ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 512+512.5+512.54+512.54.03 DOI 10.17223/20710410/66/1

ОБ УРАВНЕНИЯХ В СВОБОДНЫХ ГРУППАХ С КОММУТАНТНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РЕШЕНИЯ

А. И. Зеткина

Ярославский государственный университет, г. Ярославль, Россия

E-mail: a.zetkina1@uniyar.ac.ru

Описан полиномиальный алгоритм, позволяющий по произвольному разрешенному относительно неизвестных уравнению вида $w(x_1,\ldots,x_n) = [a,b]$, где $w(x_1,\ldots,x_n)$ — групповое слово в алфавите неизвестных, а $[a,b]$ — коммутатор свободных образующих a и b свободной группы F_2, определить, существует ли решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $x_1,\ldots,x_n \in F_2^{(1)}$, где $F_2^{(1)}$ — коммутант группы F_2. Установлено существование полиномиального алгоритма, позволяющего по произвольному разрешенному относительно неизвестных уравнению вида $w(x_1,\ldots,x_n) = g(a,b)$, где $g(a,b)$ — элемент длины меньше 4 свободной группы F_2, определить, существует ли решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $x_1,\ldots,x_t \in F_2^{(1)}$, где t — произвольное фиксированное число между 1 и n. Доказана алгоритмическая разрешимость аналогичной проблемы для уравнений $w(x_1,a,b) = 1$ с одной переменной x_1.

Ключевые слова: *свободная группа, уравнение в свободной группе.*

ON EQUATIONS IN FREE GROUPS WITH COMMUTANT RESTRICTIONS ON SOLUTIONS

A. I. Zetkina

Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

A polynomial algorithm has been constructed that allows, given an arbitrary equation of the form $w(x_1,\ldots,x_n) = [a,b]$, resolved with respect to unknowns, where $w(x_1,\ldots,x_n)$ is a group word in the alphabet of unknowns and $[a,b]$ is the commutator of free generators a and b of the free group F_2, to determine whether there is a solution to this equation that satisfies the condition $x_1 \ldots, x_n \in F_2^{(1)}$, where $F_2^{(1)}$ is the commutator of group F_2. The existence of a polynomial algorithm has been established that allows, given an arbitrary equation of the form $w(x_1,\ldots,x_n) = g(a,b)$, where $g(a,b)$ is an element of length less than 4 of the free group F_2, to determine whether a solution to this equation exists, that satisfies the condition $x_1,\ldots,x_t \in F_2^{(1)}$, where t is an arbitrary fixed number between 1 and n. The algorithmic solvability of a similar problem has been proven for the equations $w(x_1,a,b) = 1$ with one variable x_1.

Keywords: *free group, equation in a free group.*

Введение

Через F_m будем обозначать свободную группу ранга m со свободными образующими $a_1, \dots, a_m$. При $m = 2$ вместо a_1 и a_2 будем писать a и b соответственно.

Определим некоторые понятия, относящиеся к системам уравнений в свободных группах.

Определение 1. Системой уравнений с неизвестными $x_1, \dots, x_n$ в свободной группе F_m называется выражение вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k}\Big(w_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = u_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)\Big), \tag{1}$$

где $w_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$ и $u_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$ — слова в алфавите

$$\{x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}, a_1, a_1^{-1}, \dots, a_m, a_m^{-1}\}.$$

Определение 2. Набор $\langle g_1, \dots, g_n\rangle$ элементов группы F_m называется решением системы (1), если при любом $i = 1, \dots, k$ в группе F_m выполняется равенство

$$w_i(g_1, \dots, g_n, a_1, \dots, a_m) = u_i(g_1, \dots, g_n, a_1, \dots, a_m).$$

Определение 3. Две системы уравнений с одними и теми же неизвестными называются эквивалентными, если множества их решений совпадают.

Используя уравнение

$$[x, a_1] = ([x, a_2]\, y^2)^2,$$

имеющее в свободной группе F_m при любом $m \geqslant 2$ лишь тривиальное решение $x{=}y{=}1$, любую систему уравнений (1) можно заменить одним равносильным уравнением. Построение по (1) равносильного уравнения ведётся индукцией по k. При $k = 2$ система уравнений

$$\mathop{\&}_{i=1}^{2}\Big(w_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = u_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)\Big)$$

равносильна одному уравнению

$$\begin{aligned}
&[w_1(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)u_1^{-1}(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m), a_1] = \\
&= ([w_1(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)u_1^{-1}(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m), a_2] \\
&\quad (w_2(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)u_2^{-1}(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m))^2)^2.
\end{aligned}$$

Для уравнений в свободных группах традиционно рассматриваются две основные задачи: проблема существования решения и проблема описания множества всех решений.

