

УДК 512.532.3

DOI 10.17223/20710410/66/4

**МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ПОЛУГРУППЫ ВЫЧЕТОВ
С ПЛАНАРНЫМИ ГРАФАМИ КЭЛИ**

О. В. Князев, Д. В. Соломатин

*Омский государственный педагогический университет, г. Омск, Россия***E-mail:** solomatin_dv@omgpu.ru

Изучаются мультипликативные полугруппы вычетов, допускающие планарные графы Кэли. Доказано, что мультипликативная полугруппа кольца вычетов $\mathbb{Z}_n$ допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда $n = 4, 6, 8$ или n — простое число. Приведены примеры минимальных систем образующих мультипликативных полугрупп вычетов по некоторым модулям и их графы Кэли, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: *вычет, мультипликативная полугруппа вычетов, порождающее множество полугруппы, граф Кэли полугруппы, планарный граф.*

**MULTIPLICATIVE RESIDUE SEMIGROUPS
WITH PLANAR CAYLEY GRAPHS**

O. V. Knyazev, D. V. Solomatin

Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia

We study multiplicative residue semigroups that admit planar Cayley graphs. It is proved that the multiplicative semigroup of the residue ring $\mathbb{Z}_n$ admits a planar Cayley graph if and only if $n = 4, 6, 8$ or n is a prime number. Examples of minimal systems of generators of multiplicative residue semigroups with respect to some modules and their Cayley graphs are given, illustrating the obtained results.

Keywords: *residue, multiplicative semigroup of residues, generating semigroup set, Cayley graph of semigroup, planar graph.*

Введение

Задача проверки изоморфизма графов является одной из важнейших задач в теории графов, среди имеющих прикладное и теоретическое значение. Она заключается в определении, являются ли два графа «одним и тем же» графом с точностью до нумерации вершин. В случае планарных графов задача проверки их изоморфизма разрешима за полиномиальное время [1]. Это означает, что существуют эффективные алгоритмы для решения этой задачи для планарных графов. Однако в общем случае изоморфность двух планарных графов Кэли $\text{Cay}(S_1, X_1)$ и $\text{Cay}(S_2, X_2)$ конечных полугрупп S_1 и S_2 с множествами образующих X_1 и X_2 не означает изоморфности полугрупп S_1 и S_2 , а степень полинома в сложности алгоритма проверки изоморфизма двух полугрупп, допускающих планарный граф Кэли, зависит ещё и от числа различных минимальных множеств образующих этих полугрупп. Дело в том, что упомянутые алгоритмы используют специфичные структурные характеристики графов, поэтому область их

применения ограничена. Тем не менее отдельный интерес с прикладной точки зрения вызывает проблема изоморфизма конечных полугрупп. Эта проблема является важной в области теории полугрупп и теории вычислений, она изучалась многими исследователями.

Одним из важных классов графов, определяемых полугруппами, являются графы Кэли, поскольку они имеют многочисленные приложения [2, 3]. Один из возможных подходов к решению проблемы изоморфизма конечных полугрупп заключается в проверке изоморфности графов Кэли пар рассматриваемых полугрупп. Если при этом графы планарные, то существует полиномиальный алгоритм проверки их изоморфности. Поэтому возникает естественный вопрос: для каких конечных полугрупп граф Кэли планарен? Кроме того, решения этого вопроса могут пригодиться в таких прикладных областях, как криптография, проектирование топологии сетей и конечных автоматов. Известно, что мультипликативные полугруппы вычетов могут использоваться в криптографических алгоритмах. Структура этих полугрупп в сочетании со свойствами планарных графов Кэли может помочь в разработке безопасных криптографических систем.

Кольцо вычетов, группа вычетов, мультипликативная полугруппа вычетов относятся к ярким представителям модулярной математики, практическая значимость которой не вызывает сомнений. Изучение с разных сторон этих представителей позволит шире использовать прикладные возможности этой теории.

