коэффициент конвективной теплоотдачи, Вт/м²·К; γ – удельная теплоемкость рудного материала, Дж/кг·К; g – ускорение силы тяжести, м²/с.

Минимальный диаметр улавливаемой мелкодисперсной пыли в термоинерционном сепараторе с учетом (1), (2) после преобразования получим в виде [18]:

$$d_{min}(h) = \sqrt{\frac{18\mu k_i}{\rho_i(h) - \rho_r(h)} \cdot \frac{g}{\left[u(h) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_i}} + g\tau_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right]}}, \quad (3)$$

где $\rho_i(h) - \rho_r(h)$ – текущие плотности i -й частицы пыли и теплоносителя в функции от их положения в термоинерционном сепараторе.

Выражение скорости частицы пыли в зависимости от ее положения в термоинерционном сепараторе определяется формулой

$$u(h_i) = \frac{Q_1 + Q_2}{S_{BK} + \int_0^{h_i} D(h) dh}, \quad (4)$$

где S_{BK} – площадь входа в диффузорный канал входного коллектора, м²; $D(h)$ – локальная диффузорность термоинерционного сепаратора.

Скорость перемещения i -й частицы пыли диаметром d_i в термоинерционном сепараторе получим в виде:

$$V_{bi} = (g\tau_i - \frac{Q_1+Q_2}{S_{\Pi}-S_{BK}} - \frac{Q_1+Q_2}{S_{BK}+\int_0^{h_i} D(h)dh}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_i}} - g\tau_i + \frac{Q_1+Q_2}{S_{BK}+\int_0^{h_i} D(h)dh}, \quad (5)$$

где S_{Π} – площадь сушила печи, м².

Время, в течение которого i -я частица пыли диаметром d_i достигнет высоты h_i в термоинерционном сепараторе:

$$t_i = \tau_i \cdot \ln \frac{\frac{Q_1+Q_2}{S_{BK}+\int_0^{h_i} D(h)dh} q\tau_i}{\frac{Q_1}{S_{\Pi}-S_{BK}} + \frac{Q_1+Q_2}{S_{BK}+\int_0^{h_i} D(h)dh} - q\tau_i}. \quad (6)$$

Для обеспечения требуемых параметров температуры t_i и влажности ϕ_i частиц пыли и соответственно их концентрации с учетом дисперсного состава на входе в пылеосадительную камеру в соответствии с законом изменения локальной диффузности $D(h)$ при заданном термическом напоре ΔT_i определяют необходимую высоту термоинерционного сепаратора.

Время прохождения аэрозолью пылеосадительной термокамеры определяем по формуле

$$t_{п.к.} = 0.5 \frac{h_{п.к.} \cdot a_{п.к.} \cdot b_{п.к.}}{Q_1+Q_2}, \quad (7)$$

где $a_{п.к.}$, $b_{п.к.}$ – ширина, длина, высота пылеосадительной термокамеры, м (см. рис. 2, б).

Скорость динамического витания частиц в термодисперсионном сепараторе по мере снижения их влажности при горизонтальном перемещении к выходу из печи определяется по формуле (4) с учетом геометрических параметров термоинерционного сепаратора.

Из анализа уравнений (2)–(7) видно, что скорость, температура, влажность, время движения в термоинерционном сепараторе и, как результат, минимальный диаметр сепарируемых частиц пыли зависят от характера изменения локальной диффузности $D(h)$ инерционного сепаратора, объема пылеосадительной камеры, параметров сушила, расхода и температуры теплоносителя.

В качестве критериев, эффективности пылеулавливания приняты коэффициенты термоаэроэрозионной сепарации и регуляции:

$$S_i = \frac{F_{Ai}}{\sum_{i=1}^n F_{bi}^j} = 18 \frac{\mu k_i (U_h - g \cdot \tau_i) (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}})}{d_i^2 (\rho_i - \rho_{\Gamma}) g}; \quad (8)$$

$$S_i^T = 1 - \Delta T_i e^{-\frac{6\alpha t_i}{\rho_i d_i \gamma}}, \quad (9)$$

где F_{Ai} – приведенная сила Архимеда, включающая силы тяжести P_q и Стокса P_c , действующие на i -ю частицу пыли, н; F_{bi}^j – вертикальная составляющая j -й аэродинамической подъемной силы, действующей на i -ю частицу пыли, Н.

Интегральную и фракционную эффективность термоинерционного сепаратора с учетом логарифмического нормального закона распределения дисперсного состава пыли определяем по формуле

$$E_{TC}^{Ai} = 1 - \frac{\lg 3 \sqrt{\frac{2\mu k_i g}{[\rho_i(h) - \rho_{\Gamma}(h)] \left[u(h) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_i}} + g\tau_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right]}}}{\lg d_{max}}, \quad (10)$$

где d_{max} – максимальный диаметр частицы пыли, поступившей на вход в коллектор, м; Δi – фракция частиц пыли $+0 - d_{max}$.

По результатам расчета печи ВСШП № 9 ДиСхр АО «Костанайские минералы» согласно предложенной математической модели получены следующие геометрические параметры сепаратора и пылесадительной камеры, обеспечивающие минимальную концентрацию аэрозоля на выходе из печи: $d_{\min} = 85 \cdot 10^{-4}$ м; $S_{\text{БК}} = 11.5$ м²; $V_b = 1.6$ м³/с; $t_{\text{п.к.}} = 1.8$ с; $h_{\text{п.к.}} = 2.7$ м; $a_{\text{п.к.}} = 2.8$ м; $b_{\text{п.к.}} = 1.7$ м; $S_{\text{П}} = 4$ м²; $S_{\text{БК}} = 2.8$ м².

Из анализа рис. 3 с учетом (10) видно, что применение оптимально спроектированного термоинерционного сепаратора предложенной запатентованной конструкции позволяет снизить минимальный диаметр частиц пыли на выходе из печи более чем в 2 раза, тем самым повысить ее экологическую эффективность на 62%, снизив запыленность с 95 до 35 г/м³, т.е. более чем в 2,6 раза.

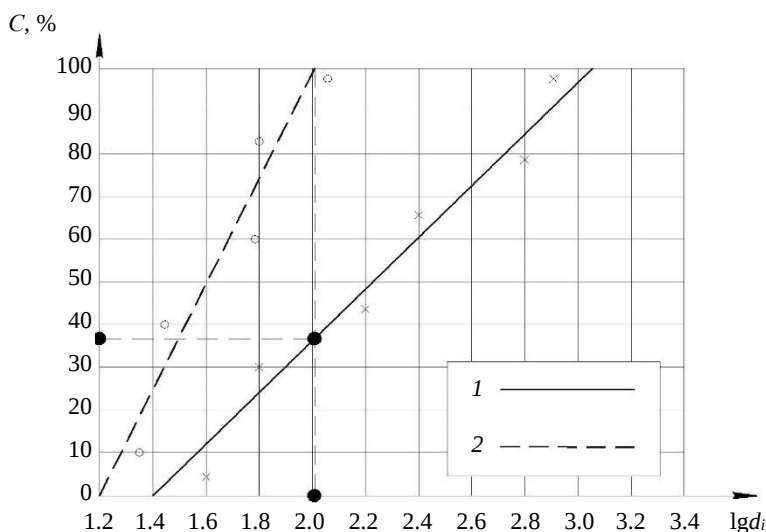


Рис. 3. Номограмма дисперсного состава асбестовой пыли на выходе из ВСШП: 1 – без термоинерционного сепаратора; 2 – с термоинерционным сепаратором
Fig. 3. Nomogram of the dispersed composition of asbestos dust at the VSDF outlet (1) without and (2) with a thermal inertial separator

Верификация построенной математической модели термоаэросепарации рудной пыли с учетом испытаний, проведенных на ВСШП № 9 ДиСхр АО «Костанайские минералы» с доверительной вероятностью 0,95 подтвердила, что ее погрешность в сравнении с экспериментальными результатами не превышает 11%.

Компьютерный анализ течения двухфазной среды в сушиле ВСШП на базе Ansys-Fluent осуществлялся при начальных условиях таких параметров, как положение, скорость, гранулометрический состав, температура частиц пыли, температура и расход теплоносителя и граничных условиях, определяемых исходной геометрией сушила. Расчет траектории движения частиц пыли проводился в стационарном режиме в условиях одностороннего сопряжения теплоносителя и частиц пыли с использованием эйлерово-лангранджевского подхода в модели дискретной фазы Discrete Phase Model (DPM). Теплоноситель моделировался на неподвижной сетке на базе эйлерова подхода, а частицы пыли моделировались на основе лангранджевского подхода с помощью отслеживания их траекторий по всей расчетной

области; траектории частиц пыли определялись в заданном интервале времени по итогам расчета поля течения теплоносителя. Предложенный вариант формата DPM позволил осуществить расчет аэротермодинамических параметров теплоносителя и частиц пыли, концентрации аэрозоля в сепараторе и провести оптимизацию его топологии по критерию экологической эффективности печи [13, 15, 21].

На рис. 4, 5 приведены результаты компьютерного моделирования температуры и концентрации частиц хризотил-асбестовой пыли в области выхода из сушила ВШСП без сепаратора и с сепаратором оптимальной конструкции.

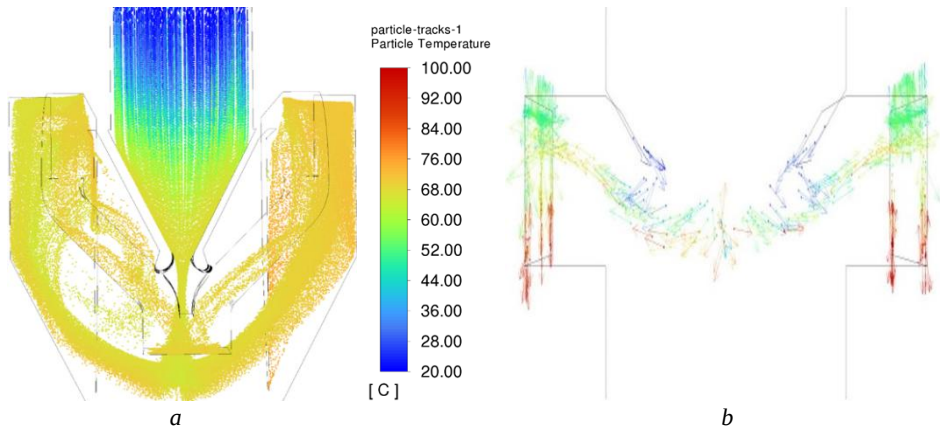


Рис. 4. Распределение по температуре частиц хризотил-асбеста фракции $(-2\ 500 + 0)$ мкм в ВСШП: *a* – с сепаратором; *b* – без сепаратора

Fig. 4. Temperature distribution of the chrysotile–asbestos particles with a fraction of $(-2\ 500 + 0)$ μm in the VSDF (*a*) with and (*b*) without a separator

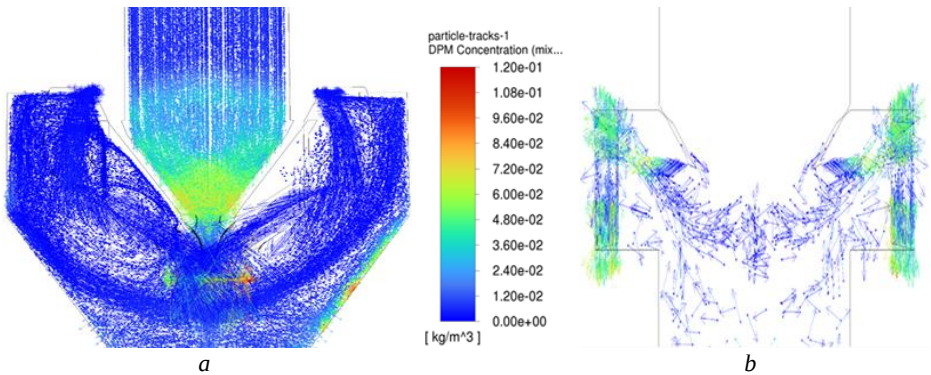


Рис. 5. Распределение по концентрации частиц хризотил-асбеста фракции $(-2\ 500 + 0)$ мкм в ВСШП: *a* – с сепаратором; *b* – без сепаратора

Fig. 5. Distribution of chrysotile–asbestos particles with a fraction of $(-2\ 500 + 0)$ μm by concentration in the VSDF (*a*) with and (*b*) without a separator

Из анализа рис. 4 видно, что в ВСШП без сепаратора температура частиц пыли в прямотоке на выходе из сушила на $30\text{--}40^\circ$ ниже температуры частиц пыли в про-

тивотоке, что подтверждает результаты промышленных экспериментов и выводы о причинах низкой экологической эффективности печей.

По данным рис. 5 концентрация пыли на выходе из ВСШП без сепаратора составляет 80 г/м^3 , в то время как для ВСШП с сепаратором она не превышает 30 г/м^3 , что с погрешностью не более 11% совпадает с результатами промышленных экспериментов и математического моделирования.

Таким образом, предложенная математическая модель и компьютерный анализ аэротермодинамической сепарации в сушиле на базе модели Ansys-Fluent в формате ДРМ, несмотря на принятые упрощения по сравнению с реальными процессами сушки рудных материалов, с приемлемой для инженерных расчетов точностью могут быть использованы для проектирования термоинерционных сепараторов, встраиваемых в печь и позволяющих в 2,6 раза снизить концентрацию пыли, повысить результативность внешнего пылеулавливающего оборудования, снизить негативное влияние на окружающую среду.

Заключение

1. Экспериментальные исследования, проведенные на ВШСП АО «Костанайские минералы» подтвердили, что печи являются интенсивным источником пылеобразования, и это обосновывает необходимость учета данного факта при их проектировании.

2. Доказано существенное влияние параметров аэродинамического процесса сушки рудного материала и геометрии печи на экологическую эффективность пылеулавливания и целесообразность интеграции в сушило термоаэросепаратора.

3. Разработана математическая модель и предложен компьютерный анализ на базе модели Ansys-Fluent в формате ДРМ термоаэросепарации двухфазной среды в прямоточно-противоточном режиме движения теплоносителя, позволяющие определять геометрические параметры инерционного термоаэросепаратора и пылеосадительной камеры по критерию максимальной экологической эффективности печи.

4. Верификация предложенной математической модели и формата компьютерного анализа термоаэросепарации рудной пыли в сушиле шахтной печи с достоверной вероятностью 0,95 подтвердила погрешность в сравнении с экспериментальными результатами не более 11%, что достаточно для инженерных расчетов.

5. Предложенная конструкция термоинерционного сепаратора, интегрированного в сушило печи и пылеосадительной камеры, смонтированные на печи ВШСП № 9 ДиСхр АО «Костанайские минералы» в 2023 г., позволила снизить концентрацию пыли на выходе из ВШСП в 2,6 раза, повысив тем самым ее экологическую эффективность на 62%.

Список источников

1. Макаров В.Н., Давыдов С.Я. Теоретические основы повышения эффективности вентиляции в технологических процессах на промышленных предприятиях // Новые огнеупоры. 2015. № 2. С. 59–63.
2. Юрьев Б.П., Гольцев В.А., Мальцев В.А., Савин В.А. Сушка хризотиловой руды в вертикальных аппаратах шахтного типа // Строительные материалы. 2016. № 8. С. 80–84.
3. Макаров В.Н., Ахметов Р.Г., Макаров Н.В., Арсланов А.А. Повышение экологической эффективности сушки рудных материалов на базе инерционно-гравитационной аэро-

- сепарации // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2024. № 1-1. С. 74–86. doi: 10.25018/0236_1493_2024_011_0_74
4. Чистяков Я.В., Муратова К.М., Володин Н.И. Основы сепарации мелкодисперсной пыли в центробежно-инерционном пылеуловителе // Экология и промышленность в России. 2016. Т. 20, № 8. С. 20–27.
5. Калаева С.З., Муратова К.М., Чистяков Я.В. Исследование процесса очистки воздушных потоков от мелкодисперсной пыли в центробежно-инерционном аппарате пылеулавливания // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2017. № 3. С. 45–57.
6. Макаров В.Н., Макаров Н.В., Угольников А.В. Оптимизация геометрических параметров гидроциклонного инерционного сепаратора Вентури // Записки Горного института. 2019. Т. 240. С. 638–648. doi: 10.31897/PMI.2019.6.638
7. Yang S., Nie W., Lv S., Liu Z., Peng H., Ma X., Cai P., Xu C. Effects of spraying pressure and installation angle of nozzles on atomization characteristics of external spraying system at a fully-mechanized mining face // Powder Technology. 2019. V. 343. P. 754–764. doi: 10.1016/j.powtec.2018.11.042.
8. Филин В.А., Филин А.Э. Пути повышения эффективности пылеподавления орошением // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2020. № S14. С. 3–10. doi: 10.25018/0236-1493-2020-5-14-3-10
9. Логачев И.Н., Логачев К.И. Аэродинамические основы аспирации. СПб.: Химиздат, 2005. 659 с.
10. Пат. 281.36.45 РФ, МКИ F 04 D 17/08. Способ сушки сыпучих материалов повышения экологической эффективности шахтных печей и устройство для его осуществления / Е.С. Нурхожаев, Н.В. Макаров, А.А. Арсланов, и др. Заявл. 05.2023 г.; опубл. в П.И., 2024 г. № 2.
11. Hu S., Huang Y., Feng G., Shao H., Liao Q., Gao Y., Hua F. Investigation on the design of atomization device for coal dust suppression in underground roadways // Process Safety and Environmental Protection. 2019. V. 129. P. 230–237. doi: 10.1016/j.psep.2019.07.010
12. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Шамраев М.А. ANSYS в руках инженера: практическое руководство. М.: URSS, 2017. 272 с.
13. Фёдорова Н.Н., Вальзер С.А., Захарова Ю.В. Моделирование гидрогазодинамических процессов ПК ANSYS 17.0. Новосибирск: Новосиб. гос. арх.-строит. ун-т (Сибстрин), 2016. 168 с.
14. Макаров В.Н., Ахметов Р.Г., Давыдов С.Я., Макаров Н.В. Экспериментальное исследование и моделирование экологической эффективности вертикальных шахтных печей для сушки огнеупорных и строительных материалов // Новые огнеупоры. 2023. № 7. С. 52–59.
15. Han H., Wang P., Liu R. Experimental study on the atomization characteristics and dust reduction efficiency of four common types of pressure nozzles in underground coal mines // Int J Coal Sci Technol. 2020. V. 7 (3). P. 581–596. doi: 10.1007/s40789-020-00329-w
16. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 830 с.
17. Zhang H., Xu Y., Han W., Wang Z. Analysis on the Development Status of Coal Mine Dust Disaster Prevention Technology in China // Journal of Healthcare Engineer. 2021. V. 2021. Art. 5574579. doi: 10.1155/2021/5574579
18. Shivani Kaustubh Chitale, Pranjal Nitin Jadhav, Snehal Suresh Dhoble, Dr. Mr. Satyajeet Deshmukh. Parameters Affecting Efficiency of Centrifugal Pump – A Review // International Journal of Scientific Research in Science and Technology. 2021. V. 8. P. 49–58. doi: 10.32628/IJSRST218573
19. Fair R., Laar J.H., Nell K., Nell D., Mathews E.H. Simulating the sensitivity of underground ventilation networks to fluctuating ambient conditions // South African Journal of Industrial Engineering November. 2021. V. 32 (3). P. 42–51. doi: 10.7166/32-3-2616

20. Bosikov I.I., Klyuev R.V., Revazov V.Ch., Pilieva D.E. Structural and geological features of ore zones in the southeast of the Siberian Platform // Mining Informational and Analytical Bulletin. 2023. Is. 1. P. 84–94. doi: 10.25018/0236_1493_2023_1_0_84
21. Velikanov V.S., Dyorina N.V., Suslov N.M., Luntsova A.I., Rabina E.I. Automation of design for dynamic loading at the designing stage of mining machinery // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1399 (3). Art. 033010. P. 1–5. doi: 10.1088/1742-6596/1399/3/033010

References

1. Makarov V.N., Davydov S.Ya. (2015) Teoreticheskie osnovy povysheniya effektivnosti ventilyatsii v tekhnologicheskikh protsessakh na promyshlennykh predpriyatiyakh [Theoretical foundations for increasing the efficiency of ventilation in technological processes at industrial enterprises]. *Novye ognepury – New Refractories*. 2. pp. 59–63.
2. Yur'ev B.P., Gol'tsev V.A., Mal'tsev V.A., Savin V.A. (2016) Sushka khризотиловой руды в вертикальных аппаратах шактного типа [Drying chrysotile ore in vertical shaft-type apparatuses]. *Stroitel'nye materialy – Construction Materials*. 8. pp. 80–84.
3. Makarov V.N., Akhmetov R.G., Makarov N.V., Arslanov A.A. (2024) Povyshenie ekologicheskoy effektivnosti sushki rudnykh materialov na baze inertsionno-gravitatsionnoy aéroseparatsii [Increasing the environmental efficiency of drying ore materials based on inertial-gravity aéroseparation]. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten' (nauchno-tekhnicheskii zhurnal) – Mining Information and Analytical Bulletin (Scientific and Technical Journal)*. 1-1. pp. 74–86. doi: 10.25018/0236_1493_2024_011_0_74
4. Chistyakov Ya.V., Muratova K.M., Volodin N.I. (2016) Osnovy separatsii melkodispersnoy pyli v tsentrobezhno-inertsionnom pyleulovitele [Fundamentals of separation of fine dust in a centrifugal-inertial dust collector]. *Ekologiya i promyshlennost' v Rossii – Ecology and Industry of Russia*. 20(8). pp. 20–27.
5. Kalaeva S.Z., Muratova K.M., Chistyakov Ya.V. (2017) Issledovanie protsessa oчитки воздушных потоков от мелкодисперсной пыли в центробежно-инертном аппарате пылеулавливания [Study of the process of cleaning air flows from fine dust in a centrifugal-inertial dust collection apparatus]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle – News of Tula State University. Geosciences*. 3. pp. 45–57.
6. Makarov V.N., Makarov N.V., Ugol'nikov A.V. (2019) Optimizatsiya geometricheskikh parametrov gidrotsiklonnogo inertsionnogo separatora Venturi [Optimization of geometric parameters of a hydrocyclone inertial Venturi separator.]. *Zapiski gornogo instituta – Notes of the Mining Institute*. 240. pp. 638–648. doi: 10.31897/PMI.2019.6.638
7. Yang S., Nie W., Lv S., Liu Z., Peng H., Ma X., Cai P., Xu C. (2019) Effects of spraying pressure and installation angle of nozzles on atomization characteristics of external spraying system at a fully-mechanized mining face. *Powder Technology*. 343. pp. 754–764. doi: 10.1016/j.powtec.2018.11.042
8. Filina V. A., Filin A. E. (2020) Puti povysheniya effektivnosti pylepodavleniya orosheniem [Ways to increase the efficiency of dust suppression by irrigation]. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten' (nauchno-tekhnicheskii zhurnal) – Mining Information and Analytical Bulletin (Scientific and Technical Journal)*. S14. pp. 3–10. doi: 10.25018/0236-1493-2020-5-14-3-10
9. Logachev I.N., Logachev K.I. (2005) *Aerodinamicheskie osnovy aspiratsii* [Aerodynamic principles of aspiration]. Saint Petersburg: Khimizdat.
10. Nurkhozhaev E.S., Makarov N.V., Arslanov A.A., Akhmetov R.G., Balandin V.N., Makarov V.N., Novitskiy M.V., Gol'tsev V.A. (2024) *Sposob sushki sypuchikh materialov povysheniya ekologicheskoy effektivnosti shakhtnykh pechey i ustroystvo dlya ego osushchestvleniya* [A method for drying bulk materials to improve the environmental efficiency of shaft furnaces and a device for its implementation]. RF Patent 2813645, MKI F 04 D 17/08.

11. Hu S., Huang Y., Feng G., Shao H., Liao Q., Gao Y., Hua F. (2019) Investigation on the design of atomization device for coal dust suppression in underground roadways. *Process Safety and Environmental Protection*. 129. pp. 230–237. doi: 10.1016/j.psep.2019.07.010
12. Kaplun A.B., Morozov E.M., Shamraev M.A. (2017) *ANSYS v rukakh inzhenera: prakticheskoe rukovodstvo* [ANSYS in hands of an engineer: a practical guide]. Moscow: URSS.
13. Fedorova N.N., Valger S.A., Zakharova Yu.V. (2016) *Modelirovanie gidrogazodinamicheskikh protsessov PK ANSYS 17.0* [Modeling of hydrogasdynamic processes PC ANSYS 17.0]. Novosibirsk: NGASU (Sibstrin).
14. Makarov V.N., Akhmetov R.G., Davydov S.Ya., Makarov N.V. (2023) Eksperimental'noe issledovanie i modelirovanie ekologicheskoy effektivnosti vertikal'nykh shakhtnykh pechey dlya sushki ogneupornykh i stroitel'nykh materialov [Experimental study and modeling of the environmental efficiency of vertical shaft kilns for drying refractory and building materials]. *Novye ogneupory – New Refractories*. 7. pp. 52–59.
15. Han H., Wang P., Liu R. (2020) Experimental study on the atomization characteristics and dust reduction efficiency of four common types of pressure nozzles in underground coal mines. *International Journal of Coal Science & Technology*. 7(3). pp. 581–596. doi: 10.1007/s40789-020-00329-w
16. Loytsyanskiy L.G. (2003) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Drofa.
17. Zhang H., Xu Y., Han W., Wang Z. (2021) Analysis on the development status of coal mine dust disaster prevention technology in China. *Journal of Healthcare Engineer*. 2021. Article 5574579. doi: 10.1155/2021/5574579
18. Shivani Kaustubh Chitale, Pranjal Nitin Jadhav, Snehal Suresh Dhoble, Dr. Mr. Satyaajeet Deshmukh (2021) Parameters affecting efficiency of centrifugal pump – A review. *International Journal of Scientific Research in Science and Technology*. 8. pp. 49–58. doi: 10.32628/IJSRST218573
19. Fair R., Laar J.H., Nell K., Nell D., Mathews E.H. (2021) Simulating the sensitivity of underground ventilation networks to fluctuating ambient conditions. *South African Journal of Industrial Engineering*. 32(3). pp. 42–51. doi: 10.7166/32-3-2616
20. Bosikov I.I., Klyuev R.V., Revazov V.Ch., Pilieva D.E. (2023) Structural and geological features of ore zones in the southeast of the Siberian Platform. *Mining Informational and Analytical Bulletin*. 1. pp. 84–94. doi: 10.25018/0236_1493_2023_1_0_84
21. Velikanov V.S., Dyorina N.V., Suslov N.M., Luntsova A.I., Rabina E.I. (2019) Automation of design for dynamic loading at the design stage of mining machinery. *Journal of Physics: Conference Series*. 1399(3). Article 033010. pp. 1–5. doi: 10.1088/1742-6596/1399/3/033010

Сведения об авторах:

Ахметов Рустам Гумарович – главный механик АО «Костанайские минералы» (Житикара, Казахстан). E-mail: info@km.kz

Дылдин Герман Петрович – кандидат технических наук, доцент кафедры горной механики Уральского государственного горного университета (Екатеринбург, Россия) E-mail: German.Dyldin@yandex.ru

Макаров Владимир Николаевич – доктор технических наук, профессор кафедры горной механики Уральского государственного горного университета (Екатеринбург, Россия). E-mail: uk.intelnedra@gmail.com

Макаров Николай Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры горной механики Уральского государственного горного университета (Екатеринбург, Россия). E-mail: mnikolay84@mail.ru

Information about the authors:

Akhmetov Rustam G. (Chief Mechanic, JSC “Kostanay Minerals”, Zhitikara, Kazakhstan). E-mail: info@km.kz

Dyldin German P. (Candidate of Technical Sciences, Ural State Mining University, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: German.Dyldin@yandex.ru

Makarov Vladimir N. (Doctor of Technical Sciences, Ural State Mining University, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: uk.intelnedra@gmail.com

Makarov Nikolay V. (Candidate of Technical Sciences, Ural State Mining University, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: mni-kolay84@mail.ru

Статья поступила в редакцию 13.11.2023; принята к публикации 10.04.2025

The article was submitted 13.11.2023; accepted for publication 10.04.2025

Научная статья

УДК 539.4

doi: 10.17223/19988621/94/10

Теоретическая оценка минимально необходимой скорости сквозного пробития разнесенной стальной преграды суперкавитирующим ударником

Виктор Владимирович Буркин¹, Александр Николаевич Ищенко²,
Антон Юрьевич Саммель³, Марат Варисович Хабибуллин⁴

^{1, 2, 3, 4} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ v.v.burkin@mail.ru

² ichan@niipmm.tsu.ru

³ anton_sammel@mail.ru

⁴ lenmar07@rambler.ru

Аннотация. Проводится теоретическая оценка минимально необходимой скорости для сквозного пробития стальных разнесенных преград суперкавитирующим ударником из тяжелого сплава на основе вольфрама. Разнесенные преграды были эквивалентны монолитным толщиной 20, 30, 40, 50, 60 мм. Численное решение реализовано в осесимметричной постановке в рамках упруго-идеально-пластической модели Прандтля–Рейсса.