Исследование разрешимости уравнений в свободных группах было начато американскими математиками в конце 50-х годов в связи с проблемой разрешимости элементарных теорий свободных групп, поставленной А. Тарским [1], остававшейся открытой почти полвека и решённой в начале 2000-х годов О. Харлампович и А. Мясниковым [2].

Сначала исследовались лишь отдельные уравнения, а в 1960 г. Р. Линдон [3] нашёл для произвольного уравнения с одним неизвестным описание множества всех его решений с помощью параметрических слов, т. е. выражений, полученных из образующих рассматриваемой свободной группы с помощью операций группового умножения и возведения в степень с переменным целочисленным показателем. Позже А. А. Лоренц [4] и К. И. Аппель [5] уточнили это описание, доказав, что общее решение любого уравнения с одним неизвестным в свободной группе представимо конечным числом формул вида

AB^tC, где A, B, C — конкретные слова, а t — параметр, принимающий произвольные целочисленные значения. Дальнейшее продвижение в этом вопросе достигнуто в 1970 г. Ю. И. Хмелевским [6].

В 1982 г. Г. С. Маканин [7] получил полное решение проблемы распознавания разрешимости уравнений в свободной группе. Он доказал, что если уравнение с длиной записи d имеет решение в свободной группе, то длина каждой компоненты минимального (по максимальной длине компоненты) решения не превосходит числа $\Phi(d)$, где $\Phi(x)$ — некоторая рекурсивная функция. Это даёт переборный алгоритм для распознавания разрешимости произвольного уравнения в свободной группе.

Вскоре после опубликования работы [7] удалось на том же пути доказать разрешимость экзистенциональной (универсальной) и позитивной теорий любой свободной группы [8]. При доказательстве разрешимости позитивной теории свободной группы Г. С. Маканин использовал результат Ю. И. Мерзлякова [9] об устранимости кванторов общности в позитивных формулах, относящихся к свободным группам.

А. А. Разборов [10] дал описание множества решений произвольной совместной системы уравнений в свободной группе.

1. Уравнения с ограничениями на решения

После построения Г. С. Маканиным [7] алгоритма, позволяющего по произвольной системе уравнений в свободной группе F_m определить, имеет ли она решение, особый интерес стал представлять вопрос о существовании аналогичных алгоритмов для уравнений в свободных группах с различными «не слишком сложными» ограничениями на решения.

Вопрос о разрешимости позитивной теории свободной группы был сведён Ю. И. Мерзляковым [9] к следующей проблеме: существует ли алгоритм, позволяющий для произвольного уравнения

$$w(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = 1$$

в свободной группе счётного ранга, где n и m — произвольные натуральные числа, определить, имеет ли оно такое решение $g_1, \ldots, g_n$, что

$$g_1 \in F_{m_1},\ g_2 \in F_{m_2},\ \ldots,\ g_n \in F_{m_n},$$

где $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_n$; F_{m_i} — свободная группа с образующими $a_1, \ldots, a_{m_i}$.

Г. С. Маканин в [8] построил искомый алгоритм и тем самым доказал разрешимость позитивной теории свободной группы.

Известно, что вопрос о точности матричного представления Гасснер [11, 12] группы крашеных кос эквивалентен вопросу об отсутствии нетривиального решения в свободной группе F_m уравнения

$$x_1a_1x_1^{-1} \cdot x_2a_2x_2^{-1} \ldots x_ma_mx_m^{-1} = a_1 \cdot a_2 \ldots a_m,$$

удовлетворяющего условию $x_1 \in F_m^{(2)}, \ldots, x_n \in F_m^{(2)}$, где $F_m^{(2)}$ — второй коммутант свободной группы F_m. Напомним, что для произвольной группы G через $G^{(2)}$ обозначается её второй коммутант, т. е. $G^{(2)} = [G^{(1)}, G^{(1)}]$, где $G^{(1)} = [G, G]$ — коммутант группы G.

Обобщая эти ситуации, Г. С. Маканин поставил в «Коуровской тетради» [13] следующую проблему для уравнений в свободных группах:

9.25. Указать алгоритм, который по уравнению

$$w(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = 1$$

в свободной группе F_m и списку конечно порождённых подгрупп $H_1, \dots, H_n$ группы F_m позволял бы узнать, существует ли решение этого уравнения с условием $x_1 \in H_1, \dots, x_n \in H_n$.

