УДК 510.67 DOI 10.17223/20710410/66/2

АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТЬ И РАЗРЕШИМОСТЬ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ МОДЕЛЕЙ КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ ЯЗЫКОВ[1]

А. В. Ильев

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Омск, Россия

E-mail: artyom_iljev@mail.ru

Изучаются наследственные классы алгебраических систем языка $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathrm{fin}} \cup \mathrm{L}_\infty$, где $\mathrm{L}_{\mathrm{fin}} = \langle R_1, R_2, \ldots, R_m, = \rangle$ и $\mathrm{L}_\infty = \langle R_{m+1}, R_{m+2}, \ldots \rangle$, причём в L_∞ число предикатов каждой местности конечно, все предикаты упорядочены по возрастанию своих местностей и обладают свойством неповторения элементов. Класс L-систем называется наследственным, если он замкнут относительно подсистем. Доказано, что класс L-систем является наследственным тогда и только тогда, когда он может быть определён в терминах запрещённых подсистем. Класс L-систем называется универсально аксиоматизируемым, если существует такое множество универсальных предложений Z языка L, что этот класс состоит из всех систем, удовлетворяющих множеству Z. Рассмотрены вопросы универсальной аксиоматизируемости наследственных классов L-систем. Показано, что наследственный класс L-систем универсально аксиоматизируем, если и только если он может быть определён в терминах конечных запрещённых подсистем. Доказана разрешимость универсальной теории произвольного аксиоматизируемого наследственного класса L-систем, множество минимальных запрещённых подсистем которого рекурсивно.

Ключевые слова: *алгебраическая система, наследственный класс, универсальная теория, универсальная аксиоматизируемость, разрешимость.*

AXIOMATIZABILITY AND DECIDABILITY OF UNIVERSAL THEORIES OF HEREDITARY CLASSES OF MODELS OF FINITE AND INFINITE LANGUAGES

A. V. Ilev

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia

In the paper, hereditary classes of L-structures are studied with language of the form $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathrm{fin}} \cup \mathrm{L}_\infty$, where $\mathrm{L}_{\mathrm{fin}} = \langle R_1, R_2, \ldots, R_m, = \rangle$ and $\mathrm{L}_\infty = \langle R_{m+1}, R_{m+2}, \ldots \rangle$, and also in L_∞ the number of predicates of each arity is finite, all predicates are ordered in ascending of their arities and satisfy the non-element repetition property. A class of L-structures is called hereditary if it is closed under substructures. It is proved that the class of L-structures is hereditary if and only if it can be defined in terms of forbidden substructures. A class of L-structures is called universally axiomatizable if there is a set Z of universal L-sentences such that the class consists of all structures satisfying Z. The problems of the universal axiomatizability of hereditary classes of L-structures are considered in the paper. It is shown that hereditary class

[1]Работа выполнена в рамках госзадания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

of L-structures is universally axiomatizable if and only if it can be defined in terms of finite forbidden substructures. It is proved that the universal theory of any axiomatizable hereditary class of L-structures with a recursive set of minimal forbidden substructures is decidable.

Keywords: *structure, hereditary class, universal theory, universal axiomatizability, decidability.*

Введение

Целью работы является обобщение ранее полученных результатов для графов, гиперграфов и матроидов, а также построение алгоритмов для их конструктивного доказательства. Представленные механизмы могут быть полезны в дальнейшем при исследовании как сугубо теоретических задач, например решения систем уравнений над соответствующими алгебраическими системами [1, 2], так и практических задач в тех вопросах, когда вместо перебора конкретных объектов уместно рассмотреть лишь отдельные их ключевые свойства [3, 4].

В настоящее время в теории графов активно используются алгебраические и логические методы, в том числе методы теории моделей. Сформировалось целое направление исследований, которое получило название алгебраической теории графов, и можно также говорить о формировании особого раздела теории графов — логической теории графов [5]. Напомним, что обыкновенный граф рассматривается как алгебраическая система, язык которой состоит из предиката равенства и бинарного предиката смежности вершин, удовлетворяющего аксиомам иррефлексивности и симметричности. Известно, что теория графов неразрешима, так же как и теория конечных графов [6].

Традиционный интерес вызывают вопросы аксиоматизируемости и универсальной аксиоматизируемости различных классов графов [7–9]. Так, в [10] обсуждаются вопросы аксиоматизируемости наследственных классов графов, определённых в терминах запрещённых порождённых подграфов; в [11] — вопросы аксиоматизируемости наследственных классов графов, определённых в терминах любых запрещённых подграфов. В связи с этим естественным образом возникает задача о нахождении критерия аксиоматизируемости наследственных классов произвольных бесконечных алгебраических систем и их определения в терминах запрещённых подсистем, по аналогии с графами. В частности, такая задача актуальна для более сложных объектов, например гиперграфов, аксиоматизируемость хорновых классов которых исследована в [12], и класса матроидов фиксированного ранга, аксиоматизаруемость которого показана в [13]. Ряд общих вопросов аксиоматизируемости универсальных классов рассмотрен в [14], однако предложенные там подходы не содержат конкретной алгоритмической реализации.

Особое место в теории моделей занимает изучение универсальных теорий. С помощью известной процедуры скулемизации можно перейти от любой теории к универсальной теории в расширенном языке [15]. Кроме того, некоторые общие проблемы разрешимости удаётся интерпретировать как проблемы разрешимости универсальных теорий. Повышенный интерес к универсальным теориям вызывает их применение в логическом программировании и теории баз данных [16]. Разрешимость универсальной теории графов и универсальной теории произвольного аксиоматизируемого наследственного класса графов, множество минимальных запрещённых подграфов которого рекурсивно, доказана в [17].

В данной работе методами теории моделей изучаются наследственные классы алгебраических систем языка $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathrm{fin}} \cup \mathrm{L}_{\infty}$, где $\mathrm{L}_{\mathrm{fin}} = \langle R_1, R_2, \ldots, R_m, = \rangle$ и

$\mathrm{L}_\infty = \langle R_{m+1}, R_{m+2}, \ldots \rangle$, причём в L_∞ число предикатов каждой местности конечно, все предикаты упорядочены по возрастанию своей местности и обладают свойством неповторения элементов. В п. 1 приведены основные сведения из теории моделей. В п. 2 рассмотрены вопросы аксиоматизируемости наследственных классов L-систем и показано, что всякий наследственный класс L-систем универсально аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он может быть определён в терминах конечных запрещённых подсистем. В п. 3 содержится основной результат работы — доказана разрешимость универсальной теории произвольного аксиоматизируемого наследственного класса L-систем, множество минимальных запрещённых подсистем которого рекурсивно.

1. Предварительные сведения

Напомним основные определения теории моделей.

Языком, или *сигнатурой* $\mathrm{L} = \mathrm{R} \cup \mathrm{F} \cup \mathrm{C}$, называется совокупность следующих множеств:

1) множества *предикатных символов* R;
2) множества *функциональных символов* F;
3) множества *константных символов* C,

причём с каждым предикатным символом $R \in \mathrm{R}$ и с каждым функциональным символом $F \in \mathrm{F}$ однозначно связывается натуральное число n_R или n_F — *арность*, или *местность*.