Ключевые слова: разнесенная стальная преграда, суперкавитирующий ударник, математическая модель, сквозное пробитие

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

Для цитирования: Буркин В.В., Ищенко А.Н., Саммель А.Ю., Хабибуллин М.В. Теоретическая оценка минимально необходимой скорости сквозного пробития разнесенной стальной преграды суперкавитирующим ударником // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 124–135. doi: 10.17223/19988621/94/10

Original article

Theoretical assessment of the minimum velocity required for the complete penetration of a supercavitating projectile into a spaced steel barrier

Viktor V. Burkin¹, Aleksandr N. Ishchenko²,
Anton Yu. Sammel³, Marat V. Khabibullin⁴

^{1, 2, 3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russia

¹ v.v.burkin@mail.ru

² ichan@niipmm.tsu.ru

³ anton_sammel@mail.ru

⁴ lenmar07@rambler.ru

Abstract. Nowadays, stationary objects exposed to dynamic loads in the form of various impacts are located not only on land but also in water. Therefore, this study is aimed to determine the minimum velocity required for the complete penetration of a supercavitating projectile made of a heavy tungsten-based alloy into underwater protective structures such as spaced steel barriers. The required velocity is calculated using a mathematical model based on the Prandtl–Reuss equations for elastic-perfectly plastic materials. Calculations are performed with barrier thicknesses of 15+5, 15+15, 20+20, 20+30, and 25+35 mm. Theoretical analysis has shown that monolithic barriers are more efficient than equivalent spaced barriers with a distance between plates of 10 mm. The obtained results indicate that an advanced study of this problem is required.

Keywords: spaced steel barrier, supercavitating projectile, mathematical model, complete penetration

Acknowledgments: This study was supported by the Tomsk State University Development Programme (Priority 2030).

For citation: Burkin, V.V., Ishchenko, A.N., Sammel', A.Yu., Khabibullin, M.V. (2025) Theoretical assessment of the minimum velocity required for the complete penetration of a supercavitating projectile into a spaced steel barrier. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 124–135. doi: 10.17223/19988621/94/10

Введение

В последнее время стационарные объекты, подверженные динамическим нагрузкам в виде различных воздействий, стали располагаться не только на суше, но и в воде. Для их защиты на воздухе от множества различных видов воздействий используются монолитные, гетерогенные, слоистые и разнесенные защитные конструкции. Исследования по различным видам взаимодействий с данными защитными конструкциями вызывают большой интерес [1–7]. В воде динамические нагрузки в виде разрушения и образования сквозных отверстий оказывают суперкавитирующие ударники [8–10], по своей форме напоминающие длинный усеченный конус. Создание защитных конструкций для стационарных объектов, расположенных в воде, способных противостоять таким ударникам, является одной из актуальных задач.

В данной работе проводится теоретическая оценка определения минимально необходимой скорости для сквозного пробития защитных конструкций в виде разнесенных стальных преград суперкавитирующим ударником из тяжелого сплава на основе вольфрама.

Результаты теоретических исследований

Данное исследование является продолжением работы [11], в которой определялась минимально необходимая скорость для сквозного пробития стальных монолитных преград толщиной 20, 30, 40, 50, 60 мм суперкавитирующим ударником из тяжелого сплава на основе вольфрама (рис. 1).



Рис. 1. Суперкавитирующий ударник
Fig. 1. Supercavitating projectile

Проведя анализ результатов, полученных в работе [11], можно заметить, что с повышением скорости и увеличением толщины стальной преграды наблюдается деформация ударника с изменением площади конуса в процессе взаимодействия. Это явление подтолкнуло к решению провести расчет высокоскоростного взаимодействия данного ударника с разнесенными преградами, эквивалентными монолитным, которые использовались в работе [11].

Толщина первой пластины разнесенной преграды равна глубине, на которой происходит деформация ударника при взаимодействии с монолитной преградой. Есть предположение, что с возникновением деформации головной части ударник в момент взаимодействия со второй пластиной начнет увеличивать площадь контакта за счет свойств материала и тем самым интенсивнее тормозиться в преграде. На рис. 2 показана разнесенная преграда, состоящая из двух стальных пластин, расстояние между которыми 10 мм.

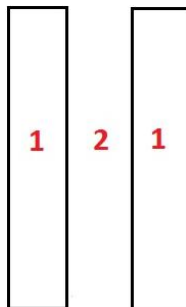


Рис. 2. Схема разнесенной преграды: 1 – пластины стальной преграды, 2 – воздух
Fig. 2. Schematic design of a spaced barrier: 1, plates of the steel barrier and 2, air

Определение минимально необходимой скорости для сквозного пробития разнесенных преград проводилось с применением математической модели. Данная модель, основой которой являются упруго-идеально-пластические соотношения Прандтля–Рейсса [12], верифицирована в работе [11] с применением испытательного стенда [13]. Для реализации численного решения применялась методика [14, 15] в осесимметричной постановке.

При взаимодействии с монолитной преградой толщиной 20 мм заметной деформации ударника не наблюдалось. Поэтому для определения минимальной скорости сквозного пробития разнесенной преграды первая пластина была выбрана толщиной 15 мм, а вторая – 5 мм. На рис. 3 показан расчет взаимодействия ударника с разнесенной преградой толщиной 15 + 5 мм при скорости 400 м/с.

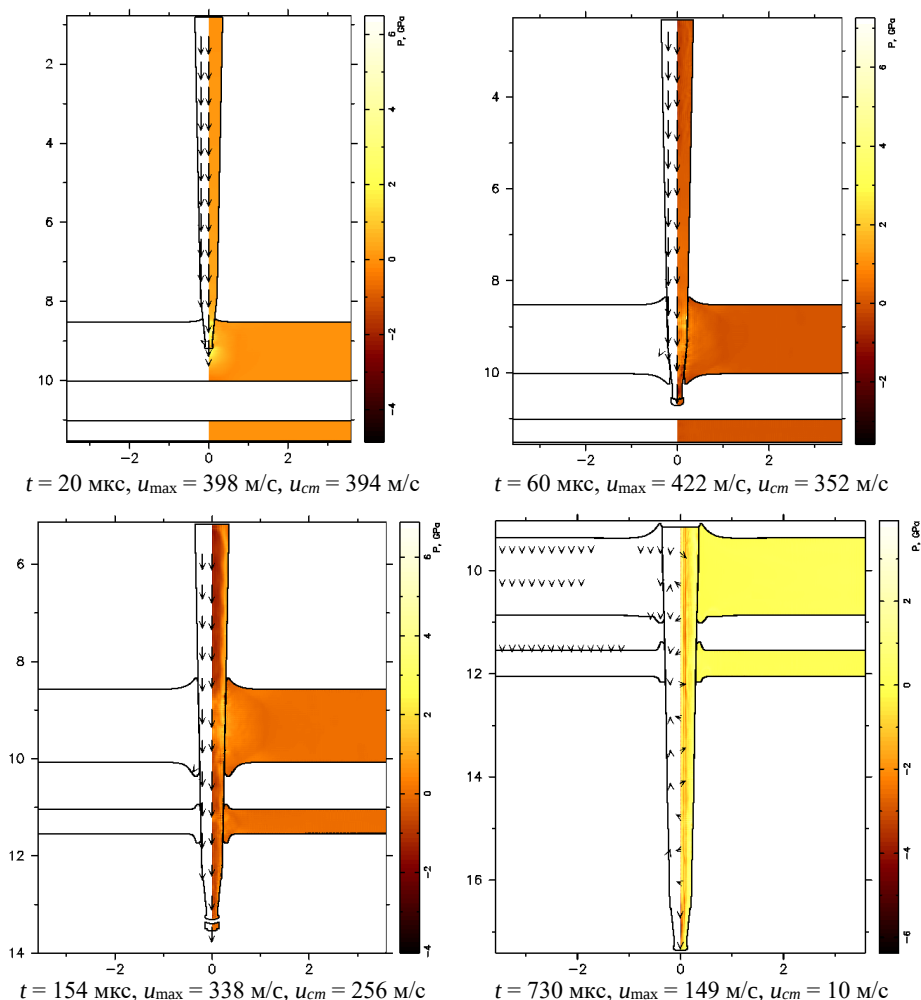


Рис. 3. Хронограмма взаимодействия ударника со стальной разнесенной преградой толщиной 15 + 5 мм при скорости 400 м/с

Fig. 3. Chronogram of the projectile interaction with a 15 + 5-mm-thick spaced steel barrier at a velocity of 400 m/s

В правой полуплоскости рисунков показано поле давления p (ГПа), в левой – поле вектора массовой скорости; t – время, $u_{\max}$ – модуль самого длинного вектора, u_{cm} – величина осевой составляющей вектора скорости центра масс ударника. Шкала дана в сантиметрах.

Ударник в процессе взаимодействия прокалывает обе пластины преграды и в итоге застревает в ней. При времени $t = 154$ мкс видно, что ударник выбивает небольшой фрагмент преграды.

Для определения минимальной скорости сквозного пробития повысим скорость до 500 м/с. Процесс взаимодействия ударника с преградой 15 + 5 мм показан на рис. 4.

Ударник при скорости 500 м/с разнесенную стальную преграду 15 + 5 мм пробивает насквозь. Скорость после пробития равна 152 м/с. Как и в предыдущем расчете, происходит выбивание фрагмента преграды и ударник незначительно деформируется. Данную скорость можно считать минимально необходимой для сквозного пробития разнесенной стальной преграды толщиной 15 + 5 мм.

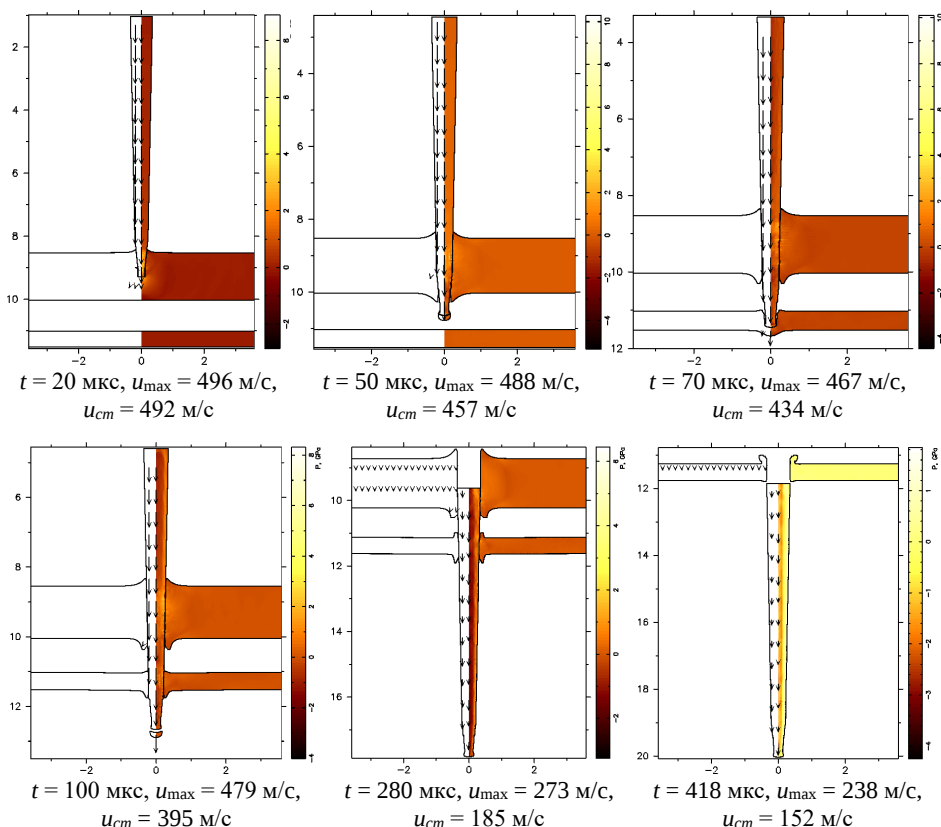


Рис. 4. Хронограмма взаимодействия ударника со стальной разнесенной преградой толщиной 15 + 5 мм при скорости 500 м/с

Fig. 4. Chronogram of the projectile interaction with a 15 + 5-mm-thick spaced steel barrier at a velocity of 500 m/s

При взаимодействии с монолитной преградой толщиной 60 мм ударник сильно деформируется на глубине 25 мм. Поэтому первая пластина разнесенной преграды была выбрана толщиной 25 мм, а вторая – 35 мм. Расчет взаимодействия ударника с разнесенной преградой 25 + 35 мм начинали с 1 300 м/с; полученные результаты представлены на рис. 5.

Разнесенную преграду при скорости 1 300 м/с ударник пробивает насквозь. В момент времени $t = 40 \text{ мкс}$ он сильно деформируется, увеличивает внутренний диаметр отверстия и создает большую выпуклость на тыльной стороне первой пластины. Та деформация, которую приобрел ударник, не способствует его сильному торможению при контакте со второй пластиной, вследствие чего он пробивает

преграду, еще больше деформируется, выбивает огромный фрагмент второй пластины и летит дальше со скоростью 507 м/с.

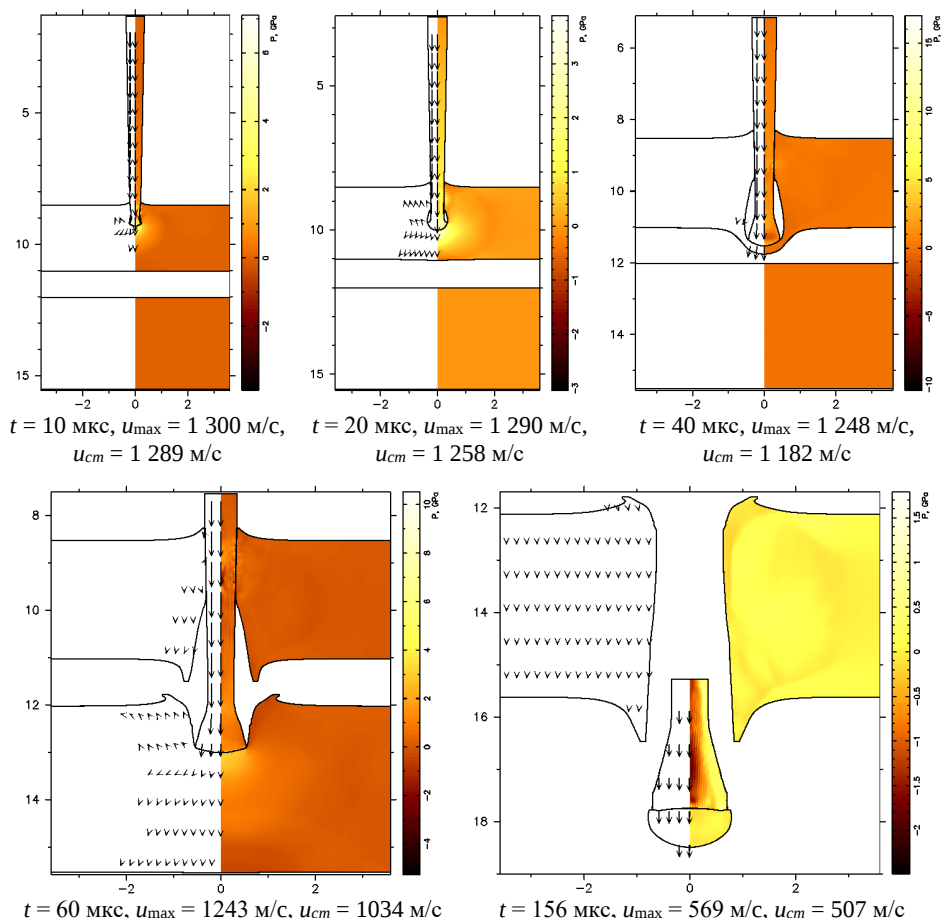


Рис. 5. Хронограмма взаимодействия ударника со стальной разнесенной преградой толщиной 25 + 35 мм при скорости 1300 м/с

Fig. 5. Chronogram of the projectile interaction with a 25 + 35-mm-thick spaced steel barrier at a velocity of 1300 m/s

Чтобы определить минимально необходимую скорость сквозного пробития разнесенной преграды 25 + 35 мм, проведена серия расчетов с шагом по скорости 100 м/с в сторону уменьшения. По результатам проведенной серии из четырех расчетов определено, что минимальная скорость, необходимая для сквозного пробития разнесенной преграды, равна 1000 м/с. Процесс взаимодействия представлен на рис. 6.

Разнесенную преграду ударник при скорости 1000 м/с пробивает насквозь. В момент времени $t = 52 \text{ мкс}$ ударник начинает деформироваться и образует большую выпуклость на тыльной стороне первой пластины. При взаимодействии со второй пластиной продолжается его деформация. Вторую пластину с выбиванием

фрагмента ударник прокалывает насквозь в момент времени $t = 198$ мкс и имеет скорость 314 м/с. Скорость взаимодействия 1 000 м/с можно считать минимально необходимой для сквозного пробития разнесенной преграды толщиной 25 + 35 мм.

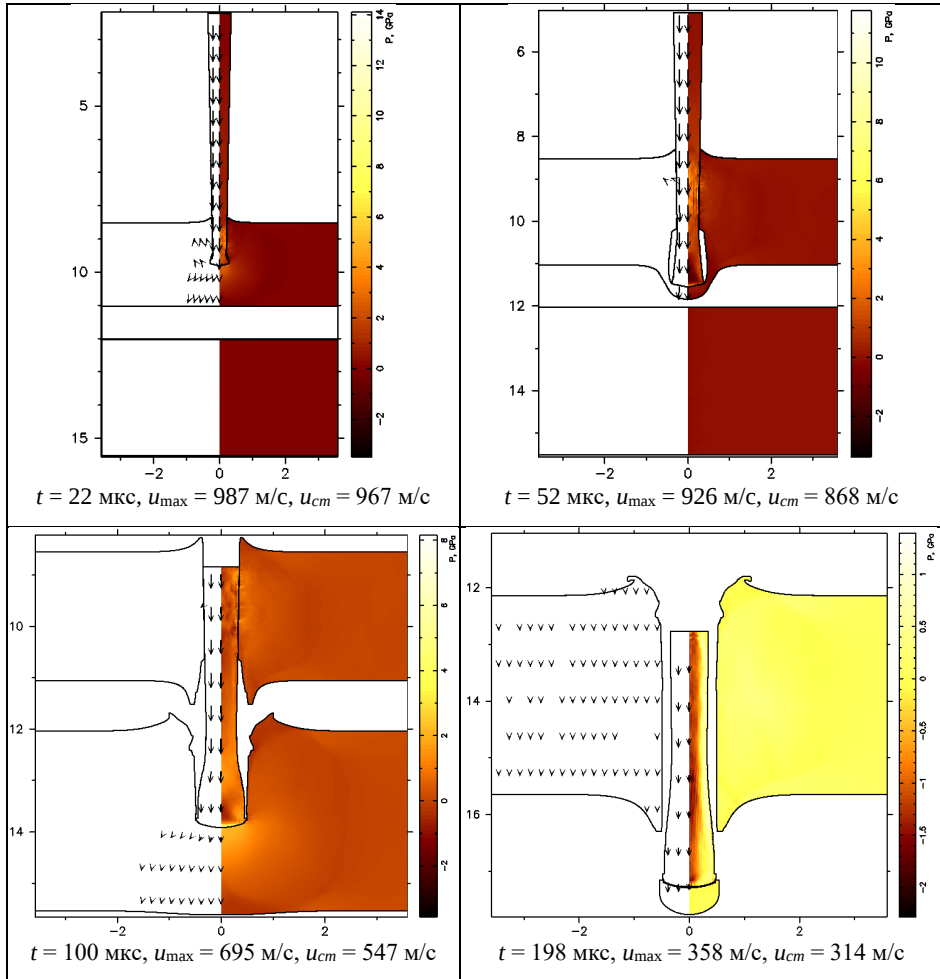


Рис. 6. Хронограмма взаимодействия ударника со стальной разнесенной преградой толщиной 25 + 35 мм при скорости 1 000 м/с

Fig. 6. Chronogram of the projectile interaction with a 25 + 35-mm-thick spaced steel barrier at a velocity of 1000 m/s

Таблица 1

Результаты расчетов разнесенных преград

Номер преграды	1	2	3	4	5
Минимальная скорость $V_{\min}$, м/с	500	600	800	900	1 000
Толщина первой пластины h_1 , мм	15	15	20	20	25
Толщина второй пластины h_2 , мм	5	15	20	30	35

В серии исследований также проводился расчет разнесенных преград толщиной 15+15 мм, 20+20 мм, 20+30 мм. В общем количестве для каждой разнесенной преграды было сделано как минимум по три расчета. Результаты проведенных расчетов с минимально необходимой скоростью представлены в табл. 1.

Данные результаты использовались для сравнения с теми, что были получены в работе [11]. Сравнение представлено в табл. 2.

Таблица 1

Сравнение разнесенных и монолитных преград

Номер преграды	1	2	3	4	5
Минимальная скорость для разнесенной (монолитной) преграды $V_{\min}$, м/с	500 (500)	600 (700)	800 (900)	900 (1 000)	1 000 (1 400)
Толщина разнесенной преграды $h_{\text{раз}}$, мм	15 + 5	15 + 15	20 + 20	20 + 30	25 + 35
Толщина монолитной преграды $h_{\text{мон}}$, мм	20	30	40	50	60

Для монолитной преграды толщиной 20 мм и эквивалентной ей разнесенной преграды толщиной 15 + 5 мм минимально необходимая скорость для сквозного пробития составляет 500 м/с. С увеличением толщины преграды минимально необходимая скорость становится меньше для разнесенной преграды по сравнению с монолитной. На рис. 7 показаны зависимости толщины монолитных и разнесенных преград от скорости.

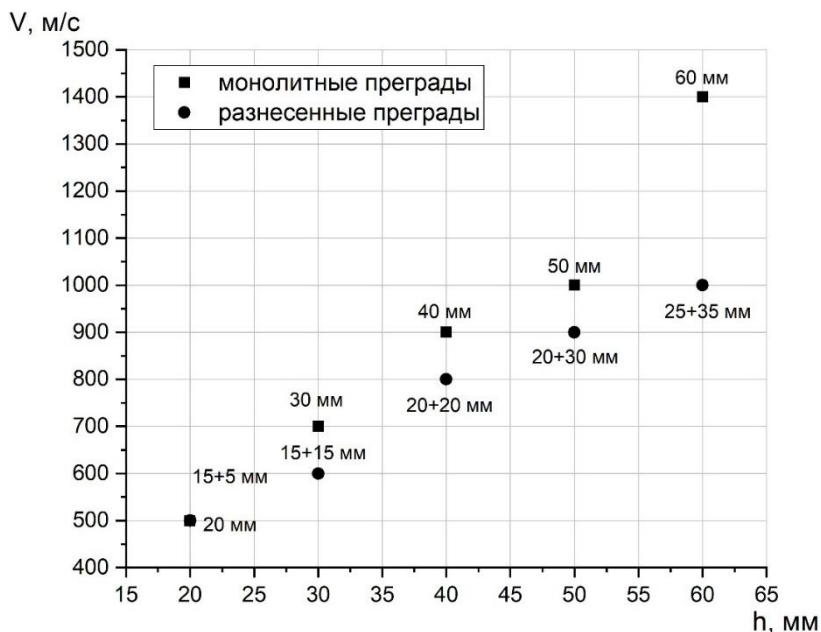


Рис. 7. Зависимости минимальной скорости сквозного пробития от толщины преград; 20...60 мм и 15 + 5 мм – толщины монолитных и разнесенных преград

Fig. 7. Minimum velocity of the complete penetration as a function of the barrier thickness. The thickness of the monolithic and spaced barriers are 20...60 mm and 15 + 5 mm, respectively

Заключение

В проведенных теоретических оценках монолитные преграды показали себя лучше, чем эквивалентные им разнесенные с расстоянием между пластинами 10 мм. Полученные сравнения говорят о том, что нужно проводить более углубленное изучение данного явления, включающее вариации расчетов с разным количеством пластин разнесенной преграды, изменением толщины пластин и расстояния между ними. Также необходимо провести эксперименты, подтверждающие расчеты.

Список источников

1. Герасимов А.В. Численное моделирование соударения длинных стержней со слоисто-разнесенными преградами // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2015. Т. 326, № 1. С. 139–145.
2. Радченко А.В., Радченко П.А. Влияние ориентации механических свойств композиционных материалов на динамическое разрушение монолитных и разнесенных преград // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т. 4, № 4. С. 97–106.
3. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Осипенко К.Ю. Экспериментальное исследование по пробиванию хрупких слоистых преград // Проблемы прочности и пластичности. 2021. Т. 83, № 2. С. 137–150. doi: 10.32326/1814-9146-2021-83-2-137-150
4. Толкачев В.Ф., Зелепугин С.А., Козлов В.С. Механика высокоскоростного соударения стержневых ударников с комбинированными преградами // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2016. Т. 21, № 3. С. 1354–1357. doi: 10.20310/1810-0198-2016-21-3-1354-1357
5. Иванов Р.С., Зеленов А.Н., Дикий А.Е. Расчетно-экспериментальное определение внедрения проникающих с различными формами головных частей в разнесенные железобетонные преграды // Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики – 2021: материалы XI Всерос. науч. конф. с междунар. участием, Томск, 17–21 ноября 2021 г. / под ред. М.Ю. Орлова. Томск : Нац. исслед. Том. гос. ун-т, 2022. С. 44–48.
6. Акашева Е.П., Меркурьев И.Н., Хазов С.Е. Моделирование воздействия бронебойно-зажигательной пули на разнесенные преграды с учетом угла атаки // Супервычисления и математическое моделирование: труды XVII Междунар. конф., Саров, 15–19 октября 2018 г. Саров: Рос. фед. ядерный центр – Всерос. науч.-исслед. ин-т экспериментальной физики, 2019. С. 32–37. doi: 10.53403/9785951504418_32
7. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Табаченко А.Н., Афанасьева С.А., Югов А.А., Федосов О.Ю., Архипов И.Н. Исследование особенностей деформирования и разрушения длинных стержней при наклонном соударении с конструкцией из пространственно-разнесенных преград // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2008. № 3 (20). С. 123–134.
8. Афанасьева С.А., Белов Н.Н., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Евтюшкин Е.В., Зыков Е.Н., Иценко А.Н., Монахов Р.Ю., Родионов А.А., Хабибуллин М.В., Югов Н.Т. Особенности высокоскоростного взаимодействия ударников с преградами, защищенными слоем воды // Известия вузов. Физика. 2013. Т. 56, № 4. С. 8–15.
9. Иценко А.Н., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Рогаев К.С., Саммель А.Ю., Сидоров А.Д., Степанов Е.Ю., Чупашев А.В. Взаимодействие суперкавитирующих ударников с подводными преградами // Инженерно-физический журнал. 2022. Т. 95, № 4. С. 1012–1016.
10. Афанасьева С.А., Бондарчук И.С., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Иценко А.Н., Рогаев К.С., Саммель А.Ю., Сидоров А.Д., Степанов Е.Ю., Чупашев А.В. Экспериментально-теоретические исследования особенностей высокоскоростного движения в воде суперкавитирующих ударников, изготовленных из разных материалов // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94, № 6. С. 1528–1537.

