

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.17

DOI 10.17223/20710410/67/5

К ВОПРОСУ О МАКСИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ВЕРШИН
В ПРИМИТИВНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С ЭКСПОНЕНТОМ 3

И. В. Лось, М. Б. Абросимов

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия***E-mail:** los.ilia.ru@gmail.com, mic@rambler.ru

Рассматривается вопрос о максимальном числе вершин в примитивных неориентированных регулярных графах с экспонентом, равным 3. Получена оценка сверху этого числа в зависимости от порядка графа p : $n_p \leq p^3 - p^2 - 3p + 5$. Найдено точное значение максимального числа вершин в примитивных кубических графах с экспонентом, равным 3: $n_3 = 12$. Проведён вычислительный эксперимент и найдено число примитивных регулярных графов порядка $p \leq 9$ с числом вершин $n \leq 16$ и экспонентом, равным 3, для всех пар (n, p) .

Ключевые слова: *примитивный граф, регулярный граф, максимальное число вершин.*

ABOUT THE MAXIMUM NUMBER OF VERTICES IN PRIMITIVE
REGULAR GRAPHS WITH EXPONENT EQUALS 3

I. V. Los, M. B. Abrosimov

Saratov State University, Saratov, Russia

Some results on the maximum number of vertices in primitive regular graphs with exponent 3 are presented. We have found upper bound of this number depending on the degree p : $n_p \leq p^3 - p^2 - 3p + 5$. Also, the exact value of the maximum number of vertices in primitive cubic graphs with exponent 3 is given: $n_3 = 12$. A computation experiment has been conducted, and we have found the number of primitive regular graphs with degree $p \leq 9$, number of vertices $n \leq 16$ and exponent 3 for each (n, p) pair.

Keywords: *primitive graph, regular graph, the maximum number of vertices.*

Введение

Неотрицательная квадратная матрица A называется *примитивной*, если существует натуральное k , такое, что A^k положительна. Минимальное такое значение k называется *экспонентом* матрицы A [1]. Понятие примитивности легко переносится на графы. В данной работе рассматриваются простые неориентированные графы. Напомним некоторые определения.

Регулярным или однородным графом порядка p называется граф, все вершины которого имеют степень p . Регулярные графы порядка 3 называются *кубическими*. Диаметр $d(G)$ связного графа G называется расстояние между наиболее удалёнными друг от друга вершинами этого графа. Связный граф G называется *примитивным*, если существует $k \in \mathbb{N}$, такое, что между любыми двумя вершинами графа (в том числе из вершины в саму себя) существует маршрут длины k . Минимальное такое число k называется *экспонентом* графа и обозначается $\text{exp}(G)$.

Примитивные графы представляют теоретический и практический интерес [2–5]. Ряд работ посвящены исследованию примитивных регулярных графов [6–10]. Один из вопросов — при каком числе вершин могут существовать примитивные регулярные графы с заданным экспонентом. В данной работе представлены результаты для регулярных примитивных графов с экспонентом 3. В п. 1 приведены теоретические результаты. В п. 2 описан вычислительный эксперимент, который позволяет оценить эффективность полученных теоретических результатов. Ранее аналогичное исследование проводилось для регулярных примитивных графов с экспонентом 2 [6, 7]. В частности, в работе [6] описан вычислительный эксперимент по поиску всех регулярных примитивных графов с экспонентом 2 с числом вершин до 16.

1. Теоретические результаты

Очевидно, что у примитивного графа с экспонентом 3 диаметр может быть 2 или 3. Для упрощения дальнейших рассуждений доказано вспомогательное утверждение — необходимое условие примитивности графа с экспонентом 3.

Утверждение 1. В примитивном графе с экспонентом, равным 3, каждая вершина лежит хотя бы на одном цикле длины 3.

Доказательство. По определению в примитивном графе с экспонентом 3 должен, в том числе, существовать маршрут длины 3 из любой вершины в саму себя, то есть каждая вершина должна лежать хотя бы на одном цикле длины 3. ■

Условие утверждения 1 не является достаточным. Например, на рис. 1 приведён пример графа, каждая вершина которого лежит на цикле длины 3, однако его экспонент равен 2. Данный контрпример является минимальным по числу вершин.