Планарные графы Кэли полезны при проектировании эффективных и надёжных топологий коммуникационных сетей. Свойства мультипликативных полугрупп вычетов могут быть использованы для оптимизации маршрутизации и проверки связности в этих сетях. Графы Кэли полугрупп тесно связаны также с конечными автоматами. Эта связь может использоваться для моделирования и анализа вычислительных процессов, особенно при проектировании эффективных алгоритмов и автоматов.

Изучение свойств планарных графов Кэли полугрупп может привести к новым открытиям в теории графов, таким, как понимание хроматического числа, связности и других инвариантов графов. Фундаментальные математические исследования взаимосвязей между мультипликативными полугруппами вычетов и планарными графами Кэли могут привести к новым открытиям в алгебре и комбинаторике, потенциально решая открытые проблемы или приводя к новым гипотезам. Не случайно обобщённые графы Кэли полугрупп всё чаще формируют тематику научных и исследовательских статей [4]. Упомянем также тот факт, что предмет геометрической теории групп и полугрупп составляет изучение конечно-порождённых групп и полугрупп путём отыскания связей между их алгебраическими свойствами и топологическими, геометрическими свойствами пространств, на которых такие системы действуют, либо самих систем, рассматриваемых как геометрические объекты, что обычно делается рассмотрением графа Кэли и соответствующей словарной метрики.

В работе [5] описаны кольца вычетов с циклической группой обратимых элементов, у которых мультипликативная полугруппа допускает планарный граф Кэли. С течением времени в материалах работы научного Алгебраического семинара ОмГПУ [6] накоплено большое количество фактов и примеров, связанных с кольцами вычетов, графами Кэли их мультипликативных полугрупп, планарностью этих графов. И теперь мы можем дать описание всех колец вычетов, у которых граф Кэли мультипликативной полугруппы допускает плоскую укладку.

1. Предварительные сведения

Графом Кэли полугруппы S относительно множества образующих её элементов X называется ориентированный мультиграф $\text{Ca}(S, X)$, множество вершин которого равно S , а рёбра начинаются в вершине $a \in S$, заканчиваются в вершине $b \in S$ и помечены элементом $x \in X$ тогда и только тогда, когда $ax = b$. Основой ориентированного мультиграфа с помеченными рёбрами называется обыкновенный граф, полученный из исходного путём удаления всех меток и петель и заменой всех дуг, соединяющих одни и те же вершины в некотором направлении, одним ребром, соединяющим те же вершины. Говорим, что полугруппа допускает планарный граф Кэли, если основа её графа Кэли относительно некоторого множества образующих элементов является планарным графом, то есть может быть отображена на плоскость так, что вершинам графа соответствуют некоторые точки плоскости, а рёбрам графа соответствуют непрерывные плоские линии без самопересечений, не имеющие общих точек, кроме, возможно, общих вершин. Пара графов гомеоморфны друг другу, если они получены из одного и того же графа путём подразделения его рёбер. Согласно критерию Понтрягина — Куратовского, граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных полному графу пятого порядка K_5 или полному двудольному графу $K_{3,3}$, содержащему по три вершины в каждой из долей. Другими словами, планарный граф характеризуется запрещёнными минорами K_5 и $K_{3,3}$. Внешнепланарный граф — такой граф, который допускает плоскую укладку, в которой все вершины принадлежат внешней грани. Внешнепланарные графы можно охарактеризовать двумя запрещёнными минорами K_4 и $K_{2,3}$.

Описание допускающих плоские графы Кэли конечных коммутативных групп (как и некоммутативных) известно давно. Пусть C_n — мультипликативная циклическая группа порядка n . Заметим, что $C_m \times C_n \cong C_{mn}$ при взаимно простых m и n . Из результатов работы [7, § 3, следствие 3] следует

Теорема 1. Конечная коммутативная группа G планарна тогда и только тогда, когда $G = C_2 \times C_{2n}$, или $G = C_2 \times C_2 \times C_2$, или $G = C_n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что справедливость этой теоремы следует и из более общего результата [8, § 5], который гласит: конечная группа G планарна тогда и только тогда, когда $G = G_1 \times G_2$, где $G_1 = C_1$ или C_2 , а $G_2 = C_n, D_n, S_4, A_4$ или A_5 . Здесь $D_n = \langle x, y \mid x^n = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$ — диэдральная группа, элементами D_n являются автоморфизмы графа, состоящего только из цикла с n вершинами, таким образом, $|D_n| = 2n$; A_n и S_n — знакопеременная и симметрическая группы подстановок степени n .