11. Буркин В.В., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Саммель А.Ю., Степанов Е.Ю., Хабибуллин М.В., Чупашев А.В. Экспериментально-теоретическая оценка минимальной скорости сквозного пробития подводной стальной преграды суперкавитирующим ударником // Инженерно-физический журнал. 2024. Т. 97, № 1. С. 226–231.
12. Белов Н.Н., Демидов В.Н., Ефремова Л.В., Жуков А.В., Николаев А.П., Симоненко В.Г., Трушков В.Г., Хабибуллин М.В., Шиловский И.Е., Шуталев В.Б. Компьютерное моделирование динамики высокоскоростного удара и сопутствующих физических явлений // Известия вузов. Физика. 1992. № 8. С. 5–48.
13. Пат. № 2683148 С1 Российская Федерация, МПК G01M 10/00, F41F 3/07. Гидробаллистический стенд: № 2017135871: заявл. 09.10.2017; опубл. 26.03.2019; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» (ТГУ). Буркин В.В., Ищенко А.Н., Майстренко И.В., Фуфачев В.М., Дьячковский А.С., Бураков В.А., Корольков Л.В., Степанов Е.Ю., Чупашев А.В., Рогаев К.С., Саммель А.Ю., Сидоров А.Д.
14. Хабибуллин М.В. Численное моделирование взаимодействия высокоскоростного ударника с системой пространственно разнесенных мишеней // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1997. Вып. 3. С. 18–24.
15. Хабибуллин М.В., Афанасьева С.А. Расчет явлений, происходящих в конденсированных средах в результате интенсивных импульсных воздействий, в осесимметричной постановке: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012617301. М.: Фед. служба по интеллектуальной собственности, 2012. 80 с.

References

1. Gerasimov A.V. (2015) Chislennoe modelirovanie soudareniya dlinnykh sterzhney so sloistozraznennymi pregradami [Numerical simulation of long rods collision with layered-spaced barriers]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. 326(1), pp. 139–145.
2. Radchenko A.V., Radchenko P.A. (2011) Vliyanie orientatsii mekhanicheskikh svoystv kompozitsionnykh materialov na dinamicheskoe razrushenie monolitnykh i raznennnykh pregrad [Influence of orientation of mechanical properties of composite materials on dynamic fracture of monolithic and spaced targets]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*. 4(4), pp. 97–106. doi: 10.7242/1999-6691/2011.4.4.44
3. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Osipenko K.Yu. (2021) Eksperimental'noe issledovanie po probivaniyu khrupkikh sloistykh pregrad [Experimental study on perforation of brittle layered obstacles]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*. 83(2), pp. 137–150. doi: 10.32326/1814-9146-2021-83-2-137-150
4. Tolkachev V.F., Zelepugin S.A., Kozlov V.S. (2016) Mekhanika vysokoskorostnogo soudareniya sterzhnevnykh udarnikov s kombinirovannymi pregradami [The mechanics of high velocity impact of rod projectiles with combine targets]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series Natural and Technical Sciences*. 21(3), pp. 1354–1357. doi: 10.20310/1810-0198-2016-21-3-1354-1357
5. Ivanov R.S., Zelenov A.N., Dikiy A.E. (2022) Raschyotno-eksperimental'noe opredelenie vnedreniya pronikately s razlichnymi formami golovnykh chastey v raznesyonnye zhelezobetonnye pregradы [Computational and experimental determination of the penetration of impactor with various forms of warheads into spaced reinforced concrete barriers]. *Proceedings of the XI All-Russian Scientific Conference with International Participation "Current Issues of Continuum Mechanics and Celestial Mechanics – 2021"*. Tomsk: National Research Tomsk State University, pp. 44–48.
6. Akasheva E.P., Merkur'ev I.N., Khazov S.E. (2019) Modelirovanie vozdeystviya broneboynozazhigatel'noy puli na raznennnye pregradы s uchyotom ugla ataki [Modelling of the armour-

- piercing incendiary bullet impact with yaw angle on spaced targets]. *Proceedings of the XVII International Conference "Supercomputing and Mathematical Modeling"*. Sarov: Russian Federal Nuclear Center - All-Russian Research Institute of Experimental Physics. pp. 32–37. doi: 10.53403/9785951504418_32
7. Belov N.N., Yugov N.T., Tabachenko A.N., Afanas'eva S.A., Yugov A.A., Fedosov O.Yu., Arkhipov I.N. (2008) Issledovanie osobennostey deformirovaniya i razrusheniya dlinnykh sterzhney pri naklonnom soudarenii s konstruktivnykh iz prostranstvenno-raznesennykh pregrad [Research of features of deformation and destruction of long cores at inclined impact with the structure from the spatially-carried barrier]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture*. 3(20). pp. 123–134.
 8. Afanas'eva S.A., Belov N.N., Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Evtyushkin E.V., Zykov E.N., Ishchenko A.N., Monakhov R.Yu., Rodionov A.A., Khabibullin M.V., Yugov N.T. (2013) Special features of high-speed projectile interaction with barriers protected by a water layer. *Russian Physics Journal*. 56(4). pp. 8–15.
 9. Ishchenko A.N., Burkin V.V., D'yachkovskii A.S., Rogaev K.S., Sammel' A.Yu., Sidorov A.D., Stepanov E.Yu., Chupashev A.V. (2022) Interaction of supercavitating strikers with underwater obstacles. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 95(4). pp. 997–1001. doi: 10.1007/s10891-022-02553-4
 10. Afanas'eva S.A., Bondarchuk I.S., Burkin V.V., D'yachkovskii A.S., Ishchenko A.N., Rogaev K.S., Sammel' A.Yu., Sidorov A.D., Stepanov E.Yu., Chupashev A.V. (2021) Experimental and theoretical investigations of the specific features of high-velocity motion of supercavitating strikers made of various materials in water. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 94(6). pp. 1494–1503. doi: 10.1007/s10891-021-02429-z
 11. Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Sammel' A.Yu., Stepanov E.Yu., Khabibullin M.V., Chupashev A.V. (2024) Experimental-theoretical assessment of the minimum velocity of through penetration of an underwater steel barrier by a supercavitating striker. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 97(1). pp. 223–228. doi: 10.1007/s10891-024-02887-1
 12. Belov N.N., Demidov V.N., Efremova L.V., Zhukov A.V., Nikolaev A.P., Simonenko V.G., Trushkov V.G., Khabibullin M.V., Shipovskiy I.E., Shutalev V.B. (1992) Komp'yuternoe modelirovanie dinamiki vysokoskorostnogo udara i soputstvuyushchikh fizicheskikh yavleniy [Computer modeling of high-speed impact dynamics and related physical phenomena]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 8. pp. 5–48.
 13. Burkin V.V., Ishchenko A.N., Maystrenko I.V., Fufachev V.M., D'yachkovskiy A.S., Burakov V.A., Korol'kov L.V., Stepanov E.Yu., Chupashev A.V., Rogaev K.S., Sammel' A.Yu., Sidorov A.D. (2019) *Gidroballisticheskiy stend: № 2017135871* [Hydroballistic testing unit No. 2017135871]. RF Patent 2683148.
 14. Khabibullin M.V. (1997) Chislennoe modelirovanie vzaimodeystviya vysokoskorostnogo udarnika s sistemoy prostranstvenno raznesennykh misheney [Numerical modeling of the interaction of a high-speed projectile with a system of spaced targets]. "VANT" *Seriya: Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov – VANT "Mathematical Simulation of Physical Processes"*. 3. pp. 18–24.
 15. Khabibullin M.V., Afanas'eva S.A. (2012) *Raschet yavleniy, proiskhodyashchikh v kondensirovannykh sredakh v rezul'tate intensivnykh impul'snykh vozdeystviy, v osesimmetrichnoy postavke* [Calculation of phenomena occurring in condensed media as a result of intense pulsed impacts in an axisymmetric formulation]. Certificate of State Registration of a Computer Program No. 2012617301. Moscow: Federal Service for Intellectual Property.

Сведения об авторах:

Буркин Виктор Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором 71 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

Ищенко Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Саммель Антон Юрьевич – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: anton_sammel@mail.ru

Хабибуллин Марат Варисович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: lenmar07@rambler.ru

Information about the authors:

Burkin Viktor V. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

Ishchenko Aleksandr N. (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Sammel' Anton Yu. (Junior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anton_sammel@mail.ru

Khabibullin Marat V. (Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lenmar07@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 18.12.2023; принята к публикации 10.04.2025

The article was submitted 18.12.2023; accepted for publication 10.04.2025

Научная статья

УДК 539.31, 539.42

doi: 10.17223/19988621/94/11

Условия обратимого деформирования плоских тел, ослабленных вырезом

Вадим Вадимович Глаголев¹, Виктор Вячеславович Козлов²,
Алексей Александрович Маркин³

^{1, 2, 3} Тульский государственный университет, Тула, Россия

¹ vadim@tsu.tula.ru

² vvkozlovtsu@mail.ru

³ markin-nikram@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается деформация тела в форме плоского слоя, ослабленного вырезом. В качестве условия достижения предела обратимого деформирования предлагается использовать поток энергии формоизменения через участок дуги выреза в окрестности точки максимума энергии формоизменения, пропорциональный линейному параметру. Предложен способ определения порогового значения линейного параметра из анализа зависимости внешней нагрузки, соответствующей достижению предела упругости, от максимального радиуса кривизны выреза.

Ключевые слова: поток свободной энергии, предельная упругая нагрузка, полоса с вырезом

Благодарности: Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Для цитирования: Глаголев В.В., Козлов В.В., Маркин А.А. Условия обратимого деформирования плоских тел, ослабленных вырезом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 136–148. doi: 10.17223/19988621/94/11

Original article

Conditions for the reversible deformation of planar bodies weakened by a cut

Vadim V. Glagolev¹, Viktor V. Kozlov², Aleksey A. Markin³

^{1, 2, 3} Tula State University, Tula, Russian Federation

¹ vadim@tsu.tula.ru

² vvkozlovtsu@mail.ru

³ markin-nikram@yandex.ru

Abstract. The body deformation in terms of a planar layer weakened by a cut is considered. As the radius of curvature of the cut tends to zero at the maximum free-energy point,

the cut transforms into a mathematical cut. The use of classical conditions for determining the elastic limit leads to the formation of plastic regions under an arbitrarily small external load. To solve this problem, the free energy flow through a cutout arc section is introduced as the product of the free energy density at the point of its maximum and a linear parameter. The free energy flow is represented by the sum of the volumetric- and shape-change energy flows. The energy flow of the shape change is limited by the elastic limit as a result of the accepted generalized condition of reversible deformation. When moving to technological cutouts, converting this condition into the Mises criterion allows one to obtain the threshold length of the linear parameter. For bodies with technological cutouts, the external load corresponding to the elastic limit depends on the curvature radius. For crack-like notches with radii of curvature varying from a threshold value to zero, the external load is constant. Based on the known asymptotic solutions, the external loads corresponding to the elastic limit are obtained using a threshold linear parameter.

Keywords: free energy flow, ultimate elastic load, strip with a cut

Acknowledgments: This study was carried out within the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation (No. FEWG-2023-0002).

For citation: Glagolev, V.V., Kozlov, V.V., Markin, A.A. (2025) Conditions for the reversible deformation of planar bodies weakened by a cut. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 136–148. doi: 10.17223/19988621/94/11

Введение

Рассматривается деформация тела в форме плоского слоя, ослабленного симметричным вырезом. Границы слоя и распределение внешней нагрузки симметричны относительно оси выреза. При стремлении радиуса кривизны в точке пересечения границы выреза с плоскостью симметрии – минимального радиуса кривизны выреза, к нулю вырез переходит в математический разрез. Уменьшение радиуса кривизны в этой точке приводит к неограниченному росту напряжений и удельной свободной энергии. В результате имеем известный парадокс: использование классических условий для определения предела упругости приводит к началу образования пластических областей при сколь угодно малой внешней нагрузке. В классической модели трещины Гриффитса [1] длина пластической зоны в соответствии с поправкой Ирвина пропорциональна квадрату коэффициента интенсивности напряжений (КИН) [2–4]. Для нахождения КИН используются различные подходы [5–9]. При использовании моделей типа Леонова–Панасюка–Дагдейла [10] длина пластической зоны также начинает расти с ростом внешней нагрузки от нулевого значения, что отражается в формуле Дагдейла. В работе [11] дан обстоятельный обзор моделей учета влияния пластических областей в окрестности сингулярных точек на напряженно-деформированное состояние твердого тела с трещиной. Предложена модель, основанная на определении зон пластичности, исходя из распределения напряжений в результате внешней разгрузки. В статьях [12, 13] используется пластический КИН.

Однако остается открытым вопрос о возможности определения экспериментально обоснованного значения внешней нагрузки, соответствующего обратимому (упругому) деформированию тел, ослабленных вырезами малой кривизны вплоть до математического разреза. Для решения данной проблемы рассмотрим поток свободной энергии через участок дуги выреза в окрестности точки максимума

свободной энергии [14]. Данный поток представляется в виде произведения плотности свободной энергии в точке максимума свободной энергии на линейный параметр (ЛП). В работах [14–16] такое произведение называется энергетическим. Нелокальные критерии квазихрупкого разрушения использовались в статьях [17–19]. Принимается существование порогового значения ЛП, до достижения которого поток свободной энергии не изменяется и совпадает с потоком, накапливаемым, в соответствии с формулой Ирвина, в окрестности кончика математического разреза. Окрестность границы выреза, для которой выполняется данное условие, называем дугой взаимодействия (ДВ), а соответствующие вырезы называем трещиноподобными. При стремлении ЛП к нулю радиус кривизны в точке максимума свободной энергии ДВ также стремится к нулю. Когда радиус кривизны превышает пороговое значение, ЛП не изменяется (остается пороговым). Такие вырезы называем технологическими.

Поток свободной энергии через ДВ представлен суммой потока энергии объемного изменения и потока энергии формоизменения. В отличие от работы [20], где предел упругости полагался независимым от ЛП, принимается обобщенное условие обратимого деформирования: поток энергии формоизменения через ДВ ограничен универсальной для данного материала величиной – пределом упругости потока энергии формоизменения. Требование следования из этого условия критерия Мизеса при переходе к технологическим вырезам позволяет получить пороговую длину ЛП. Данная величина определяется как отношение предела упругости потока энергии формоизменения к пределу упругости плотности энергии формоизменения. Для тел с технологическими вырезами внешняя нагрузка, соответствующая достижению предела упругости потоком энергии формоизменения, называемая внешним пределом упругости, зависит от минимального радиуса кривизны выреза. Для трещиноподобных вырезов с радиусами кривизны меньше порогового внешний предел упругости постоянен и определяется через пороговый радиус кривизны. Используя известные асимптотические решения для вырезов с малыми радиусами кривизны [21], получены представления внешних пределов упругости через пороговый радиус кривизны.

1. Постановка задачи

Рассматривается материальный слой ширины b , толщины h , ослабленный вырезом глубины a с радиусом кривизны ρ в точке A (рис. 1). Уравнение выреза представим в параметрическом виде:

$$x_1 = x_1(\alpha_2), \quad x_2 = x_2(\alpha_2), \quad (1.1)$$

с началом отсчета в точке A с координатами $x_1 = a; x_2 = 0$.

При $\rho = 0$ вырез (1.1) вырождается в математический разрез. Максимальное значение плотности свободной энергии ψ_0 достигается в точке минимума радиуса кривизны.

Определим поток свободной энергии через участок границы выреза с дуговой координатой $-\frac{S_p}{2} \leq S \leq \frac{S_p}{2}$ (рис. 2) в виде:

$$2\gamma = \int_{-\frac{S_p}{2}}^{\frac{S_p}{2}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \psi ds, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к поверхности выреза; $\mathbf{e}$ – единичный вектор вдоль вектора потока; S_p – длина ДВ.

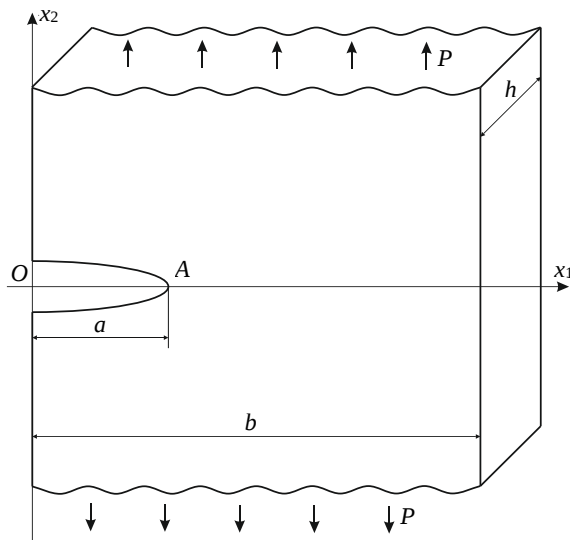


Рис. 1. Схема модели
Fig. 1. Schematic design of the model

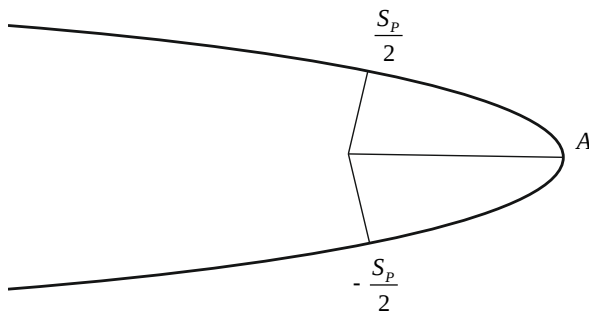


Рис. 2. Окрестность точки A
Fig. 2. Vicinity of point A

Представим выражение (1.2) в виде:

$$2\gamma = \delta_0 \psi_0(\rho), \quad (1.3)$$

где δ_0 – ЛП.

Из выражений (1.2) и (1.3) получим связь

$$\delta_0 = \int_{-\frac{S_p}{2}}^{\frac{S_p}{2}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \frac{\psi}{\psi_0} ds \quad (1.4)$$

Из (1.4) следует, что при $S_p \rightarrow 0$, $\delta_0 \rightarrow 0$, поверхность выреза свободна от внешней нагрузки. Процесс нагружения остальной поверхности тела полагаем простым:

внешние нагрузки пропорциональны параметру внешнего нагружения t . При этом плотность свободной энергии неограниченно растет с уменьшением радиуса кривизны при сколь угодно малом t и постоянном a . В то же время поток свободной энергии принимает конечное значение, когда вырез переходит в математический разрез. В соответствии с формулой Ирвина [2] при нагружении по моде I имеем

$$2\gamma_0 = \frac{K_1^2}{\hat{E}}, \quad (1.5)$$

где $\hat{E} = E$ – модуль Юнга при плоском напряженном состоянии; $\hat{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$ – при плоском деформированном состоянии; K_1 – коэффициент интенсивности напряжений.

Потребуем, чтобы у вырезов на отрезке изменения ЛП $0 \leq \delta_0 \leq \delta_0^*$ потоки свободной энергии (1.3) и (1.5) совпадали при одинаковом значении параметра t . В результате для вырезов с радиусами кривизны $0 \leq \rho \leq \rho^*$ в соответствии с представлениями (1.3) и (1.5) должны выполняться условия

$$2\gamma(\rho, t) = 2\gamma(t) = \delta_0^* \psi_0(\rho, t) = \delta_0^* \psi_0(\rho^*, t) = 2\gamma_0. \quad (1.6)$$

Окрестность, для которой выполняются условия (1.6), образуют ДВ. Условия (1.6) устанавливают связь между радиусом кривизны и ЛП, обеспечивающую независимость от них потока свободной энергии через ДВ (1.3) на отрезке $0 \leq \rho \leq \rho^*$. Такие вырезы будем называть трещиноподобными.

Для вырезов с радиусами кривизны $\rho \geq \rho^*$ поток энергии в соответствии с представлением (1.3) принимаем в виде, зависящем от радиуса кривизны при неизменном (пороговом) значении ЛП $\delta_0 = \delta_0^*$:

$$2\gamma = 2\gamma_{\rho} = \delta_0^* \psi_0(\rho, t), \quad \rho \geq \rho^*. \quad (1.7)$$

Вырезы, удовлетворяющие условию (1.7), можно назвать технологическими. Возникает вопрос о возможности определения порогового значения ЛП.

2. Условия обратимого деформирования

Обратимое течение процесса нагружения тел из металлических материалов ограничено пределами упругости. Как показывают эксперименты, гидростатическое нагружение изотропных материалов происходит обратимо [22], а переход к необратимому состоянию связан с изменением формы материальной частицы. В связи с этим представим плотность свободной энергии в виде суммы плотности энергии изменения формы и плотности энергии изменения объема [22]:

$$\Psi = \Psi_{\sigma} + \Psi_{\tau}. \quad (2.1)$$

$$\Psi_{\sigma} = \frac{\sigma^2}{2K}; \quad \Psi_{\tau} = \frac{\tau^2}{4G}, \quad (2.2)$$

где G и K – материальные константы; $\sigma = \frac{1}{3} \mathbf{\hat{E}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$ – среднее (гидростатическое) напряжение; $\mathbf{\hat{E}}$ – единичный тензор; $\tau^2 = \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$ – свертка девиатора напряжений (квадрат интенсивности напряжений).

Условие обратимого нагружения по Мизесу имеет вид [22]:

$$\tau^2 = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma} \leq \frac{2}{3} \sigma_e^2, \quad (2.3)$$

где σ_e – предел упругости при растяжении.

Из выражений (2.2) и (2.3) получим энергетическую форму условия Мизеса

$$\psi_\tau \leq \psi_e = \frac{1}{6G} \sigma_e^2, \quad (2.4)$$

где ψ_e – энергетический предел упругости.

Непосредственное использование условий (2.3), (2.4) для определения значения параметра внешней нагрузки t_e , соответствующего достижению предела упругости, приводит к известным парадоксам. А именно, в случае математического разреза ввиду сингулярности свободной энергии переход происходит при сколь угодно малой внешней нагрузке. В связи с этим возникает проблема формулировки условия обратимого деформирования тел с трещиноподобными вырезами с радиусами кривизны на отрезке $0 \leq \rho \leq \rho^*$. При $\rho \geq \rho^*$ данное условие должно переходить в условие Мизеса (2.4).

Исходя из условий (1.3) и (2.1), получим аддитивную форму разделения потока энергии в виде:

$$2\gamma = 2\gamma_\tau + 2\gamma_\sigma, \quad (2.5)$$

где $2\gamma_\sigma = \psi_\sigma \delta_0$ – поток энергии объемного изменения; $2\gamma_\tau = \psi_\tau \delta_0$ – поток энергии формоизменения.

Представим условие обратимого деформирования в следующей форме: поток энергии формоизменения через ДВ ограничен универсальной для данного материала величиной – пределом упругости потока

$$2\gamma_\tau \leq 2\gamma_e, \quad (2.6)$$

где $2\gamma_e$ – предел упругости потока формоизменения.

Для технологических вырезов с $\rho \geq \rho^*$ условие (2.6) в соответствии с (1.7) принимает вид:

$$2\gamma_\tau = \psi_\tau \cdot \delta_0^* \leq 2\gamma_e. \quad (2.7)$$

Условие (2.7) сводится к условию Мизеса (2.3), (2.4), если пороговое значение ЛП определить как отношение предела упругости потока к пределу упругости плотности энергии формоизменения:

$$\delta_0^* = \frac{2\gamma_e}{\psi_e} = \frac{2\gamma_e \cdot 6G}{\sigma_e^2}. \quad (2.8)$$

Из условия (2.8) следует, что размеры ДВ ограничены отрезком $0 \leq \delta_0 \leq \delta_0^*$. При этом, когда $\rho \geq \rho^*$, ЛП остается неизменным, а $\delta_0 = \delta_0^*$.

3. Общий случай асимптотических вырезов

В работе [21] приведены асимптотические формулы распределения напряжений в окрестности точки $x_1 = a$; $x_2 = 0$ выреза. Используется полярная система

координат с центром в точке $x_1 = a - \frac{\rho}{2}$; $x_2 = 0$. Распределение напряжений вдоль осевой прямой $x_1 = a$; $x_2 = 0$ имеет вид:

$$\sigma_{11} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \frac{\rho}{2r}\right); \quad \sigma_{22} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \frac{\rho}{2r}\right); \quad r \geq \frac{\rho}{2}. \quad (3.1)$$

При $\rho = 0$ имеем распределение напряжений на продолжении математического разреза.