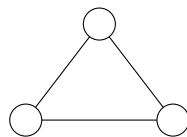


Рис. 1. Контрпример с экспонентом 2 для утверждения 1

Таким образом, в условие требуется включить ограничение на диаметр графа. Рассмотрим несколько достаточных условий, которые не являются необходимыми.

Утверждение 2. Если в графе G с диаметром $d(G) \leq 3$ каждое ребро входит в состав некоторого цикла длины 3, то граф G является примитивным с экспонентом $\text{exp}(G) \leq 3$, причём если $d(G) = 3$, то и $\text{exp}(G) = 3$.

Доказательство. Для графов с диаметром $d(G) \leq 2$ в [6] доказано, что граф G является примитивным с экспонентом $\text{exp}(G) = 2$. Таким образом, требуется доказать верность утверждения для графов с $d(G) = 3$ и $\text{exp}(G) = 3$. Рассмотрим пару произвольных вершин x и y . В силу того, что $d(G) = 3$, возможны три случая:

- 1) Длина кратчайшего пути между x и y равна 1, то есть вершины являются смежными. Тогда между ними существует маршрут длины 3: $x - y - x - y$.
- 2) Длина кратчайшего пути между x и y равна 2, и этот путь проходит через промежуточную вершину t . По условию любое из рёбер $x - t$ и $t - y$ лежит на цикле длины 3. Пусть ребро $x - t$ лежит на цикле $x - t - w$ (рис. 2). Тогда между x и y существует маршрут $x - w - t - y$ длины 3.

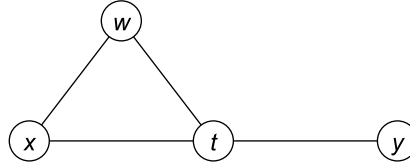
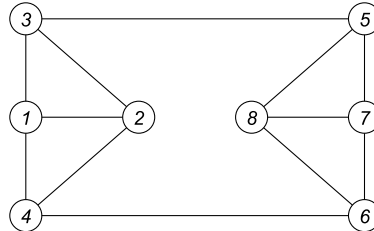


Рис. 2. Длина кратчайшего пути равна 2

- 3) Длина кратчайшего пути между x и y равна 3. Тогда маршрут длины 3 между этими вершинами совпадает с кратчайшим путём.

Утверждение 2 доказано. ■

На рис. 3 представлен 8-вершинный граф G_1 — минимальный по числу вершин регулярный граф, который показывает, что условие утверждения 2 не является необходимым: ребро между вершинами 3 и 5 (аналогично для ребра между вершинами 4 и 6) не лежит ни на одном цикле длины 3.

Рис. 3. Граф G_1

Интересен вопрос о том, насколько эффективно условие утверждения 2. С помощью вычислительного эксперимента, который описан в п. 2, получены результаты, приведённые в табл. 1, — количество контрпримеров для различных n и p . Можно сделать вывод, что большая доля примитивных регулярных графов с экспонентом 3 не удовлетворяет предложенному условию. Поэтому усилим его; доказательство аналогично доказательству утверждения 2.

Утверждение 3. Если в графе G с диаметром $d(G) \leq 3$ из каждой пары смежных рёбер хотя бы одно входит в состав некоторого цикла длины 3, то граф G является примитивным с экспонентом $\text{exp}(G) \leq 3$, причём если $d(G) = 3$, то и $\text{exp}(G) = 3$.

Условие утверждения 3 также не является необходимым; на рис. 4 представлен 10-вершинный граф G_2 — минимальный по числу вершин регулярный граф, для которого оно не выполняется: рёбра $\{5, 6\}$ и $\{5, 8\}$ смежны и не лежат ни на одном цикле длины 3.

Данные о выполнении условия утверждения 3 приведены в табл. 2. Видно, что число контрпримеров уменьшилось в несколько раз, однако всё ещё велико.