Алгебраическая система языка L, или L-*система*, — это последовательность

$$\mathcal{A} = \langle A;\ R^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle,$$

в которой A — непустое множество, называемое *основным множеством*, или *носителем* системы $\mathcal{A}$; каждому предикатному символу $R \in \mathrm{R}$ соответствует n_R-местное отношение $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^{n_R}$; каждому функциональному символу $F \in \mathrm{F}$ соответствует n_F-местная функция $F^{\mathcal{A}} : A^{n_F} \to A$; каждому константному символу $c \in \mathrm{C}$ соответствует некоторый элемент $c^{\mathcal{A}} \in A$. В дальнейшем при описании L-систем используем краткую запись $\mathcal{A} = \langle A, \mathrm{L} \rangle$. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *моделью*, если в ней отсутствуют функции.

Алгебраические системы $\mathcal{A} = \langle A, \mathrm{L} \rangle$ и $\mathcal{B} = \langle B, \mathrm{L} \rangle$ языка L называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f : A \to B$, сохраняющий их предикаты и функции.

L-система $\mathcal{A} = \langle A, \mathrm{L} \rangle$ называется *подсистемой* L-системы $\mathcal{B} = \langle B, \mathrm{L} \rangle$ (обозначается $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$), если:

1) $A \subseteq B$;
2) функции и предикаты в $\mathcal{A}$ являются ограничениями на A соответствующих функций и предикатов в $\mathcal{B}$;
3) множество A замкнуто относительно функций.

Если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ и $A \subset B$, то $\mathcal{A}$ называется *собственной подсистемой* $\mathcal{B}$.

Формулой языка L называется формула исчисления предикатов первого порядка с равенством, внелогические константы которой содержатся в L. Формулу без свободных переменных называют *предложением*. Истинность предложения φ в алгебраической системе $\mathcal{A}$ обозначается через $\mathcal{A} \models \varphi$. Предложение φ называется *универсальным предложением*, или $\forall$-*предложением*, если $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n\ \psi$, где ψ — бескванторная формула, не содержащая других переменных, кроме $x_1, \ldots, x_n$. Предложение φ называется *экзистенциальным предложением*, или $\exists$-*предложением*, если $\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_n\ \psi$, где ψ — бескванторная формула, не содержащая других переменных, кроме $x_1, \ldots, x_n$.

Под *классом* алгебраических систем в дальнейшем будем понимать *абстрактный класс*, т. е. такое семейство L-систем, которое вместе с любой алгебраической системой содержит все изоморфные ей L-системы. Класс алгебраических систем называется *наследственным*, если он замкнут относительно подсистем.

Класс $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем называется *аксиоматизируемым*, если существует такое множество предложений Z языка L, что для любой системы $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \in \boldsymbol{K} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi \text{ для всех } \varphi \in Z.$$

Множество предложений Z называется *множеством аксиом* для класса $\boldsymbol{K}$. Если для $\boldsymbol{K}$ существует конечное множество аксиом, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *конечно аксиоматизируемым*. Если для $\boldsymbol{K}$ существует множество аксиом, состоящее только из $\forall$-предложений, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *универсально аксиоматизируемым*, или *$\forall$-аксиоматизируемым*. Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует *рекурсивное множество аксиом* Z, т. е. Z — система аксиом класса $\boldsymbol{K}$, и существует алгоритм, который по любому предложению языка L позволяет узнать, принадлежит оно множеству Z или нет, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *рекурсивно аксиоматизируемым*.

Предложения φ_1 и φ_2 языка L будем называть *эквивалентными* на классе $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем языка L, если для любой системы $\mathcal{A}$ класса $\boldsymbol{K}$

$$\mathcal{A} \models \varphi_1 \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi_2.$$

Пусть $S(\mathrm{L})$ — множество всех предложений языка L; $\boldsymbol{K}$ — некоторый класс L-систем. *Элементарной теорией* (или просто *теорией класса*) $\boldsymbol{K}$ называется множество $\mathrm{Th}(\boldsymbol{K})$ всех предложений из $S(\mathrm{L})$, истинных во всех системах из $\boldsymbol{K}$. Если существует алгоритм, который позволяет ответить на вопрос, принадлежит или нет произвольное предложение из $S(\mathrm{L})$ теории $\mathrm{Th}(\boldsymbol{K})$, то эта теория называется *разрешимой*. Множество всех $\forall$-предложений теории $\mathrm{Th}(\boldsymbol{K})$ называется *универсальной теорией*, или *$\forall$-теорией класса* $\boldsymbol{K}$. Множество всех $\exists$-предложений теории $\mathrm{Th}(\boldsymbol{K})$ называется *экзистенциальной теорией*, или *$\exists$-теорией класса* $\boldsymbol{K}$.

Пусть $\mathcal{H}$ — произвольное множество L-систем. Тогда класс $\mathrm{Forb}(\mathcal{H})$, который состоит из всех L-систем, не содержащих подсистем из $\mathcal{H}$ и им изоморфных, может быть определён заданием L-систем $\mathcal{A} \in \mathcal{H}$ в качестве *запрещённых подсистем*. Будем говорить, что класс L-систем $\boldsymbol{K}$ *определим в терминах запрещённых подсистем*, если $\boldsymbol{K} = \mathrm{Forb}(\mathcal{H})$ для некоторого множества $\mathcal{H}$. Чтобы определить *класс запрещённых подсистем* $\boldsymbol{H}$ для класса $\boldsymbol{K}$, необходимо для множества $\mathcal{H}$ взять его замыкание относительно изоморфизма.

Множество L-систем $\mathcal{H}$ называется *множеством минимальных запрещённых подсистем* для класса $\boldsymbol{K}$, если $\boldsymbol{K} = \mathrm{Forb}(\mathcal{H})$ и при этом для любой L-системы $\mathcal{A} \in \mathcal{H}$ всякая её собственная подсистема $\mathcal{A}_1 \notin \mathcal{H}$, как и все L-системы, изоморфные $\mathcal{A}_1$.

Утверждение 1. Пусть $\boldsymbol{K} = \mathrm{Forb}(\boldsymbol{H})$. Класс $\boldsymbol{H}$ является классом минимальных запрещённых подсистем для класса $\boldsymbol{K}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{H}$ является замыканием относительно изоморфизма минимального по включению множества $\mathcal{H}$ запрещённых подсистем для класса $\boldsymbol{K}$, т. е. $\boldsymbol{K} = \mathrm{Forb}(\mathcal{H})$ и $\boldsymbol{K} \neq \mathrm{Forb}(\mathcal{H}_1)$ для всех $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$.

Доказательство.

Необходимость. Предположим противное: для любого минимального по включению множества $\mathcal{H}$ запрещённых подсистем для класса $\boldsymbol{K}$, замыканием которого относительно изоморфизма является класс $\boldsymbol{H}$, существует множество $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$, такое, что $\boldsymbol{K} = \mathrm{Forb}(\mathcal{H}_1)$. Тогда существует L-система $\mathcal{A} \in \boldsymbol{H}$, такая, что $\mathcal{A} \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_1$. При этом

$\mathcal{A} \notin \mathrm{Forb}(\mathcal{H}) = \mathrm{Forb}(\mathcal{H}_1)$, т. е. существует L-система $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{H}_1$, такая, что $\mathcal{A}_1$ является собственной подсистемой $\mathcal{A}$. Но поскольку $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{H}$, а значит, и $\mathcal{A}_1 \in \boldsymbol{H}$, получаем противоречие с тем, что $\boldsymbol{H}$ — класс минимальных запрещённых подсистем для класса $\boldsymbol{K}$.

Достаточность. Предположим противное: существует L-система $\mathcal{A} \in \boldsymbol{H}$ и её собственная подсистема $\mathcal{A}_1 \in \boldsymbol{H}$. Без ограничения общности рассмотрим такие из них, которые обе принадлежат множеству $\mathcal{H}$. Рассмотрим множество $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \setminus \{\mathcal{A}\}$. Очевидно, что $\boldsymbol{K} = \mathrm{Forb}(\mathcal{H}_1)$, поскольку все L-системы, не содержащие в качестве подсистемы $\mathcal{A}$, не должны содержать в качестве подсистемы и $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{H}_1$. Получили противоречие с условием минимальности по включению множества $\mathcal{H}$. ■

Множество запрещённых подсистем языка L называется *рекурсивным*, если существует геделевская нумерация g этих подсистем, такая, что множество их номеров является рекурсивным, т. е. существует алгоритм, позволяющий узнать, принадлежит ли произвольное натуральное число множеству номеров.

Утверждение 2 (критерий $\forall$-аксиоматизируемости) [15]. Пусть $\boldsymbol{K}$ — аксиоматизируемый класс алгебраических систем языка L. Класс $\boldsymbol{K}$ является универсально аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем.

В настоящей работе будем рассматривать только два типа алгебраических систем. Во-первых, модели $\mathcal{A} = \langle A, \mathrm{L}_{\mathrm{fin}} \rangle$ конечных языков с равенством, в которых $\mathrm{L}_{\mathrm{fin}} = \langle R_1, R_2, \ldots, R_m, = \rangle$. Во-вторых, модели $\mathcal{A} = \langle A, \mathrm{L} \rangle$ бесконечных языков с равенством вида $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathrm{fin}} \cup \mathrm{L}_\infty$, где $\mathrm{L}_\infty = \langle R_{m+1}, R_{m+2}, \ldots \rangle$, причём в L_∞ число предикатов каждой местности конечно, все предикаты упорядочены по возрастанию своей местности и обладают свойством неповторения элементов, т. е. для всех $R_k \in \mathrm{L}_\infty$ выполнены следующие условия:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_l \; [R_k(x_1, \ldots, x_l) \to \bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j)].$$

Обозначим через n_k местность предиката R_k.

Поскольку $\mathrm{L}_{\mathrm{fin}} \subset \mathrm{L}$ для всех $m \in \mathbb{N}$, в дальнейшем конечный случай не выделяется в формулировках утверждений и их доказательствах, верных для любого рассматриваемого языка L.

2. Аксиоматизируемые наследственные классы

Рассмотрим несколько утверждений, необходимых для указания связи между наследственными классами моделей языка L и их запрещёнными подсистемами.

Лемма 1. Абстрактный класс L-систем $\boldsymbol{K}$ является наследственным тогда и только тогда, когда он может быть определён в терминах запрещённых подсистем.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\boldsymbol{K}$ — наследственный класс L-систем, т. е. для любых L-систем $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ если $\mathcal{A}_1 \in \boldsymbol{K}$ и $\mathcal{A}_2$ является произвольной подсистемой $\mathcal{A}_1$, то $\mathcal{A}_2 \in \boldsymbol{K}$. Рассмотрим класс $\boldsymbol{H}$ — дополнение к $\boldsymbol{K}$ в классе всех L-систем. Поскольку $\mathcal{A}_2 \notin \boldsymbol{H}$, то $\mathcal{A}_1 \in \mathrm{Forb}(\boldsymbol{H})$ и поэтому $\boldsymbol{K} \subseteq \mathrm{Forb}(\boldsymbol{H})$.

Теперь рассмотрим произвольную L-систему $\mathcal{A}_3 \in \mathrm{Forb}(\boldsymbol{H})$, т. е. такую, что всякая её подсистема не содержится в $\boldsymbol{H}$, в том числе и сама $\mathcal{A}_3$. Но тогда $\mathcal{A}_3 \in \boldsymbol{K}$ и, следовательно, $\mathrm{Forb}(\boldsymbol{H}) \subseteq \boldsymbol{K}$.

Таким образом, $\boldsymbol{K} = \mathrm{Forb}(\boldsymbol{H})$, т. е. класс $\mathbf{K}$ может быть определён в терминах запрещённых подсистем языка L.

Достаточность. Пусть $\boldsymbol{K} = \mathrm{Forb}(\boldsymbol{H})$ — класс, определимый в терминах запрещённых подсистем языка L. Предположим, что существует L-система $\mathcal{A}_1 \in \boldsymbol{K}$ и её подсистема $\mathcal{A}_2$, такая, что $\mathcal{A}_2 \notin \boldsymbol{K}$. Тогда L-система $\mathcal{A}_2$ содержит подсистему $\mathcal{A}_3$, такую, что $\mathcal{A}_3 \in \boldsymbol{H}$. Но поскольку $\mathcal{A}_3$ является также подсистемой $\mathcal{A}_1$, то $\mathcal{A}_1 \notin \mathrm{Forb}(\boldsymbol{H})$ — противоречие.

Таким образом, для любой L-системы $\mathcal{A}_1 \in \boldsymbol{K}$ всякая её подсистема содержится в $\boldsymbol{K}$. Следовательно, $\boldsymbol{K}$ — наследственный класс L-систем. ■

Лемма 2. Пусть $\boldsymbol{K} = \mathrm{Forb}(\boldsymbol{H})$, причём все L-системы класса $\boldsymbol{H}$ конечны, $\mathcal{A}$ — бесконечная L-система, каждая конечная подсистема которой принадлежит классу $\boldsymbol{K}$. Тогда $\mathcal{A}$ также принадлежит классу $\boldsymbol{K}$.

Доказательство. Предположим противное: $\mathcal{A} \notin \boldsymbol{K}$. Тогда существует её подсистема $\mathcal{A}_1$, такая, что $\mathcal{A}_1 \in \boldsymbol{H}$. Но по условию леммы $\mathcal{A}_1$ должна быть конечна — противоречие с тем, что все конечные подсистемы $\mathcal{A}$ принадлежат классу $\boldsymbol{K}$ и, следовательно, не принадлежат классу $\boldsymbol{H}$.

Таким образом, $\mathcal{A} \in \boldsymbol{K}$. ■

Теорема 1. Наследственный класс L-систем (универсально) аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он может быть определён в терминах конечных запрещённых подсистем, причём обязательно существует минимальное по включению множество таких подсистем.

Доказательство.

Необходимость. По определению наследственный класс L-систем замкнут относительно подсистем, следовательно, в силу критерия универсальной аксиоматизируемости (утверждения 2) любой аксиоматизируемый наследственный класс L-систем является $\forall$-аксиоматизируемым, поэтому любая его аксиома может считаться $\forall$-предложением.

Тогда множество запрещённых подсистем наследственного класса $\boldsymbol{K}$, которое существует по лемме 1, можно задать следующим образом.

Для каждой аксиомы φ определим конечное множество $\mathcal{H}_\varphi$ запрещённых подсистем с числом элементов от 1 до p, где p — количество переменных в данной аксиоме, при помощи алгоритма 1. Затем объединим множества $\mathcal{H}_\varphi$ для всех аксиом $\{\varphi\}$ и для каждого набора изоморфных L-систем из этого объединения исключим все, кроме одной. В результате получим множество $\mathcal{H}$ конечных запрещённых подсистем языка L для данного наследственного класса $\boldsymbol{K}$.

Для доказательства существования минимального по включению множества запрещённых подсистем воспользуемся утверждением 1 и алгоритмом 2, который из множества конечных запрещённых подсистем $\mathcal{H}$ выделяет множество $\mathcal{H}_{\min}^{\leqslant k}$ минимальных запрещённых подсистем с числом элементов не большим k.

Поскольку множество $\mathcal{H}$ не содержит изоморфных L-систем и с учётом ограничений, наложенных на предикаты языка L, число k-элементных запрещённых подсистем всегда конечно, алгоритм 2 корректно работает для любого $k \in \mathbb{N}$. Если объединить последовательно найденные алгоритмом 2 множества $\mathcal{H}_{\min}^{\leqslant k}$ для всех k, для которых выполнено вложение $\mathcal{H}_{\min}^{\leqslant k} \subseteq \mathcal{H}_{\min}^{\leqslant k+1}$, то получится минимальное по включению множество $\mathcal{H}_{\min}$ запрещённых подсистем для класса $\boldsymbol{K}$.

Достаточность. Рассмотрим произвольный наследственный класс L-систем $\boldsymbol{K} = \mathrm{Forb}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ — минимальное по включению множество конечных запрещённых подсистем. Любой конечной L-системе $\mathcal{A}$ можно поставить в соответствие условие существования подсистемы, изоморфной ей, при помощи алгоритма 3.

Алгоритм 1. Построение множества запрещённых подсистем $\mathcal{H}_\varphi$ для аксиомы φ

Вход: $\forall$-предложение φ.
Выход: Конечное множество $\mathcal{H}_\varphi$.

1: Отрицание аксиомы $\neg\varphi$ эквивалентно предложению $\exists x_1 \ldots \exists x_p\ \psi$, где ψ — бескванторная формула, находящаяся в предварённой дизъюнктивной форме (ПДФ), т. е. $\psi = \bigvee\limits_r \psi_r$, где ψ_r — конъюнкты.

2: Каждый конъюнкт ψ_r, не содержащий множителей $(x_i = x_j)$ и $(x_i \neq x_j)$, дополнить условием $(x_i = x_j) \vee (x_i \neq x_j)$. Полученное предложение, эквивалентное $\neg\varphi$, привести к ПДФ и обозначить $\neg\varphi_1$.

3: **Для всех** $R_k \in \mathrm{L}_{\mathrm{fin}}$ и конечного числа предикатов $R_k \in \mathrm{L}_\infty$, местность которых не превосходит p, каждый конъюнкт предложения $\neg\varphi_1$, не содержащий множителей $R_k(t_1, \ldots, t_l)$ и $\neg R_k(t_1, \ldots, t_l)$, дополнить условием $R_k(t_1, \ldots, t_l) \vee \neg R_k(t_1, \ldots, t_l)$ для любых $\{t_1, \ldots, t_l\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_p\}$, где $l = n_k$. Затем перейти к предложению $\neg\varphi_2$, эквивалентному $\neg\varphi_1$, находящемуся в ПДФ.

4: Каждый конъюнкт предложения $\neg\varphi_2$ либо с точностью до изоморфизма задаёт подсистему языка L с фиксированным числом элементов от 1 до p и всеми возможными фиксированными наборами элементов, удовлетворяющих или не удовлетворяющих предикатам R_k языка L, либо противоречит наложенным на L-системы ограничениям и удаляется. В итоге получается предложение $\neg\varphi_3$ в ПДФ, по конъюнктам которого строится множество запрещённых подсистем $\mathcal{H}_\varphi$.

Алгоритм 2. Построение множества $\mathcal{H}_{\min}^{\leqslant k}$ минимальных запрещённых подсистем

Вход: Множество конечных запрещённых подсистем $\mathcal{H}$.
Выход: Множество $\mathcal{H}_{\min}^{\leqslant k}$.

1: **Для всех** $i = 1, \ldots, k-1$:
Просмотреть все $(i+1)$-элементные запрещённые подсистемы из $\mathcal{H}$, составляющие множество $\mathcal{H}^{i+1}$. Удалить из него все L-системы, содержащие подсистемы из $\mathcal{H}^1, \ldots, \mathcal{H}^i$.

2: $\mathcal{H}_{\min}^{\leqslant k} := \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{H}^i$.

Алгоритм 3. Построение предложения φ, означающего условие существования подсистемы $\mathcal{A}$

Вход: Конечная L-система $\mathcal{A}$.
Выход: $\exists$-предложение φ.

1: $\varphi := \exists x_1 \ldots \exists x_p\ \psi$, где p — число элементов L-системы $\mathcal{A}$; ψ — пустой конъюнкт.

2: В конъюнкт ψ добавить условия попарного различия переменных $x_1, \ldots, x_p$.

3: **Для всех** предикатов $R_k \in \mathrm{L}_{\mathrm{fin}}$ и конечного числа предикатов $R_k \in \mathrm{L}_\infty$, местность которых не превосходит p, а также всех возможных множеств $\{t_1, \ldots, t_l\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_p\}$, где $l = n_k$, в конъюнкт ψ добавить множители $R_k(t_1, \ldots, t_l)$ или $\neg R_k(t_1, \ldots, t_l)$ в зависимости от того, как соответствующие этим переменным элементы представлены в системе $\mathcal{A}$.

Тогда аксиоматика класса $\boldsymbol{K}$ должна состоять из множества аксиом, каждая из которых соответствует одной из запрещённых подсистем из множества $\mathcal{H}$, т. е. аксиомами являются отрицания соответствующих предложений $\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_p\ \psi$. При этом в силу леммы 2 таких аксиом достаточно, чтобы выделить не только конечные L-системы, принадлежащие классу $\boldsymbol{K}$, но и бесконечные. Таким образом, любая L-система, удовлетворяющая множеству аксиом $\{\neg\varphi\}_{\mathcal{H}}$, содержится в наследственном классе $\boldsymbol{K}$, причём все аксиомы являются $\forall$-предложениями, т. е. класс $\boldsymbol{K}$ универсально аксиоматизируем. ■

Для наглядности разберём в качестве примеров два наследственных класса гиперграфов с рёбрами конечной мощности.

Гиперграф с рёбрами конечной мощности — это алгебраическая система $H = \langle V, \mathrm{L}_H\rangle$, носитель которой V — непустое множество вершин, а язык $\mathrm{L}_H = \langle E_1, E_2, \ldots, =\rangle$ состоит из счётного множества предикатов, местность каждого из которых совпадает с его порядковым номером, и предиката равенства; каждый предикат $E_n(x_1, \ldots, x_n)$ означает, что элементы $x_1, \ldots, x_n$ лежат в ребре гиперграфа мощности n, т. е. предикаты $E_n(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют условиям *неупорядоченности* и *неповторения элементов* для всех $n \in \mathbb{N}$:

(H1) $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ [E_n(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \bigwedge\limits_{\pi} E_n(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))]$, где π — любая перестановка $x_1, \ldots, x_n$;

(H2) $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ [E_n(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \bigwedge\limits_{p \neq q} (x_p \neq x_q)]$.

Подгиперграф — это подсистема, полученная из исходного гиперграфа удалением вершин вместе со всеми инцидентными рёбрами.

Пример 1. Гиперграф называется *линейным*, если его рёбра пересекаются максимум по одной вершине, т. е. *линейный гиперграф* — это алгебраическая система $H = \langle V, \mathrm{L}_H\rangle$, которая является гиперграфом и для всех $k, m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию

(H3′) $\forall x_1 \ldots \forall x_k\ \forall y_1 \ldots \forall y_m\ [E_k(x_1, \ldots, x_k) \wedge E_m(y_1, \ldots, y_m) \wedge (x_p = y_g) \Rightarrow \bigwedge\limits_{\substack{i \neq p \\ j \neq q}} (x_i \neq y_j)]$.

Запрещёнными подгиперграфами для данного класса являются все гиперграфы, у которых хотя бы одна пара рёбер содержит в пересечении не менее двух вершин. Множество *минимальных запрещённых подгиперграфов для класса линейных гиперграфов* состоит из гиперграфов на l вершинах ($l \geqslant 3$), обладающих следующими свойствами:

— существует пара рёбер, которая содержит в пересечении не менее двух вершин;
— при удалении любой вершины в полученном гиперграфе не будет ни одной пары рёбер, которая бы содержала в пересечении не менее двух вершин.

Перечислим с точностью до изоморфизма все минимальные запрещённые подгиперграфы для класса линейных гиперграфов с числом вершин, не превосходящим 3:

— $V = \big\{v_1, v_2, v_3\big\}$, $E = \big\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}\big\}$;
— $V = \big\{v_1, v_2, v_3\big\}$, $E = \big\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1\}\big\}$;
— $V = \big\{v_1, v_2, v_3\big\}$, $E = \big\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_3\}\big\}$;
— $V = \big\{v_1, v_2, v_3\big\}$, $E = \big\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1\}, \{v_2\}\big\}$;
— $V = \big\{v_1, v_2, v_3\big\}$, $E = \big\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1\}, \{v_3\}\big\}$;
— $V = \big\{v_1, v_2, v_3\big\}$, $E = \big\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\big\}$;
— $V = \big\{v_1, v_2, v_3\big\}$, $E = \big\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\big\}$;
— $V = \big\{v_1, v_2, v_3\big\}$, $E = \big\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1\}\big\}$;

— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1\}, \{v_2\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1\}, \{v_2\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$.

Пример 2. Гиперграф называется *антицепью*, если никакое из его рёбер не является подмножеством другого ребра, т. е. *антицепь* — это алгебраическая система $H = \langle V, \mathrm{L}_H \rangle$, которая является гиперграфом и для всех $k, m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию

(Н3″) $\forall x_1 \ldots \forall x_k \; \forall y_1 \ldots \forall y_m \; [E_k(x_1, \ldots, x_k) \Rightarrow \neg E_{k+m}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m)]$.

Запрещёнными подгиперграфами для данного класса будут все гиперграфы, у которых хотя бы одно ребро содержится в другом ребре. Множество *минимальных запрещённых подгиперграфов для класса антицепей* состоит из гиперграфов на l вершинах ($l \geqslant 2$), обладающих следующими свойствами:

— существует ребро, содержащее все вершины гиперграфа;
— существует хотя бы одно ребро мощности меньшей l;
— никакие два ребра мощности меньшей l не содержатся друг в друге.

Перечислим с точностью до изоморфизма все минимальные запрещённые подгиперграфы для класса антицепей с числом вершин, не превосходящим 3:

— $V = \{v_1, v_2\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1\}, \{v_2\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1\}, \{v_2\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_3\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\}$;
— $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}$.

Замечание 1. Классы линейных гиперграфов и антицепей имеют рекурсивные множества минимальных запрещённых подгиперграфов.

Действительно, всем гиперграфам можно поставить в соответствие экзистенциальные предложения, означающие существование изоморфных им подгиперграфов, причём все эти предложения обладают уникальными номерами (см., например, нумерацию формул в [6, с. 42]) и таким особым видом, что их можно алгоритмически выделить среди всех предложений языка L_H. По определению множества минимальных запрещённых подгиперграфов для класса линейных гиперграфов члены этого множества можно алгоритмически выделить среди всех гиперграфов, проверив выполнение соответствующих условий. Таким образом, для любого натурального числа можно алгоритмически установить, является ли оно номером какого-либо подгиперграфа из множества минимальных запрещённых подгиперграфов для класса линейных гиперграфов. Для класса антицепей рассуждения полностью аналогичны.

3. Разрешимость универсальных теорий наследственных классов

Установление разрешимости теории какого-либо класса $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем позволяет сделать вывод о принципиальной возможности получения исчерпывающего перечня свойств, присущих всем системам этого класса. Поскольку разрешимые теории в чистом виде встречаются довольно редко, то доказательство разрешимости универсальной теории и построение соответствующего алгоритма является актуальной задачей.

Теорема 2. Универсальная теория произвольного аксиоматизируемого наследственного класса L-систем, множество минимальных запрещённых подсистем которого рекурсивно, разрешима.

Доказательство. В силу теоремы 1 мы рассматриваем случай, когда $\mathrm{Th}_\forall(\boldsymbol{K})$ — универсальная теория произвольного наследственного класса L-систем $\boldsymbol{K}$, определённого в терминах конечных запрещённых подсистем. Рассмотрим алгоритм 4 проверки предложения на принадлежность $\mathrm{Th}_\forall(\boldsymbol{K})$, на вход которому подаётся произвольное универсальное предложение φ. Его отрицание $\neg\varphi$ преобразуется в предложение, эквивалентное на классе всех L-систем и находящееся в предварённой дизъюнктивной форме. Алгоритм пытается построить L-систему класса $\boldsymbol{K}$, на которой предложение $\neg\varphi$ истинно. Если это удаётся, то предложение φ не принадлежит универсальной теории $\mathrm{Th}_\forall(\boldsymbol{K})$ и алгоритм выдаёт ответ «НЕТ». В противном случае φ принадлежит этой теории и алгоритм выдаёт ответ «ДА».

Алгоритм 4. Проверка универсального предложения φ на принадлежность $\mathrm{Th}_\forall(\boldsymbol{K})$

Вход: Предложение φ.
Выход: Ответ «ДА» или «НЕТ».

1: Для предложения φ построить его отрицание $\neg\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_p\ \psi$, где ψ — бескванторная формула, и преобразовать в эквивалентное предложение $\neg\varphi_1$, находящееся в ПДФ: $\neg\varphi_1 = \exists x_1 \ldots \exists x_p \bigvee\limits_r \psi_r$, где ψ_r — конъюнкты.

2: Просмотреть все конъюнкты предложения $\neg\varphi_1$. Если в конъюнкте ψ_r содержатся переменные x_i и x_j, но нет ни множителя $(x_i = x_j)$, ни множителя $(x_i \neq x_j)$, то заменить конъюнкт ψ_r на дизъюнкцию $[\psi_r \wedge (x_i = x_j)] \vee [\psi_r \wedge (x_i \neq x_j)]$. Эта процедура продолжается, пока возможно. Получим эквивалентное предложение $\neg\varphi_2$, в каждом конъюнкте которого все его переменные будут связаны между собой равенствами и неравенствами.

3: Просмотреть все конъюнкты предложения $\neg\varphi_2$:

1) в каждом конъюнкте ψ_r, содержащем множитель $(x_i = x_j)$, заменить все вхождения переменной x_j на x_i в остальных множителях конъюнкта ψ_r и удалить исходное равенство и повторяющиеся множители;
2) если в конъюнкте ψ_r содержатся множители вида $(t = t)$, где $t \in \{x_1, \ldots, x_p\}$, то удалить их как избыточные;
3) если в конъюнкте ψ_r содержатся множители вида $(t \neq t)$, то удалить конъюнкт из предложения как тождественно ложный.

Данная процедура продолжается до тех пор, пока из всех конъюнктов не исключатся все равенства и неравенства вида $(t \neq t)$, где $t \in \{x_1, \ldots, x_p\}$. В итоге получим эквивалентное предложение $\neg\varphi_3$ в ПДФ, в котором каждый конъюнкт содержит условия попарного различия всех входящих в него переменных.

4: Просмотреть все конъюнкты предложения $\neg\varphi_3$ и в них все предикаты $R_k \in \mathrm{L}_{\mathrm{fin}}$:

1) если в конъюнкте ψ_r содержатся переменные $t_1, \ldots, t_l$, где $t_i \in \{x_1, \ldots, x_p\}$, но нет ни множителя $R_k(t_1, \ldots, t_l)$, ни множителя $\neg R_k(t_1, \ldots, t_l)$, то заменить конъюнкт ψ_r на дизъюнкцию $[\psi_r \wedge R_k(t_1, \ldots, t_l)] \vee [\psi_r \wedge \neg R_k(t_1, \ldots, t_l)]$. Эта процедура продолжается, пока возможно, для всех наборов входящих в конъюнкт переменных $\{t_1, \ldots, t_l\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_p\}$, где $l = n_k$ и переменные в наборе могут повторяться;
2) если в конъюнкте ψ_r одновременно содержатся множители $R_k(t_1, \ldots, t_l)$ и $\neg R_k(t_1, \ldots, t_l)$, то удалить его из предложения как тождественно ложный.

В итоге получим эквивалентное предложение $\neg\varphi_4$ в ПДФ, в котором каждый конъюнкт содержит условия удовлетворения или неудовлетворения всех наборов входящих в него переменных всем предикатам $R_k \in \mathrm{L_{fin}}$.

5: Просмотреть все конъюнкты предложения $\neg\varphi_4$ и в них все предикаты $R_k \in \mathrm{L}_\infty$:

1) если в конъюнкте ψ_r содержатся переменные $t_1, \ldots, t_l$, где $t_i \in \{x_1, \ldots, x_p\}$, но нет ни множителя $R_k(t_1, \ldots, t_l)$, ни множителя $\neg R_k(t_1, \ldots, t_l)$ при $n_k \leqslant p$, то заменить конъюнкт ψ_r на дизъюнкцию $[\psi_r \wedge R_k(t_1, \ldots, t_l)] \vee [\psi_r \wedge \neg R_k(t_1, \ldots, t_l)]$. Эта процедура продолжается, пока возможно, для всех наборов входящих в конъюнкт переменных $\{t_1, \ldots, t_l\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_p\}$, где $l = n_k$ и рассматриваются только наборы неповторяющихся переменных;
2) если в конъюнкте ψ_r содержатся множители вида $\neg R_k(t_1, \ldots, t, \ldots, t, \ldots, t_l)$, то удалить их как избыточные;
3) если в конъюнкте ψ_r содержится множитель вида $R_k(t_1, \ldots, t, \ldots, t, \ldots, t_l)$ или одновременно содержатся множители $R_k(t_1, \ldots, t_l)$ и $\neg R_k(t_1, \ldots, t_l)$, то удалить конъюнкт из предложения как ложный на любой L-системе.

В итоге получим эквивалентное предложение $\neg\varphi_5$ в ПДФ, в котором каждый конъюнкт содержит условия удовлетворения или неудовлетворения всех возможных наборов входящих в него переменных всем необходимым предикатам $R_k \in \mathrm{L}_\infty$.

Если на каком-то из шагов 3–5 будут удалены все конъюнкты предложения, то предложение φ истинно для всех L-систем и, следовательно, принадлежит $\mathrm{Th}_\forall(\boldsymbol{K})$. Алгоритм завершает работу и выдаёт ответ «ДА».

Иначе получается предложение $\neg\varphi_5$ в ПДФ, эквивалентное предложению $\neg\varphi$, причём каждый конъюнкт предложения $\neg\varphi_5$ однозначно задаёт условие существования некой подсистемы языка L. Переход на шаг 6.

6: Просмотреть все конъюнкты предложения $\neg\varphi_5$. Для текущего конъюнкта ψ_r построить L-систему, которая задаётся его условием, и проверить её на принадлежность классу $\boldsymbol{K}$.

Если L-система принадлежит классу $\boldsymbol{K}$, то алгоритм завершает работу и выдаёт ответ «НЕТ».

Если L-система не принадлежит классу $\boldsymbol{K}$, то перейти к следующему конъюнкту.

Если все конъюнкты предложения $\neg\varphi_5$ просмотрены и ни для одного из них не удалось построить модели из класса $\boldsymbol{K}$, то алгоритм завершает работу и выдаёт ответ «ДА».

Обработка текущего конъюнкта ψ_r:

1) построить q-элементную L-систему $A_r = \langle A, \mathrm{L} \rangle$, элементы которой взаимно однозначно соответствуют переменным конъюнкта;
2) поскольку множество минимальных запрещённых подсистем класса $\boldsymbol{K}$ состоит из конечных L-систем и является рекурсивным, существует процеду-

ра, позволяющая узнать, принадлежит ли произвольная конечная L-система этому множеству. С помощью этой процедуры определить множество всех аксиом $\{\theta\}$, отрицания которых соответствуют минимальным запрещённым подсистемам класса $\boldsymbol{K}$, имеющим не более q элементов;

3) чтобы убедиться в принадлежности L-системы A_r классу $\boldsymbol{K}$, нужно проверить, не имеет ли она запрещённых подсистем, соответствующих множеству предложений $\{\theta\}$, т. е. нет ли такого экзистенциального предложения $\neg\theta$, которое истинно на L-системе A_r. Для этого для каждой аксиомы θ, содержащей n переменных ($n \leqslant q$), рассматриваются все возможные соответствия между переменными $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ аксиомы θ и элементами $\{1, 2, \ldots, q\}$ L-системы A_r (см. таблицу для $n = 3$, $q = 4$). Для каждого такого соответствия проверяется истинность $\neg\theta$ на L-системе A_r.

№	x_1	x_2	x_3
1	1	2	3
2	1	2	4
3	1	3	2
4	1	3	4
5	1	4	2
6	1	4	3
...	...	...	...
23	4	3	1
24	4	3	2

Если хотя бы одно из предложений $\{\neg\theta\}$ окажется истинным на L-системе A_r, то она не принадлежит классу $\boldsymbol{K}$. Перейти к следующему конъюнкту предложения $\neg\varphi_5$.

Если все предложения $\{\neg\theta\}$ окажутся ложными на L-системе A_r, то она не содержит запрещённых подсистем для класса $\boldsymbol{K}$ и принадлежит $\boldsymbol{K}$. Таким образом, для предложения $\neg\varphi$ построена модель из класса $\boldsymbol{K}$.

Предполагается, что на каждом шаге алгоритм удаляет из конъюнктов текущего предложения все повторяющиеся множители при их возникновении. Эти изменения никак не влияют на эквивалентность предложения на L-системах, далее не будем акцентировать на них внимание в силу их естественности.

В конечном итоге будет получен ответ на вопрос о принадлежности универсального предложения φ теории $\mathrm{Th}_\forall(\boldsymbol{K})$. ∎

Следующие примеры демонстрируют работу алгоритма 4 из теоремы 2.

Пример 3. Алгоритмом рассматривается универсальная теория линейных гиперграфов. Предложение φ имеет вид

$$\begin{gathered}\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3\ \big[(x_1 = x_2) \vee (x_1 = x_3) \vee \neg E_3(x_1, x_2, x_3) \vee \neg E_3(x_1, x_3, x_2) \vee \\ \vee \neg E_3(x_2, x_1, x_3) \vee \neg E_3(x_2, x_3, x_1) \vee \neg E_3(x_3, x_1, x_2) \vee \neg E_3(x_3, x_2, x_1) \vee \\ \vee E_2(x_2, x_3) \vee E_2(x_3, x_2) \vee \neg E_2(x_1, x_2) \vee \neg E_2(x_2, x_1) \vee \bigvee_{i=1,2,3} \neg E_1(x_i)\big].\end{gathered}$$

На шаге 1 формулируется его отрицание $\neg\varphi$, которое совпадает с $\neg\varphi_1$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \ \big[(x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge E_3(x_1, x_2, x_3) \wedge E_3(x_1, x_3, x_2) \wedge \\ \wedge E_3(x_2, x_1, x_3) \wedge E_3(x_2, x_3, x_1) \wedge E_3(x_3, x_1, x_2) \wedge E_3(x_3, x_2, x_1) \wedge \\ \wedge E_2(x_1, x_2) \wedge E_2(x_2, x_1) \wedge \neg E_2(x_2, x_3) \wedge \neg E_2(x_3, x_2) \wedge \bigwedge_{i=1,2,3} E_1(x_i)\big].$$

На шаге 2 единственный конъюнкт $\psi_{1,1}$ предложения $\neg\varphi_1$ заменяется на дизъюнкцию

$$\big(\psi_{1,1} \wedge (x_2 = x_3)\big) \vee \big(\psi_{1,1} \wedge (x_2 \neq x_3)\big).$$

На шаге 3 после удаления равенств и повторяющихся множителей получается предложение $\neg\varphi_3$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \ \big[\big((x_1 \neq x_2) \wedge E_3(x_1, x_2, x_2) \wedge E_3(x_2, x_1, x_2) \wedge \\ \wedge E_3(x_2, x_2, x_1) \wedge E_2(x_1, x_2) \wedge E_2(x_2, x_1) \wedge \neg E_2(x_2, x_2) \wedge \bigwedge_{i=1,2} E_1(x_i)\big) \vee \\ \vee \big((x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge E_3(x_1, x_2, x_3) \wedge E_3(x_1, x_3, x_2) \wedge \\ \wedge E_3(x_2, x_1, x_3) \wedge E_3(x_2, x_3, x_1) \wedge E_3(x_3, x_1, x_2) \wedge E_3(x_3, x_2, x_1) \wedge \\ \wedge E_2(x_1, x_2) \wedge E_2(x_2, x_1) \wedge \neg E_2(x_2, x_3) \wedge \neg E_2(x_3, x_2) \wedge \bigwedge_{i=1,2,3} E_1(x_i)\big)\big].$$

На шаге 4 предложение $\neg\varphi_4$ совпадает с $\neg\varphi_3$, поскольку $\mathrm{L}_{\mathrm{fin}} = \varnothing$.

На шаге 5 конъюнкт $\psi_{4,1}$ предложения $\neg\varphi_4$ удаляется как ложный, поскольку он содержит множители $E_3(x_1, x_2, x_2)$, $E_3(x_2, x_1, x_2)$ и $E_3(x_2, x_2, x_1)$, а конъюнкт $\psi_{4,2}$ заменяется на дизъюнкцию

$$\big(\psi_{4,2} \wedge E_2(x_1, x_3) \wedge E_2(x_3, x_1)\big) \vee \big(\psi_{4,2} \wedge E_2(x_1, x_3) \wedge \neg E_2(x_3, x_1)\big) \vee \\ \vee \big(\psi_{4,2} \wedge \neg E_2(x_1, x_3) \wedge E_2(x_3, x_1)\big) \vee \big(\psi_{4,2} \wedge \neg E_2(x_1, x_3) \wedge \neg E_2(x_3, x_1)\big).$$

Таким образом, получается предложение $\neg\varphi_5$, состоящее из четырёх конъюнктов:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \ \big[\psi_{5,1} \vee \psi_{5,2} \vee \psi_{5,3} \vee \psi_{5,4}\big].$$

На шаге 6 алгоритм строит L-системы для каждого из конъюнктов предложения $\neg\varphi_5$. Затем доказывается, что системы для конъюнктов $\psi_{5,1}$ и $\psi_{5,4}$ не являются линейными гиперграфами, а системы для конъюнктов $\psi_{5,2}$ и $\psi_{5,3}$ не являются гиперграфами вообще.

Алгоритм завершает работу и выдаёт ответ «ДА», т. е. исходное предложение φ принадлежит универсальной теории линейных гиперграфов.

Пример 4. Алгоритмом рассматривается универсальная теория антицепей. Предложение φ имеет вид

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \ \big[(x_1 = x_2) \vee (x_1 = x_3) \vee (x_2 = x_3) \vee E_3(x_1, x_2, x_3) \vee E_3(x_1, x_3, x_2) \vee \\ \vee E_3(x_2, x_1, x_3) \vee E_3(x_2, x_3, x_1) \vee E_3(x_3, x_1, x_2) \vee E_3(x_3, x_2, x_1) \vee E_2(x_1, x_3) \vee \\ \vee \neg E_2(x_1, x_2) \vee \neg E_2(x_2, x_1) \vee \neg E_2(x_2, x_3) \vee \neg E_2(x_3, x_2) \vee E_1(x_1) \vee E_1(x_2)\big].$$

На шаге 1 формулируется его отрицание $\neg\varphi$, которое совпадает с $\neg\varphi_1$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \ \big[(x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge \neg E_3(x_1, x_2, x_3) \wedge \neg E_3(x_1, x_3, x_2) \wedge \\ \wedge \neg E_3(x_2, x_1, x_3) \wedge \neg E_3(x_2, x_3, x_1) \wedge \neg E_3(x_3, x_1, x_2) \wedge \neg E_3(x_3, x_2, x_1) \wedge E_2(x_1, x_2) \wedge \\ \wedge E_2(x_2, x_1) \wedge E_2(x_2, x_3) \wedge E_2(x_3, x_2) \wedge \neg E_2(x_1, x_3) \wedge \neg E_1(x_1) \wedge \neg E_1(x_2)\big].$$

На шаге 2 предложение $\neg\varphi_2$ совпадает с $\neg\varphi_1$; на шаге 3 предложение $\neg\varphi_3$ совпадает с $\neg\varphi_2$; на шаге 4 предложение $\neg\varphi_4$ совпадает с $\neg\varphi_3$.

На шаге 5 единственный конъюнкт $\psi_{4,1}$ предложения $\neg\varphi_4$ заменяется на дизъюнкцию

$$\big(\psi_{4,1} \wedge E_2(x_3, x_1) \wedge E_1(x_3)\big) \vee \big(\psi_{4,1} \wedge E_2(x_3, x_1) \wedge \neg E_1(x_3)\big)\vee$$
$$\vee\big(\psi_{4,1} \wedge \neg E_2(x_3, x_1) \wedge E_1(x_3)\big) \vee \big(\psi_{4,1} \wedge \neg E_2(x_3, x_1) \wedge \neg E_1(x_3)\big).$$

Таким образом, получается предложение $\neg\varphi_5$, состоящее из четырёх конъюнктов:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \ \big[\psi_{5,1} \vee \psi_{5,2} \vee \psi_{5,3} \vee \psi_{5,4}\big].$$

На шаге 6 алгоритм строит L-системы для каждого из конъюнктов предложения $\neg\varphi_5$. Затем доказывается, что системы для конъюнктов $\psi_{5,1}$ и $\psi_{5,2}$ не являются гиперграфами, система для конъюнкта $\psi_{5,3}$ является гиперграфом, но не является антицепью, однако система для конъюнкта $\psi_{5,4}$ является антицепью.

Алгоритм завершает работу и выдаёт ответ «НЕТ», т. е. исходное предложение φ не принадлежит универсальной теории антицепей.

Заключение

В работе рассмотрены вопросы аксиоматизируемости и разрешимости универсальных теорий наследственных классов алгебраических систем языка $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathrm{fin}} \cup \mathrm{L}_{\infty}$. Предложенные идеи доказательства соответствующих результатов применимы при решении систем уравнений на гиперграфах, матроидах и других объектах, которые можно определить с использованием языка логики первого порядка этого вида. Остаются открытыми вопросы применения таких языковых конструкций для построения более эффективных алгоритмов решения практических задач, чем известные.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильев А. В., Ильев В. П.* Алгоритмы решения систем уравнений над различными классами конечных графов // Прикладная дискретная математика. 2021. № 53. С. 89–102.
2. *Никитин А. Ю., Рыбалов А. Н.* О сложности проблемы разрешимости систем уравнений над конечными частичными порядками // Прикладная дискретная математика. 2018. № 39. С. 94–98.
3. *Балджанова Р. В., Ильев А. В., Ильев В. П.* О сложности кластеризации графа в задаче с ограничениями на размеры кластеров // Прикладная дискретная математика. 2023. № 60. С. 76–84.
4. *Il'ev A. V. and Il'ev V. P.* Bounds for the clustering complexity in a graph clustering problem with clusters of bounded size // J. Math. Sci. 2023. V. 275. P. 78–84.
5. *Зыков А. А.* Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004. 664 с.
6. *Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А.* Элементарные теории // Успехи матем. наук. 1965. Т. 20. № 4. С. 37–108.
7. *Bozapalidis A. and Kalampakas A.* An axiomatization of graphs // Acta Inform. 2004. V. 41. P. 19–61.
8. *Taylor W.* Atomic compactness and graph theory // Fundamenta Mathematicae. 1969. V. LXV. P. 139–145.
9. *Yamamoto M., Nishizaki S., Hagiya M., and Toda Y.* Formalization of planar graphs // LNCS. 1995. V. 971. P. 369–384.
10. *Caicedo X.* Finitely axiomatizable quasivarieties of graphs // Algebra Univers. 1995. V. 34. No. 2. P. 314–321.

11. *Ильев А. В.* Об аксиоматизируемости наследственных классов графов и матроидов // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 137–147.
12. *Ham L. and Jackson M.* Axiomatisability and hardness for universal Horn classes of hypergraphs // Algebra Univers. 2018. V. 79. Art. 30.
13. *Il'ev A. V. and Il'ev V. P.* On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids // J. Physics: Conf. Ser. 2019. V. 1210. Art. 012056.
14. *Stronkowski M. M.* Axiomatizations of universal classes through infinitary logic // Algebra Univers. 2018. V. 79. Art. 26.
15. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М.: Наука, 1987. 336 с.
16. *Горбунов В. А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Научная книга, 1999. 368+xii с.
17. *Ильев А. В.* Разрешимость универсальных теорий и аксиоматизируемость наследственных классов графов // Труды института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. №1. С. 100–111.

REFERENCES

1. *Il'ev A. V. and Il'ev V. P.* Algoritmy resheniya sistem uravneniy nad razlichnymi klassami konechnykh grafov [Algorithms for solving systems of equations over various classes of finite graphs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2021, no. 53, pp. 89–102. (in Russian)
2. *Nikitin A. Yu. and Rybalov A. N.* O slozhnosti problemy razreshimosti sistem uravneniy nad konechnymi chastichnymi poryadkami [On complexity of the satisfiability problem of systems over finite posets]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2018, no. 39, pp. 94–98. (in Russian)
3. *Baldzhanova R. V., Il'ev A. V., and Il'ev V. P.* O slozhnosti klasterizatsii grafa v zadache s ogranicheniyami na razmery klasterov [On the complexity of graph clustering in the problem with bounded cluster sizes]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2023, no. 60, pp. 76–84. (in Russian)
4. *Il'ev A. V. and Il'ev V. P.* Bounds for the clustering complexity in a graph clustering problem with clusters of bounded size. J. Math. Sci., 2023, vol. 275, pp. 78–84.
5. *Zykov A. A.* Osnovy teorii grafov [Fundamentals of Graph Theory]. Moscow, Vuzovskaia kniga, 2004. 664 p. (in Russian)
6. *Ershov Yu. L., Lavrov I. A., Taimanov A. D., and Taitslin M. A.* Elementary theories. Russian Math. Surveys, 1965, vol. 20, iss. 4, pp. 35–105.
7. *Bozapalidis A. and Kalampakas A.* An axiomatization of graphs. Acta inform., 2004, vol. 41, pp. 19–61.
8. *Taylor W.* Atomic compactness and graph theory. Fundamenta Mathematicae, 1969, vol. LXV, pp. 139–145.
9. *Yamamoto M., Nishizaki S., Hagiya M., and Toda Y.* Formalization of planar graphs. LNCS, 1995, vol. 971, pp. 369–384.
10. *Caicedo X.* Finitely axiomatizable quasivarieties of graphs. Algebra Univers., 1995, vol. 34, no. 2, pp. 314–321.
11. *Il'ev A. V.* Ob aksiomatiziruemosti nasledstvennykh klassov grafov i matroidov [On axiomatizability of hereditary classes of graphs and matroids]. Siberian Electronic Math. Reports, 2016, vol. 13, pp. 137–147. (in Russian)
12. *Ham L. and Jackson M.* Axiomatisability and hardness for universal Horn classes of hypergraphs. Algebra Univers., 2018, vol. 79, art. 30.
13. *Il'ev A. V. and Il'ev V. P.* On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids. J. Physics: Conf. Ser., 2019, vol. 1210, art. 012056.

14. *Stronkowski M. M.* Axiomatizations of universal classes through infinitary logic. Algebra Univers., 2018, vol. 79, art. 26.
15. *Ershov Yu. L. and Palyutin E. A.* Matematicheskaia logika [Mathematical Logic]. Moscow, Nauka, 1987. 336 p. (in Russian)
16. *Gorbunov V. A.* Algebraic Theory of Quasivarieties. New York, Plenum, 1998. 298+xii p.
17. *Il'ev A. V.* Razreshimost' universal'nykh teoriy i aksiomatiziruemost' nasledstvennykh klassov grafov [Decidability of universal theories and axiomatizability of hereditary classes of graphs]. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 100–111. (in Russian)