Формулы (3.1) применимы для различных видов нормального отрыва (мода 1), задаваемых соответствующим КИН. Напряжения в точке $x_1 = a$; $x_2 = 0$ получаем из (3.1):

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = \frac{2K_1}{\sqrt{\pi\rho}}. \quad (3.2)$$

Находим выражение плотности свободной энергии в точке максимума. Используя (3.2), получим

$$\psi_0 = \frac{1}{\hat{E}} \frac{2K_1^2}{\pi\rho}. \quad (3.3)$$

Найдем связь ЛП и радиуса кривизны на отрезке $0 \leq \rho \leq \rho^*$. Используя условия (1.6) и полагая $t = P$, получим

$$\delta_0 \psi_0(\rho, P) = 2\gamma_0. \quad (3.4)$$

Из условий (3.3) и (3.4) определяем связь между ЛП и радиусом кривизны. Представляя поток свободной энергии формулой Ирвина (1.5), находим

$$\rho = \frac{2\delta_0}{\pi}. \quad (3.5)$$

Определим предел упругости по КИН при плоском напряженном состоянии. В этом случае компоненты тензора напряжений с учетом (3.2) и (3.5) принимают вид:

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = \frac{\sqrt{2}K_1}{\sqrt{\delta_0}}, \quad \sigma_{33} = 0 \quad (3.6)$$

Из (2.2) и (3.6) получим плотность энергии формоизменения в виде: $\psi_\tau = \frac{\tau^2}{4G} = \frac{K_1^2}{3G\delta_0}$. Отсюда по определению (2.5) находим поток энергии формоизменения:

$$2\gamma_\tau = \psi_\tau \delta_0 = \frac{K_1^2}{3G} = \frac{2K_1^2(1+\nu)}{3E} \leq 2\gamma_e. \quad (3.7)$$

При этом поток энергии изменения объема принимает вид:

$$2\gamma_\sigma = \psi_\sigma \delta_0 = \frac{\sigma^2}{2K} \delta_0 = \frac{K_I^2(1-2\nu)}{3E}. \quad (3.8)$$

Из (2.5), (3.7), (3.8) и (1.6) приходим к следующему выражению:

$$2\gamma = 2\gamma_0 = \frac{K_I^2(1-2\nu)}{3E} + \frac{2K_1^2(1+\nu)}{3E} = \frac{K_1^2}{\hat{E}}. \quad (3.9)$$

Из условия (2.6) определяем предел упругости по КИН

$$K_{1e} = \sqrt{3G2\gamma_e}.$$

Используя формулу (2.8), представим K_{1e} через пороговый ЛП:

$$K_{1e} = \sigma_e \sqrt{\frac{\delta_0^*}{2}}. \quad (3.10)$$

Найдем предел упругости по КИН при плоском деформированном состоянии. В этом случае компоненты тензора напряжений определяются из закона Гука:

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = \frac{\sqrt{2}K_1}{\sqrt{\delta_0}}, \quad \sigma_{33} = \nu\sigma_{22}. \quad (3.11)$$

Из (3.11) получим девиаторные составляющие напряжений

$$\tilde{\sigma}_{11} = -\frac{1+\nu}{3}\sigma_{22}, \quad \tilde{\sigma}_{22} = \frac{2-\nu}{3}\sigma_{22}, \quad \tilde{\sigma}_{33} = \frac{2\nu-1}{3}\sigma_{22}. \quad (3.12)$$

Из (3.12) по формуле (2.2) находим плотность энергии формоизменения

$$\psi_\tau = \frac{\tau^2}{4G} = \frac{1-\nu+\nu^2}{3G\delta_0} K_1^2.$$

Отсюда условие обратимости (2.6) принимает вид:

$$2\gamma_\tau = \psi_\tau \delta_0 = \frac{1-\nu+\nu^2}{3G} K_1^2 = \frac{2(1-\nu+\nu^2)(1+\nu)}{3E} K_1^2 \leq 2\gamma_e. \quad (3.13)$$

Из (3.11) поток энергии изменения объема принимает вид:

$$2\gamma_\sigma = \psi_\sigma \delta_0 = \frac{\sigma^2}{2K} \delta_0 = \frac{K_1^2 (1+\nu)^2 (1-2\nu)}{3E}. \quad (3.14)$$

Из (2.5), (3.13), (3.14) и (1.6) приходим к следующему выражению:

$$2\gamma = 2\gamma_0 = \frac{(1+\nu)^2 (1-2\nu)}{3E} K_I^2 + \frac{2(1-\nu+\nu^2)(1+\nu)}{3E} K_1^2 = \frac{K_1^2}{\hat{E}}. \quad (3.15)$$

Выражения (3.9) и (3.15) дают представления потока свободной энергии в случае нагружения по моде 1 суммой инвариантных (зависящих только от модулей упругости) слагаемых, пропорциональных квадрату КИН.

Из условия (3.13) определяем предел упругости по КИН:

$$\hat{K}_{1e} = \sqrt{\frac{3G2\gamma_e}{1-\nu+\nu^2}}.$$

Используя формулу (2.8), представим предел упругости по КИН при плоской деформации через пороговый ЛП:

$$\hat{K}_{1e} = \sigma_e \sqrt{\frac{\delta_0^*}{2(1-\nu+\nu^2)}}. \quad (3.16)$$

Так как КИН пропорциональны параметру внешней нагрузки: $K_1 = tL_1$, представим параметры внешней нагрузки в момент достижения предела упругости при плоском напряженном и деформированном состояниях – внешние пределы упругости – в следующем виде:

$$t_e = \frac{K_e}{L_1}; \quad \hat{t}_e = \frac{\hat{K}_e}{L_1}. \quad (3.17)$$

Здесь L_1 – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения тела и распределения внешней нагрузки вдоль границы сечения; t_e и $\hat{t}_e$ – внешние пределы упругости при плоском напряженном и деформированном состояниях. Отметим, что условия (3.17) справедливы для асимптотических вырезов на отрезке радиусов кривизны $0 \leq \rho \leq \rho^*$, где ρ^* определяется по формуле (3.5). На этом отрезке внешний предел упругости не зависит от радиуса кривизны выреза.

Используя формулы (3.10), (3.16) и (3.17), можно решить обратную задачу – найти пороговый ЛП по величине критической внешней нагрузки, определяемой в испытаниях на трещиностойкость в соответствии с ГОСТ 25.506–85. Для данного типа образца и схемы его нагружения известен КИН и получена зависимость «нагрузка–смещение» (P – v -диаграмма). Отсюда определяем с заданным допуском линейный участок изменения внешней нагрузки $0 \leq P \leq \hat{P}_e$ и предел упругости по

КИН при плоской деформации $K_1 = \hat{K}_e$. Используя формулу (3.16), находим пороговое значение ЛП в виде:

$$\delta_0^* = 2(1 - \nu + \nu^2) \hat{P}_e^2 \left(\frac{L_1}{\sigma_e} \right)^2. \quad (3.18)$$

В случае плоского напряженного состояния $0 \leq P \leq P_e$ и

$$\delta_0^* = 2P_e^2 \left(\frac{L_1}{\sigma_e} \right)^2. \quad (3.19)$$

Отметим, что предельный ЛП, определяемый по формулам (3.18) либо (3.19), как и модули упругости и предел упругости, является универсальной постоянной данного материала. При этом критический поток свободной энергии также является универсальной константой материала. Данные константы связаны условием (2.8).

Рассмотрим бесконечную полосу шириной b с вырезом глубиной a , растягиваемую вдоль оси x_2 распределенной нагрузкой с постоянной интенсивностью P (см. рис. 1).

КИН для такой схемы определяется по формуле Гросса [23]:

$$K_1 = PL_1 = P\sqrt{\pi a}Y,$$

где $Y = 1.12 - 0.23\lambda + 10.53\lambda^2 - 21.72\lambda^3 + 30.39\lambda^4$; $\lambda = \frac{a}{b} < 0.7$.

Из формул (3.10) и (3.16) находим для плоской деформации и плоского напряженного состояния выражения пределов упругости внешней нагрузки в виде:

$$\hat{P}_e = \frac{\sigma_e}{Y} \sqrt{\frac{\delta_0^*}{2\pi a(1 - \nu + \nu^2)}}; \quad P_e = \frac{\sigma_e}{Y} \sqrt{\frac{\delta_0^*}{2\pi a}}. \quad (3.20)$$

Таким образом, если известны материальные константы ν , σ_e , δ_0^* , то внешний предел упругости для данных размеров a , b находим по формулам (3.20). Этот предел одинаков для радиусов кривизны на отрезке $0 \leq \rho \leq \rho^*$, следовательно, справедлив и для математического разреза. Используя формулы (3.20), можно решить обратную задачу: определить по найденному из эксперимента значению внешнего предела упругости величину пороговых ЛП и радиуса кривизны. При этом раз-

меры a , b и материальные константы ν , σ_e известны. В результате из (3.5) и (3.20) относительное пороговое значение радиуса кривизны определится по формулам

$$\hat{\rho}^* = \frac{\rho^*}{a} = \left(\frac{\hat{P}_e Y}{\sigma_e} \right)^2 (1 - \nu + \nu^2) = \left(\frac{P_e Y}{\sigma_e} \right)^2. \quad (3.21)$$

Так как рассматриваются асимптотические вырезы, то $\hat{\rho}^* \ll 1$, и из (3.21) следует, что относительные внешние пределы упругости на порядок превосходят пороговое значение радиуса кривизны. При этом внешний предел упругости плоского деформированного состояния превосходит внешний предел плоского напряженного состояния.

Заключение

Представление потока свободной энергии в форме энергетического произведения (1.3) позволяет выделить трещиноподобные вырезы. Поток энергии через ДВ трещиноподобного выреза не зависит от его кривизны в тупиковой точке и совпадает с потоком через кончик соответствующего математического разреза. При этом поток энергии может быть представлен в виде суммы двух инвариантных слагаемых, а именно потоков изменения формы и объема.

Предложено обобщенное условие упругости в следующей форме: поток упругой энергии формоизменения ограничен универсальной для данного материала величиной – пределом упругости потока. Данное условие позволяет установить значение ЛП (пороговое), соответствующее переходу от трещиноподобных вырезов к технологическим, если известен предел упругости по КИН для данной геометрии тела и схемы его нагружения, а также коэффициент Пуассона и предел упругости на растяжение.

Универсальная связь между ЛП и радиусом кривизны в тупиковой точке трещиноподобного выреза позволяет считать гладкие трещиноподобные вырезы одинаковой длины асимптотически эквивалентными, так как внешний предел упругости у них одинаков. При этом величины внутренних напряжений и значения удельной энергии формоизменения различны. Однако в пороговом вырезе удельная энергия формоизменения не превосходит критерий Мизеса. Это позволяет на упругопластической стадии нагружения порогового выреза использовать классические варианты теории пластичности.

Список источников

1. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. 1921. V. 221. P. 163–189. doi: 10.1098/rsta.1921.0006
2. Irwin G.R. Plastic zone near a crack and fracture toughness // 7th Sagamore Ordnance Materials Research Conf. 1960. P. IV–63.
3. Irwin G.R., Kies J.A. Critical energy rate analysis of fracture strength // Welding Journal Research Supplement. 1954. V. 33. P. 193–198.
4. Irwin G.R. Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control // Engineering Fracture Mechanics. 1968. V. 1, is. 2. P. 241–257. doi: 10.1016/0013-7944(68)90001-5
5. Малик А.В., Лавит И.М. Метод расчета коэффициента интенсивности напряжений для неподвижной трещины нормального разрыва при динамическом нагружении // Вестник

- Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 54. С. 88–102. doi: 10.17223/19988621/54/8
6. Murakami Y. A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method // Engineering Fracture Mechanics. 1976. V. 8 (4). P. 643–655. doi: 10.1016/0013-7944(76)90038-2
 7. Rybicki E.F., Kanninen M.F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral // Engineering Fracture Mechanics. 1977. V. 9 (4). P. 931–938. doi: 10.1016/0013-7744(77)90013-3
 8. Caicedo J., Portela A. Direct computation of stress intensity factors in finite element method // European Journal of Computational Mechanics. 2017. V. 26 (3). P. 309–335. doi: 10.1080/17797179.2017.1354578
 9. Seweryn A., Lukaszewicz A. Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches // Engineering Fracture Mechanics. 2002. V. 69 (13). P. 1487–1510. doi: 10.1016/S0013-7944(01)00138-2
 10. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1960. V. 8 (2). P. 100–104. doi: 10.1016/0022-5096(60)90013-2
 11. Дерюгин Е.Е. Модель трещины с градиентами пластической деформации // Физическая мезомеханика. 2022. Т. 25, № 1. С. 43–65. doi: 10.55652/1683-805X_2022_25_1_43
 12. Захаров А.П., Шлянников В.Н., Иштыряков И.С. Пластический коэффициент интенсивности напряжений в задачах механики разрушения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 100–115. doi: 10.15593/perm.mech/2019.2.08
 13. Hilton P.D., Hutchinson J.W. Plastic intensity factors for cracked plates // Engineering Fracture Mechanics. 1971. V. 3. P. 435–451.
 14. Глаголев В.В., Маркин А.А. Влияние линейного параметра на хрупкое разрушение упругого слоя с круговым отверстием // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 5. С. 159–165. doi: 10.15372/PMTF202315252
 15. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // International Journal of Solids and Structures. 2019. V. 158. P. 141–149. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
 16. Глаголев В.В., Маркин А.А. Модель деформирования ДКБ-образца с упругопластическими свойствами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 2. С. 55–63. doi: 10.15593/perm.mech/2021.2.06
 17. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. A body failure model with a notch based on the scalable linear parameter // PNRPU Mechanics Bulletin. 2018. Is. 4. P. 93–97. doi: 10.15593/perm.mech/2018.4.08
 18. Сукнев С.В. Нелокальные и градиентные критерии разрушения квазихрупких материалов при сжатии // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21, № 4. С. 22–32. doi: 10.24411/1683-805X-2018-14003
 19. Сукнев С.В. Применение подхода механики конечных трещин для оценки разрушения квазихрупкого материала с круговым отверстием // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2021. № 3. С. 13–25. doi: 10.31857/S0572329921020161
 20. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. К нахождению предела упругости адгезионного слоя при его нормальном разрыве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 59–73. doi: 10.17223/19988621/83/6
 21. Creager M. The elastic stress field near the tip of a blunt crack: Master's Thesis. Lehigh University, 1966.
 22. Ильюшин А.А. Пластичность. М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. Ч. 1: Упругопластические деформации. 376 с.
 23. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения. СПб.: Профессия, 2012. 552 с.

References

1. Griffith A.A. (1921) The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*. 221. pp. 163–189. doi: 10.1098/rsta.1921.0006.
2. Irwin G.R. (1960) Plastic zone near a crack and fracture toughness. *7th Sagamore Ordnance Materials Research Conference*. P. IV–63.
3. Irwin G.R., Kies J.A. (1954) Critical energy rate analysis of fracture strength. *Welding Journal Research Supplement*. 33. pp. 193–198.
4. Irwin G.R. (1968) Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control. *Engineering Fracture Mechanics*. 1(2). pp. 241–257. doi: 10.1016/0013-7944(68)90001-5
5. Malik A.V., Lavit I.M. (2018) Metod rascheta koeffitsienta intensivnosti napryazheniy dlya nepodvizhnoy treshchiny normal'nogo razryva pri dinamicheskom nagruzhenii [On the computation method for the stress intensity factor of a stationary crack in mode I under dynamic loading]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 54. pp. 88–102. doi: 10.17223/19988621/54/8
6. Murakami Y. (1976) A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*. 8(4). pp. 643–655. doi: 10.1016/0013-7944(76)90038-2
7. Rybicki E.F., Kanninen M.F. (1977) A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Engineering Fracture Mechanics*. 9(4). pp. 931–938. doi: 10.1016/0013-7744(77)90013-3
8. Caicedo J., Portela A. (2017) Direct computation of stress intensity factors in finite element method. *European Journal of Computational Mechanics*. 26(3). pp. 309–335. doi: 10.1080/17797179.2017.1354578
9. Seweryn A., Lukaszewicz A. (2002) Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches. *Engineering Fracture Mechanics*. 69(13). pp. 1487–1510. doi: 10.1016/S0013-7944(01)00138-2
10. Dugdale D.S. (1960) Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 8(2). pp. 100–104. doi: 10.1016/0022-5096(60)90013-2
11. Deryugin E.E. (2022) Model' treshchiny s gradientami plasticheskoy deformatsii [Crack model with plastic strain gradients]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 25(1). pp. 43–65. doi: 10.55652/1683-805X_2022_25_1_43
12. Zakharov A.P., Shlyannikov V.N., Ishtyryakov I.S. (2019) Plasticheskiy koeffitsient intensivnosti napryazheniy v zadachakh mekhaniki razrusheniya [Plastic stress intensity factor in fracture mechanics]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 100–115. doi: 10.15593/perm.mech/2019.2.08
13. Hilton P.D., Hutchinson J.W. (1971) Plastic intensity factors for cracked plates. *Engineering Fracture Mechanics*. 3. pp. 435–451. doi: 10.1016/0013-7944(71)90057-9
14. Glagolev V.V., Markin A.A. (2023) Effect of a linear parameter on the brittle fracture of an elastic layer with a circular hole. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 64(5). pp. 871–877. doi: 10.1134/S0021894423050164
15. Glagolev V.V., Markin A.A. (2019) Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter. *International Journal of Solids and Structures*. 158. pp. 141–149. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
16. Glagolev V.V., Markin A.A. (2021) Model' deformirovaniya DKB-obraztsa s uprugoplasticheskimi svoystvami [The deformation model of the DCB-sample with elastoplastic properties]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 55–63. doi: 10.15593/perm.mech/2021.2.06

17. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. (2018) A body failure model with a notch based on the scalable linear parameter. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 4. pp. 93–97. doi: 10.15593/perm.mech/2018.4.08
18. Suknev S.V. (2018) Nelokal'nye i gradientnye kriterii razrusheniya kvazi khrupkikh materialov pri szhatii [Nonlocal and gradient fracture criteria for quasi-brittle materials under compression]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 21(4). pp. 22–32. doi: 10.24411/1683-805X-2018-14003
19. Suknev S.V. (2021) Application of the finite fracture mechanics approach to assess the failure of a quasi-brittle material with a circular hole. *Mechanics of Solids*. 56(3). pp. 301–311. doi: 10.3103/S0025654421030110
20. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. (2023) K nakhozhdeniyu predela uprugosti adgezionnogo sloya pri ego normal'nom razryve [On determining the elastic limit of an adhesive layer in the opening mode of loading]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 59–73. doi: 10.17223/19988621/83/6
21. Creager M. (1966) *The Elastic Stress Field Near the Tip of a Blunt Crack*. Master's thesis. Lehigh University.
22. Il'yushin A.A. (1948) *Plastichnost'. Chast' I. Uprugoplasticheskie deformatsii* [Plasticity. Part 1. Elastoplastic deformations]. Moscow–Leningrad: GITTL.
23. Pestrikov V.M., Morozov E.M. (2012) *Mekhanika razrusheniya* [Fracture mechanics]. Saint Petersburg: Professiya.

Сведения об авторах:

Глаголев Вадим Вадимович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (Тула, Россия). E-mail: vadim@tsu.tula.ru

Козлов Виктор Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (Тула, Россия). E-mail: vvkozlovtsu@mail.ru

Маркин Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (Тула, Россия). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

Information about the authors:

Glagolev Vadim V. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: vadim@tsu.tula.ru

Kozlov Viktor V. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: vvkozlovtsu@mail.ru

Markin Aleksey A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 05.04.2024; принята к публикации 10.04.2025

The article was submitted 05.04.2024; accepted for publication 10.04.2025

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/94/12

Решение неосесимметричной задачи термоупругости для трансверсально-изотропных тел вращения

Дмитрий Алексеевич Иванычев

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия, Lsivdmal@mail.ru

Аннотация. Представлен метод определения термоупругого состояния конечного анизотропного тела вращения. Задана температура как функция цилиндрических координат, определяющая температуру в любой точке тела. Задача состоит в определении температурных деформаций и напряжений. Метод решения заключается в разложении искомого термомеханического состояния в ряд Фурье по элементам ортонормированного базиса пространства внутренних состояний. В качестве базисных элементов выступают частные решения пространственной неосесимметричной задачи термоупругости для трансверсально-изотропной среды. Приведено решение задачи для кругового цилиндра, находящегося под действием температурного поля, изменяющегося по закону косинуса угловой координаты.

Ключевые слова: термоупругость, трансверсально-изотропные материалы, пространство состояний, неосесимметричная деформация

Для цитирования: Иванычев Д.А. Решение неосесимметричной задачи термоупругости для трансверсально-изотропных тел вращения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 149–162. doi: 10.17223/19988621/94/12

Original article

Solution to the non-axisymmetric thermoelastic problem for transversely isotropic bodies of rotation

Dmitriy A. Ivanychev

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation, Lsivdmal@mail.ru

Abstract. This paper presents a method for determining the stress-strain state of transversally isotropic bodies of rotation in a steady temperature field varying according to the cyclic law of cosine and sine in a cylindrical coordinate system.

The problem is solved in terms of the definitions of the boundary conditions method. This method is based on the space of internal states, which includes displacements, deformations, stresses, and temperature functions. Using the method of integral superpositions, the relation between the spatial stress-strain state of an elastic transversally isotropic body of rotation and some auxiliary two-dimensional states is determined. The auxiliary states

are presented as a general solution to the plane thermoelastostatic problem for a transversely isotropic material. This general solution is used to construct the basis of internal states. After orthogonalization of the basis, the desired state is expanded into a Fourier series with identical coefficients in the form of quadratures. The problem of the theory of thermoelasticity for a transversally isotropic circular cylinder in a temperature field specified according to a harmonic law is solved.

Keywords: thermoelasticity, transversely isotropic materials, state space, non-axisymmetric deformation

For citation: Ivanychev, D.A. (2025) Solution to the non-axisymmetric thermoelastic problem for transversely isotropic bodies of rotation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 149–162. doi: 10.17223/19988621/94/12

Введение

Решению задач термоупругости для тел из анизотропных материалов с той или иной симметрией упругих свойств посвящено множество публикаций. Например, в работе [1] исследуются задачи термомеханики для неоднородных анизотропных сред. Предлагаемый подход решения задачи предполагает разбиение на подзадачи структурного и параметрического синтеза, каждая из которых решается разными методами. В работе [2] рассмотрена плоская стационарная задача Дирихле, когда на границе тела заданы перемещения и температура. Задача сводится к системе интегральных уравнений, и если граница принадлежит классу Ляпунова, то система разрешима по Фредгольму. В работе [3] рассмотрена осесимметричная задача по определению напряжений в полом цилиндрическом пуансоне при горячем деформировании заготовок. Построению матриц Грина трехмерной теории термоупругости посвящена работа [4]. Представлены интегральный и полиномиальный подходы формирования матриц Грина как часть гранично-элементного моделирования, а также подход на основе двойных рядов Фурье. Ряд работ посвящен исследованию задач термоупругости для слоистых анизотропных материалов; например, в работе [5] представлена неклассическая модель связанной задачи термоупругого деформирования слоистых анизотропных оболочек и пластин. В пространстве изображений по Лапласу строится пространственный функционал, который с учетом допущений удалось свести к двумерному и вывести из него корректные дифференциальные уравнения и связанные краевые условия. В работе [6] представлен метод отсчетных поверхностей для анализа стационарных задач термоупругости для слоистых анизотропных пластин, подвергающихся термической нагрузке. В работе [7] методом граничных элементов рассматривается трехмерная линейная математическая теория термоупругости. Выписаны граничные интегральные уравнения и гранично-элементная схема их решения. В [8] исследуется влияние скачкообразного изменения температуры на напряженное состояние многосвязной анизотропной бесконечной пластинки. Приближенные решения получены численными методами. В работе [9] рассмотрены ортотропные разносопротивляющиеся пластины, обладающие к тому же цилиндрической анизотропией. Рассмотрен термоупругий осесимметричный изгиб кольцевой пластины. Приведены система сложных неоднородных уравнений и результаты их исследования с помощью метода конечных разностей.

В работе [10] с помощью метода граничных состояний для транстропных тел вращения решены осесимметричные задачи термоупругости, когда полученное термоупругое поле не зависит от угловой координаты. В настоящей же работе предложенная методика обобщается на класс пространственных неосесимметричных задач термомеханики.

1. Постановка задачи

Рассматривается тело вращения из трансверсально-изотропного материала (рис. 1). Объемные и поверхностные силы отсутствуют; граница тела свободна от защемлений. Пусть в результате некоторого температурного воздействия во всем теле установилось поле температур как функция цилиндрических координат $T = f(r, \theta, z)$, определяющая температуру в любой точке тела. При условии, что дополнительные источники тепла (как внешние, так и внутренние) отсутствуют, температура не изменяется со временем.

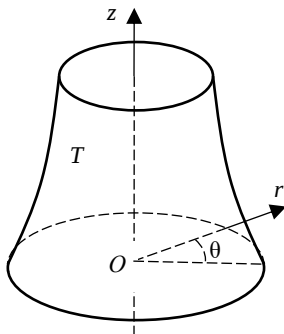


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения

Fig. 1. Transversely isotropic body of rotation

Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния, возникающего в теле в результате воздействия данного поля температур.

2. Определяющие соотношения

В теории упругости в цилиндрической системе координат между перемещениями u, v, w , деформациями $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{zr}, \gamma_{z\theta}$, напряжениями $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{zr}, \tau_{z\theta}$, а также между техническими $E_z, E_r, v_z, v_r, G_r, G_z$ и термомеханическими $k_z, k_r, \alpha_z, \alpha_r$ константами материала имеют место следующие дифференциальные и линейные зависимости (объемные силы отсутствуют) [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad (2)$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

Уравнения совместности деформаций [12]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta}) = 0; \\ & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} = 0; \\ & -\frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial (r \varepsilon_{z\theta})}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z} = 0; \\ & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial z} = 0; \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta \partial z} + r \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial z}) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \theta}) = 0; \\ & \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial r \partial z} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Обобщенный закон Гука [11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z + \alpha_r T; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha_z T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z + \alpha_r T; \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G_z} \tau_{zr}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_r)}{E_r} \tau_{r\theta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение теплопроводности [11]:

$$\frac{k_r}{k_z} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0. \quad (5)$$

3. Общее решение задачи

В работе [11] представлено общее решение пространственной краевой задачи статики в виде тригонометрических рядов, в которых в качестве коэффициентов выступают некоторые плоские вспомогательные состояния $\mathbf{u}^{pl} = \{u_y^{pl}, u_\eta^{pl}, u_z^{pl}\}$.

Компоненты вектора перемещения этого решения имеют вид:

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta + \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right);$$

$$v_n = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta - \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right); \quad (6)$$

$$w_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_z^{pl} \cos(n\beta) d\beta; \quad y = r \cos(\beta).$$

Перемещения выражаются рядами

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta) + u_n \sin(n\theta)]; \\ v &= \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta) + v_n \cos(n\theta)]; \\ w &= \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta) + w_n \sin(n\theta)]; \quad a=1; \quad b=\infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Формулы (7) дают компоненты вектора перемещения пространственного неосесимметричного состояния тела. Выражения для напряжений и деформаций пространственного состояния не приведены, однако их можно вычислить с помощью соотношений теории упругости (2) и (4).

Решение (7) вполне пригодно и для решения пространственной термоупругой задачи, если в качестве плоских вспомогательных состояний взять решения плоских задач термоупругости. Пусть тело подвергается действию температуры, изменение которой происходит неравномерно по объему тела. Двумерная задача термоупругости, частные решения которой могут использоваться в качестве плоских вспомогательных состояний в выражениях (6), определена следующими выражениями [11].

Уравнение теплопроводности:

$$\left(k_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_r \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T^{pl}(z, y) = 0,$$

в котором

$$T^{pl} = \frac{g_0}{E_z} \operatorname{Re}[\varphi_0'(\zeta_0)]; \quad \zeta_0 = z / \gamma_0 + iy; \quad \gamma_0 = \sqrt{k_z / k_r}. \quad (8)$$

Перемещения и напряжения, соответствующие температурному полю [11]:

$$\begin{aligned} u_z^{pl} &= \operatorname{Re}[p_0 \varphi_0'(\zeta_0)]; \quad u_y^{pl} = \operatorname{Re}[iq_0 \varphi_0'(\zeta_0)]; \quad u_\eta^{pl} = 0; \\ \sigma_z^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_0^2 \varphi_0'(\zeta_0)]; \quad \sigma_y^{pl} = \operatorname{Re}[\varphi_0'(\zeta_0)]; \\ \sigma_{zy}^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_0 \varphi_0'(\zeta_0)]; \quad \sigma_\eta^{pl} = \operatorname{Re}[(1 - \varepsilon_0) \varphi_0'(\zeta_0)], \end{aligned} \quad (9)$$

где p_0, q_0, ε_0 – константы, зависящие от технических констант материала и коэффициентов температурного расширения α_z и α_r ; k_z и k_r – коэффициенты теплопроводности в направлении координатных осей; $\varphi_0'(\zeta_0)$ – комплексная функция переменной ζ_0 .