Первые положительные результаты в решении этой проблемы были получены А. Ш. Малхасяном [14].

В. Диекерт [15] показал, что проблема определения по произвольному уравнению

$$w(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = 1$$

в свободной группе F_n и списку *регулярных подмножеств* (языков) $H_1, \dots, H_n$ группы F_m, существует ли решение этого уравнения с условием $x_1 \in H_1, \dots, x_n \in H_n$, разрешима и принадлежит классу PSPACE. Так как конечно порождённые подгруппы являются регулярными подмножествами, тем самым решается и проблема Г. С. Маканина.

Представляет интерес дальнейшее исследование различных обобщений проблемы Г. С. Маканина для свободных групп, получающихся путем ослабления ограничений, налагаемых на подгруппы $H_1, \dots, H_n$.

Одна из причин, по которым в формулировке задачи 9.25 речь идёт именно о конечно порождённых подгруппах, заключается в том, что для конечно порождённых подгрупп свободной группы разрешима проблема вхождения.

В то же время проблема вхождения разрешима и для многих бесконечно порождённых подгрупп свободной группы, причём, например, для первого $F_m^{(1)}$ и второго $F_m^{(2)}$ коммутантов свободной группы F_m проблема вхождения решается значительно проще, чем для некоторых конечно порождённых подгрупп. Поэтому представляется достаточно естественным следующее обобщение задачи 9.25:

9.25а. Существует ли алгоритм, который по уравнению

$$w(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = 1$$

в свободной группе F_m и списку подгрупп $H_1, \dots, H_n$ с разрешимыми проблемами вхождения позволял бы узнать, существует ли решение этого уравнения с условием $x_1 \in H_1, \dots, x_n \in H_n$?

2. Уравнения, разрешенные относительно неизвестных

В ряде работ, например в [3, 6, 16–19], рассматриваются уравнения вида

$$w(x_1, \dots, x_n) = g,$$

где $w(x_1, \dots, x_n)$ — групповое слово в алфавите неизвестных, а g — элемент свободной группы F_m. Такие уравнения получили название *уравнений, разрешенных относительно неизвестных, уравнений с правой частью или однокоэффициентных уравнений.* Проблема разрешимости таких уравнений получила название *проблемы подстановки* или *проблемы эндоморфной сводимости* [17, 18].

В [19] получен следующий результат:

Теорема 1 [19]. В свободной группе F_2 со свободными образующими a и b можно построить такое разрешенное относительно неизвестных уравнение

$$w(x, x_1, \dots, x_n) = [a, b]$$

с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ и параметром x, что невозможно создать алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение уравнения

$$w(a^k, x_1, \dots, x_n) = [a, b],$$

удовлетворяющее условию $x_1, \ldots, x_t \in F_2^{(1)}$, где t — некоторое фиксированное число между 1 и n; $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ — коммутатор элементов a и b.

Естественно возникает вопрос о том, каким может быть t.

С. И. Адян предложил исследовать прежде всего предельные случаи: $t = 1$ и $t = n$.

Теорема 2. Существует полиномиальный алгоритм, позволяющий для произвольного разрешенного относительно неизвестных уравнения в свободной группе F_2 со свободными образующими a и b

$$w(x_1, \ldots, x_n) = [a, b] \tag{2}$$

с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определить, существует ли решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $x_1, \ldots, x_n \in F_2^{(1)}$.

Доказательство. Известно [20], что коммутант $F_2^{(1)} = [F_2, F_2]$ свободной группы F_2 свободно порождается нетривиальными коммутаторами

$$c_{i,j} = [a^i, b^j],$$

где i и j — произвольные отличные от нуля целые числа. Поэтому вопрос о разрешимости в свободной группе F_2 уравнения (2) с указанными ограничениями на решения сводится к вопросу о разрешимости в свободной бесконечно порождённой группе $F_2^{(1)}$ уравнения

$$w(x_1, \ldots, x_n) = c_{1,1}. \tag{3}$$

Если $x_1^0, \ldots, x_n^0$ — решение уравнения (3), то, заменив в выражении элементов $x_1^0, \ldots, x_n^0$ через свободные образующие $c_{i,j}$ все $c_{i,j}$, кроме $c_{1,1}$, на единицу, получим новое решение