Напомним, что вычетом целого числа a по модулю n называется остаток от деления a на n и обозначается через $a \bmod n$. Мультипликативная полугруппа $\mathbb{Z}_n$ вычетов по модулю n — это множество $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ всех вычетов по модулю n с операцией умножения: $a \cdot b = ab \bmod n$. В частности, $a \cdot b = ab$, если $ab < n$. Обозначим через $\mathbb{Z}_n^{-1}$ группу всех обратимых в $\mathbb{Z}_n$ элементов; она состоит из всех элементов полугруппы $\mathbb{Z}_n$, взаимно простых с числом n , и только из таких. Поэтому её порядок $|\mathbb{Z}_n^{-1}|$ равен $\varphi(n)$, где φ — функция Эйлера.

Подполугруппу S_1 полугруппы S называют выпуклой (фильтром), если из того, что $x, y \in S$ и $x \cdot y \in S_1$, следует $x, y \in S_1$, то есть произведение элементов из S может принадлежать S_1 только тогда, когда эти элементы уже лежат внутри S_1 .

Очевидна следующая лемма, так как только произведение взаимно простых с n чисел даёт взаимно простое с n число.

Лемма 1. Группа обратимых элементов $\mathbb{Z}_n^{-1}$ является выпуклой подполугруппой в полугруппе $\mathbb{Z}_n$.

Из определения выпуклой подполугруппы следует

Лемма 2. Пусть S_1 является выпуклой подполугруппой в полугруппе S . Тогда в любой системе образующих полугруппы S обязана присутствовать в качестве подсистемы система образующих полугруппы S_1 .

Следствие 1. Всякая система образующих мультипликативной полугруппы вычетов $\mathbb{Z}_n$ содержит систему образующих подгруппы $\mathbb{Z}_n^{-1}$.

Нам потребуется ещё одно вспомогательное утверждение:

Лемма 3. Необходимым условием планарности графа Кэли коммутативной конечной полугруппы является не только планарность, но и внешнепланарность графа Кэли всякой её собственной выпуклой подполугруппы.

Доказательство. Заметим, что граф Кэли коммутативной полугруппы является связным. Пусть S_1 — собственная выпуклая подполугруппа конечной полугруппы S . Нетрудно понять, что $S \setminus S_1$ — непустой идеал полугруппы S , содержащий хотя бы один образующий полугруппы S . Рассмотрим граф Кэли полугруппы S . В качестве подграфа он содержит граф Кэли её собственной выпуклой подполугруппы S_1 . Если предположить, что граф Кэли подполугруппы S_1 при любой раскладке не становится внешнепланарным, то часть графа Кэли полугруппы S , соответствующая идеалу $S \setminus S_1$, чтобы не нарушить планарность, должна расположиться на одной грани графа подполугруппы S_1 . Но это не спасает планарность графа Кэли полугруппы S , так как всякая вершина графа Кэли подполугруппы S_1 смежна хотя бы с одной вершиной из $S \setminus S_1$. Значит, граф Кэли её собственной выпуклой подполугруппы S_1 должен быть внешнепланарным. ■

Из следствия 1 и лемм 1 и 3 получаем

Следствие 2. Необходимым условием планарности графа Кэли мультипликативной полугруппы вычетов $\mathbb{Z}_n$ является внешнепланарность графа Кэли её подгруппы $\mathbb{Z}_n^{-1}$.

Результатом этого следствия и теоремы 1 является

Лемма 4. Если граф Кэли мультипликативной полугруппы вычетов $\mathbb{Z}_n$ является планарным, то $\mathbb{Z}_n^{-1} = C_2 \times C_{2k}$, или $\mathbb{Z}_n^{-1} = C_2 \times C_2 \times C_2$, или $\mathbb{Z}_n^{-1} = C_m$, где n — произвольное натуральное число; m и $2k$ — порядки соответствующих циклических подгрупп.

Теорема 2 [9, теорема 1]. Конечный моноид S , являющийся произведением неоднородных циклических моноидов, допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $S = \langle a \mid a^3 = a \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle^1$, где для натуральных h, t имеют место неравенства $h \leq 2$ и $h + t \leq 4$;
- 2) $S = \langle a \mid a^{1+m} = a \rangle^{+1} \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle^i$, где $i \in \{1, +1\}$ и для натуральных m, h, t выполняется одно из следующих ограничений:
 - 2.1. $m = 1, t \leq 2$;
 - 2.2. $i = 1, m \leq 2, h = 1, t = 2$;
 - 2.3. $i = 1, m = 2, h = 1, t \leq 2$;
- 3) $S = \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle^1 \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^2 = a_i \rangle^{+1}$, где для натуральных r, n, m выполнено $n = m = 1$, или $n - 1 = r = m = 1$, или $n = m - 1 = 1$.

Нетрудные рассуждения, опирающиеся на эту теорему и на [10, теорема 3.1] для $C_2 \times C_2$, дают следствие 3. Более того, если $\mathbb{Z}_n^{-1} \cong C_2 \times C_{2m}$, то, в соответствии с леммой 3, граф Кэли полугруппы $\mathbb{Z}_n^{-1}$ должен быть внешнепланарным. По [10, теорема 3.1] приходим к выводу, что такая полугруппа допускает внешнепланарный граф Кэли только при $m = 1$.

Следствие 3. Среди групп $C_2 \times C_{2n}$, $C_2 \times C_2 \times C_2$ и C_n внешнепланарный граф Кэли имеют только группы C_n или $C_2 \times C_2$, где n — произвольное натуральное число.

Нам также понадобится

Теорема 3 [5, теорема 3]. Граф Кэли мультипликативной полугруппы вычетов $\mathbb{Z}_n$ с циклической группой $\mathbb{Z}_n^{-1}$ планарен тогда и только тогда, когда $n = 4$, или $n = 6$, или n — простое число.

2. Основной результат

Теорема 4. Мультипликативная полугруппа вычетов $\mathbb{Z}_n$ допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда $n \in \{4, 6, 8\} \cup P$, где P — множество всех простых чисел.

Доказательство. Пусть $\mathbb{Z}_n$ — мультипликативная полугруппа классов вычетов по модулю n с планарным графом Кэли. Тогда по следствию 2, лемме 4 и следствию 3 подгруппа $\mathbb{Z}_n^{-1}$ равна C_n или $C_2 \times C_2$, где n — произвольное натуральное число.

Пусть сначала $\mathbb{Z}_n^{-1} = C_n$. Тогда попадаем в условие теоремы 3, и в этом случае $n = 4$, или $n = 6$, или n — простое число.

Пусть теперь $\mathbb{Z}_n^{-1} = C_2 \times C_2$. Отсюда $|\mathbb{Z}_n^{-1}| = \varphi(n) = 4$. Решив уравнение $\varphi(n) = 4$ относительно n , получаем, что $n \in \{5, 8, 10, 12\}$. Проверка убеждает, что $\mathbb{Z}_5^{-1} = C_4$. Группа $\mathbb{Z}_5^{-1}$ — циклическая группа и подходит по теореме 3. Группа $\mathbb{Z}_8^{-1}$ изоморфна группе $C_2 \times C_2$. Планарность её графа Кэли можно проверить, посмотрев на рис. 1. Группа $\mathbb{Z}_{10}^{-1}$ изоморфна C_4 . Отсеиваем её по теореме 3. Группа $\mathbb{Z}_{12}^{-1} \cong C_2 \times C_2$. Убедимся в непланарности графа Кэли соответствующей ей полугруппы $\mathbb{Z}_{12}$ ниже.

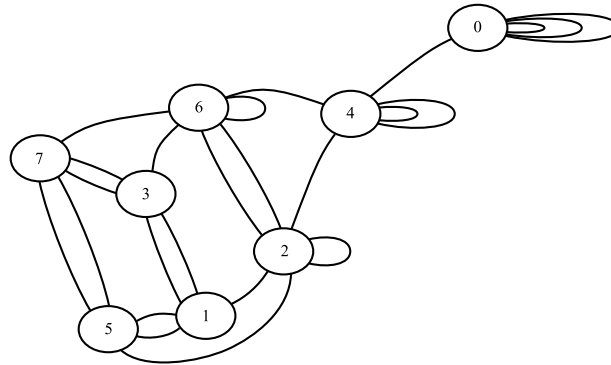


Рис. 1. $\text{Cay}(\mathbb{Z}_8, \{2, 3, 5\})$

Рассмотрим все возможные варианты общего случая, когда $\mathbb{Z}_n^{-1} \cong C_2 \times C_2$. В этом случае в $\mathbb{Z}_n^{-1}$ имеется цикл из не менее чем четырёх элементов. Наличие подграфа $K_{3,3}$ в основе графа Кэли мультипликативной полугруппы классов вычетов по модулю n , приводящее к потере планарности, обеспечивается тремя пунктами. Во-первых, нужно, чтобы в подгруппе обратимых был цикл из не менее чем четырёх элементов, что обеспечивается в данном случае теоремой Машке. Во-вторых, нужны два разных образующих из идеала $\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_n^{-1}$. Эти образующие, будучи возведёнными в некоторые

степени, породят идемпотенты, а общее число идемпотентов в полугруппе $\mathbb{Z}_n$ по составному модулю $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, где p_i — попарно различные простые числа, равно 2^k . Заметим, что при составном модуле $k > 1$, следовательно, ниже групповой части в решётке полугруппы $\mathbb{Z}_n$ имеются ещё хотя бы два идемпотента, $e_1 = p_1^{\beta_{11}} p_2^{\beta_{12}} \cdots p_k^{\beta_{1k}} z_1$ и $e_2 = p_1^{\beta_{21}} p_2^{\beta_{22}} \cdots p_k^{\beta_{2k}} z_2$, где $z_i \in \mathbb{Z}_n^{-1}$, $\beta_{ij} \in \{0, \alpha_j\}$ при $1 \leq i \leq 2$ и $1 \leq j \leq k$, принадлежащих классам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ соответственно. И в-третьих, между какими-либо из вершин тех разных двух классов нужен маршрут. Последнее выполняется, так как, в частности, элемент 0 обязательно должен порождаться произведением образующих либо сам находится среди образующих, но и тогда умножение на 0 сформирует ребро, связывающее 0 с любой другой вершиной. Таким образом обосновывается наличие подграфа $K_{3,3}$ на вершинах $\{1, ab, d\}$ в одной доле и вершинах $\{a, b, c\}$ в другой доле, где $\{1, a, b, ab\} \subseteq \mathbb{Z}_n^{-1}$, $c \in \bar{e}_1$, $d \in \bar{e}_2$, следовательно, граф Кэли рассматриваемой полугруппы не является планарным.

Группа D_2 изоморфна четверной группе Клейна, которая встречается во многих разделах математики, например, ей изоморфна приведённая система вычетов по модулю 8, состоящая из классов 1, 3, 5, 7, и приведённая система вычетов по модулю 12, состоящая из классов 1, 5, 7, 11. Графы Кэли планарной полугруппы $\mathbb{Z}_8$ и непланарной полугруппы $\mathbb{Z}_{12}$ представлены на рис. 1 и 2 соответственно.

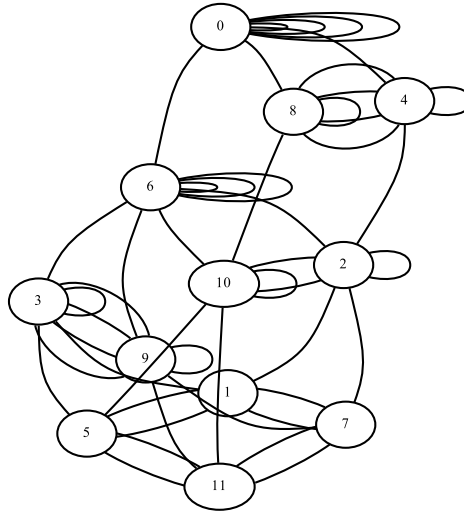


Рис. 2. $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{12}, \{2, 3, 5, 7\})$

В доказательстве этой теоремы можно обойтись без теоремы 2 и следствия 3. Действительно, в общем случае непланарность графа Кэли полугруппы $\mathbb{Z}_n$, имеющей D_2 в качестве подгруппы, обеспечивается, если основа этого графа содержит подграф, гомеоморфный полному двудольному графу $K_{3,3}$, содержащему по три вершины в каждой из долей. В самом деле, если $D_2 = \langle a, b \rangle$, что выполнено при взаимно простых с модулем образующих, $(a, n) = 1 = (b, n)$, то основа графа Кэли $\text{Cay}(\mathbb{Z}_n, X)$, где $\{a, b\} \subseteq X$, содержит простой цикл на вершинах $\{a, b, 1, ab\}$, причём $a^2 = b^2 = 1$. Например, в $\mathbb{Z}_8$ можно видеть $a = 3$, $b = 5$, $ab = 7$, а в $\mathbb{Z}_{12}$ этот цикл содержит вершины $a = 5$, $b = 7$, $ab = 11$. Далее, каждая вершина этого цикла соединена с вершинами из смежных классов $cD_2 = \{cv : v \in D_2\}$ и $dD_2 = \{dv : v \in D_2\}$, где $(c, n) \neq 1 \neq (d, n)$. При $c = d = 2$ в $\mathbb{Z}_8$ наблюдается совпадение классов $cD_2 = dD_2 = \{2, 6\}$, а при $c = 2 \neq 3 = d$ в $\mathbb{Z}_{12}$ есть $cD_2 = \{2, 10\} \neq \{3, 9\} = dD_2$. Наконец, каждый элемент из cD_2 соединён с 0 маршрутом, имеющим общую вершину с маршрутом от элемен-

тов из dD_2 до 0, поэтому между вершинами подграфов cD_2 и dD_2 существует путь. В примере с $\mathbb{Z}_{12}$ таким путём может быть выбрана простая цепь на множестве вершин $\{2, 6, 3\}$.

Таким образом, подграф, гомеоморфный графу $K_{3,3}$, формируется в основе графа Кэли полугруппы $\mathbb{Z}_n$, содержащей подгруппу D_2 , на вершинах $\{d, ab, 1\}$ в одной своей доле и вершинах $\{c, a, b\}$ в другой доле, где $c \neq d$ — необратимые образующие полугруппы $\mathbb{Z}_n$, а обратимыми её образующими являются $a \neq b$. В случае, когда $c = d$, из комбинаторных рассуждений можно получить, что в полугруппе $\mathbb{Z}_n$, имеющей D_2 в качестве подгруппы, содержится восемь элементов: $\{1 = a^2 = b^2, a, b, ab, 1c = bc, ac = abc, c^2, c^3\}$, ведь если $1c \neq bc$, то возможно $1c = ac$, тогда получим ту же полугруппу с точностью до изоморфизма, меняющего местами a и b , а если $1c \neq bc$ и $1c \neq ac$, то в графе Кэли возникает конфигурация $K_{3,3}$, описанная выше в предположении, что отделившийся элемент $d \neq c$ — это $d = bc$ или $d = ac$. Аналогична ситуация с $\mathbb{Z}_n^{-1} = \mathbb{Z}_2 \times D_2$. Для обнаружения $K_{3,3}$ в этом случае берутся a и b образующими из подгруппы $\{e\} \times D_2$, где e — нейтральный элемент группы $\mathbb{Z}_2$.

Учитывая теорему 3, приходим к выводу, что единственной имеющей нециклическую группу обратимых элементов $\mathbb{Z}_n^{-1}$ мультипликативной полугруппой вычетов $\mathbb{Z}_n$, допускающей планарный граф Кэли, является полугруппа $\mathbb{Z}_8$. ■

Заметим, что в силу следствия 3 при доказательстве теоремы не было необходимости рассматривать случай полугруппы $C_2 \times C_2 \times C_2$, который приводит нас к $n = 24$, так как в этом случае в полугруппе $\mathbb{Z}_n$ подгруппа $\mathbb{Z}_n^{-1}$ должна иметь мощность 8. Получается, что $\varphi(n) = 8$, тогда $n = \varphi^{-1}(8) \in \{15, 16, 20, 24, 30\}$. Принимая во внимание нижнюю оценку функции Эйлера $\varphi(n) \geq \sqrt{n}$, перечислены все возможные значения. При этом для модуля $n \in \{15, 16, 20, 30\}$ группа обратимых элементов является группой $C_2 \times C_4$, а для $n = 24$ имеем $\mathbb{Z}_n^{-1} \cong C_2 \times C_2 \times C_2$ и непланарный граф Кэли относительно любой системы образующих, в частности, представленный на рис. 3 относительно одной из таких систем.

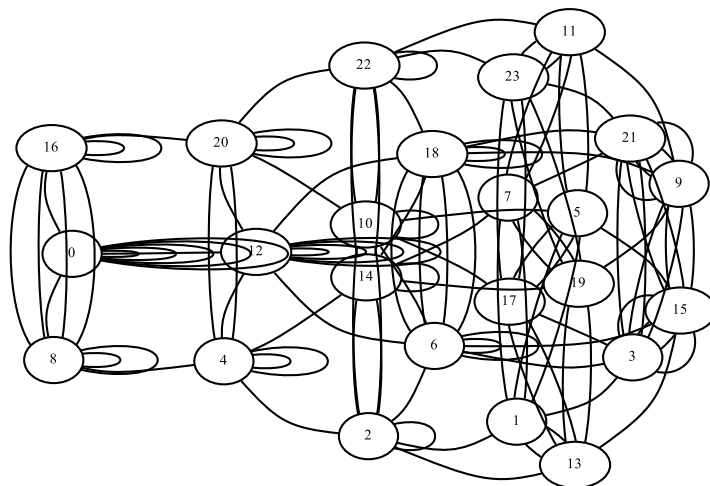


Рис. 3. $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{24}, \{2, 3, 5, 7, 13\})$

Заключение

Представленный на рис. 1 планарный граф Кэли полугруппы $\mathbb{Z}_8$ — не единственный возможный планарный граф этой полугруппы. Плоская укладка существует относительно таких минимальных множеств образующих, как $\langle 2, 3, 5 \rangle = \{2, 4, 0\} \cdot \{3, 1\} \cdot \{5, 1\}$,

$\langle 3, 5, 6 \rangle = \{3, 1\} \cdot \{5, 1\} \cdot \{6, 4, 0\}$, $\langle 2, 5, 7 \rangle = \{2, 4, 0\} \cdot \{5, 1\} \cdot \{7, 1\}$, $\langle 5, 6, 7 \rangle = \{5, 1\} \cdot \{6, 4, 0\} \cdot \{7, 1\}$. При этом для оставшихся из всех возможных минимальных множеств образующих ($\langle 2, 3, 7 \rangle = \{2, 4, 0\} \cdot \{3, 1\} \cdot \{7, 1\}$, $\langle 3, 6, 7 \rangle = \{3, 1\} \cdot \{6, 4, 0\} \cdot \{7, 1\}$) граф Кэли полугруппы $\mathbb{Z}_8$ не является планарным. Ознакомиться со всеми графами Кэли мультипликативных полугрупп классов вычетов по модулю до 24 включительно относительно всех возможных систем их образующих можно в материалах работы научного Алгебраического семинара ОмГПУ на сайте [6].

В данной работе описаны мультипликативные полугруппы вычетов с планарными графами Кэли. Полугруппы изоморфны, если их графы Кэли изоморфны, а для планарных графов проблема изоморфизма решается за полиномиальное время. То есть из представленных результатов следует существование полиномиальных алгоритмов для проблемы изоморфизма рассматриваемых полугрупп. Для описанных полугрупп оказалось, что проблема изоморфизма решается за время $O(1)$, достаточно сравнить модули, по которым формируются классы вычетов, являющиеся элементами анализируемых полугрупп. Но это лишь первый шаг, в других классах конечных полугрупп проблема не столь тривиальна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hopcroft J. E. and Wong J. K.* Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs (Preliminary Report) // Proc. STOC'74. Seattle, Washington, USA, 1974. P. 172–184.
2. *Kelarev A. V.* Labelled Cayley graphs and minimal automata // Australas. J. Comb. 2004. V. 30. P. 95–102.
3. *Kelarev A., Ryan J., and Yearwood J.* Cayley graphs as classifiers for data mining: the influence of asymmetries // Discrete Math. 2009. V. 309(17). P. 5360–5369.
4. *Zhu Y.* Generalized Cayley graphs of semigroups I // Semigroup Forum. 2012. V. 84. P. 131–143.
5. *Мартынов Л. М., Соломатин Д. В.* Полугруппы вычетов с циклическими группами обратимых элементов, допускающие планарные графы Кэли // Вестник Омского университета. 2012. № 2. С. 57–62.
6. <https://school.omgpu.ru/course/view.php?id=2219> — Научный Алгебраический семинар ОмГПУ на базе математического кружка «Мир Математики». 2024.
7. *Беленкова Ж. Т., Романьков В. А.* Плоские графы Кэли конечных групп. Препринт. Омск: ОмГУ, 1997. 8 с.
8. *Maschke H.* The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams // Amer. J. Math. 1896. V. 18. No. 2. P. 156–194.
9. *Соломатин Д. В.* Прямые произведения циклических моноидов, допускающие внешне-планарные графы Кэли и их обобщения // Вестник Тверского государственного университета. Сер. Прикладная математика. 2023. № 4. С. 43–56.
10. *Соломатин Д. В.* Строение полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли // Сиб. электрон. матем. изв. 2011. Т. 8. С. 191–212.

REFERENCES

1. *Hopcroft J. E. and Wong J. K.* Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs (Preliminary Report). Proc. STOC'74, Seattle, Washington, USA, 1974, pp. 172–184.
2. *Kelarev A. V.* Labelled Cayley graphs and minimal automata. Australas. J. Comb., 2004, vol. 30, pp. 95–102.

3. *Kelarev A., Ryan J., and Yearwood J.* Cayley graphs as classifiers for data mining: the influence of asymmetries. *Discrete Math*, 2009, vol. 309(17), pp. 5360–5369.
4. *Zhu Y.* Generalized Cayley graphs of semigroups I. *Semigroup Forum*, 2012, vol. 84, pp. 131–143.
5. *Martynov L. M. and Solomatin D. V.* Polugruppy vychetov s tsiklicheskimi gruppami obratimnykh elementov, dopuskayushchie planarnye grafy Keli [Semigroups of residues with cyclic groups of invertible elements admitting planar Cayley graphs]. *Herald of Omsk University*, 2012, vol. 2, pp. 57–62. (in Russian)
6. <https://school.omgpu.ru/course/view.php?id=2219> — Scientific Algebraic Seminar of Omsk State Pedagogical University, 2024.
7. *Belenkova Zh. T. and Roman'kov V. A.* Ploskie grafy Keli konechnykh grupp [Plane Cayley Graphs of Finite Groups]. Preprint, Omsk, OmSU, 1997. 8 p. (in Russian)
8. *Maschke H.* The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams. *Amer. J. Math.*, 1896, vol. 18, no. 2, pp. 156–194.
9. *Solomatin D. V.* Pryamye proizvedeniya ciklicheskih monoidov, dopuskayushchie vneshneplanarnye grafy Keli i ih obobshcheniya [Direct products of cyclic monoids admitting outerplanar Cayley graphs and their generalizations]. *Herald of Tver State University, Ser. Appl. Math.*, 2023, no. 4, pp. 43–56. (in Russian)
10. *Solomatin D. V.* Stroenie polugrupp, dopuskayushchikh vneshneplanarnye grafy Keli [Semigroups with outerplanar Cayley graphs]. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2011, vol. 8, pp. 191–212. (in Russian)