В задаче термоупругости для трансверсально-изотропной среды у плоских вспомогательных состояний депланации не происходит. Переход к пространственным состояниям для тел вращения осуществляется в соответствии с зависимостями (6) и (7).

4. Метод решения задачи

Совокупность компонент вектора перемещения, компонент тензоров деформаций и напряжений, а также функция температуры определяют некоторое термоупругое внутренне состояние среды $\xi_k = \{u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}, T^{(k)}\}$. Совокупность таких состояний можно организовать в базис конечномерного пространства внутренних состояний [13]

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}.$$

Базис пространства Ξ можно сконструировать, придавая функции φ_0 в (8), (9) последовательно следующие значения:

$$\varphi_0 = \zeta_0^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

тем самым построить набор плоских вспомогательных термоупругих состояний. Затем через интегральные операторы (6) и тригонометрические ряды (7) построить уже множество пространственных состояний для трансверсально-изотропной среды. Это множество и определит базис пространства Ξ .

Далее базисные элементы пространства внутренних состояний необходимо проортонормировать. На этом этапе вводится геометрия области тела $V(r, \theta, z)$. Процесс ортонормирования осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [14], в котором перекрестные скалярные произведения вычисляются по формуле

$$(\xi_i, \xi_j) = \int_V T^{(i)} T^{(j)} dV.$$

После построения ортонормированного базиса вычисляются коэффициенты Фурье

$$c_k = \int_V T^{(k)} T dV, \quad (10)$$

где $T^{(k)}$ – температура в базисном элементе ξ_k , T – заданная температура.

Решение термоупругой задачи есть ряд Фурье

$$\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k,$$

или

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^{(k)}; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^{(k)}; \quad T = \sum_{k=1}^{\infty} c_k T^{(k)}. \quad (11)$$

5. Решение задачи

Рассмотрим круговой в плане цилиндр из гипотетического трансверсально-изотропного материала, по свойствам схожего с алевролитом [15]. Так как задача решается в обезразмеренном виде, то упругие и термомеханические характеристики материала, область тела и заданная функция температуры подлежат процедуре обезразмеривания, описание которой проведено в работе [16]. После процедуры обезразмеривания параметров задачи упругие характеристики материала: $E_z = 6.21$; $E_r = 5.68$; $G_r = 2.29$, $G_z = 2.55$; $\nu_z = 0.22$; $\nu_r = 0.24$; область цилиндра $V = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -2 \leq z \leq 2\}$; коэффициенты теплопроводности по

осям координат [17]: $k_z = 1.6$, $k_r = 6.5$; коэффициенты температурного расширения [18]: $\alpha_z = 6.7$, $\alpha_r = 8.6$. Поле температур зададим функцией $T = rz^4 \cos \theta$.

При построении базиса внутренних состояний рекомендации, описанные в работах [19] и [20], пригодны и для построения такового в задаче термоупругости. Так как заданная температура зависит только от косинуса, то базис пространства внутренних состояний будем формировать из левых частей выражений (7):

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta)]; \quad v = \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta)]; \quad w = \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta)], \quad (12)$$

причем так как в заданном поле температур при угловой координате $n=1$, то в выражениях (12) $a=b=1$.

После построения базиса внутренних состояний по соотношениям (12) проводится ортонормирование его элементов, которое включает в себя исключение линейно зависимых элементов, а также элементов, для которых $T=0$. Функции температуры в ортонормированных базисных элементах представлены в табл. 1 (показано 4 элемента).

Таблица 1

Функции температуры в ортонормированных базисных элементах

Элементы	T
ξ_1	$0.564r \cos \theta$
ξ_2	$0.488rz \cos \theta$
ξ_3	$(-0.611 - 0.029r^3 + 0.473rz^2) \cos \theta$
ξ_4	$(-1.061rz - 0.086r^3z + 0.473rz^3) \cos \theta$

Для решения задачи потребовался базис внутренних состояний из 50 элементов. Коэффициенты Фурье (10)

$$c_k = \{5.6718; 0; 7.2467; 0; 2.1447; 0; -0.0778; 0; -0.11246; 0; -0.0871...\}.$$

Решение формируется рядами (11).

Хоть и косвенно, но исследовать полученные ряды на сходимость возможно, используя «насыщение» (рис. 2) суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя).

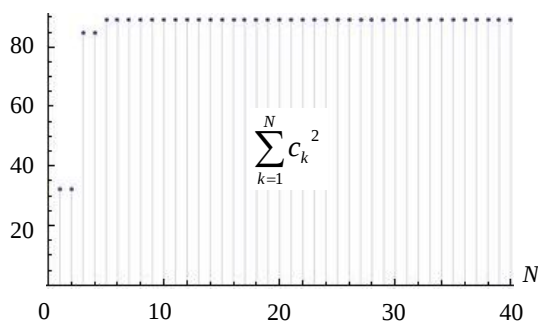


Рис. 2. Сумма Бесселя
Fig. 2. Bessel sum

Также оценка точности осуществляется верификацией заданной функции температуры с полученной в результате решения. На рис. 3 приведено сравнение функций температур на границе тела. Заданная функция – штриховая линия; восстановленная – сплошная линия.

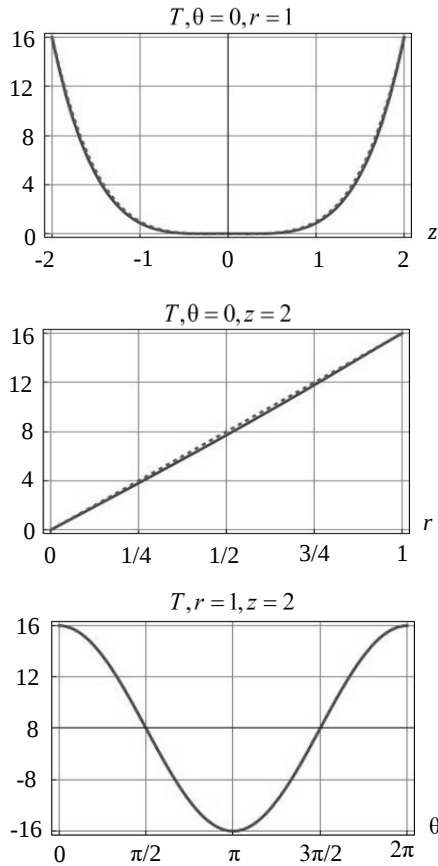


Рис. 3. Верификация решения
Fig. 3. Solution verification

Анализ полученного решения показал, что максимальная относительная погрешность составила 3.6% (средний график, координаты точки $r = 0.5, \theta = 0, z = 2$). Точность решения задачи повышается при увеличении числа используемых элементов базиса внутренних состояний.

Компоненты тензора упругого поля показаны на рис. 4. в виде изолиний. В силу симметрии компонент напряженно-деформированного состояния (НДС) относительно плоскости $z = 0$ показано меридианное сечение с $\theta = 0$ и $0 \leq z \leq 2$. Значения на графике указаны в масштабе с масштабным коэффициентом k , т.е истинное значение показанной характеристики НДС равно значению на графике, умноженному на k . Все характеристики показаны для меридианного сечения с угловой координатой $\theta = 0$.

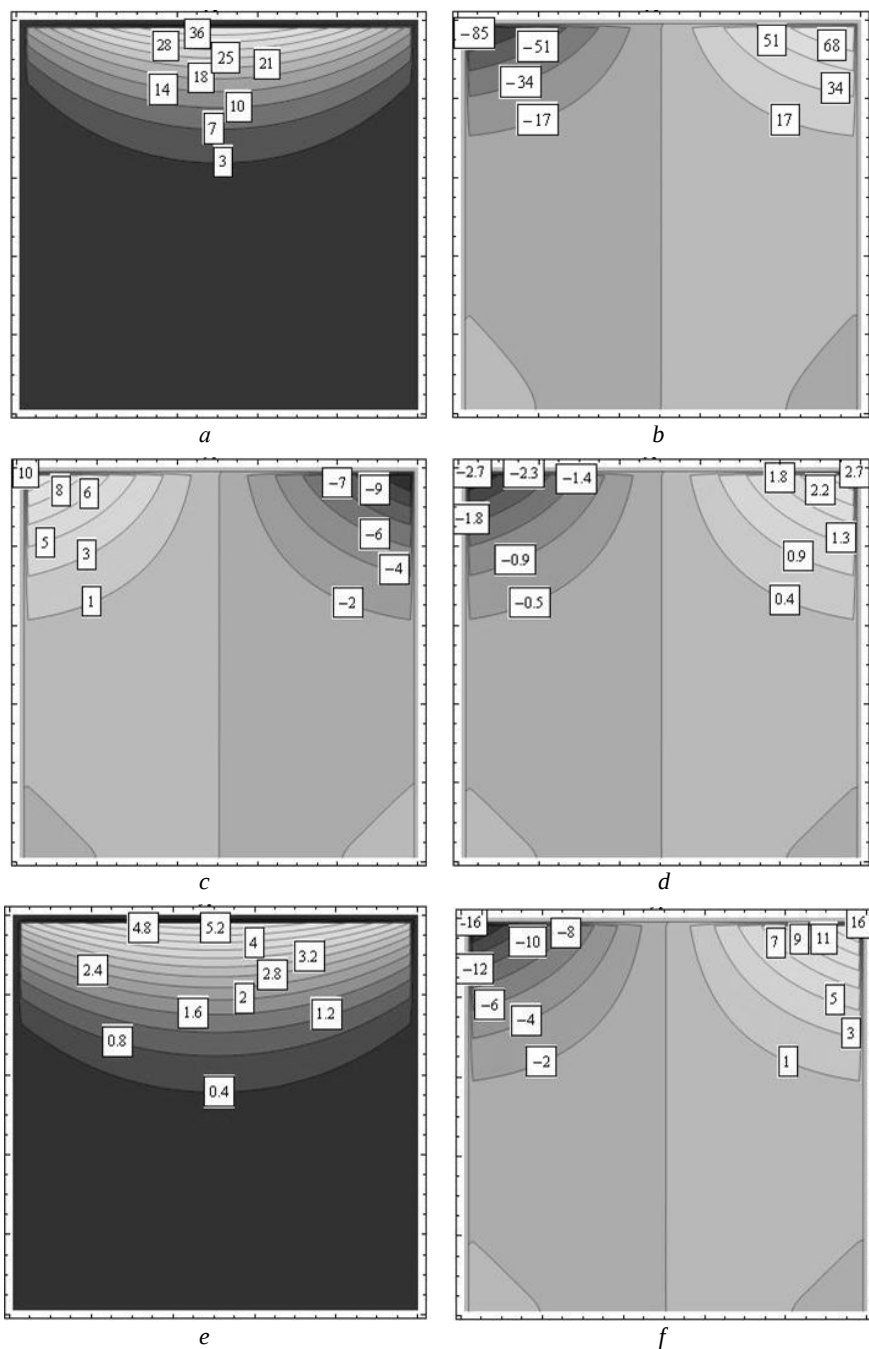


Рис. 4. Изолинии: a – перемещение u , $\kappa = 1$, b – перемещение w , $\kappa = 1$, c – напряжение σ_{rr} , $\kappa = 10^2$, d – напряжение σ_{zz} , $\kappa = 10^2$, e – напряжение τ_{rz} , $\kappa = 10^2$, f – температура T , $\kappa = 1$

Fig. 4. Isolines of (a) displacement u , $\kappa = 1$, (b) displacement w , $\kappa = 1$, (c) stress σ_{rr} , $\kappa = 10^2$, (d) stress σ_{zz} , $\kappa = 10^2$, (e) stress τ_{rz} , $\kappa = 10^2$, and (f) temperature T , $\kappa = 1$

Компоненты упругого состояния v , $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ зависят от $\sin \theta$, поэтому их изолинии представим в сечении с $\theta = \pi/2$ (рис. 5). На рис 5, d представлен контур деформированного состояния тела.

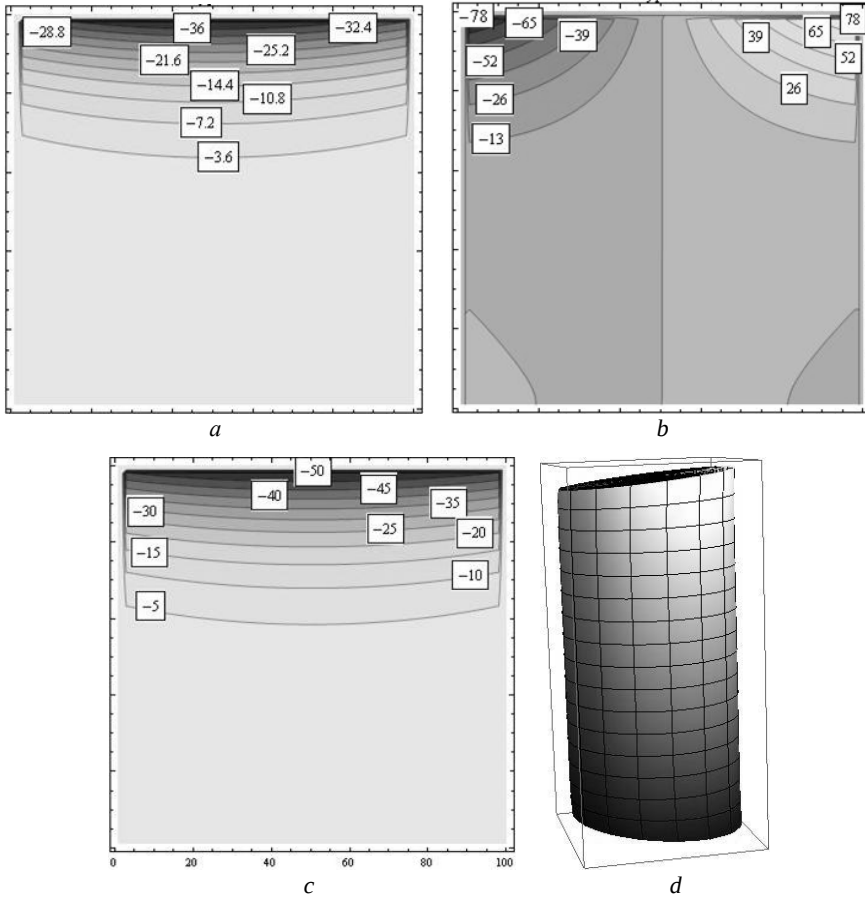


Рис. 5. Изолинии: a – перемещение v , $\kappa = 1$, b – напряжение $\sigma_{r\theta}$, $\kappa = 1$, c – напряжение $\sigma_{z\theta}$, $\kappa = 10$, d – контур деформированного состояния тела
Fig. 5. Isolines of (a) displacement v , $\kappa = 1$, (b) stress $\sigma_{r\theta}$, $\kappa = 1$, and (c) stress $\sigma_{z\theta}$, $\kappa = 10$; (d) outline of the body under deformed conditions

Полученные компоненты термоупругого поля строго удовлетворяют соотношениям (1)–(5).

Заключение

Аналитический метод построения пространственных неосесимметричных термоупругих полей заключается в следующем. На основе общего решения, дающего температурные деформации и напряжения двумерного состояния transversально-изотропного тела, строится конечное множество плоских вспомогательных состо-

яний. Используя решение, представляющее собой, по сути, разложение пространственного состояния в тригонометрический ряд по плоским вспомогательным состояниям, осуществляется переход к множеству пространственных неосесимметричных состояний. Это множество определяет пространство внутренних состояний в аппарате метода граничных состояний. Далее осуществляется ортонормирование этого базиса и исключение линейно зависимых элементов, а также элементов, для которых температура равна нулю, после чего искомые компоненты термоупругого поля определяются через ряды Фурье с одинаковыми коэффициентами. Коэффициенты рядов представляют собой скалярные произведения поля заданных температур и элементов поля температур в базисных элементах пространства внутренних состояний. Компоненты термоупругого поля зависят от всех трех координат и носят неосесимметричный характер.

Предложенная методика непригодна для многосвязных тел, так как при выводе формул общего решения (7) применялось интегрирование по пути, не выходящему за пределы области тела.

Предложенная методика, однако, не является общей для любого класса рассматриваемых областей (односвязных и многосвязных) и вида заданной функции.

Если заданную функцию, описывающую температурное поле внутри тела, возможно разложить в тригонометрический ряд по косинусам или синусам, то, не исключая принципа независимости действия сил, данная методика вполне применима для тех случаев, когда заданная функция температуры не носит циклического характера.

Список источников

1. Ломазов В.А., Ломазова В.И. Построение математической модели при решении задач термомеханики // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (4). С. 1582–1584.
2. Бодан Ю.А. Задача Дирихле в двумерной стационарной анизотропной термоупругости // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2010. № 5 (21). С. 64–71.
3. Фатеев В.И. Термоупругие напряжения в полом осесимметричном водоохлаждаемом пуансоне горячего деформирования // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2009. № 1-1. С. 98–104.
4. Пазин В.П. Сравнительный анализ подходов к построению матрицы Грина трехмерной теории термоупругости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 4 (1). С. 250–253.
5. Андреев А.Н. Математическая модель термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин // Известия Алтайского государственного университета. 2014. № 1 (81). С. 19–21.
6. Kulikov G.M., Mamontov A.A. Three-dimensional thermoelastic analysis of laminated anisotropic plates // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2013. Т. 19, № 4. С. 853–863.
7. Ратаушко Я.Ю. Анализ термоупругой динамики трехмерных тел методом граничных элементов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (4). С. 1736–1737.
8. Глушанков Е.С. Приближенное решение задачи термоупругости для многосвязной анизотропной пластинки при скачках температуры на контурах // Журнал теоретической и прикладной механики. 2022. № 3 (80). С. 3–13. doi: 10.24412/0136-4545-2022-3-5-13

9. Самсоненко Г.И., Трещев А.А. Термоупругий изгиб кольцевых пластин средней толщины из ортотропных разнсопротивляющихся материалов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2012. Вып. 1. С. 238–244.
10. Иваницhev Д.А. Решение задач термоупругости для анизотропных тел вращения // Труды МАИ. 2019. № 106. С. 1–19.
11. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1978. 464 с.
12. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Госиздат техн.-теор. лит., 1955. 491 с.
13. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2, № 2. С. 115–137.
14. Сатакина Л.В. Наращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоёмкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. Липецк : Изд-во ЛГТУ, 2007. С. 130–131.
15. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 416 с.
16. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник Липецкого государственного технического университета. 2016. № 2 (28). С. 16–24.
17. Юдин В.А., Королёв А.В., Афанаскин И.В., Вольпин С.Г. Теплоёмкость и теплопроводность пород и флюидов баженовской свиты – исходные данные для численного моделирования тепловых способов разработки. М.: ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 2015. 22 с.
18. Физические свойства горных пород и полезных ископаемых (петрофизика) : справочник геофизика / под ред. Н.Б. Дортман. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Недра, 1984. 455 с.
19. Иваницhev Д.А. Решение неосесимметричной задачи эластостатики для трансверсально-изотропного тела вращения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2022. № 2 (101). С. 4–21. doi: 10.18698/1812-3368-2022-2-4-21
20. Иваницhev Д.А., Левина Л.В. Определение неосесимметричных упругих полей в анизотропных телах вращения, вызванных действием объёмных сил // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2022. № 4 (103). С. 22–38. doi: 10.18698/1812-3368-2022-4-22-38

References

1. Lomazov V.A., Lomazova V.I. (2011) Postroenie matematicheskoy modeli pri reshenii zadach termomekhaniki [Construction of a mathematical model for solving problems of thermomechanics]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4(4). pp. 1582–1584.
2. Bogdan Yu.A. (2010) Zadacha Dirikhle v dvumernoy statsionarnoy anizotropnoy teormouprugosti [Dirichlet problem in two-dimensional stationary anisotropic thermoelasticity]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 5(21). pp. 64–71.
3. Fateev V.I. (2009) Termouprugie napryazheniya v polom osesimmetrichnom vodookhlazhdaemom puansone goryachego deformirovaniya [Thermoelastic stresses in a hollow axisymmetric water-cooled punch of hot deformation]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya Tula State University. Technical Sciences*. 1-1. pp. 98–104.
4. Pazin V.P. (2014) Sravnitel'nyy analiz podkhodov k postroeniyu matritsy Grina trekhmernoy teorii termouprugosti [Comparative analysis of approaches to constructing the Green's matrix of the three-dimensional theory of thermoelasticity]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4(1). pp. 250–253.

5. Andreev A.N. (2014) Matematicheskaya model' termouprugogo deformirovaniya sloistnykh kompozitnykh obolochek i plastin [Mathematical model of thermoelastic deformation of layered composite shells and plates]. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta – Izvestiya of Altai State University*. 1(81). pp. 19–21.
6. Kulikov G.M., Mamontov A.A. (2013) Three-dimensional thermoelastic analysis of laminated anisotropic plates. *Transactions TSTU*. 19(4). pp. 853–863.
7. Rataushko Ya.Yu. (2011) Analiz termouprugoy dinamiki trekhmernykh tel metodom granichnykh elementov [Analysis of thermoelastic dynamics of three-dimensional bodies using the boundary element method]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4(4). pp. 1736–1737.
8. Glushankov E.S. (2022) Priblizhennoe reshenie zadachi termouprugosti dlya mnogosvyaznoy anizotropnoy plastinki pri skachkakh temperatury na konturakh [Approximate solution of the thermoelasticity problem for a multiply connected anisotropic plate with temperature jumps on the contours]. *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki – Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 3(80). pp. 3–13. doi: 10.24412/0136-4545-2022-3-5-13
9. Samsonenko G.I., Treshchov A.A. (2012) Termouprugiy izgib kol'tsevykh plastin sredney tolshchiny iz ortotropnykh raznosoprotivlyayushchikhsya materialov [Thermoelastic bending of medium-thick annular plates made of orthotropic materials of different resistance]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya Tula State University. Technical Sciences*. 1. pp. 238–244.
10. Ivanychev D.A. (2019) Reshenie zadach termouprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya [Solution of thermoelasticity problems for anisotropic bodies of rotation]. *Trudy MAI*. 106. pp. 1–19.
11. Aleksandrov A.Ya., Solov'yov Yu.I. (1978) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primeneniye metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo)* [Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. Moscow: Nauka.
12. Lur'e A.I. (1955) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* [Spatial problems of the theory of elasticity]. Moscow: Gosizdat tekhniko-teoreticheskoy literatury.
13. Penkov V.B., Penkov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal*. 2(2). pp. 115–137.
14. Satalkina L.V. (2007) Narashchivaniye bazisa prostranstva sostoyanii pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoyomkosti vychisleniy [Expansion of the basis of the state space with severe limitations on the energy consumption of computations]. *Sbornik tezisov dokladov nauchnoy konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – The Collected Abstracts of the Reports on the Scientific Conference for Students and Post-graduates of Lipetsk State Technical University*. pp. 130–131.
15. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
16. Levina L.V., Novikova O.S., Penkov V.B. (2016) Polnparametricheskoe reshenie zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichenogo tela [Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body]. *Vestnik LGTU – Vestnik LSTU*. 2 (28). pp. 16–24.
17. Yudin V.A., Korolyov A.V., Afanaskin I.V., Vol'pin S.G. (2015) *Teployomkost' i teploprovodnost' porod i flyuidov Bazhenovskoy svity – iskhodnye dannye dlya chislennogo modelirovaniya teplovykh sposobov razrabotki* [Heat capacity and thermal conductivity of rocks and fluids of the Bazhenov formation – initial data for numerical modeling of thermal development methods]. Moscow: FGU FNTS NIISI RAN.
18. Ed. by Dortman N.B. (1984) *Fizicheskie svoystva gornykh porod i poleznykh iskopaemykh (petrofizika). Spravochnik geofizika* [Physical properties of rocks and minerals (petrophysics). Handbook of geophysical exploration]. Moscow: Nedra.

19. Ivanychev D.A. (2022) Reshenie neosesimmetrichnoy zadachi elastostatiki dlya transversal'no-izotropnogo tela vrashcheniya [Solution of a non-axisymmetric elastostatics problem for a transversely isotropic body of rotation]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 2(101). pp. 4–21. doi: 10.18698/1812-3368-2022-2-4-21
20. Ivanychev D.A., Levina L.V. (2022) Opredeleniye neosesimmetrichnykh uprugikh poley v anizotropnykh telakh vrashcheniya, vyzvannykh deystviyem ob'yemnykh sil [Determination of non-axisymmetric elastic fields in anisotropic bodies of rotation caused by the action of body forces]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 3(103). pp. 22–38. doi: 10.18698/1812-3368-2022-4-22-38

Сведения об авторе:

Иванычев Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета (Липецк, Россия). E-mail: Lsivdmal@mail.ru

Information about the author:

Ivanychev Dmitriy A. (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: Lsivdmal@mail.ru

Статья поступила в редакцию 16.04.2024; принята к публикации 10.04.2025

The article was submitted 16.04.2024; accepted for publication 10.04.2025

Научная статья

УДК 539.89

doi: 10.17223/19988621/94/13

Численное моделирование высокоэнергетического воздействия на Al_2O_3

Константин Константинович Маевский

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения
Российской академии наук, Новосибирск, Россия, konstantinm@hydro.nsc.ru*

Аннотация. Представлены результаты моделирования ударно-волнового нагружения оксида алюминия (Al_2O_3) с учетом полиморфного фазового перехода. Построены уравнения состояния Al_2O_3 для фазы низкого и фазы высокого давления. Рассматривая образец как смесь двух фаз в области фазового перехода, рассчитана ударная адиабата в диапазоне давления до 1 200 ГПа. Определены температурные зависимости изобарной теплоемкости и энтропии. Результаты расчетов сравниваются с теоретическими и экспериментальными данными, полученными другими авторами.

Ключевые слова: ударная адиабата, полиморфный фазовый переход, керамические материалы, сапфир, оксид алюминия

Благодарности: Работа выполнена в рамках Бюджетного проекта № FWGG-2021-0006.

Для цитирования: Маевский К.К. Численное моделирование высокоэнергетического воздействия на Al_2O_3 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 163–174. doi: 10.17223/19988621/94/13

Original article

Numerical simulation of a high-energy impact on Al_2O_3

Konstantin K. Maevskii

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy
of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation, konstantinm@hydro.nsc.ru*

Abstract. Aluminum oxide (Al_2O_3) is an important ceramic material with remarkable compressive strength and hardness. Al_2O_3 is a major component of Earth's mantle which makes a significant contribution to high-pressure physics. The construction of a shock adiabatic curve in a wide range of pressures and the determination of the location of phase transitions under shock-wave loading are associated with the derivation of the equation of state. The shock-wave loading of Al_2O_3 is numerically simulated using a thermodynamic equilibrium model. The equations of state for the two phases of the material are constructed. The missing parameters are obtained based on the correspondence with the

experimental data. The dependences of the heat capacity and entropy on the temperature of both phases are plotted, and shock adiabatic curves in the pressure range from 1 GPa to 1.2 TPa are constructed. The high-pressure phase transition is taken into account in calculations. The obtained results are verified and validated using available data from other authors. The presented results provide a basis for considering the theoretical equation of state under extreme conditions, where, nowadays, the model calculations demonstrate significant diversity.