$$c_{1,1}^{\sigma_{c_{1,1}}(x_1^0)}, \ldots, c_{1,1}^{\sigma_{c_{1,1}}(x_n^0)}$$

этого уравнения, где через $\sigma_{c_{1,1}}(x_i^0)$ обозначается сумма показателей степени свободной образующей $c_{1,1}$ в выражении элемента x_i^0 через свободные образующие $c_{i,j}$. Значит, целые числа $\sigma_{c_{1,1}}(x_1^0)$, $\ldots$, $\sigma_{c_{1,1}}(x_n^0)$ являются решением уравнения

$$\sigma_{(x_1)}(w)y_1 + \ldots + \sigma_{(x_n)}(w)y_n = 1. \tag{4}$$

Верно и обратное.

Таким образом, вопрос о разрешимости в свободной группе F_2 уравнения (2) с указанными ограничениями на решения равносилен вопросу о разрешимости в целых числах линейного уравнения (4). Последний вопрос решается полиномиальным алгоритмом. ■

Слово $[a, b]$, стоящее в правой части уравнения из теоремы 1, имеет длину 4. Как показывает следующая теорема, это наименьшая возможная длина.

Теорема 3. Существует полиномиальный алгоритм, позволяющий по произвольному разрешенному относительно неизвестных уравнению вида

$$w(x_1, \ldots, x_n) = g(a, b),$$

где $w(x_1, \ldots, x_n)$ — групповое слово в алфавите неизвестных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $g(a, b)$ — элемент длины меньше 4 свободной группы F_2 со свободными образующими a и b, определить, существует ли решение этого уравнения, удовлетворяющее условию

$$x_1, \ldots, x_t \in F_2^{(1)}, \tag{5}$$

где t — произвольное фиксированное число между 1 и n.

Доказательство. Если g — групповое слово длины меньше 4 в алфавите $\{a, b\}$ свободных образующих группы F_2, то нетрудно убедиться, что g — степень A^k некоторого примитивного элемента A группы F_2.

Покажем, что уравнение $w(x_1, \ldots, x_n) = g$, т. е. уравнение

$$w(x_1, \ldots, x_n) = A^k, \tag{6}$$

имеет решение в группе F_2, удовлетворяющее условию (5), тогда и только тогда, когда в циклической группе F_1 с образующим элементом a разрешимо уравнение

$$w(1, \ldots, 1, x_{t+1}, \ldots, x_n) = a^k. \tag{7}$$

Вопрос о разрешимости уравнения (7) сводится к вопросу о разрешимости в целых числах линейного уравнения с целыми коэффициентами, который полиномиально разрешим.

Предположим, что A и B — система свободных образующих группы F_2 (A — примитивный элемент этой группы), а φ и ψ — такие автоморфизмы этой группы, что

$$\varphi(A) = a, \quad \varphi(B) = b; \quad \psi(a) = A, \quad \psi(b) = B.$$

Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — решение в группе F_2 уравнения (6), удовлетворяющее условию $g_1, \ldots, g_t \in F_2^{(1)}$. Применив к равенству $w(g_1, \ldots, g_n) = A^k$ автоморфизм φ, получим

$$w(\varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_n)) = a^k.$$

К последнему равенству применим гомоморфизм φ_1 группы F_2 на группу F_1, заданный равенствами $\varphi_1(a) = a$, $\varphi_1(b) = 1$, и получим

$$w(\varphi_1(\varphi(g_1)), \ldots, \varphi_1(\varphi(g_n))) = a^k.$$

Если $g \in F_2^{(1)}$, то $\varphi_1(\varphi(g)) = 1$, поэтому $\varphi_1(\varphi(g_1)) = 1$, $\ldots$, $\varphi_1(\varphi(g_t)) = 1$. Значит, $\varphi_1(\varphi(g_{t+1})), \ldots, \varphi_1(\varphi(g_n))$ — решение уравнения (7) в группе F_1.

Обратно, если $h_{t+1}, \ldots, h_n$ — решение уравнения (7) в группе F_1, то, применив к равенству

$$w(1, \ldots, 1, h_{t+1}, \ldots, h_n) = a^k$$

в группе F_2 автоморфизм ψ этой группы, получим

$$w(1, \ldots, 1, \psi(h_{t+1}), \ldots, \psi(h_n)) = A^k,$$

значит, $g_1 = 1$, $\ldots$, $g_t = 1$, $g_{t+1} = \psi(h_{t+1})$, $\ldots$, $g_n = \psi(h_n)$ — решение в группе F_2 уравнения (6), удовлетворяющее условию $g_1, \ldots, g_t \in F_2^{(1)}$. ■

Рассмотрим аналогичный вопрос для уравнений с одним неизвестным. Как и ранее, через $F_n^{(1)}$ обозначаем коммутант свободной группы F_n.

Теорема 4. Существует полиномиальный алгоритм, позволяющий по любому уравнению с одним неизвестным

$$w(x_1, a_1, \ldots, a_n) = 1 \tag{8}$$

в свободной группе F_n определить, имеет ли оно такое решение x_1, что $x_1 \in F_n^{(1)}$.

Доказательство. А. А. Лоренц [4] и К. И. Аппель [5] доказали, что множество решений уравнения с одним неизвестным задаётся конечным множеством параметрических слов, т. е. слов вида $A\,B^{\lambda}\,C$, где λ — целочисленный параметр. Д. Бормотов, Р. Гилман и А. Мясников [21] разработали полиномиальный алгоритм построения по уравнению с одним неизвестным соответствующего множества параметрических слов.

Тем самым вопрос о существовании решения уравнения (8) в свободной группе F_n с условием $x_1 \in F_n^{(1)}$ полиномиально сводится к определению, существует ли такое целое число λ, что $A\,B^{\lambda}\,C \in F_n^{(1)}$, или $B^{\lambda} = A^{-1}C^{-1}$ в $F_n/F_n^{(1)}$, т. е. задача о существовании у уравнения (8) решения с условием $x_1 \in F_n^{(1)}$ сводится к *проблеме степеней* для группы $F_n/F_n^{(1)}$: существует ли такое целое число λ, что $B^{\lambda} = A^{-1}\,C^{-1}$ в $F_n/F_n^{(1)}$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что проблема степеней для групп $F_n/F_n^{(1)}$ полиномиально разрешима. ■

Заключение

Полученные в работе результаты об *алгоритмической* ***разрешимости*** проблемы совместности для некоторых типов уравнений в свободных группах с ограничениями на решения вместе с результатами работы [19] об *алгоритмической* ***неразрешимости*** проблемы совместности для аналогичных уравнений с ограничениями на решения близкого типа могут рассматриваться как некоторый вклад в реализацию сформулированной в 60-е годы XX в. выдающимся отечественным математиком Сергеем Ивановичем Адяном «Программы уточнения границы между алгоритмически разрешимыми и алгоритмически неразрешимыми проблемами».

Выражаю благодарность рецензентам, сделавшим ряд полезных замечаний по оформлению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tarski A., Mostowski A., and Robinson R. M.* Undecidable Theories. Amsterdam: North-Holland Publ. Company, 1953. XI+98 p.
2. *Kharlampovich O. and Myasnikov A.* Elementary theory of free non-abelian groups // J. Algebra. 2006. V. 302. P. 451–552.
3. *Lyndon R. C.* Equations in free groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 96. P. 445–457.
4. *Лоренц А. А.* О представлении множеств решений систем уравнений с одним неизвестным в свободных группах // Докл. АН СССР. 1968. Т. 178. № 2. С. 290–292.
5. *Appel K. I.* One-variable equations in free groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. V. 19. P. 912–918.
6. *Хмелевский Ю. И.* Системы уравнений в свободной группе. I, II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 6. С. 1237–1268; 1972. Т. 36. № 1. С. 110–179.
7. *Маканин Г. С.* Уравнения в свободной группе // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 6. С. 1199–1273.
8. *Маканин Г. С.* Разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 4. С. 735–749.
9. *Мерзляков Ю. И.* Позитивные формулы на свободных группах // Алгебра и логика. 1966. Т. 5. Вып. 4. С. 25–42.
10. *Разборов А. А.* О системах уравнений в свободной группе // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 4. С. 779–832.
11. *Gassner B. J.* On braid groups // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1961. V. 25. P. 10–22.

12. *Birman J. S.* Braids, Links and Mapping Class Groups. AM-82. V. 82. Princeton: Princeton University Press, 1974.
13. Коуровская тетрадь: нерешенные вопросы теории групп. 11 изд., доп. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1990.
14. *Малхасян А. Ш.* О разрешимости в подгруппах уравнений в свободной группе // Прикладная математика. 1986. Вып. 2. С. 42–47.
15. *Diekert V.* Makanin's Algorithm for Solving Word Equations with Regular Constraints. University of Stuttgart, Faculty of Computer Science. Technical Report No. 1998/02. 43 p.
16. *Мальцев А. И.* Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе // Алгебра и логика. 1962. Т. 1. № 5. С. 45–50.
17. *Schupp P. E.* On the substitution problem for free groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 23. P. 421–423.
18. *Edmunds C. C.* On the endomorphisms problem for free group // Com. Algebra. 1975. No. 3. P. 7–20.
19. *Дурнев В. Г.* К проблеме разрешимости уравнений с одним коэффициентом // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 6. С. 832–845.
20. *Magnus W., Karrass A., and Solitar D.* Combinatorial Group Theory. N.Y.: Interscience Publ., 1966.
21. *Bormotov D., Gilman R., and Myasnikov A.* Solving one-variable equation in free groups // J. Group Theory. 2009. V. 12. No. 2. P. 317–330.

REFERENCES

1. *Tarski A., Mostowski A., and Robinson R. M.* Undecidable Theories. Amsterdam, North-Holland Publ. Company, 1953, XI+98 p.
2. *Kharlampovich O. and Myasnikov A.* Elementary theory of free non-abelian groups. J. Algebra, 2006, vol. 302, pp. 451–552.
3. *Lyndon R. C.* Equations in free groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, vol. 96, pp. 445–457.
4. *Lorents A. A.* O predstavlenii mnozhestv resheniy sistem uravneniy s odnim neizvestnym v svobodnykh gruppakh [On the representation of solution sets of systems of equations with one unknown in free groups]. Dokl. AN SSSR, 1968, vol. 178, no. 2, pp. 290–292. (in Russian)
5. *Appel K. I.* One-variable equations in free groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1968, vol. 19, pp. 912–918.
6. *Khmelevskiy Yu. I.* Systems of equations in a free group. I, II. Math. USSR-Izv., 1971, vol. 5, no. 6, pp. 1245–1276; 1972, vol. 6, no. 1, pp. 109–180.
7. *Makanin G. S.* Equations in a free group. Math. USSR-Izv., 1983, vol. 21, no. 3, pp. 483–546.
8. *Makanin G. S.* Decidability of the universal and positive theories of a free group. Math. USSR-Izv., 1985, vol. 25, no. 1, pp. 75–88.
9. *Merzlyakov Yu. I.* Pozitivnye formuly na svobodnykh gruppakh [Positive formulas on free groups]. Algebra i Logika, 1966, vol. 5, iss. 4, pp. 25–42. (in Russian)
10. *Razborov A. A.* On systems of equations in a free group., Math. USSR-Izv., 1985, vol. 25, no. 1, pp. 115–162.
11. *Gassner B. J.* On braid groups. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1961, vol. 25, pp. 10–22.
12. *Birman J. S.* Braids, Links and Mapping Class Groups. AM-82, vol. 82, Princeton, Princeton University Press, 1974.
13. Kourovskaya tetrad': nereshennye voprosy teorii grupp [Kurovskaya Notebook: Unsolved Questions in Group Theory]. 11th ed. Novosibirsk: IM SB RAS, 1990. (in Russian)

14. *Malkhasyan A. Sh.* O razreshimosti v podgruppakh uravneniy v svobodnoy gruppe [On the solvability in subgroups of equations in a free group]. Prikladnaya Matematika, 1986, iss. 2, pp. 42–47. (in Russian)

15. *Diekert V.* Makanin's Algorithm for Solving Word Equations with Regular Constraints. University of Stuttgart, Faculty of Computer Science, Technical Report No. 1998/02, 43 p.

16. *Maltsev A. I.* Ob uravnenii $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ v svobodnoy gruppe [About the equation $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ in a free group]. Algebra i Logika, 1962, vol. 1, no. 5, pp. 45–50. (in Russian)

17. *Schupp P. E.* On the substitution problem for free groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, vol. 23, pp. 421–423.

18. *Edmunds C. C.* On the endomorphisms problem for free group. Com. Algebra, 1975, no. 3, pp. 7–20.

19. *Durnev V. G.* On the solvability problem for equations with a single coefficient. Math. Notes, 1996, vol. 59, no. 6, pp. 601–610.

20. *Magnus W., Karrass A., and Solitar D.* Combinatorial Group Theory. N.Y., Interscience Publ., 1966.

21. *Bormotov D., Gilman R., and Myasnikov A.* Solving one-variable equation in free groups. J. Group Theory, 2009, vol. 12, no. 2, pp. 317–330.