Таблица 1

Число графов с экспонентом 3, для которых условие, обратное утверждению 2, не выполняется

n	p						
	3	4	5	6	7	8	9
4	0	—	—	—	—	—	—
5	—	0	—	—	—	—	—
6	0	0	0	—	—	—	—
7	—	0	—	0	—	—	—
8	1	0	0	0	0	—	—
9	—	0	—	0	—	0	—
10	1	24	0	0	0	0	0
11	—	123	—	0	—	0	—
12	1	553	7 506	2 235	0	0	0
13	—	2 395	—	0	—	0	—
14	0	10 368	2 858 557	2 401 761	0	0	0

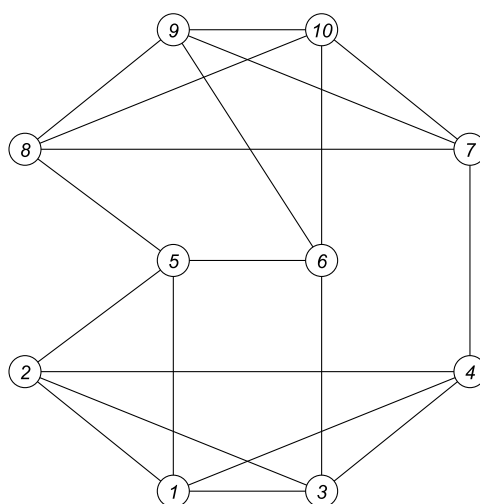


Рис. 4. Граф G_2

Обозначим через n_p максимально возможное число вершин в регулярном примитивном графе с порядком p и экспонентом, равным 3.

Теорема 1. Для максимально возможного числа вершин в регулярном примитивном графе с экспонентом 3 и порядком p имеет место неравенство

$$n_p \leq p^3 - p^2 - 3p + 5.$$

Доказательство. Диаметр графа с экспонентом, меньшим или равным 3, не больше 3. Оценим число вершин в p -регулярных графах с диаметром 3. В [11] приводится оценка максимального числа вершин в p -регулярных графах с диаметром d :

$$|V| \leq 1 + p \sum_{i=0}^{d-1} (p-1)^i.$$

Граф, который имеет число вершин, равное верхней границе, называется графом Мура. В нашем случае $d \leq 3$. Если мы выберем произвольную вершину x , то на расстоянии 1 от неё будет находиться p вершин; на расстоянии 2 — максимум $p(p-1)$ вершин;

Таблица 2

Число графов с экспонентом 3, для которых условие, обратное утверждению 3, не выполняется

n	p						
	3	4	5	6	7	8	9
4	0	—	—	—	—	—	—
5	—	0	—	—	—	—	—
6	0	0	0	—	—	—	—
7	—	0	—	0	—	—	—
8	0	0	0	0	0	—	—
9	—	0	—	0	—	0	—
10	0	18	0	0	0	0	0
11	—	109	—	0	—	0	—
12	0	524	1 463	0	0	0	0
13	—	2 345	—	0	—	0	—
14	0	10 290	2 634 777	946 878	0	0	0

на расстоянии 3 — максимум $p(p-1)^2$ вершин. Для $d=3$ оценка принимает вид

$$|V| \leq 1 + p + p(p-1) + p(p-1)^2. \quad (1)$$

После упрощения можно получить оценку $|V| \leq p^3 - p^2 + p + 1$, которая для $p=3, 4, 5$ приведёт к значениям 22, 53 и 106 соответственно.

Вернёмся к неравенству (1) и улучшим оценку. Обозначим через $N(x)$ множество всех смежных с x вершин. Тогда неравенство (1) для $d=3$ можно расписать следующим образом:

$$|V| \leq |\{x\}| + |N(x)| + \sum_{y \in N(x)} \left(|N(y) \setminus \{x\}| + \sum_{y' \in N(y) \setminus \{x\}} |N(y') \setminus \{y\}| \right).$$

Воспользуемся утверждением 1 и используем факт, что в графах с экспонентом, равным 3, каждая вершина лежит хотя бы на одном цикле длины 3. В этом случае для вершины x существует ребро между хотя бы двумя смежными с x вершинами, пусть это вершины u и v . Таким образом, вершины x , u и v лежат хотя бы на одном цикле длины 3. Тогда оценка будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} |V| &\leq |\{x\}| + |N(x)| + |N(u) \setminus \{x\} \setminus \{v\}| + |N(v) \setminus \{x\} \setminus \{u\}| + \\ &+ \sum_{y' \in N(u) \setminus \{x\} \setminus \{v\}} |N(y') \setminus \{u\}| + \sum_{y' \in N(v) \setminus \{x\} \setminus \{u\}} |N(y') \setminus \{v\}| + \\ &+ \sum_{y \in N(x) \setminus \{u\} \setminus \{v\}} \left(|N(y) \setminus \{x\}| + \sum_{y' \in N(y) \setminus \{x\}} |N(y') \setminus \{y\}| \right). \end{aligned}$$

Расширим это условие на все остальные вершины множества $N(x)$. Если мы хотим максимизировать число вершин в графе, то необходимо иметь ребро между хотя бы двумя вершинами, соседними с данной. Пусть для вершины $y \in N(x)$ это вершины l_y и t_y . Новая оценка выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} |V| &\leq |\{x\}| + |N(x)| + |N(u) \setminus \{x\} \setminus \{v\}| + |N(v) \setminus \{x\} \setminus \{u\}| + \\ &+ \sum_{y' \in N(u) \setminus \{x\} \setminus \{v\}} |N(y') \setminus \{u\}| + \sum_{y' \in N(v) \setminus \{x\} \setminus \{u\}} |N(y') \setminus \{v\}| + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{y \in N(x) \setminus \{u\} \setminus \{v\}} \left(|N(y) \setminus \{x\}| + |N(t_y) \setminus \{y\} \setminus \{l_y\}| + |N(l_y) \setminus \{y\} \setminus \{t_y\}| + \right. \\ \left. + \sum_{y' \in N(y) \setminus \{x\} \setminus \{l_y\} \setminus \{t_y\}} |N(y') \setminus \{y\}| \right).$$

Так как граф p -регулярный, для каждой вершины x выполняется $|N(x)| = p$. Поэтому верхняя оценка принимает следующий вид:

$$|V| \leq 1 + p + (p-2) + (p-2) + (p-2)(p-1) + \\ + (p-2)((p-1) + (p-2) + (p-2) + (p-3)(p-1)) = \\ = 3(p-1) + 2(p-2)(p-1) + (p-2)^2(p+1) = p^3 - p^2 - 3p + 5.$$

Теорема 1 доказана. ■

В частности, имеем $n_3 \leq 14$, $n_4 \leq 41$ и $n_5 \leq 90$. Эти значения существенно лучше тех, которые можно получить из формулы Мура. Более того, удалось получить точное значение для n_3 .

Теорема 2. Не существует кубических примитивных графов с экспонентом 3 и числом вершин больше 12; $n_3 = 12$.

Доказательство. На рис. 5 приведено изображение 12-вершинного кубического графа с экспонентом 3. Поэтому $n_3 \geq 12$.

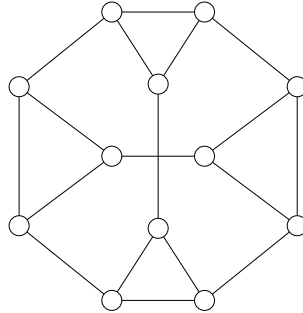


Рис. 5. 12-Вершинный кубический граф с экспонентом 3

Так как 3-регулярные графы не могут иметь нечётное число вершин, для доказательства теоремы нужно показать, что не существует кубического примитивного графа с экспонентом 3 и числом вершин 14. Рассмотрим все возможные графы и покажем, что ни один из них не удовлетворяет нужному условию.

На рис. 6 представлен вид 3-регулярного графа с экспонентом 3 и 14 вершинами. Каждая из вершин $1, \dots, 6$ имеет свободную степень 2, остальные вершины свободных степеней не имеют. Поэтому вершины $1, \dots, 6$ можно соединять рёбрами только между собой. Теперь посмотрим на вершину v . Расстояние от неё до любой другой вершины графа должно быть меньше или равно 3. Для вершин $1, 2, 3, 4$ это можно сделать только одним способом: соединить каждую из них хотя бы с одной из вершин $5, 6$. Аналогично рассмотрим вершину u : каждая из вершин $5, 6$ должна быть соединена хотя бы с одной из вершин $3, 4$. И, наконец, рассмотрим вершину x : каждая из вершин $5, 6$ должна быть соединена хотя бы с одной из вершин $1, 2$. Это означает, что вершина 5 должна быть соединена с вершинами 1 или 2 и 3 или 4. Аналогично для вершины 6. С другой стороны, каждая из вершин $1, 2, 3, 4$ должна быть соединена

с вершинами 5 или 6. Единственный с точностью до изоморфизма способ это сделать представлен на рис. 7.

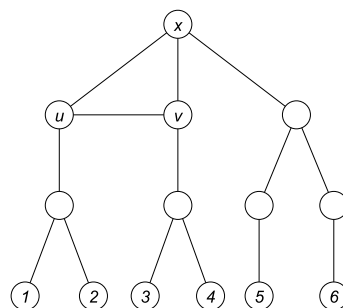


Рис. 6. Неполный вид 3-регулярного графа с экспонентом 3 и числом вершин 14

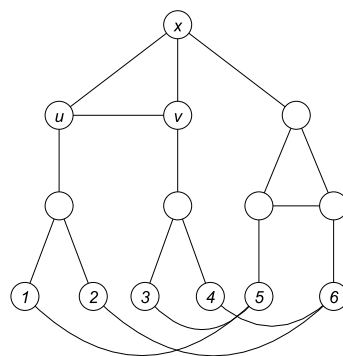


Рис. 7. Дополненный вид 3-регулярного графа с экспонентом 3 и числом вершин 14

Воспользуемся тем, что каждая из вершин 5 и 6 должна лежать хотя бы на одном цикле длины 3. Единственный способ добиться этого — соединить между собой пары вершин 1, 3 и 2, 4. Итоговый вид графа без свободных степеней представлен на рис. 8.

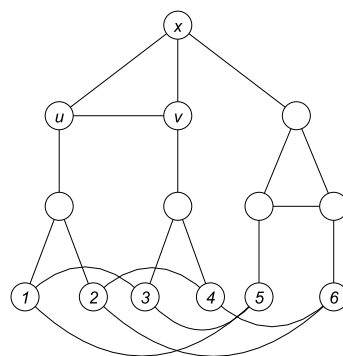


Рис. 8. Полный вид 3-регулярного графа с экспонентом 3 и числом вершин 14

Покажем, что экспонент этого графа не равен 3. Рассмотрим вершины u и 1: между ними не существует маршрута длины 3. Следовательно, экспонент данного графа не равен 3, и мы доказали, что не существует 3-регулярных графов с экспонентом 3 и числом вершин 14. ■

Приведём результаты, касающиеся условий равенства экспонента трём для различных графов.

Теорема 3. В графе с диаметром 2, в котором каждая вершина лежит хотя бы на одном цикле длины 3, между любой парой вершин (в том числе из самой вершины в себя) существует маршрут длины 3.

Доказательство. Существование маршрута длины 3 из любой вершины в саму себя следует из условия теоремы.

Рассмотрим две произвольные различные вершины x и y . Так как диаметр графа равен 2, между ними должен существовать путь длины 1 и/или длины 2. Пусть между ними существует путь длины 1, т.е. они соединены ребром напрямую. Тогда между ними существует маршрут $x - y - x - y$ длины 3.

Пусть теперь между x и y не существует пути длины 1, тогда между ними существует путь длины 2 через некоторую промежуточную вершину t . Рассмотрим вершину x . По условию теоремы она лежит на некотором цикле длины 3, обозначим его $x - a - b$. Возможны два варианта:

1) Цикл $x - a - b$ не содержит вершину t (то есть t не совпадает ни с вершиной a , ни с вершиной b).

Рассмотрим пару вершин a и y : так как диаметр графа равен 2, между ними должен существовать путь длины 1 или путь длины 2 через промежуточную вершину c . Пусть между ними существует путь длины 1, как показано на рис. 9. Тогда между x и y существует маршрут $x - b - a - y$ длины 3.

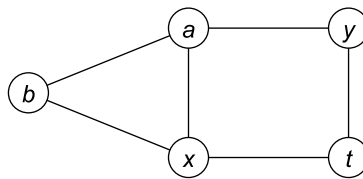


Рис. 9. Случай существования пути длины 1

Пусть теперь между a и y существует путь длины 2 через промежуточную вершину c , как показано на рис. 10. Тогда между x и y существует маршрут $x - a - c - y$ длины 3.

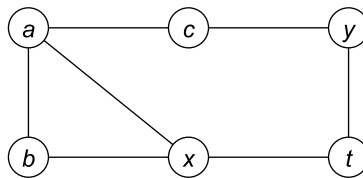


Рис. 10. Случай существования пути длины 2 через промежуточную вершину c

2) Пусть в цикле $x - a - b$ вершина b совпадает с вершиной t . Тогда имеем цикл $x - t - a$ и между x и y существует маршрут $x - a - t - y$ длины 3, как показано на рис. 11. Случай $t = a$ является полностью симметричным.

Других случаев нет, так как вершина y не может принадлежать циклу (тогда между x и y будет существовать путь длины 1). В силу произвольности выбора вершин x и y теорема доказана. ■

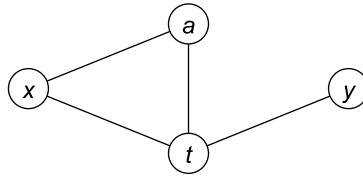


Рис. 11. Случай совпадения вершины t с одной из вершин цикла

Следствие 1. Граф с диаметром 2, в котором каждая вершина лежит хотя бы на одном цикле длины 3, является примитивным, и его экспонент меньше или равен 3.

Доказательство. Согласно теореме 3, в таком графе между любой парой вершин (в том числе из вершины в саму себя) существует маршрут длины 3. По определению данный граф примитивный и его экспонент не больше 3. ■

Теорема 4. Граф с диаметром 2 является примитивным и имеет экспонент, равный 3, тогда и только тогда, когда каждая его вершина лежит хотя бы на одном цикле длины 3 и существует хотя бы одно ребро, не лежащее ни на одном цикле длины 3.

Доказательство.

Необходимость. Если граф является примитивным и имеет экспонент 3, то, согласно утверждению 1, каждая его вершина лежит хотя бы на одном цикле длины 3. Кроме того, если граф имеет диаметр 2 и каждое его ребро лежит хотя бы на одном цикле длины 3, то, согласно [6], он является примитивным с экспонентом, равным 2. Значит, должно существовать хотя бы одно ребро, не лежащее ни на одном цикле длины 3.

Достаточность. Согласно следствию 1 из теоремы 3, если в графе с диаметром 2 каждая вершина лежит на хотя бы одном цикле длины 3, то граф является примитивным и его экспонент меньше или равен 3. Так как в примитивном графе с диаметром 2 экспонент больше или равен 2, для экспонента остаются только варианты 2 или 3. Однако, согласно [6], экспонент этого графа не может быть равен 2, поскольку существует хотя бы одно ребро, не лежащее на цикле длины 3. Таким образом, граф является примитивным и его экспонент равен 3. ■

2. Вычислительный эксперимент

Проведён вычислительный эксперимент с использованием кластера высокопроизводительных вычислений ПРЦ НИТ СГУ по подсчёту регулярных графов с экспонентом, равным 3, в рамках которого построена таблица числа примитивных регулярных графов со степенью $p \leq 9$, числом вершин $n \leq 16$ и экспонентом 3. Для этого написана программа на языке C++; генерация всех связных регулярных графов степени p с фиксированным числом вершин n производилась с помощью генератора графов `genreg` [12]. Для каждого из сгенерированных графов проверялось равенство экспонента трём. Дополнительно подсчитывалось количество контрпримеров для оценки эффективности достаточных условий, сформулированных в утверждениях 2 и 3 (см. табл. 1 и 2). Основная цель эксперимента состояла в том, чтобы посмотреть распределение регулярных графов с экспонентом 3 в зависимости от степеней вершин, а также как эти значения согласуются с теоретическими. В частности, экспериментальные данные о максимально возможном числе вершин для кубических графов подтверждают полученный теоретический результат: $n_3 \leq 14$.

Для проверки использовались возведение матрицы смежности графа в степень 3 и проверка полученной матрицы на отсутствие нулей. Важно отметить, что при те-

кущих ограничениях на $n \leq 16$ строки матрицы можно хранить в виде двоичных масок в любом 32-битном типе данных, например в типе `int`. В этом случае легко свести перемножение двух матриц к последовательному применению побитовой операции «И» к парам нужных строк матриц, если вторую матрицу хранить в транспонированном виде. Это позволяет выполнять умножение двух матриц за время порядка $O(n^2)$. Для возведения матрицы в степень можно воспользоваться бинарным алгоритмом [13], который позволяет возводить число или матрицу в степень k за $O(\log k)$ действий, что даёт итоговую временную сложность решения $O(n^2 \log k)$. Так как в нашем случае $k = 3$, имеем сложность $O(n^2)$.

В табл. 3 приводится результат работы программы — число графов с экспонентом 3 для различных n и p . Символ «—» означает, что графов с такими n и p не существует. Это может быть в двух случаях: $p \geq n$ или произведение pn нечётно. Серый фон клетки означает, что все связанные регулярные графы со степенью p и числом вершин n имеют экспонент, равный 2. В работе [6] показано, что это верно при $p > n/2$.

Таблица 3

Число графов с экспонентом 3 для различных n и p

n	p						
	3	4	5	6	7	8	9
4	0	—	—	—	—	—	—
5	—	0	—	—	—	—	—
6	1	0	0	—	—	—	—
7	—	0	—	0	—	—	—
8	1	3	0	0	0	—	—
9	—	11	—	0	—	0	—
10	1	41	35	0	0	0	0
11	—	143	—	0	—	0	—
12	1	568	7 506	2 391	0	0	0
13	—	2 403	—	232 080	—	0	—
14	0	10 377	3 093 569	18 801 129	2 757 433	0	0
15	—	42 197	—	1 429 344 906	—	0	—
16	0	151 684	1 797 671 946	112 705 503 963	467 764 092 656	34 831 303 586	0

Заключение

В работе рассмотрен вопрос о максимальном числе вершин в примитивных неориентированных регулярных графах с экспонентом, равным 3. Помимо общей оценки, удалось найти точное значение для кубических графов: не существует кубических графов с экспонентом 3 и числом вершин больше 12. Кубический 12-вершинный граф с экспонентом 3 представлен в работе. Ранее аналогичный вопрос рассматривался для регулярных графов с экспонентом 2, где удалось найти точные значения для регулярных графов порядка 3, 4 и 5: $n_3 = 4$, $n_4 = 11$ и $n_5 = 16$. Приведены результаты вычислительного эксперимента по построению всех регулярных графов с экспонентом 3 и числом вершин до 16, предложено несколько достаточных условий для регулярных графов с экспонентом 3 и проведён их анализ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wielandt H. Unzerlegbare nicht negative Matrizen // Math. Zeitschr. 1950. V. 52. P. 642–648.
2. Сачков В. Н., Ошкин И. Б. Экспоненты классов неотрицательных матриц // Дискретная математика. 1993. Т. 5. № 2. С. 150–159.

3. Салий В. Н. Минимальные примитивные расширения ориентированных графов // Прикладная дискретная математика. 2008. №1(1). С. 116–119.
4. Фомичев В. М. Оценки экспонентов примитивных графов // Прикладная дискретная математика. 2011. №2(11). С. 101–112.
5. Фомичев В. М., Аvezова Я. Э. Точная формула экспонентов перемешивающих орграфов регистровых преобразований // Дискрет. анализ исслед. опер. 2020. №2(27). С. 117–135.
6. Абросимов М. Б., Лось И. В., Костин С. В. Примитивные однородные графы с экспонентом 2 и числом вершин до 16 // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21. Вып. 2. С. 238–245.
7. Абросимов М. Б., Костин С. В., Лось И. В. О наибольшем числе вершин примитивных однородных графов порядка 2, 3, 4 с экспонентом, равным 2 // Прикладная дискретная математика. 2021. №52. С. 97–104.
8. Jin M., Lee S. G., and Seol H. G. Exponents of r -regular primitive matrices // Inform. Center for Math. Sci. 2003. V. 6. No. 2. P. 51–57.
9. Bueno M. I. and Furtado S. On the exponent of r -regular primitive matrices // ELA. Electronic J. Linear Algebra. 2008. V. 17. P. 28–47.
10. Kim B., Song B., and Hwang W. Nonnegative primitive matrices with exponent 2 // Linear Algebra Appl. 2005. No. 407. P. 162–168.
11. Hoffman A. J. and Singleton R. R. Moore graphs with diameter 2 and 3 // IBM J. Research and Development. 1960. V. 4. P. 497–504.
12. Meringer M. Fast generation of regular graphs and construction of cages // J. Graph Theory. 1999. V. 30. P. 137–146.
13. Смарт Н. Криптография. М.: Техносфера, 2005. 528 с.

REFERENCES

1. Wielandt H. Unzerlegbare nicht negative Matrizen. Math. Zeitschr., 1950, vol. 52, pp. 642–648. (in German)
2. Sachkov V. N. and Oshkin I. B. Exponents of classes of non-negative matrices. Discrete Math. Appl., 1993, vol. 3, no. 4, pp. 365–375.
3. Saliy V. N. Minimal'nye primitivnye rasshireniya orientirovannykh grafov [Minimal primitive extensions of oriented graphs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2008, no. 1(1), pp. 116–119. (in Russian)
4. Fomichev V. M. Otsenki eksponentov primitivnykh grafov [The estimates of exponents for primitive graphs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 2(11), pp. 101–112. (in Russian)
5. Fomichev V. M. and Avezova Ya. E. The exact formula for the exponents of the mixing digraphs of register transformations. J. Appl. Ind. Math., 2020, no. 14, pp. 308–320.
6. Abrosimov M. B., Los' I. V., and Kostin S. V. Primitivnyye odnorodnyye grafy s eksponentom 2 i chislom verшин do 16 [Primitive regular graphs with exponent 2 and up to 16 vertices]. Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, no. 2, pp. 238–245. (in Russian)
7. Abrosimov M. B., Kostin S. V., and Los' I. V. O naibol'shem chisle verшин primitivnykh odnorodnykh grafov poryadka 2, 3, 4 s eksponentom, ravnym 2 [The maximum number of vertices of primitive regular graphs of orders 2, 3, 4 with exponent 2]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2021, no. 52, pp. 97–104. (in Russian)
8. Jin M., Lee S. G., and Seol H. G. Exponents of r -regular primitive matrices. Inform. Center for Math. Sci., 2003, vol. 6, no. 2, pp. 51–57.

9. *Bueno M. I. and Furtado S.* On the exponent of r -regular primitive matrices. *ELA. Electronic J. Linear Algebra*, 2008, vol. 17, pp. 28–47.
10. *Kim B., Song B., and Hwang W.* Nonnegative primitive matrices with exponent 2. *Linear Algebra Appl.*, 2005, no. 407, pp. 162–168.
11. *Hoffman A. J. and Singleton R. R.* Moore graphs with diameter 2 and 3. *IBM J. Research and Development*, 1960, vol. 4, pp. 497–504.
12. *Meringer M.* Fast generation of regular graphs and construction of cages. *J. Graph Theory*, 1999, vol. 30, pp. 137–146.
13. *Smart N. P.* *Cryptography: An Intoduction*. McGraw-Hill, 2003. 433 p.