Keywords: shock adiabatic curve, polymorphic phase transition, ceramic materials, sapphire, aluminum oxide

Acknowledgments: This work was partially supported by the State assignment for the Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS (project No. FWGG–2021–0006).

For citation: Maevskii, K.K. (2025) Numerical simulation of a high-energy impact on Al_2O_3 . *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 163–174. doi: 10.17223/19988621/94/13

Введение

Оксид алюминия Al_2O_3 (сапфир) является важным керамическим материалом, отличающимся высокой прочностью на сжатие и твердостью [1]. В связи с перспективностью использования данного материала проводятся эксперименты и теоретические исследования при высоких динамических нагрузках для разработки моделей поведения керамик и композитов на их основе [2–4]. В то же время Al_2O_3 является основным компонентом мантии Земли и вносит значительный вклад в область физики высоких давлений [5–7]. Проводятся исследования гетерогенных материалов, включающих в себя Al_2O_3 в качестве компонента [8, 9]. Возможность фазовых переходов в оксиде алюминия при ударном сжатии представляет большой интерес при исследованиях строения Земли и поведения керамических материалов. При этом фазовые переходы влияют в том числе на интерпретацию данных экспериментов по статическому и ударному сжатию при сверхвысоких давлениях [10–16]. В работе [17] представлены исследования, согласно которым существует фазовый переход высокого давления в оксиде алюминия, который не может быть получен методами статического сжатия. Такой переход был предсказан при значении давления ~ 370 ГПа [18]. Расчет ударной адиабаты в широком диапазоне давлений с учетом фазовых переходов при высокоэнергетическом воздействии связан с разработкой уравнений состояния (УрС) [16, 19–21]. Несмотря на большой интерес к характеристикам сапфира при ударно-волновом нагружении, экспериментальные исследования при высоких значениях давления пока ограничены.

Цель настоящего исследования заключается в построении уравнения состояния сапфира для достоверного описания данных по высокоэнергетическому воздействию на сапфир и определения области фазового перехода высокого давления. В данной работе моделируется ударно-волновое нагружение $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$, в области фазового перехода исследуемый материал рассматривается в виде смеси фазы низкого давления и фазы высокого давления. Фазе низкого давления соответствует $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$, при высоком давлении рассматривается фаза типа CaIrO_3 , которая была синтезирована из исходного образца корунда при значении давления в области 170 ГПа и температурах в диапазоне 2 000–2 500 К [7].

Методика расчета

Численное моделирование поведения Al_2O_3 при ударно-волновых нагрузках выполнено в представлениях термодинамически равновесной модели [22, 23]. Используемая модель позволяет достоверно описывать данные ударно-волновых экспериментов в диапазоне значений давления от 3 до 2 000 ГПа и пористости образцов (отношение плотности сплошного образца к плотности исследуемого) от 1 до 10 для чистых веществ и для гетерогенных материалов. С учетом диапазона данной модели метастабильные структуры так называемых переходных оксидов алюминия (таких как χ , κ , γ , δ , η , θ), существующие при низких давлениях, не рассматриваются. Авторский метод расчета впервые позволяет достоверно описывать значения давления, плотности, волновую и массовую скорости смесей и сплавов с компонентами, испытывающими фазовый переход при ударно-волновых нагрузках [24, 25].

Численное моделирование выполняется на основе предположения, что компоненты гетерогенного образца при ударно-волновом нагружении имеют равные значения давления, температуры и скорости. УрС выписывается в виде суммы компонентов давления P_C , P_T (потенциальных и тепловых), ρ – текущая плотность образца, ρ_0 – начальная плотность, $\sigma = \rho/\rho_0$ – степень сжатия, T – значение температуры, $T_0 = 300$ K, $\tau = T/T_0$ [22]:

$$P(\sigma, \tau) = P_C(\sigma) + P_T(\sigma, \tau) \quad (1)$$

$$P_C(\sigma) = \frac{\rho_0 c_0^2}{n} (\sigma^n - 1), \quad P_T(\sigma, \tau) = c_{v0} \rho_0 T_0 (\tau - 1) \sigma k \frac{1 + a_1 \tau}{1 + a_2 \tau}. \quad (2)$$

Здесь c_{v0} – значение теплоемкости, c_0 – скорость звука при начальных условиях T_0 ; n , k , a_1 , a_2 – параметры УрС. Значение начальной энергии при нормальных условиях не учитывается, исходя из области применения модели по значению давления.

Рассчитаны значения теплоемкости c_p вдоль изобары и функция энтропии S . Методика определения параметров, используемых при расчетах, приведена в [22]. Термодинамический потенциал Гиббса G рассчитывается в следующем виде, где E – удельная энергия:

$$G(\sigma, \tau) = E(\sigma, \tau) + \frac{P(\sigma, \tau)}{\sigma \rho_0} - T_0 \tau S(\sigma, \tau) \quad (3)$$

При расчете ударных адиабат исследуемых гетерогенных образцов на фронте ударной волны выписываются условия сохранения потока массы для каждого компонента, при этом условие сохранения потока импульса и потока энергии рассматривается для образца как целого. Газ в порах (в случае рассмотрения пористого вещества) учитывается как один из компонентов. Этот метод позволяет моделировать различные по составам материалы. Чистые вещества описываются как смесь, включающая в себя один конденсированный компонент. Для образца, включающего в себя z компонентов с начальными объемными долями μ_{k0} , получено следующее выражение:

$$P = \frac{\sum_{i=1}^z A_i \frac{\mu_{i0}}{\sigma_i} \left[\left(h_i - \frac{n_i + 1}{n_i - 1} \right) \sigma_i^{z_i} + \frac{2n_i \sigma_i}{n_i - 1} - h_i - 1 \right]}{\sum_{i=1}^z \frac{\mu_{i0}}{\sigma_i} h_i + \left(\frac{h_g}{\sigma_g} \right) \left(1 - \sum_{i=1}^z \mu_{i0} \right) - 1}, \quad (4)$$

$$A_i = \frac{\rho_{0i} c_{0i}^2}{n_i}, \quad h_i = \frac{2}{\Gamma_i} + 1, \quad h_g = \frac{2}{\gamma - 1} + 1,$$

A_i , n_i – параметры, $\sigma_i = \rho_i/\rho_{i0}$ – степень сжатия для конденсированного компонента i ; $\sigma_g = \rho_g/\rho_{g0}$ – степень сжатия газа. Для газа используется УрС идеального газа; ρ_g – текущая плотность газа, ρ_{g0} – начальная плотность, $\gamma = 1.41$ – показатель адиабаты. Теплоемкость газа 718 Дж/(кг К), $\rho_{g0} = 1.293 \cdot 10^{-3}$ г/см³, что соответствует воздуху. Функция $\Gamma = P_T V/E_T$ отражает вклад тепловых компонентов УрСа (E_T – тепловая часть внутренней энергии). С учетом равенства температур компонентов, а также их УрС рассчитаны кривые ударных адиабат гетерогенных материалов.

Методика расчета поведения гетерогенных материалов по авторской модели дает возможность рассчитывать в том числе поведение исследуемых образцов с учетом полиморфных фазовых переходов. Образец моделируется в этом случае как смесь двух фаз – фазы низкого и фазы высокого давления. На фронте ударной волны выписываются уравнения с учетом фазового перехода. Начало процесса фазового перехода определяется при волновой скорости, когда соответствующие значения G для двух фаз исследуемого материала становятся равными.

Результаты моделирования

Для проверки модельного описания вклада тепловых составляющих в данном УрС построены кривые значения теплоемкости c_p при нормальных условиях в диапазоне значений температуры T 100–2 000 К. Расчет изобарной теплоемкости для сапфира приведен на рис. 1. Для сравнения приведены экспериментальные данные [26, 27] и расчеты по моделям других авторов [28].

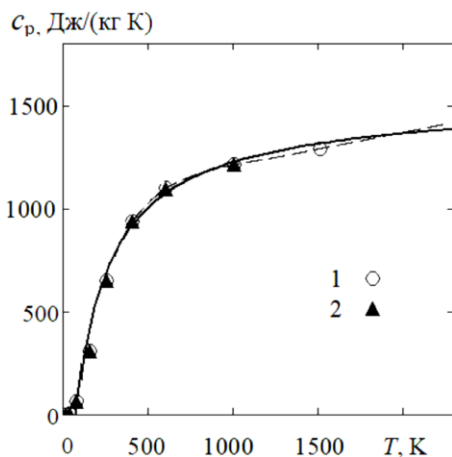


Рис. 1. Теплоемкость Al_2O_3 от температуры: данные 1 [26], 2 [27];

сплошная линия – модельный расчет, пунктирная линия – данные [28]

Fig. 1. Heat capacity of Al_2O_3 as a function of temperature: 1, data from [26], 2, data from [27]; the solid line indicates the model calculation, and the dashed line, data from [28]

На рис. 2 приведены зависимости значения энтропии для Al_2O_3 и данные из работы [28] в диапазоне значений температуры до 3 500 К. Расчетные кривые по авторской модели для сапфира не противоречат ранее полученным результатам.

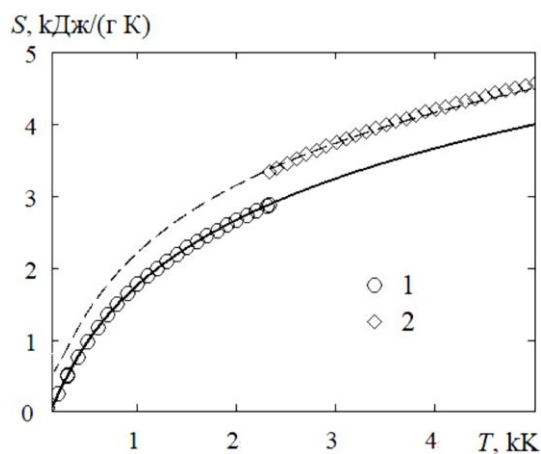


Рис. 2. Энтропия Al_2O_3 от температуры: сплошная линия – расчет для фазы низкого давления, пунктирная линия – расчет для фазы высокого давления, данные [28]

Fig. 2. Entropy of Al_2O_3 as a function of temperature: the solid line is the calculation for a low-pressure phase, the dashed line is the calculation for a high-pressure phase; data from [28]

Результаты моделирования ударно-волнового нагружения для Al_2O_3 различных значений пористости m (отношение плотности монолитного образца к плотности исследуемого материала) и экспериментальные данные из работы [29] показаны на рис. 3 (давление P – степень сжатия ρ/ρ_0). Расчетные кривые соответствуют имеющимся данным экспериментов для всех значений пористости. Для пористости 1.015 одна точка несколько отклоняется от расчетной кривой, что можно трактовать как влияние фазового перехода.

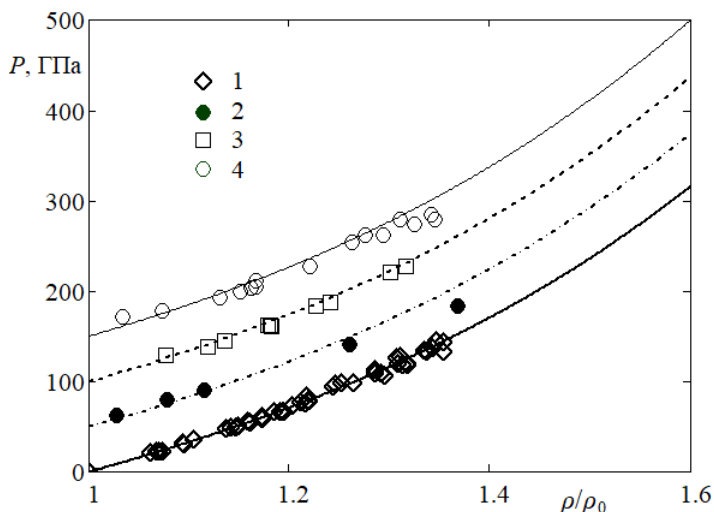


Рис. 3. Ударные адиабаты Al_2O_3 при различных значениях пористости: 1 – $m = 1.0$; 2 – $m = 1.015$; 3 – $m = 1.038$; 4 – $m = 1.168$

Fig. 3. Shock adiabatic curves for Al_2O_3 at various porosity values: $m = (1) 1.0$, (2) 1.015, (3) 1.038, and (4) 1.168

Расчетные зависимости термодинамического потенциала показаны на рис. 4. Дополнительной линией показано значение волновой скорости 13 км/с, где значения термодинамических потенциалов Гиббса для фазы низкого и фазы высокого давления равны. Значение давления 215 ГПа, соответствующее этой скорости на ударной адиабате, рассматривается как начало области фазового перехода высокого давления при ударно-волновом нагружении. Данный подход к определению начала фазового перехода был ранее успешно апробирован для германия [29].

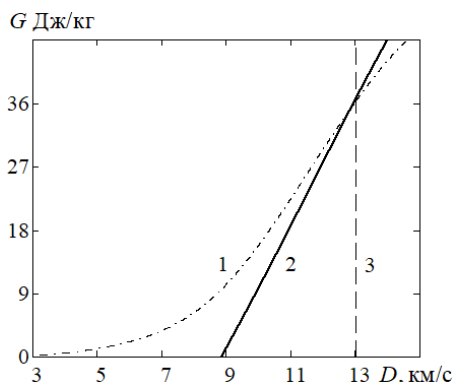


Рис. 4. Термодинамический потенциал Al_2O_3 двух фаз: для фазы высокого давления (1), для фазы низкого давления (2), $D = 13$ км/с (3)

Fig. 4. Thermodynamic potential of Al_2O_3 for two phases: (1) high-pressure phase, (2) low-pressure phase, and (3) $D = 13$ км/с

Расчеты по авторской модели для сапфира и данные экспериментов из работ [5, 30, 31] показаны на рис. 5 (давление P – плотность ρ).

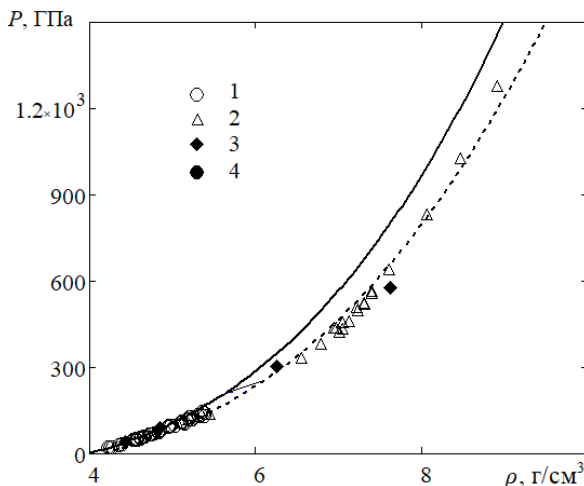


Рис. 5. Ударные адиабаты Al_2O_3 : сплошная кривая – расчет для фазы низкого давления, пунктирная для фазы высокого давления; данные 1, 4 [30], 2 [5], 3 [31]

Fig. 5. Shock adiabatic curves for Al_2O_3 : the solid line is the calculation for a low-pressure phase, the dashed line is the calculation for a high-pressure phase; 1 and 4, data from [30]; 2, data from [5], and 3, data from [31]

Значение плотности фазы высокого давления рассчитано, учитывая экспериментальные данные [5], согласно которым объем образца при фазовом переходе уменьшается на 5%. При значении давления 280 ГПа определяется окончание фазового перехода, т.е. полный переход в фазу высокого давления при ударно-волновом воздействии. Получено достоверное описание имеющихся экспериментальных данных.

Данные по экспериментальному исследованию сапфира в диапазоне давлений от 340 до 700 ГПа приведены в [32]. Методами оптической пирометрии была определена температура за фронтом распространения ударной волны. На рис. 6 показаны расчетные кривые зависимости температуры от плотности на ударной адиабате по авторской модели и данные экспериментов и расчетов работы [32].

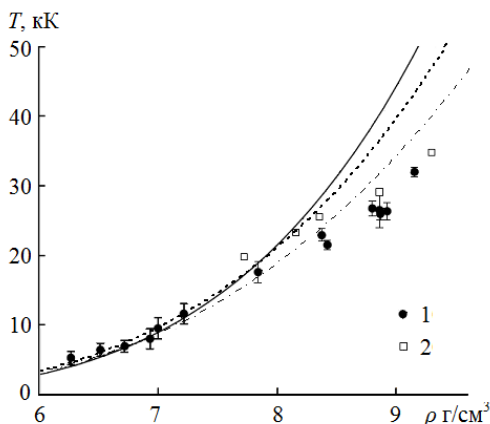


Рис. 6. Значение температуры в зависимости от плотности образца Al_2O_3 : сплошная кривая – данные [32], пунктирная кривая – расчет этой работы для фазы низкого давления, штрих-пунктирная – для фазы высокого давления; данные 1 [32], 2 [33, 34]

Fig. 6. Temperature as a function of density of Al_2O_3 sample: the solid line is the data from [32], the dashed line is the calculation for a low-pressure phase, and the dotted and dashed line is the calculation for a high-pressure phase; 1, data from [32]; and 2, data from [33, 34]

Определена зависимость для объемной скорости звука c_B исследуемого образца сапфира. При этом используется модуль изэнтропического сжатия $K_S = -V(\partial P/\partial V)_S$:

$$c_B = \sqrt{K_S / \rho}, \quad K_S = V \left[\frac{T}{c_V} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \right].$$

На рис. 7 приведены расчетная кривая объемной скорости вдоль ударной адиабаты и данные экспериментов из работы [5] в диапазоне значений давления от 300 до 800 ГПа. Модельные расчеты в рассматриваемом диапазоне не противоречат ранее полученным данным.

Приведенные результаты численного моделирования термодинамических параметров исследуемых образцов сапфира по авторской модели показывают, что расчет соответствует как численным, так и экспериментальным данным, полученным различными авторами.

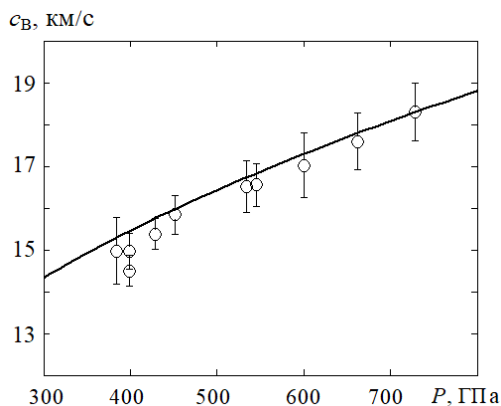


Рис. 7. Расчет и данные экспериментов зависимости c_B на ударной адиабате: сплошная кривая – модельный расчет; данные [5]

Fig. 7. Calculated and experimental values of c_B on the shock adiabat curve: the solid line is the model calculation; data from [5]

Заключение

Таким образом, в работе показаны результаты моделирования по малопараметрическим УрСам двух фаз Al_2O_3 . Используемые параметры УрС позволяют достоверно описывать значения термодинамических параметров при ударно-волновом нагружении исследуемых образцов, а также теплоемкость, энтропию и термодинамический потенциал Гиббса. Ударные адиабаты по значению давления от 3 до 1 200 ГПа соответствуют имеющимся данным для обеих фаз сапфира. При малом количестве параметров (семь), определенных по соответствию расчетов результатам экспериментов [22], получено непротиворечивое описание высокоэнергетического воздействия на образцы сапфира. Данный метод дает возможность рассчитывать поведение гетерогенных материалов, в состав которых входят компоненты, испытывающие фазовые переходы при высокоэнергетическом воздействии [24], и может быть полезным при исследовании таких образцов.

Список источников

1. Lin J.F., Degtyareva O., Prewitt C.T., Dera P., Sata N., Gregoryanz E., Mao H., Hemley R.J. Crystal structure of a high-pressure high temperature phase of alumina by in situ X-ray diffraction // *Nature materials*. 2004. V. 3. P. 389–393. doi: 10.1038/nmat1121
2. Зелугин С.А., Толкачев В.Ф., Тырышкин И.М. Анализ эффективности противоударной стойкости двух групп керамических и композитных материалов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 80. С. 85–96. doi: 10.17223/19988621/80/8
3. Промахов В.В., Коробенков М.В., Шульц Н.А., Жуков А.С., Олисов А.В., Бахмат В.Р., Дронов Ф.Ю., Мялковский И.С. Моделирование накопления повреждений и разрушения керамических композитов $\text{Al}_2\text{O}_3\text{--ZrO}_2$, полученных по аддитивным технологиям, при высокоскоростном нагружении // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 72. С. 140–157. doi: 10.17223/19988621/72/12
4. Kashin A.D., Kulkov A.S., Kulkov S.N., Kurovics E., Gömze L.A. Study of Transverse Deformation of Porous Alumina during Uniaxial Mechanical Tests Al_2O_3 // *Journal of Silicate Based and Composite Materials*. 2021. V. 73 (4). P. 145–148. doi: 10.14382/epitoanyag-jsbcm.2021.21

5. McCoy C.A., Kalita P., Knudson M.D., Desjarlais M.P., Duwal S., Root S. Hugoniot, sound speed, and phase transitions of single-crystal sapphire for pressures 0.2–2.1 TPa // *Physical Review B*. 2023. V. 107. Art. 214102. doi: 10.1103/PhysRevB.107.2141024
6. Kato J., Hirose K., Ozawa H., Ohishi Y. High-pressure experiments on phase transition boundaries between corundum, $\text{Rh}_2\text{O}_3(\text{II})$ - and CaIrO_3 -type structures in Al_2O_3 // *American Mineralogist*. 2013. V. 98. P. 335–339. doi: 10.2138/am.2013.4133
7. Ono S., Oganov A.R., Koyama T., Shimizu H. Stability and compressibility of the high-pressure phases of Al_2O_3 up to 200 GPa: Implications for the electrical conductivity of the base of the lower mantle // *Earth and Planetary Science Letters*. 2006. V. 246. P. 326–335. doi: 10.1016/j.epsl.2006.04.017.
8. Marchenko E.I., Oganov A.R., Mazhnik E.A. et al. Stable compounds in the $\text{CaO-Al}_2\text{O}_3$ system at high pressures // *Physics and Chemistry of Minerals*. 2022. V. 49. Art. 44. doi: 10.1007/s00269-022-01221-6
9. Rocha-Rangel E., Rodríguez-García J.A., Castillo-Robles J.A., Mireles E.N.A., Calles-Arriaga C.A. Mathematical Simulation of the Wettability of Al_2O_3 Substrate through Different Aluminum Alloys // *Journal of Composites Science*. 2021. V. 5. Art. 161. doi: 10.3390/jcs5060161
10. Mashimo T., Tsumoto K., Nakamura K. High-pressure phase transformation of corundum ($\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$) observed under shock compression // *Geophysical Research Letters*. 2000. V. 27 (14). P. 2012–2024. doi: 10.1029/2000GL008490
11. Ansell S., Krishnan S., Weber J.K.R., Felten J.J., Nordine P.C., Beno M.A., Price D.L. Saboungi M.L. Structure of liquid aluminum oxide // *Physical Review Letters*. 1997. V. 78. P. 464–466. doi: 10.1103/PhysRevLett.78.464
12. Ahuja R., Belonoshko A.B., Johansson B. Melting and liquid structure of aluminum oxide using a molecular-dynamics simulation // *Physical Review E*. 1998. V. 57. P. 1673–1676. doi: 10.1103/PhysRevE.57.1673
13. Sinn H., Glorieux B., Hennet L., Alatas A., Hu M., Alp E.E., Bermejo F.J., Price D.L., Saboungi M.L. Microscopic dynamics of liquid aluminum oxide // *Science*. 2003. V. 299. P. 2047–2049. doi: 10.1126/science.1080950
14. Krishnan S., Hennet L., Jahn S., Key T.A., Madden P.A., Saboungi M.L., Price D.L. Structure of Normal and Supercooled Liquid Aluminum Oxide // *Chemistry of Materials*. 2005. V. 17. P. 2662–2666. doi: 10.1021/cm050254p
15. Gust W.H., Royce E.B. Dynamic yield strengths of B_4C , BeO and Al_2O_3 ceramics // *J. Appl. Phys.* 1971. V. 42. P. 276–295. doi: 10.1063/1.1659584
16. Liu H., Tse J.S., Nellis W.J. The electrical conductivity of Al_2O_3 under shock-compression // *Scientific Reports*. 2015. V. 5. Art. 12823. doi: 10.1038/srep12823
17. Hari A., Hari R., Heighway P.G., Smith R.F., Duffy T.S., Sims M., Singh S., Fratanduono D.E., Bolme C.A., Gleason A.E., Coppari F., Lee H.J., Granados E., Heimann P., Eggert J.H., Wicks J.K. High pressure phase transition and strength estimate in polycrystalline alumina during laser-driven shock compression // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2023. V. 35. Art. 094002. doi: 10.1088/1361-648X/aca860
18. Umemoto K., Wentzcovitch R.M. Prediction of an U_2S_3 -type polymorph of Al_2O_3 at 3.7 Mbar // *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*. 2008. V. 105 (18). P. 6526–6530. doi: 10.1073/pnas.0711925105
19. Ломоносов И.В. Уравнения состояния сапфира, кремнезема, периклаза и рутила // *Теплофизика высоких температур*. 2023. Т. 61, № 3. С. 473–476. doi: 10.31857/S004036442303016
20. Ostrik A.V., Nikolaev D.N. Shock induced melting of sapphire // *Journal of Physics: Conference Series*. 2022. V. 2154. Art. 012010. doi: 10.1088/1742-6596/2154/1/012010
21. Tsuchiya J., Tsuchiya T., Wentzcovitch R.M. Transition from the $\text{Rh}_2\text{O}_3(\text{II})$ -to- CaIrO_3 structure and the high-pressure-temperature phase // *Physical Review B*. 2005. V. 72. Art. 020103. doi: 10.1103/PhysRevB.72.020103
22. Маевский К.К. Численное моделирование термодинамических параметров углерода // *Теплофизика высоких температур*. 2021. Т. 59, № 5. С. 701–706. doi: 10.31857/S0040364421050148

23. Маевский К.К. Силикаты магния при высоких динамических нагрузках // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 111–119. doi: 10.17223/19988621/79/10
24. Maevskii K.K., Kinelovskii S.A. Model of behavior of nitrides and their mixtures under high dynamic loads // AIP Conference Proceedings. 2014. V. 1623. P. 391–394. doi: 10.1063/1.4898964
25. Maevskii K.K., Kinelovskii S.A. Thermodynamic parameters of mixtures with epoxy as a component under shock wave loading // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 946. Art. 012113. doi: 10.1088/1742-6596/946/1/012113
26. Григорьев И.С., Мейлихова Е.З. Физические величины. М.: Энергоатомиздат, 1991.
27. Кикоин И.К. Таблицы физических величин. М.: Атомиздат, 1976.
28. Гуревич Л.В., Вейц И.В., Медведев В.А. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. М.: Наука, 1979. Т. III, кн. 1.
29. Маевский К.К. Численное моделирование термодинамических параметров германия // Теплофизика высоких температур. 2022. Т. 60, № 6. С. 837–843. doi: 10.31857/S0040364422050210
30. Marsh S.P. LASL Shock Hugoniot Data. Berkeley: Univ. California Press, 1980.
31. Павловский М.Н. Ударная сжимаемость шести высокотвердых веществ // Физика твердого тела. 1970. Т. 12, № 7. С. 2175–2178.
32. Ostrik A.V., Nikolaev D.N. Construction of the equations of state for polycrystalline solids for the purpose of the numerical solution of problems of continuous medium mechanics // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1392. Art. 012017. doi: 10.1088/1742-6596/1392/1/012017
33. Kerley G.I. Equation of state and constitutive models for numerical simulations of dust impacts on the solar probe: Report on contract 949182 / Johns Hopkins University, Applied Physics Laboratory. Laurel, MD, 2009.
34. Miller J.E. 48th annual APS Meeting, division of Plasma physics. 2006. URL: https://www.lle.rochester.edu/media/publications/presentations/documents/APS06/Miller_APS06.pdf

References

1. Lin J.F., Degtyareva O., Prewitt C.T., Dera P., Sata N., Gregoryanz E., Mao H., Hemley R.J. (2004) Crystal structure of a high-pressure high temperature phase of alumina by in situ X-ray diffraction. *Nature Materials*. 3. pp. 389–393. doi: 10.1038/nmat1121
2. Zelepugin, S.A., Tolkachev, V.F., Tyryshkin, I.M. (2022) *Analiz effektivnosti protivoudarnoy stoykosti dvukh grupp keramicheskikh i kompozitnykh materialov* [Analysis of impact resistance for two groups of ceramic and composite materials]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 85–96. doi: 10.17223/19988621/80/8
3. Promakhov V.V., Korobenkov M.V., Shul'tz N.A., Zhukov A.S., Olisov A.V., Bakhmat V.R., Dronov F.Yu., Myalkovskiy I.S. (2021) *Modelirovanie nakopleniya povrezhdeniy i razrusheniya keramicheskikh kompozitov Al₂O₃-ZrO₂, poluchennykh po additivnym tekhnologiyam, pri vysokoskorostnom nagruzhении* [Modeling the accumulation of damages and the failure of ceramic composites Al₂O₃-ZrO₂, obtained by additive technologies, under high-speed loading]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 72. pp. 140–157. doi: 10.17223/19988621/72/12
4. Kashin A.D., Kulkov A.S., Kulkov S.N., Kurovics E., Gömze L.A. (2021) Study of transverse deformation of porous alumina during uniaxial mechanical tests Al₂O₃. *Journal of Silicate Based and Composite Materials*. 73(4). pp. 145–148. doi: 10.14382/epitoanyag-jsbcm.2021.21
5. McCoy C.A., Kalita P., Knudson M.D., Desjarlais M.P., Duwal S., Root S. (2023) Hugoniot, sound speed, and phase transitions of single-crystal sapphire for pressures 0.2–2.1 TPa. *Physical Review B*. 107. Article 214102. doi: 10.1103/PhysRevB.107.214102

6. Kato J., Hirose K., Ozawa H., Ohishi Y. (2013) High-pressure experiments on phase transition boundaries between corundum, $\text{Rh}_2\text{O}_3(\text{II})$ - and CaIrO_3 -type structures in Al_2O_3 . *American Mineralogist*. 98. pp. 335–339. doi: 10.2138/am.2013.4133
7. Ono S., Oganov A.R., Koyama T., Shimizu H. (2006) Stability and compressibility of the high-pressure phases of Al_2O_3 up to 200 GPa: Implications for the electrical conductivity of the base of the lower mantle. *Earth and Planetary Science Letters*. 246. pp. 326–335. doi: 10.1016/j.epsl.2006.04.017
8. Marchenko E.I., Oganov A.R., Mazhnik E.A., Eremin N.N. (2022) Stable compounds in the $\text{CaO-Al}_2\text{O}_3$ system at high pressures. *Physics and Chemistry of Minerals*. 49. Article 44. doi: 10.1007/s00269-022-01221-6
9. Rocha-Rangel E., Rodríguez-García J.A., Castillo-Robles J.A., Mireles E.N.A., Calles-Arriaga C.A. (2021) Mathematical simulation of the wettability of Al_2O_3 substrate through different aluminum alloys. *Journal of Composites Science*. 5. Article 161. doi: 10.3390/jcs5060161
10. Mashimo T., Tsumoto K., Nakamura K. (2000) High-pressure phase transformation of corundum ($\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$) observed under shock compression. *Geophysical Research Letters*. 27(14). pp. 2012–2024. doi: 10.1029/2000GL008490
11. Ansell S., Krishnan S., Weber J.K.R., Felten J.J., Nordine P.C., Beno M.A., Price D.L., Saboungi M.L. (1997) Structure of liquid aluminum oxide. *Physical Review Letters*. 78. pp. 464–466. doi: 10.1103/PhysRevLett.78.464
12. Ahuja R., Belonoshko A.B., Johansson B. (1998) Melting and liquid structure of aluminum oxide using a molecular-dynamics simulation. *Physical Review E*. 57. pp. 1673–1676. doi: 10.1103/PhysRevE.57.1673
13. Sinn H., Glorieux B., Hennet L., Alatas A., Hu M., Alp E.E., Bermejo F.J., Price D.L., Saboungi M.L. (2003) Microscopic dynamics of liquid aluminum oxide. *Science*. 299. pp. 2047–2049. doi: 10.1126/science.1080950
14. Krishnan S., Hennet L., Jahn S., Key T.A., Madden P.A., Saboungi M.L., Price D.L. (2005) Structure of normal and supercooled liquid aluminum oxide. *Chemistry of Materials*. 17. pp. 2662–2666. doi: 10.1021/cm050254p
15. Gust W.H., Royce E.B. (1971) Dynamic yield strengths of B_4C , BeO and Al_2O_3 ceramics. *Journal of Applied Physics*. 42. pp. 276–295. doi: 10.1063/1.1659584
16. Liu H., Tse J.S., Nellis W.J. (2015) The electrical conductivity of Al_2O_3 under shock-compression. *Scientific Reports*. 5. Article 12823. doi: 10.1038/srep12823
17. Hari A., Hari R., Heighway P.G., Smith R.F., Duffy T.S., Sims M., Singh S., Fratanduono D.E., Bolme C.A., Gleason A.E., Coppari F., Lee H.J., Granados E., Heimann P., Eggert J.H., Wicks J.K. (2023) High pressure phase transition and strength estimate in polycrystalline alumina during laser-driven shock compression. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 35. Article 094002. doi: 10.1088/1361-648X/aca860
18. Umemoto K., Wentzcovitch R.M. (2008) Prediction of an U_2S_3 -type polymorph of Al_2O_3 at 3.7 Mbar. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*. 105(18). pp. 6526–6530. doi: 10.1073/pnas.0711925105
19. Lomonosov I.V. (2023) Equations of state for sapphire, silica, periclase, and rutile. *High Temperature*. 61. pp. 436–439. doi: 10.1134/S0018151X2303001X
20. Ostriak A.V., Nikolaev D.N. (2022) Shock induced melting of sapphire. *Journal of Physics: Conference Series*. 2154. Article 012010. doi: 10.1088/1742-6596/2154/1/012010
21. Tsuchiya J., Tsuchiya T., Wentzcovitch R.M. (2005) Transition from the $\text{Rh}_2\text{O}_3(\text{II})$ -to- CaIrO_3 structure and the high-pressure-temperature phase. *Physical Review B*. 72. Article 020103. doi: 10.1103/PhysRevB.72.020103
22. Mayevskii K.K. (2022) Numerical simulation of thermodynamic parameters of carbon. *High Temperature*. 60(2). pp. S194–S199. doi: 10.1134/S0018151X2105014X
23. Maevskii K.K. (2022) Silikaty magniya pri vysokikh dinamicheskikh nagruzkakh [Magnesium silicates at high dynamic loading]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 111–119. doi: 10.17223/19988621/79/10

24. Maevskii K.K., Kinelovskii S.A. (2014) Model of behavior of nitrides and their mixtures under high dynamic loads. *AIP Conference Proceedings*. 1623. pp. 391–394. doi: 10.1063/1.4898964
25. Maevskii K.K., Kinelovskii S.A. (2018) Thermodynamic parameters of mixtures with epoxy as a component under shock wave loading. *Journal of Physics: Conference Series*. 946. Article 012113. doi: 10.1088/1742-6596/946/1/012113
26. Grigoriev I.S., Meilikhov E.Z. (1997) *Handbook of Physical Quantities*. Boca Raton: CRC Press.
27. Kikoin I.K. (1976) *Tablitsy fizicheskikh velichin* [Tables of physical quantities]. Moscow: Atomizdat.
28. Gurevich L.V., Veyts I.V., Medvedev V.A. (1979) *Termodinamicheskie svoystva individual'nykh veshchestv* [Thermodynamic properties of individual substances]. Moscow: Nauka.
29. Mayevskii K.K. (2022) Numerical simulation of the thermodynamic parameters of germanium. *High Temperature*. 60(6). pp. 768–774. doi: 10.1134/S0018151X22050212
30. Marsh S.P. (1980) *LASL Shock Hugoniot Data*. Berkeley: University of California Press.
31. Pavlovskiy M.N. (1970) Udamnaya szhimaemost' shesti vysokotverdykh veshchestv [Shock compression of six highly firm substances]. *Fizika tvordogo tela – Physics of the Solid State*. 12(3). pp. 2175–2178.
32. Ostriak A.V., Nikolaev D.N. (2019) Construction of the equations of state for polycrystalline solids for the purpose of the numerical solution of problems of continuous medium mechanics. *Journal of Physics: Conference Series*. 1392. Article 012017. doi: 10.1088/1742-6596/1392/1/012017
33. Kerley G.I. (2009) *Equation of State and Constitutive Models for Numerical Simulations of Dust Impacts on The Solar Probe*. Report on Contract 949182. Johns Hopkins University, Applied Physic Laboratory. Laurel, Maryland.
34. Miller J.E. (2006) *48th Annual APS Meeting, Division of Plasma Physics*. Presentation is available at https://www.lle.rochester.edu/media/publications/presentations/documents/APS06/Miller_APS06.pdf

Сведения об авторе:

Маевский Константин Константинович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории физики многофазных сред Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (Новосибирск, Россия). E-mail: konstantinm@hydro.nsc.ru

Information about the author:

Maevskii Konstantin K. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: konstantinm@hydro.nsc.ru

Статья поступила в редакцию 27.03.2024; принята к публикации 10.04.2025

The article was submitted 27.03.2024; accepted for publication 10.04.2025

Научная статья

УДК 536.46

doi: 10.17223/19988621/94/14

Экспериментальное исследование и моделирование горения металлизированного смесового твердого топлива с учетом распределения агломератов по размерам. II. Результаты численного моделирования

Василий Андреевич Порязов¹, Олег Григорьевич Глотов²,
Алексей Юрьевич Крайнов³, Дмитрий Алексеевич Крайнов⁴

^{1,3} Томский государственный университет, Томск, Россия

² Институт химической кинетики и горения им. В.В. Воеводского
Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

⁴ Томский политехнический университет, Томск, Россия

¹ poryazov@ftf.tsu.ru

² glotov@kinetics.nsc.ru

³ a.krainov@ftf.tsu.ru

⁴ kraynov@tpu.ru

Аннотация. Представлены физико-математическая модель и результаты расчета скорости горения модельного твердого топлива с добавлением порошка алюминия. Физико-химические процессы в твердом топливе определяются уравнением теплопроводности и уравнением разложения окислителя. Процессы в газовой фазе описываются на основе подхода динамики многофазных реагирующих сред, описанного в работах Р.И. Нигматулина. На поверхности твердого топлива ставятся условия сохранения потоков массы компонентов и энергии. Для задания распределений по размерам частиц дисперсной фазы, выходящих с поверхности твердого топлива при горении, используются экспериментальные данные, полученные методом отбора. Полученные расчетные значения скорости горения совпадают с экспериментальными значениями в интервале давлений от 2 до 9 МПа с удовлетворительной точностью.

Ключевые слова: конденсированные продукты горения, алюминий, скорость горения

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 19-79-10054.

Для цитирования: Порязов В.А., Глотов О.Г., Крайнов А.Ю., Крайнов Д.А. Экспериментальное исследование и моделирование горения металлизированного смесового твердого топлива с учетом распределения агломератов по размерам. II. Результаты численного моделирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 175–187. doi: 10.17223/19988621/94/14

Original article

Experimental investigation and modeling of metallized composite solid propellant combustion with allowance for the size distribution of agglomerates. II. Numerical modeling results

Vasiliy A. Poryazov¹, Oleg G. Glotov²,
Aleksy Yu. Krainov³, Dmitriy A. Krainov⁴

^{1,3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

² Voevodsky Institute of Chemical Kinetics and Combustion Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

⁴ Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

¹ poryazov@ftf.tsu.ru

² glotov@kinetics.nsc.ru

³ a.krainov@ftf.tsu.ru

⁴ kraynov@tpu.ru

Abstract. A physical and mathematical model with the results of numerical modeling of metallized solid propellant combustion is presented. The physical and chemical processes occurring in the solid phase are determined by the thermal conductivity equation and the oxidant decomposition equation. In the gas phase, the processes are described based on the approaches of multiphase reacting media dynamics proposed by R. I. Nigmatulin. The conditions for the conservation of components' mass and energy are specified on the solid propellant surface. Experimental data obtained by the sampling procedure are used to determine the size distributions of the dispersed phase particles leaving the solid propellant surface during combustion. The calculated burning rate satisfies the experimentally obtained values in the pressure range of 2–9 MPa. The numerical study results confirm the assumption that the dispersion of aluminum particles leaving the propellant surface significantly affects the burning rate of the metallized composite solid propellant. Using experimental data on the dispersion of combustion products, the developed physical and mathematical model enables the prediction of the burning rate of metallized composite solid propellants with satisfactory accuracy.

Keywords: condensed combustion products, aluminum, burning rate

Acknowledgments: This research was financially supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-79-10054).

For citation: Poryazov, V.A., Glotov, O.G., Krainov, A.Yu., Krainov, D.A. (2025) Experimental investigation and modeling of metallized composite solid propellant combustion with allowance for the size distribution of agglomerates. II. Numerical modeling results. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 175–187. doi: 10.17223/19988621/94/14

Введение

Скорость горения твердого топлива является одной из важнейших его характеристик. Величины скорости горения твердого топлива при вариации давления достоверно определяются только экспериментально, полученные данные аппроксимируются степенной зависимостью вида $u_c = Ap^b$, где A и b – эмпирические

величины, являющиеся константами в интервалах давления, при которых проведены измерения. Существенный вклад в развитие теории горения конденсированных высокоэнергетических материалов внесла работа [1].

Для расчетного определения линейной скорости горения твердых ракетных топлив существуют различные феноменологические модели, основу для которых заложила работа [2], где скорость горения определяется массовыми потоками компонентов с поверхности топлива. В [3] на основе подхода [2] представлена физико-математическая модель горения металлизированного смесового твердого топлива (МСТТ). В [3] учитывается динамическое, тепловое и химическое взаимодействие между газом и частицами алюминия при движении продуктов газификации от поверхности горения, а также получена расчетная скорость горения смесового твердого топлива на основе перхлората аммония и инертного связующего при давлении 100 атм., равная 7.8 мм/с, конечная температура продуктов сгорания 2 800 К. При добавлении в состав 20 мас. % алюминия конечная температура продуктов сгорания составила 3 630 К. Полученные значения соответствуют экспериментальным данным, полученным в [4]. Согласование расчетных [3] и экспериментальных данных [4] проведено путем уточнения макрокинетических параметров химических реакций (тепловые эффекты реакций и предэкспоненциальный множитель в законе горения продуктов газификации твердого топлива). Получены расчетные зависимости линейной скорости горения МСТТ от давления и размера частиц алюминия. Использование модели Германса при решении задачи горения МСТТ с учетом газодинамических эффектов [3] показало сильную зависимость результатов от теплофизических и макрокинетических характеристик реакции в газовой фазе. Модель [3] была дополнена учетом переноса тепла и разложения окислителя в прогретом слое МСТТ, где на поверхности топлива ставятся условия сохранения потоков массы и энергии, как в модели горения нитроглицеринового пороха [5]. В [6] представлена сопряженная модель горения смесового твердого топлива с добавкой порошка бора, где процессы над поверхностью твердого топлива описываются уравнениями динамики двухфазных потоков [7].

Задачей данной работы является дальнейшее развитие математического моделирования МСТТ в области расчета зависимости скорости горения от давления и состава топлива. Как показано в [8], заданная в модели дисперсность частиц алюминия оказывает существенное влияние на величину скорости горения. В работе проверяется тезис о том, что детальная информация о распределении частиц алюминия по размерам на выходе с поверхности горения позволит с высокой точностью вычислить величину скорости горения. В первой части работы [9] приведены результаты экспериментальных измерений скорости горения, дисперсности, морфологии и полноты сгорания конденсированных продуктов сгорания модельных МСТТ.

В данной работе представлены доработанная физико-математическая модель и результаты расчетов, проведенных с учетом экспериментальных данных о распределении по размерам частиц, выходящих с поверхности топлива после их агломерации.

1. Моделирование: постановка задачи и метод решения

Постановка задачи основывается на моделях, представленных в [6, 10]. Физико-химические процессы в твердой фазе определяются уравнением теплопроводности

в конденсированной фазе и уравнением разложения окислителя. Процессы в газовой фазе описываются на основе подходов динамики многофазных реагирующих сред, описанных в работах Р.И. Нигматулина [7].

Постановка задачи сделана при следующих допущениях. Слева от границы $x = 0$ находится топливо, состоящее из окислителя, связующего и порошка алюминия. Справа от границы находятся продукты газификации МСТТ. Предполагается, что окислитель твердого топлива при нагревании разлагается с образованием газообразных продуктов разложения. Газообразные продукты разложения окислителя образуются на последней стадии реакции разложения, по достижении глубины превращения 0.99. Одновременно с поверхности топлива испаряется горючее-связующее. В газовой фазе газообразные горючее и окислитель смешиваются и реагируют, их реакция в газовой фазе экзотермическая, скорость реакции описывается законом Аррениуса первого порядка. За счет нагрева от химической реакции газ расширяется и двигается от поверхности МСТТ, транспортируя частицы алюминия за счет силы трения. Частицы алюминия имеют известное распределение по размерам, номер фракции частиц i изменяется от 1 до N_f . Распределение массы частиц по размерам задается из экспериментальных измерений, приведенных в [9]. Частицы в потоке реагирующих продуктов газификации окислителя и горючего прогреваются и начинают гореть. Величина температуры зажигания частиц алюминия $T_{z,i}$ зависит от их размера. Зависимость температуры зажигания частиц алюминия от их размера взята из [11, 12]. Закон скорости горения частиц алюминия взят из [13]. При сформулированных допущениях математическая постановка задачи имеет вид:

Для твердого топлива, $-\infty < x < 0$:

уравнение теплопроводности в твердом топливе:

$$\rho_c c_c \left(\frac{\partial T_c}{\partial t} + u_c \frac{\partial T_c}{\partial x} \right) = \lambda_c \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2} + Q_c k_c \rho_c (1 - \eta) \exp \left(-\frac{E_c}{RT_c} \right), \quad (1)$$

уравнение разложения окислителя в твердом топливе:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_c \frac{\partial \eta}{\partial x} = k_c (1 - \eta) \exp \left(-\frac{E_c}{RT_c} \right). \quad (2)$$

Уравнения для газовой фазы, $0 < x < \infty$:

уравнение сохранения массы газа:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g u_g}{\partial x} = - \sum_{i=1..N_f} G_{1,i}, \quad (3)$$

уравнение сохранения импульса газа:

$$\frac{\partial \rho_g u_g}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_g u_g^2 + p)}{\partial x} = \sum_{i=1..N_f} [-\tau_{tr,i} - G_{1,i} u_g], \quad (4)$$

уравнение сохранения энергии газа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_g (\epsilon_g + 0.5 u_g^2)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_g u_g (\epsilon_g + 0.5 u_g^2) + p u_g]}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial x} \right) - \\ - \sum_{i=1..N_f} [G_{1,i} (c_{pg} T_g + u_g^2 / 2) + u_{p,i} \tau_{tr,i} + \alpha_{p,i} n_{p,i} S_{p,i} (T_g - T_{p,i})] + Q_g G_g, \end{aligned} \quad (5)$$

уравнение сохранения массы окислителя в газе:

$$\frac{\partial \rho_{ox}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{ox} u_g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_g \rho_g \frac{\partial a_{ox}}{\partial x} \right) - \sum_{i=1..Nf} G_{1,i} - G_g, \quad (6)$$

уравнения баланса массы частиц i -й фракции:

$$\frac{\partial \rho_{p,i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{p,i} u_{p,i}}{\partial x} = G_{1,i}, \quad (7)$$

уравнение сохранения импульса частиц i -й фракции:

$$\frac{\partial \rho_{p,i} u_{p,i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{p,i} u_{p,i}^2}{\partial x} = \tau_{tr,i} + G_{1,i} u_g, \quad (8)$$

уравнение энергии частиц i -ой фракции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{p,i} (\epsilon_{p,i} + 0.5 u_{p,i}^2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{p,i} u_{p,i} (\epsilon_{p,i} + 0.5 u_{p,i}^2)}{\partial x} &= \frac{Q_1 G_{1,i}}{\alpha_1} + \\ &+ \left[G_{1,i} (c_{pg} T_g + u_g^2 / 2) + \tau_{tr,i} u_{p,i} + \alpha_{p,i} S_{p,i} n_{p,i} (T_g - T_{p,i}) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

уравнение счетной концентрации частиц i -й фракции:

$$\frac{\partial n_{p,i}}{\partial t} + \frac{\partial n_{p,i} u_{p,i}}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

уравнение состояния газа:

$$p = \rho_g R_g T_g, \quad (11)$$

начальные условия:

$$\begin{aligned} -\infty < x < 0 : T_c(x, 0) &= T_0, \eta = 0, \\ 0 \leq x < \infty : T_g(x, 0) &= T_{p,i}(x, 0) = T_b, \rho_{ox}(x, 0) = 0, \rho_{p,i}(x, 0) = 0, \\ u_g(x, 0) &= u_{p,i}(x, 0) = 0, \rho_g(x, 0) = \rho_b, n_{p,i}(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Граничные условия:

на поверхности горения (координата $x = 0$) выполняются законы сохранения потоков массы компонентов газификации твердого топлива и потоков энергии:

$$\begin{aligned} \lambda_g \frac{T_g(0, t)}{\partial x} &= \lambda_c \frac{T_c(0, t)}{\partial x} + L_c \rho_f u_c, \quad T_{p,i}(0, t) = T_g(0, t), \rho_g(0, t) = \frac{P_g}{R_g T_g(0, t)}, \\ \alpha_{ox} u_c \rho_c &= \rho_g D_g \frac{\partial a_{ox}(0, t)}{\partial x} + u_g(0, t) \rho_{ox}(0, t), \quad n_{p,i}(0, t) = \frac{\rho_{p,i}(0, t)}{(4/3) \pi r_{Al,0,i}^3 \rho_p^0}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\rho_{p,i}(0, t) = \alpha_{Al,i} \rho_c, \quad \alpha_{Al,i} \rho_c u_c = \rho_{p,i}(0, t) u_{p,i}(0, t), \quad \left(1 - \sum_{i=1..Nf} \alpha_{Al,i} \right) \rho_c u_c = \rho_g(0, t) u_g(0, t).$$

на левой границе, $x = -\infty$:

$$\frac{\partial T_c(-\infty, t)}{\partial x} = 0, \quad (14)$$

на правой границе, $x = \infty$:

$$\frac{\partial T_g(\infty, t)}{\partial x} = 0. \quad (15)$$

В уравнениях (1)–(15) t – время, x – координата, c_{pg} , c_{vg} – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении и постоянном объеме, c_c – удельная теплоемкость твердого топлива, T – температура, u_c – линейная скорость горения твердого топлива, u – скорость, p – давление, ρ – плотность, λ – коэффициент теплопроводности, Q – тепловой эффект реакции, k – предэкспоненциальный множитель в законе Аррениуса, η – глубина превращения в твердом топливе, надо ее определить, E – энергия активации химической реакции, R – универсальная газовая постоянная, $\varepsilon_g = p/(\gamma - 1) + 0.5u_g^2\rho_g$ – полная энергия газа, $\varepsilon_{p,i} = c_p T_{p,i} \rho_{p,i} + 0.5u_{p,i}^2 \rho_{p,i}$ – полная энергия частиц i -й фракции, $\alpha_{p,i} = Nu_{p,i} \lambda_g / (2r_{p,i})$ – коэффициент теплообмена газа с частицами, $\gamma = c_{pg} / c_{vg}$ – показатель адиабаты, τ_{tr} – сила трения, D_g – коэффициент диффузии, $\rho_c = 1/(\alpha_{c,ox} / \rho_{c,ox} + \alpha_f / \rho_f + \alpha_{Al} / \rho_{Al})$ – плотность смесового твердого топлива, $\rho_{c,ox}$ – плотность вещества окислителя, ρ_f – плотность вещества связующего, ρ_{Al} – плотность алюминия, $\alpha_{Al} = \sum_{i=1..Nf} \alpha_{Al,i}$ – массовая доля порошка алюминия, $\alpha_{c,ox}$ – массовая доля окислителя, α_f – массовая доля связующего, L_c – теплота испарения связующего, $r_{p,i} = \sqrt[3]{3\rho_{p,i} / (4\pi n_{p,i} \rho_{Al})}$ – радиус n частицы i -й фракции (надо определить); $r_{Al,i} = \left[\left(\frac{\mu_{Al} + 3/2 \mu_O}{\mu_{Al}} r_{Al,0,i}^3 - \frac{\rho_{p,i}}{(4/3)\pi n_{p,i} \rho_p^0} \right) \frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O} \right]^{1/3}$ – размер (радиус) оставшейся части алюминия в частице, μ_{Al} , μ_O – молярные массы алюминия и кислорода. Индексы: b – начальные значения параметров состояния, p – частицы, g – газ, c – смесовое твердое топливо, ox – окислитель, f – горючее, Al – алюминий, i – номер фракции частиц алюминия.

Коэффициент теплоотдачи вычисляется по формуле [14]

$$\alpha_{p,i} = \frac{Nu \lambda_g}{2r_{p,i}}, \quad Nu = 2 + \sqrt{Nu_l^2 + Nu_t^2}, \quad Nu_l = 0.664 Re^{0.5}, \quad Nu_t = 0.037 Re^{0.8}.$$

Скорость изменения массы частиц при их горении определяется зависимостью

$$G_{1,i} = \alpha_1 n_{p,i} \rho_p^0 S_{p,i} k(a_{ox}, r_{Al,i}) \beta_{m,i} / (k(a_{ox}, r_{Al,i}) + \beta_{m,i}),$$

где $\beta_{m,i} = \lambda_g(T_g) Nu / (c_g \rho_g r_{p,i})$ – коэффициент массоотдачи частиц при числе Льюиса

$$Le = \frac{D_g}{\lambda_g(T_g) / (c_g \rho_g)} = 1, \quad k(a_{ox}, r_{Al,i}) = k_{02} a_f^{0.9} / \sqrt{r_{Al,i}}, \quad \alpha_1 - \text{стехиометрический}$$

коэффициент реакции алюминия с окислителем, $S_{p,i}$ – площадь поверхности частицы, ρ_p^0 – плотность вещества частицы.

Скорость химической реакции в газовой фазе определяется из соотношения

$$G_2 = \rho_{ox} k_{0g} \exp(-E_g / (RT_g)).$$

Сила трения между частицами и газом определяется выражением $\tau_{tr,i} = n_{p,i} F_{tr,i}$ [14],

где $F_{tr,i} = C_r S_{m,i} \rho_g (u_g - u_{p,i}) |u_g - u_{p,i}| / 2$ – сила взаимодействия одиночной частицы

с газом, $C_r = 24(1 + 0.15 \text{Re}^{0.682}) / \text{Re}$ – коэффициент трения, $\text{Re} = 2\rho_g r_{p,i} |u_g - u_{p,i}| / \eta_g$ – число Рейнольдса, S_m – площадь миделевого сечения, η_g – коэффициент динамической вязкости газа.

Уравнения (1), (2) решались численно с использованием явной разностной схемы и разностей против потока для аппроксимации конвективных слагаемых. Количество точек сетки выбиралось таким, чтобы выполнялось граничное условие (14). Уравнения (3)–(6) решались численно с использованием метода С.К. Годунова [15]. Слагаемые в правых частях уравнений, описывающие процессы переноса за счет теплопроводности и диффузии, аппроксимировались явно на трехточечном шаблоне. Решение уравнений (7)–(10) проводилось методом, описанным в [16]. Шаг по пространству вблизи поверхности твердого топлива (до координаты $x = 7.5 \cdot 10^{-5}$ м) задавался постоянным и равным $\Delta h_i = 2.5 \cdot 10^{-7}$ м. После координаты $x = 7.5 \cdot 10^{-5}$ м шаг по пространству увеличивался в направлении правой границы по правилу $\Delta h_{i+1} = 1.02 \cdot \Delta h_i$. Размер расчетной области выбирался таким, чтобы в этой области завершились все реакции горения газа и частиц алюминия. Величина схемной диффузии при выбранном шаге Δh была много меньше коэффициента диффузии D_g . Шаг по времени определялся из условия устойчивости Куранта, $\Delta t < \Delta h_i / (\max[c] + \max[|u_g|])$, где c – скорость звука, и условия устойчивости явной разностной схемы для решения уравнений (1), (2) и выбирался минимальным. Граничные условия (13)–(15) аппроксимировались конечными разностями с первым порядком точности. Система уравнений (1)–(15) решается до установления стационарной линейной скорости горения твердого топлива u_c .

Исходные данные, принятые в расчетах: $c_{pg} = 1466.5$ Дж/(кг·К), $c_{vg} = 1202$ Дж/(кг·К), $R = 8.315$ Дж/(кг·К), $c_c = 1465$ Дж/(кг·К), $c_p = 760$ Дж/(кг·К), $\lambda_c = 0.5$ Дж/(м·с·К), $\lambda_g = 0.5$ Дж/(м·с·К), $\eta_g = 5 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $Q_c = 0.7$ МДж/кг, $k_{oc} = 6.3 \cdot 10^9$ 1/с, $E_c = 100\,000$ Дж/моль, $Q_1 = 12.75$ МДж/кг, $k_{02} = 2.22 \cdot 10^{-5}$ м^{1.5}/с, $Q_g = 42.61775$ МДж/кг, $k_{0g} = 9.8 \cdot 10^9$ 1/с, $E_g = 188\,325$ Дж/моль, $\alpha_1 = 0.8889$, $\alpha_{Al} = 0.15$, $\alpha_{ox} = 0.65$, $\alpha_f = 0.2$, $\rho_{c,ox} = 1\,950$ кг/м³, $\rho_f = 1\,270$ кг/м³, $\rho_{Al} = 2\,700$ кг/м³, $a_f = 0.5$, $T_b = 293$ К. Расчеты проводились при заданном давлении p над поверхностью топлива.

Результаты расчетов

Распределение по размерам частиц, полученных в [9] методом отбора, движущихся от поверхности твердого топлива с газообразными продуктами газификации твердого топлива при давлении p , и соответствующие температуры зажигания частиц приведены в таблице. В столбцах 4–9 таблицы указаны массовые доли фракции частиц из столбца 1. Сумма массовых долей всех фракций дает единицу.

Распределения массовой доли фракций частиц алюминия, выходящих с поверхности топлива

1	2	3	АСД-4			АСД-4 + Alex		
			4	5	6	7	8	9
№ фракции	$\Gamma_{Al,0,i}$, мкм	$T_{z,i}$, К	2.3 МПа	4.6 МПа	9.4 МПа	2.3 МПа	4.4 МПа	9 МПа
1	0.35	900	$2.69 \cdot 10^{-6}$	$4.37 \cdot 10^{-5}$	$2.79 \cdot 10^{-5}$	0	$9.77 \cdot 10^{-4}$	0
2	0.55	1 000	$3.50 \cdot 10^{-5}$	$3.24 \cdot 10^{-3}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$	0	$9.77 \cdot 10^{-4}$	$1.41 \cdot 10^{-4}$

Окончание таблицы

1	2	3	АСД-4			АСД-4 + Alex		
			4	5	6	7	8	9
№ фракции	$r_{Al_2O_3,i}$, мкм	$T_{z,i}$, K	2.3 МПа	4.6 МПа	9.4 МПа	2.3 МПа	4.4 МПа	9 МПа
3	0.70	1 100	$1.13 \cdot 10^{-3}$	$8.49 \cdot 10^{-2}$	$5.96 \cdot 10^{-2}$	$3.93 \cdot 10^{-3}$	$3.81 \cdot 10^{-2}$	$1.04 \cdot 10^{-2}$
4	0.87	1 300	$6.75 \cdot 10^{-2}$	$6.52 \cdot 10^{-2}$	$4.23 \cdot 10^{-2}$	$2.62 \cdot 10^{-1}$	$3.82 \cdot 10^{-2}$	$4.43 \cdot 10^{-2}$
5	1.10	1 400	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$6.32 \cdot 10^{-2}$	$4.09 \cdot 10^{-2}$	$5.11 \cdot 10^{-3}$	$4.70 \cdot 10^{-2}$	$6.75 \cdot 10^{-3}$
6	1.40	1 400	$4.82 \cdot 10^{-2}$	$6.70 \cdot 10^{-2}$	$4.34 \cdot 10^{-2}$	$6.31 \cdot 10^{-3}$	$6.07 \cdot 10^{-2}$	$1.69 \cdot 10^{-2}$
7	1.81	1 400	$6.77 \cdot 10^{-2}$	$7.19 \cdot 10^{-2}$	$4.70 \cdot 10^{-2}$	$2.62 \cdot 10^{-2}$	$7.65 \cdot 10^{-2}$	$3.52 \cdot 10^{-2}$
8	2.32	1 400	$5.79 \cdot 10^{-2}$	$7.87 \cdot 10^{-2}$	$6.05 \cdot 10^{-2}$	$1.45 \cdot 10^{-2}$	$9.00 \cdot 10^{-2}$	$3.32 \cdot 10^{-2}$
9	2.97	1 400	$1.33 \cdot 10^{-1}$	$9.43 \cdot 10^{-2}$	$8.75 \cdot 10^{-2}$	$3.28 \cdot 10^{-2}$	$1.12 \cdot 10^{-1}$	$7.01 \cdot 10^{-2}$
10	3.80	1 400	$8.65 \cdot 10^{-2}$	$9.21 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-1}$	$1.35 \cdot 10^{-1}$	$1.11 \cdot 10^{-1}$	$9.65 \cdot 10^{-2}$
11	4.90	1 400	$5.30 \cdot 10^{-2}$	$9.58 \cdot 10^{-2}$	$1.24 \cdot 10^{-1}$	$7.13 \cdot 10^{-2}$	$1.13 \cdot 10^{-1}$	$5.75 \cdot 10^{-2}$
12	6.36	1 400	$1.18 \cdot 10^{-1}$	$9.17 \cdot 10^{-2}$	$1.36 \cdot 10^{-1}$	$9.19 \cdot 10^{-2}$	$1.09 \cdot 10^{-1}$	$1.06 \cdot 10^{-1}$
13	8.42	1 400	$9.23 \cdot 10^{-2}$	$7.48 \cdot 10^{-2}$	$1.12 \cdot 10^{-1}$	$1.23 \cdot 10^{-1}$	$8.54 \cdot 10^{-2}$	$1.29 \cdot 10^{-1}$
14	11.67	1 400	$5.08 \cdot 10^{-2}$	$5.60 \cdot 10^{-2}$	$7.19 \cdot 10^{-2}$	$7.68 \cdot 10^{-2}$	$6.62 \cdot 10^{-2}$	$1.31 \cdot 10^{-1}$
15	18.01	1 400	$1.95 \cdot 10^{-1}$	$4.13 \cdot 10^{-2}$	$4.70 \cdot 10^{-2}$	$1.26 \cdot 10^{-1}$	$2.65 \cdot 10^{-2}$	$1.39 \cdot 10^{-1}$
16	35.22	1 400	$2.62 \cdot 10^{-5}$	$1.28 \cdot 10^{-2}$	$8.74 \cdot 10^{-3}$	$1.08 \cdot 10^{-2}$	$1.74 \cdot 10^{-2}$	$1.15 \cdot 10^{-1}$
17	75.20	1 400	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$7.72 \cdot 10^{-3}$	$1.62 \cdot 10^{-2}$	$1.22 \cdot 10^{-2}$	$5.57 \cdot 10^{-2}$	$9.85 \cdot 10^{-3}$

Расчеты проводились по модели (1)–(15) при давлениях и распределениях частиц по размерам, приведенных в таблице, и с исходными данными, приведенными выше. На рис. 1 представлено распределение параметров продуктов газификации твердого топлива над поверхностью топлива для МСТТ, содержащего смесь порошков алюминия АСД-4 и Alex. На рис. 1, *a*, *b* линия при $x < 0$ – это распределение температуры в твердом топливе, рис. 1, *b* повторяет рис. 1, *a* в узком интервале вблизи поверхности МСТТ. На рис. 1, *c*, *d* представлены скорости частиц и газа. В газовой фазе проходит экзотермическая реакция, и температура газа растет, продукты газификации твердого топлива за счет расширения оттекают от поверхности твердого топлива. При этом частицы алюминия за счет теплообмена с газом прогреваются, достигают температуры зажигания, воспламеняются и горят в потоке газа (см. рис. 1, *a*, *b*). За счет горения частиц алюминия их температура становится выше температуры газа, и уже газ нагревается от частиц. После выгорания алюминия в частицах (полного или частичного, заданного условиями задачи) реакция горения прекращается, температура частиц сравнивается с температурой газа (см. рис. 1*a*, *b*, *e*). Мелкие частицы за счет большей величины удельной поверхности сгорают на малом расстоянии от поверхности топлива. Частицы крупных фракций догорают на большем расстоянии от поверхности топлива. Резкое увеличение температуры газа вблизи поверхности топлива происходит за счет сгорания мелких частиц. Увеличение температуры приводит к уменьшению плотности и увеличению скорости движения газа (см. рис. 2, *c*, *d*). Мелкие частицы легко увлекаются потоком газа. Более крупные частицы разгоняются в потоке газа медленнее.

Результаты расчетов скорости горения МСТТ и их сравнение с экспериментальными данными [9] приведены на рис. 2.

Расчетная кривая 2 на рис. 2*a*, *b* с удовлетворительной точностью соответствует экспериментальным данным.

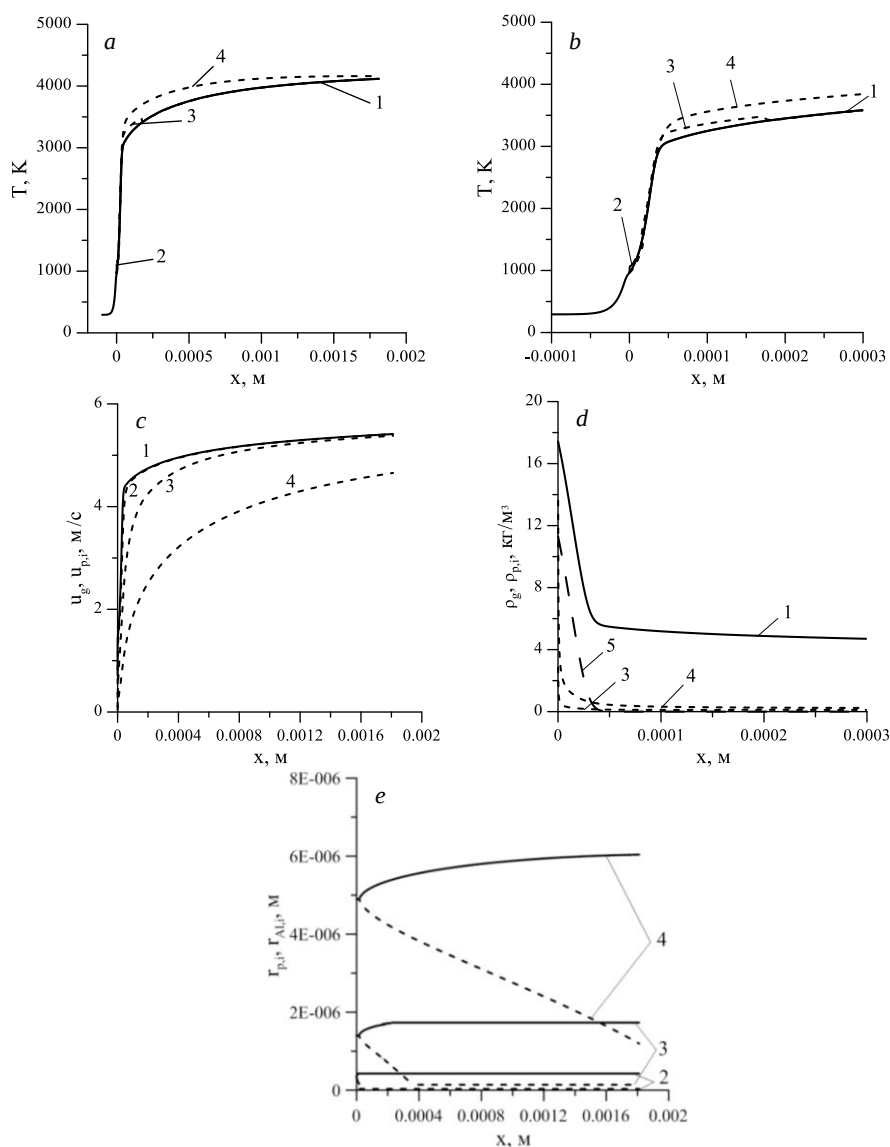


Рис. 1. Распределение параметров продуктов газификации твердого топлива над поверхностью топлива. Температуры газа и фракций частиц (a, b), скорости газа и фракций частиц (c), плотности газа, окислителя, распределенной плотности фракций частиц (d), эволюция размера (радиуса) фракций частиц и алюминия в них (e). 1 – газовая фаза, 2 – фракция частиц с размером $r_{Al,0,1} = 0.35 \mu\text{м}$; 3 – $r_{Al,0,6} = 1.4 \mu\text{м}$; 4 – $r_{Al,0,11} = 4.9 \mu\text{м}$; $p = 4.4 \text{ МПа}$

Fig. 1. Distribution of the parameters of solid propellant gasification products over the propellant surface. Temperature of the (a) gas and (b) particle fractions, (c) velocity of the gas and particle fractions, (d) density of the gas, oxidizer, and distributed density of particle fractions, (e) evolution of the size (radius) of particle fractions and aluminum within the particle fractions. 1, gas phase; 2, particle fraction with the size of $r_{Al,0,1} = 0.35 \mu\text{m}$; 3, $r_{Al,0,6} = 1.4 \mu\text{m}$; and 4, $r_{Al,0,11} = 4.9 \mu\text{m}$ at $p = 4.4 \text{ MPa}$

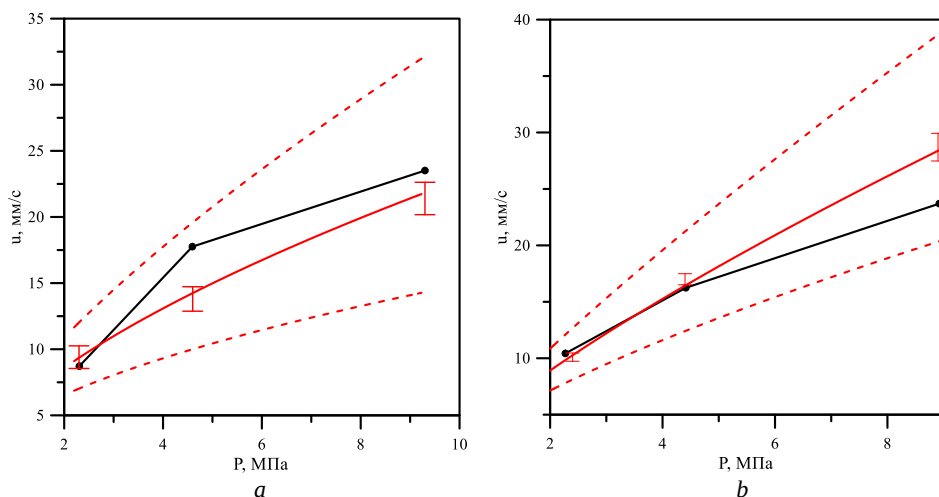


Рис. 2. Зависимость скорости горения твердого топлива с порошком алюминия АСД-4 (а), со смесью порошка алюминия АСД-4 и Alex (b) от давления

Fig. 2. Burning rate of the solid propellant with (a) aluminum powder ASD-4 and (b) a mixture of aluminum powder ASD-4 and Alex as a function of pressure

В [3] были представлены результаты моделирования горения МСТТ в постановке (1)–(15) для *монодисперсных* частиц алюминия. Параметрическое исследование скорости горения МСТТ от размера частиц в исследованном диапазоне показало сильную зависимость скорости горения от размера. Сравнение результатов расчетов с экспериментальной зависимостью скорости горения МСТТ от давления из [17] показало, что согласия расчетов с использованием предположения о монодисперсности частиц можно добиться в узком диапазоне изменения размера. В [18] отмечено, что «для расчета линейной скорости горения металлизированного СТТ важна информация не только о кинетике химических реакций в газовой фазе, но и о гранулометрическом составе частиц алюминия, вылетающих с поверхности горения». Проведенное численное исследование по модели (1)–(15) подтвердило, что существенное влияние на величину скорости горения металлизированного смесового твердого топлива оказывает дисперсность частиц алюминия. Разработанная физико-математическая модель позволяет с удовлетворительной точностью прогнозировать скорость горения металлизированного смесового твердого топлива на основе данных о дисперсности продуктов горения экспериментальных образцов. Использование газодинамической модели горения позволяет моделировать динамику течения продуктов горения от поверхности смесового твердого топлива и рассчитывать линейную скорость горения МСТТ в зависимости от давления.

Заключение

Сформулирована физико-математическая модель горения МСТТ. Проведено численное параметрическое исследование горения МСТТ с использованием экспериментальных данных о дисперсности частиц, вылетающих с поверхности горения. Для валидации модели рассчитаны зависимости линейной скорости горения МСТТ от давления для двух составов МСТТ: содержащих 15.7% алюминия АСД-4

или смесь порошков АСД-4 (10.7%) и Alex (5%). Показано удовлетворительное соответствие результатов расчетов с экспериментальными данными. Проведенное численное исследование подтвердило предположение о том, что существенное влияние на величину скорости горения металлизированного смесового твердого топлива оказывает дисперсность частиц алюминия, вылетающих с поверхности топлива. Разработанная физико-математическая модель позволяет с удовлетворительной точностью прогнозировать скорость горения металлизированного смесового твердого топлива на основе данных о дисперсности продуктов горения экспериментальных образцов.

Список источников

1. Новожилов Б.В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973.
2. Hermance C.E. A model of composite propellant combustion including surface heterogeneity and heat generation // AIAA J. 1966. V. 4 (9). P. 1629–1637.
3. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu. Combustion modeling of composite metallized solid fuel in view of gas-dynamic effects // AIP Conference Proceedings. 2020. V. 2288. Art. 030028. doi 10.1063/5.0028285
4. Зенин А.А., Глазкова А.П., Лейпунский О.И., Боболев В.К. Влияние алюминия на горение перхлората аммония с полиформальдегидом // Физика горения и взрыва. 1968. № 3. С. 299–304.
5. Порязов В.А., Крайнов А.Ю. Численное моделирование погасания пороха Н при резком сбросе давления на основе сопряженной модели горения // Физика горения и взрыва. 2015. Т. 51, № 6. С. 47–52
6. Порязов В.А., Моисеева К.М., Крайнов А.Ю. Исследование горения смесового твердого топлива с добавкой порошка бора // Физика горения и взрыва. 2022. Т. 58, № 5. С. 106–114.
7. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
8. Порязов В.А. Влияние дисперсности частиц алюминия на скорость горения металлизированных смесовых твердых топлив // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. Т. 33, № 1. С. 96–104.
9. Порязов В.А., Глотов О.Г., Крайнов А.Ю., Крайнов Д.А., Сорокин И.В., Суродин Г.С. Экспериментальное исследование и моделирование горения металлизированного смесового твердого топлива с учетом распределения агломератов по размерам. I. Эксперимент: методика, обработка, результаты // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 125–143. doi: 10.17223/19988621/92/11
10. Моисеева К.М., Крайнов А.Ю., Дементьев А.А. Определение критических условий искрового зажигания бидисперсного порошка алюминия в воздухе // Физика горения и взрыва. 2019. Т. 55, № 4. С. 26–33.
11. Ягодников Д.А. Горение порошкообразных металлов в газодисперсных средах. 2-е изд., испр. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2018.
12. Сандарам Д., Янг В., Зарко В.Е. Горение наночастиц алюминия (обзор) // Физика горения и взрыва. 2015. Т. 51, № 2. С. 37–63.
13. Порязов В.А., Крайнов А.Ю., Крайнов Д.А. Математическое моделирование горения пороха Н с добавлением порошка алюминия // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88, № 1. С. 93–101.
14. Справочник по теплообменникам : в 2 т. / под ред. Б.С. Петухова, В.К. Шикова М.: Энергоатомиздат, 1987. Т. 1.
15. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики, М.: Наука, 1976.
16. Крайко А.Н. О поверхностях разрыва в среде, лишенной «собственного» давления // Прикладная математика и механика. 1979. Т. 43, № 3. С. 500–510.

17. Архипов В.А., Горбенко Т.И., Горбенко М.В., Попок В.Н., Савельева Л.А. Влияние каталитических добавок на горение гетерогенных систем, содержащих ультрадисперсный алюминий // Известия вузов. Физика. 2007. Т. 50, № 9/2. С. 12–16.
18. Порязов В.А., Крайнов А.Ю. Расчет скорости горения металлизированного смесового твердого топлива с учетом распределения агломератов по размерам // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89, № 3. С. 568–574.

References

1. Novozhilov B.V. (1973) *Nestatsionarnoe gorenje tverdykh raketnykh topliv* [Unsteady combustion of solid rocket propellants]. Moscow: Nauka.
2. Hermance C.E. (1966) A model of composite propellant combustion including surface heterogeneity and heat generation. *AIAA Journal*. 4(9), pp. 1629–1637. doi: 10.2514/3.55284
3. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu. (2020) Combustion modeling of composite metallized solid fuel in view of gas-dynamic effects. *AIP Conference Proceedings*. 2288. Article 030028. doi: 10.1063/5.0028285
4. Zenin A.A., Glazkova A.P., Lejpunskij O.I., Bobolev V.K. (1968) Effect of aluminum on the burning of ammonium perchloratepolyformaldehyde mixtures. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 4. pp. 165–168. doi: 10.1007/BF00750854
5. Krainov A.Y., Poryazov V.A. (2015) Numerical simulation of the extinction of n powder by a pressure drop based on a coupled combustion model. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 51(6). pp. 664–669. doi: 10.1134/S0010508215060076
6. Poryazov V.A., Moiseeva K.M., Krainov A.Yu. (2022) Combustion of a composite solid propellant with addition of boron powder. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 58(5). pp. 602–609. doi: 10.1134/S0010508222050136
7. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka.
8. Poryazov V.A. (2015) Vliyanie dispersnosti chastits alyuminiya na skorost' goreniya metallizirovannykh smesevykh tverdykh topliv [Effect of the dispersion of aluminum particles on the combustion rate of metallized mixed solid propellants]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 33(1). pp. 96–104. doi: 10.17223/19988621/33/10
9. Poryazov V.A., Glotov O.G., Krainov A.Yu., Krainov D.A., Sorokin I.V., Surodin S.G. (2024) *Eksperimental'noe issledovanie i modelirovanie goreniya metallizirovannogo smesovogo tverdogo topliva s uchyotom raspredeleniya aglomeratov po razmeram. I. Eksperiment: metodika, obrabotka, rezul'taty* [Experimental investigation and modeling of metallized composite solid propellant combustion with allowance for the size distribution of agglomerates. I. Experiment: methodology, processing, results]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 125–143. doi: 10.17223/19988621/92/11
10. Moiseeva K.M., Krainov A.Y., Dement'ev A.A. (2019) Critical conditions of spark ignition of a bidisperse aluminum powder in air. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 55(4). pp. 395–401. doi: 10.1134/S001050821904004X
11. Yagodnikov D.A. (2018) *Gorenje poroshkoobraznykh metallov v gazodispersnykh sredakh* [Combustion of powdered metals in gas-dispersed media]. Moscow: Bauman MSTU Publ.
12. Sundaram D.S., Yang V., Zarko V.E. (2015) Combustion of nano aluminum particles (review). *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 51(2). pp. 173–196. doi: 10.1134/S0010508215020045
13. Poryazov V.A., Krainov A.Yu., Krainov D.A. (2015) Simulating the combustion of n powder with added finely divided aluminum. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 88(1). pp. 94–103. doi: 10.1007/s10891-015-1171-0
14. Ed. by Petukhov B.S., Shikov V.K. (1987) *Spravochnik po teploobmennikam* [Handbook of heat exchangers]. Volume 1. Moscow: Energoatomizdat.

15. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.
16. Kraiko A.N. (1979) On discontinuity surfaces in a medium devoid of “proper” pressure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 43(3). pp. 539–549. doi: 10.1016/0021-8928(79)90102-3
17. Arhipov V.A., Gorbenko T.I., Gorbenko M.V., Popok V.N., Savel'eva L.A. (2007) Vliyanie kataliticheskikh dobavok na gorenje geterogennykh sistem, sodержashchikh ul'tradispersnyy alyuminiy [Effect of catalytic additives on combustion of heterogeneous systems containing ultrafine aluminum]. *Izvestiya vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 50(9/2). pp. 12–16.
18. Poryazov V.A., Krainov A.Y. (2016) Calculation of the rate of combustion of a metallized composite solid propellant with allowance for the size distribution of agglomerates. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 89(3). pp. 579–586. doi: 10.1007/s10891-016-1414-8

Сведения об авторах:

Порязов Василий Андреевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

Глотов Олег Григорьевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института химической кинетики и горения им. В.В. Воеводского Сибирского отделения Российской академии наук (Новосибирск, Россия). E-mail: glotov@kinetics.nsc.ru

Крайнов Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: a.krainov@ftf.tsu.ru

Крайнов Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: kraynov@tpu.ru

Information about the authors:

Poryazov Vasily A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

Glotov Oleg G. (Candidate of Physics and Mathematics, Voevodsky Institute of Chemical Kinetics and Combustion of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: glotov@kinetics.nsc.ru

Krainov Aleksey Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: a.krainov@ftf.tsu.ru

Krainov Dmitriy A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kraynov@tpu.ru

Статья поступила в редакцию 05.06.2024; принята к публикации 10.04.2025

The article was submitted 05.06.2024; accepted for publication 10.04.2025

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2025. № 94

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 29.04.2025 г. Формат 70×100¹/₁₆.
Печ. л. 11,6; усл. печ. л. 10,8. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 6320.

Дата выхода в свет 13.05.2025 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru