

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.172.3

DOI 10.17223/20710410/66/8

О СУЩЕСТВОВАНИИ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ОРГРАФОВ
С НАБОРОМ ПАРАМЕТРОВ (22, 9, 6, 3, 4)

В. А. Бызов, И. А. Пушкарев

*Вятский государственный университет, г. Киров, Россия***E-mail:** vbyzov@yandex.ru

Показано существование семейства сильно регулярных орграфов с набором параметров (22, 9, 6, 3, 4). Матрицы смежности найденных орграфов состоят из циркулянтных блоков 3×3 . Группой автоморфизмов всех найденных орграфов является группа $\mathbb{Z}_3$. Структура полученных орграфов описана при помощи понятий скелета и оснастки.

Ключевые слова: *сильно регулярный орграф, циркулянтная матрица, компактификация матриц, группа автоморфизмов, изоморфные орграфы.*

ON THE EXISTENCE OF DIRECTED STRONGLY REGULAR GRAPHS
WITH PARAMETERS (22, 9, 6, 3, 4)

V. A. Byzov, I. A. Pushkarev

Vyatka State University, Kirov, Russia

The paper shows the existence of the family of directed strongly regular graphs with parameters (22, 9, 6, 3, 4). The adjacency matrices of the found digraphs consist of 3×3 circulant blocks. The automorphism group of all the digraphs found is the group $\mathbb{Z}_3$. The structure of the resulting digraphs has been described using the concepts of skeleton and rigging.

Keywords: *directed strongly regular graph, circulant matrix, compactification of matrices, automorphism group, isomorphic digraphs.*

Введение

Дадим основные понятия и обозначения, необходимые для дальнейшего изложения.

В работе рассматриваются исключительно ориентированные графы (далее — орграфы) без петель и кратных дуг одного направления. Вершины таких орграфов будем нумеровать натуральными числами, начиная с единицы. Матрицы смежности будем формировать одним из стандартных для орграфов способов, а именно: писать единицу в i -й строке и j -м столбце, если в орграфе существует дуга, идущая из вершины i в вершину j . Все остальные элементы матрицы равны нулю.

Для единичной матрицы порядка n будем использовать обозначение I_n , для квадратной матрицы порядка n , целиком состоящей из единиц, — обозначение J_n . Запись $J_{k,l}$ обозначает матрицу $k \times l$, состоящую из единиц.

Понятие сильно регулярного орграфа введено А. М. Дювалем в работе [1] как ориентированное обобщение концепции сильно регулярных неориентированных графов [2]. Приведём два эквивалентных определения такого орграфа.

Определение 1. Сильно регулярным орграфом с набором параметров (v, k, t, λ, μ) называется орграф на v вершинах, удовлетворяющий следующему набору условий:

- 1) полустепени исхода и полустепени захода всех вершин равны k ;
- 2) для любой вершины x имеется ровно t путей вида $x \rightarrow z \rightarrow x$;
- 3) для любой дуги $x \rightarrow y$ есть ровно λ путей вида $x \rightarrow z \rightarrow y$;
- 4) если в орграфе нет дуги $x \rightarrow y$, то имеется ровно μ путей вида $x \rightarrow z \rightarrow y$.

Определение 2. Сильно регулярным орграфом с набором параметров (v, k, t, λ, μ) называется орграф, матрица смежности A которого удовлетворяет следующим соотношениям:

$$A^2 = tI_v + \lambda A + \mu(J_v - I_v - A); \quad (1)$$

$$AJ_v = J_v A = kJ_v. \quad (2)$$

Орграфы описанного типа будем обозначать $\text{dsrg}(v, k, t, \lambda, \mu)$. В работе [1] описан ряд необходимых условий, которым должны удовлетворять параметры сильно регулярного орграфа. Но, как и в случае сильно регулярных графов, есть большое число наборов параметров, для которых неизвестно, существует ли сильно регулярный орграф с данными параметрами. А. Э. Брауэр на сайте [3] систематизирует информацию о том, для каких наборов параметров орграфы существуют (и приводит эти орграфы), а для каких вопрос их существования пока открыт. До текущего момента наименьшим таким случаем (в смысле количества вершин) был вопрос существования орграфа $\text{dsrg}(22, 9, 6, 3, 4)$. В этой работе построено семейство орграфов с таким набором параметров.

Замечание 1. Отметим некоторую несогласованность в порядке перечисления параметров сильно регулярного орграфа разными авторами. В основополагающей работе [1] используется следующий порядок параметров: (v, k, μ, λ, t) . В других работах (например, [4]) параметры перечисляются в порядке (v, k, t, λ, μ) . Второй способ нам кажется более удачным, потому что он лучше согласуется с общепринятым обозначением сильно регулярных графов $\text{srg}(v, k, \lambda, \mu)$, поэтому в работе используются именно такие обозначения.

Циркулянтная матрица (или циркулянт) — это квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

то есть это матрица, в которой каждая строка, начиная со второй, получается циклическим сдвигом предыдущей строки на одну позицию вправо.

Множество циркулянтных матриц порядка n с элементами из $\mathbb{Z}$ (со стандартными операциями умножения и сложения) образует кольцо, которое изоморфно факторкольцу $\mathbb{Z}[x]/(x^n - 1)$ [5]. При этом изоморфизме матрице (3) соответствует многочлен $a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$.

Назовём *компактификацией* блочной матрицы M , состоящей из циркулянтов, замену всех циркулянтов на соответствующие им при описанном изоморфизме многочлены. Полученную матрицу будем обозначать $M(x)$. Компактификация матриц согласована с операциями сложения и умножения матриц, т. е. если квадратные блочные матрицы M_1 , M_2 , M_3 и M_4 одного порядка, состоящие из циркулянтов $m \times m$, такковы, что $M_3 = M_1 + M_2$ и $M_4 = M_1 \cdot M_2$, то $M_3(x) \equiv M_1(x) + M_2(x) \pmod{x^m - 1}$ и $M_4(x) \equiv M_1(x) M_2(x) \pmod{x^m - 1}$.

В качестве примера рассмотрим матрицу смежности S графа Шрикханде [2, 6], который является сильно регулярным с набором параметров $(16, 6, 2, 2)$. При подходящей нумерации вершин она может быть представлена в следующем виде:

$$S = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Матрица S может быть компактифицирована в матрицу

$$S(x) = \begin{pmatrix} 0 & x^2 + x^3 & x^2 + x^3 & x + x^3 \\ x + x^2 & 0 & x + x^3 & x^2 + x^3 \\ x + x^2 & x + x^3 & 0 & 1 + x \\ x + x^3 & x + x^2 & 1 + x^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом исходная матрица удовлетворяет уравнению $S^2 = 4I_{16} + 2J_{16}$, следовательно, матрица $S(x)$ удовлетворяет сравнению

$$S^2(x) \equiv 4I_4 + 2(1 + x + x^2 + x^3)J_4 \pmod{x^4 - 1}.$$

1. Поиск орграфов $\text{dsrg}(22, 9, 6, 3, 4)$

В соответствии с определением 2 надо найти бинарную квадратную матрицу порядка 22, удовлетворяющую условиям (1) и (2). Полный перебор по всем таким матрицам занял бы необозримо долгое время, поэтому будем осуществлять поиск только среди матриц, имеющих специальный вид. Идея описываемого подхода позаимствована из работы О. Гриценко [7].

Будем искать матрицу смежности A орграфа $\text{dsrg}(22, 9, 6, 3, 4)$ в виде (4). Первый столбец и первая строка выбраны таким образом, чтобы автоматически выполнялись первые два условия из определения 1, в них на месте многоточий в приведённой записи стоят нули. Матрицы K_{ij} ($1 \leq i, j \leq 7$) являются циркулянтами третьего порядка:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & & & & & & & & & & & \\ 1 & & K_{11} & & & K_{12} & & & K_{13} & & \dots & & & K_{17} \\ 1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & & & & & & \\ 1 & & K_{21} & & & K_{22} & & & K_{23} & & \dots & & & K_{27} \\ 1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 0 & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & K_{31} & & & K_{32} & & & K_{33} & & \dots & & & K_{37} \\ 0 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & & & & & & \\ 1 & & K_{41} & & & K_{42} & & & K_{43} & & \dots & & & K_{47} \\ 1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \hline 0 & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & K_{71} & & & K_{72} & & & K_{73} & & \dots & & & K_{77} \\ 0 & & & & & & & & & & & & & \end{array} \right) \quad (4)$$

Для искомой матрицы A условия (1) и (2) примут следующий вид:

$$A^2 + A = 2I_{22} + 4J_{22}; \quad (5)$$

$$AJ_{22} = J_{22}A = 9J_{22}. \quad (6)$$

Запишем матрицу A в виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ D & C \end{pmatrix},$$

где C — подматрица матрицы A , полученная вычёркиванием первой строки и первого столбца; $B = (11 \dots 10 \dots 0)$ — первая строка матрицы A без элемента A_{11} ; $D = (11 \dots 10001110 \dots 0)^T$ — первый столбец матрицы A без элемента A_{11} . При таком представлении равенство (5) равносильно системе следующих четырёх уравнений:

$$\begin{cases} BD = 6, \\ BC + B = 4J_{1,21}, \\ CD + D = 4J_{21,1}, \\ DB + C^2 + C = 2I_{21} + 4J_{21}. \end{cases} \quad (7)$$

Первое равенство в системе (7) выполняется автоматически, это следует из вида матриц B и D .

Из второго равенства в (7) следует, что

$$\sum_{i=1}^9 C_{ij} = \begin{cases} 3, & \text{если } j \leq 9, \\ 4, & \text{если } j \geq 10. \end{cases} \quad (8)$$

Поскольку искомая матрица удовлетворяет соотношению $AJ_{22} = 9J_{22}$, из (8) следует

$$\sum_{i=10}^{21} C_{ij} = 5 \quad \text{при } 1 \leq j \leq 21. \quad (9)$$

Из третьего равенства в (7) получаем

$$\sum_{j \in \{1, \dots, 12\} \setminus \{7, 8, 9\}} C_{ij} = \begin{cases} 3, & \text{если } i \in \{1, \dots, 12\} \setminus \{7, 8, 9\}, \\ 4 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (10)$$

Из равенств (6) и (10) следует, что

$$\sum_{j \notin \{1, \dots, 12\} \setminus \{7, 8, 9\}} C_{ij} = 5 \quad \text{при } 1 \leq i \leq 21. \quad (11)$$

Рассмотрим матрицу H_7 , имеющую следующий вид:

$$H_7 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Введём обозначение: $H_{21} = 4J_{21} - DB$. Прямым вычислением можно убедиться, что матрица H_{21} получается заменой в матрице H_7 всех чисел 3 на блоки $3J_3$ и всех чисел 4 на блоки $4J_3$.

Последнее уравнение системы (7) можно переписать в виде

$$C^2 + C = 2I_{21} + H_{21}. \quad (12)$$

Применим описанный во введении метод. Так как матрица C состоит из 7×7 циркулянтных блоков третьего порядка, то она может быть компактифицирована в матрицу $C(x)$ с элементами из $\mathbb{Z}[x]/(x^3 - 1)$. Уравнение (12) преобразуется в следующее:

$$C^2(x) + C(x) \equiv 2I_7 + (1 + x + x^2)H_7 \pmod{x^3 - 1}. \quad (13)$$

Так как $x = 1$ является корнем многочлена $x^3 - 1$, то при подстановке $x = 1$ в (13) получаем следующее верное равенство:

$$C^2(1) + C(1) = 2I_7 + 3H_7. \quad (14)$$

Так как все коэффициенты многочлена $C(x)$ являются нулями или единицами, то элементы матрицы $C(1)$ являются целыми числами от 0 до 3. Диагональные элементы матрицы $C(1)$ не больше двух, потому что в матрице смежности искомого орграфа на диагонали стоят нули.

Авторами написана программа, которая осуществляет поиск всех матриц седьмого порядка с элементами от 0 до 3 (диагональными — от 0 до 2), удовлетворяющих условиям (14) и (8)–(11), переписанным для компактифицированной матрицы. Для реализации поиска использована библиотека программирования в ограничениях Artelys Kalis [8].

В результате поиска получено 10338 матриц, подходящих на роль матрицы $C(1)$. Заметим, что при наличии матрицы $C(1)$ область поиска матрицы смежности A искомого орграфа $\text{dsrg}(22, 9, 6, 3, 4)$ значительно сужается: появляются ограничения на суммы элементов в строках циркулянтных блоков матрицы A . Исходя из этого, список

матриц $C(1)$ был сокращён до 144 матриц, для которых может быть найдена матрица A , удовлетворяющая условиям (5) и (6).

Для каждой из этих 144 матриц $C(1)$ программно были найдены все подходящие матрицы смежности A . Таких матриц получилось 384. В следующем пункте проанализированы полученные орграфы.

Запуск программы осуществлялся на компьютере с процессором Intel Core i5-7400 (3,00 ГГц), объём оперативной памяти равен 32 ГБ. Распределение этапов поиска по времени выглядит следующим образом:

- 1) поиск 10338 матриц, подходящих на роль матрицы $C(1)$, — 125 часов;
- 2) поиск матриц A для найденных матриц $C(1)$ — 40 часов.

Замечание 2. Стоит отметить, что при помощи разработанной программы были найдены не все возможные матрицы смежности орграфа $\text{dsrg}(22, 9, 6, 3, 4)$, у которых основная часть состоит из циркулянтов 3×3 , а только такие, у которых первая строка и первый столбец имеют заданный вид (см. (4)).

2. Анализ построенных примеров на изоморфность

Приведём в качестве примера одну из матриц смежности, найденных при помощи программы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Разработанная программа позволяет построить целое семейство орграфов требуемого вида. При этом среди построенных орграфов будет довольно много пар изоморфных, и задача выяснения количества построенных орграфов с точностью до изоморфизма не вполне тривиальна. Перебирать все возможные биекции множеств вершин в поисках изоморфизма непрактично и не поучительно, некоторые особенности структуры построенных орграфов позволяют сделать это более эффективно.

Определение 3.

- 1) По построению группа автоморфизмов каждого найденного орграфа содержит (при надлежащей нумерации вершин) перестановку

$$(1)(2, 3, 4)(5, 6, 7)(8, 9, 10)(11, 12, 13)(14, 15, 16)(17, 18, 19)(20, 21, 22).$$

Фактически, во всех построенных примерах группа автоморфизмов орграфа совпадает с группой $\mathbb{Z}_3$, порождённой этой перестановкой.

- 2) Соответственно множество вершин орграфа разбивается на восемь подмножеств: одно — одноэлементное (эту вершину будем называть *особой*) и семь трёхэлементных (будем называть их *этажами*).
- 3) Множество дуг, ведущих с одного этажа на другой, инвариантно относительно группы перестановок.
- 4) Одним из вариантов множеств дуг, допускаемых предыдущим пунктом, является *полный переход*, когда из каждой вершины одного этажа идёт ровно по одной дуге в каждую вершину другого этажа.
- 5) Полным переходом назовём также ситуацию, когда вместо одного из этажей фигурирует одноэлементное множество из особой вершины (в этом случае дуг не девять, а три).
- 6) Дополнительно отметим, что «внутри» этажа также могут присутствовать три или шесть дуг орграфа (цикл или два встречных цикла), но множество дуг внутри этажа может быть и пустым.
- 7) *Скелетом* орграфа назовём орграф с восемью вершинами, соответствующими множествам вершин, семь из которых могут быть раскрашены в четыре цвета, соответствующие наличию или отсутствию на этаже внутренних дуг. Дугами этого орграфа являются (в случае наличия таковых) полные переходы.
- 8) Орграф с теми же вершинами и (неформально говоря) всеми остальными дугами рассматриваемого орграфа (существует несколько вариантов *неполных* переходов с одного этажа на другой, которые будем обозначать как разные цвета дуг) назовём *оснасткой*.

Найденные при помощи программы орграфы разбиваются на 16 групп, каждая группа состоит из 24 изоморфных орграфов. На рис. 1–8 приведены скелеты и оснастки, соответствующие восьми группам (на оснастках особая вершина не изображена, поскольку она является изолированной). Остальные восемь орграфов получаются путём смены направлений всех дуг.

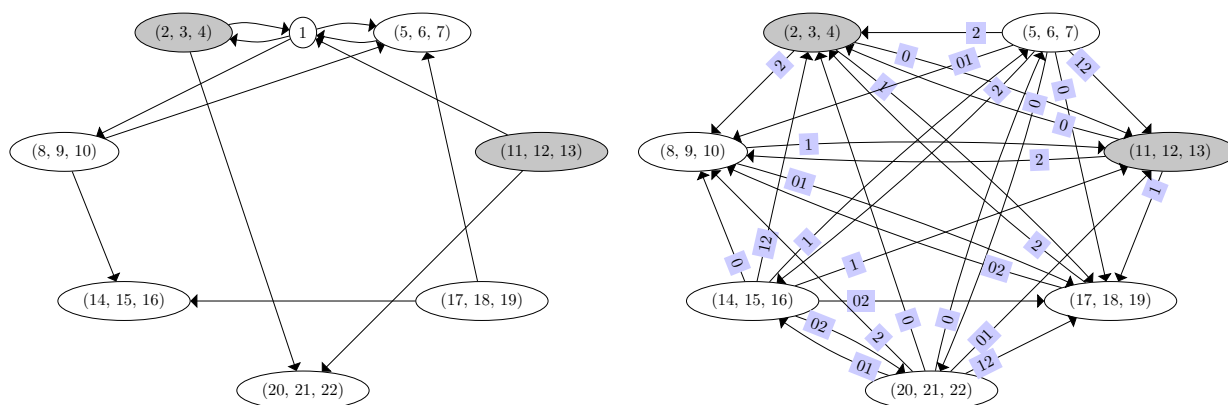


Рис. 1. Скелет и оснастка первого орграфа

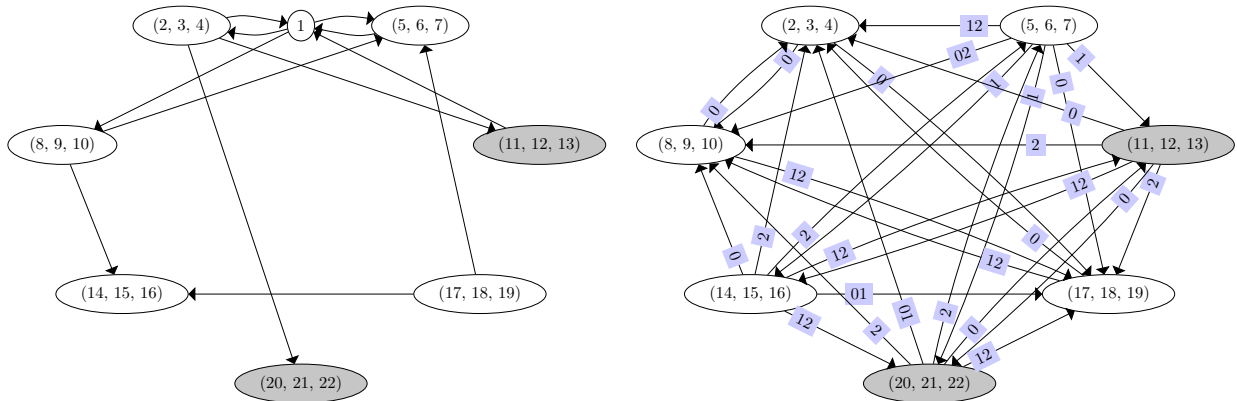


Рис. 2. Скелет и оснастка второго орграфа

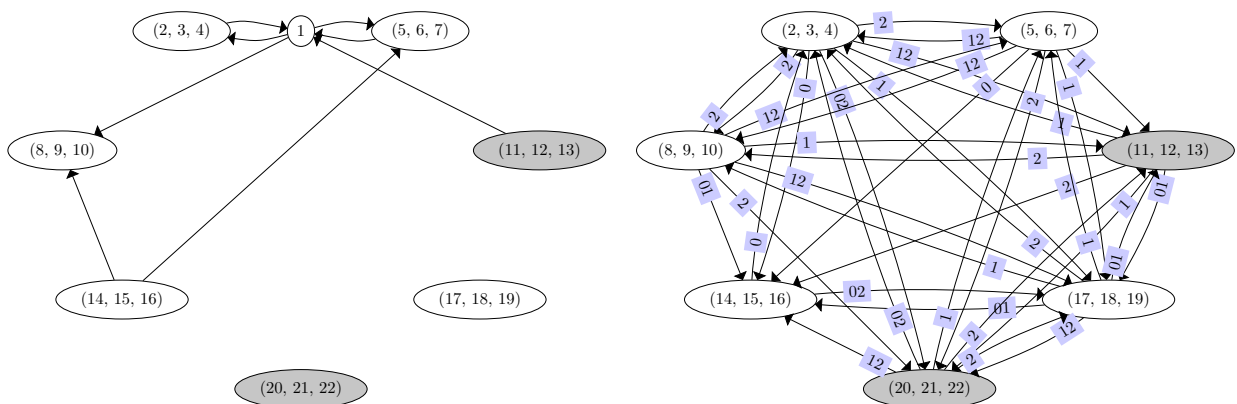


Рис. 3. Скелет и оснастка третьего орграфа

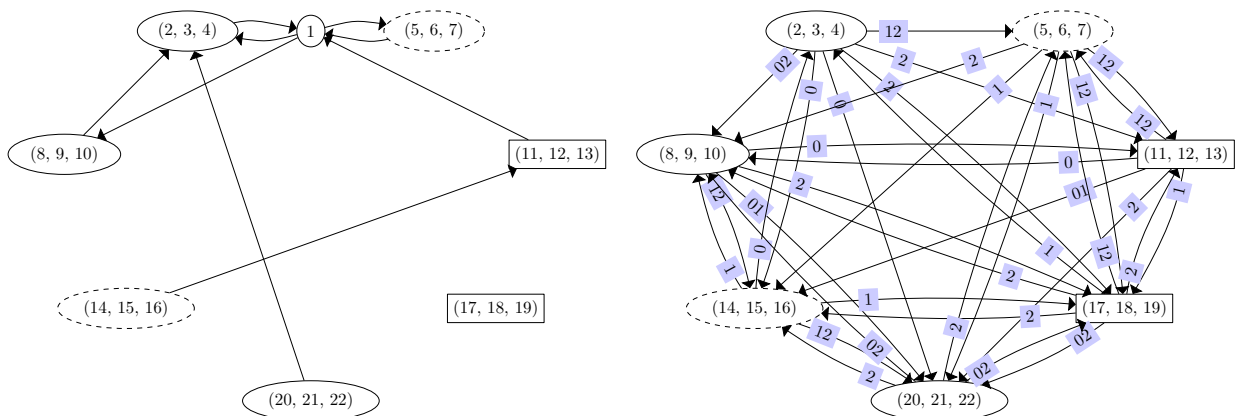


Рис. 4. Скелет и оснастка четвёртого орграфа

На рисунках используются следующие обозначения:

- 1) Если внутри этажа ни одна вершина не соединена с другой, то этаж изображается в виде незакрашенного эллипса со сплошной границей (например, $(5, 6, 7)$ на рис. 1).
- 2) Если внутри этажа каждые две вершины соединены парой дуг, то этаж изображается в виде закрашенного эллипса (например, $(2, 3, 4)$ на рис. 1).

- 3) Если на этаже находится один цикл $(3k + 2) \rightarrow (3k + 3) \rightarrow (3k + 4) \rightarrow (3k + 2)$, $k \in \{0, 2, \dots, 6\}$, то этаж изображается в виде эллипса с пунктирной границей (например, (5, 6, 7) на рис. 4).
- 4) Если на этаже находится один цикл $(3k + 4) \rightarrow (3k + 3) \rightarrow (3k + 2) \rightarrow (3k + 4)$, $k \in \{0, 2, \dots, 6\}$, то этаж изображается в виде прямоугольника (например, (11, 12, 13) на рис. 4).
- 5) Если подпись на дуге $(a_0, a_1, a_2) \rightarrow (b_0, b_1, b_2)$ в оснастке содержит цифру $s \in \{0, 1, 2\}$, то в исходном орграфе от каждой вершины a_i идёт дуга к вершине $b_{(i+s) \bmod 3}$ при $i \in \{0, 1, 2\}$. Например, в оснастке на рис. 1 от этажа (14, 15, 16) идёт дуга к этажу (2, 3, 4) с подписью 12, что означает наличие в исходном орграфе дуг $14 \rightarrow 3$, $15 \rightarrow 4$, $16 \rightarrow 2$ и $14 \rightarrow 4$, $15 \rightarrow 2$, $16 \rightarrow 3$.

Скелет и оснастка графа, матрица смежности которого приведена в (15), изображены на рис. 1.

Отметим, что скелет орграфа не определяет однозначно его оснастку: пятый и шестой орграфы (рис. 5 и 6) имеют одинаковые скелеты, но разные оснастки; одинаковые скелеты также у седьмого и восьмого орграфов (рис. 7 и 8).

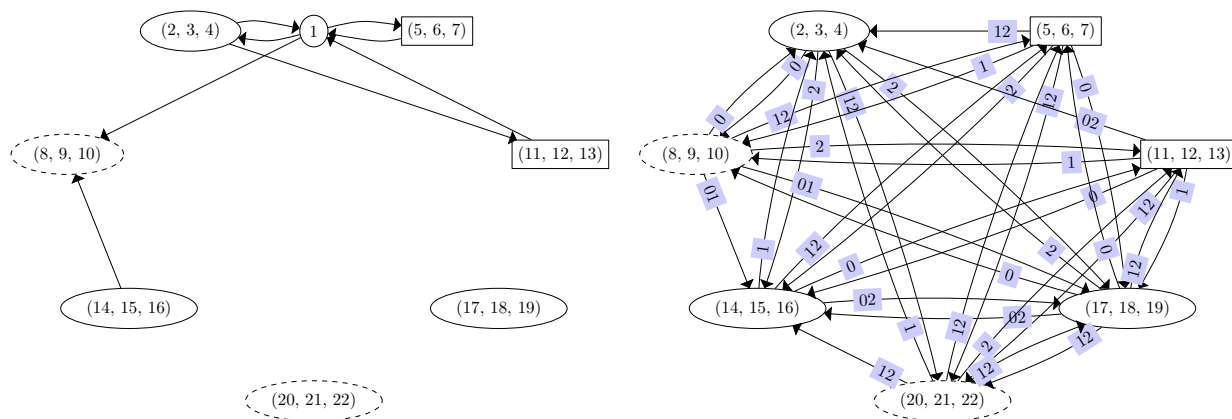


Рис. 5. Скелет и оснастка пятого орграфа

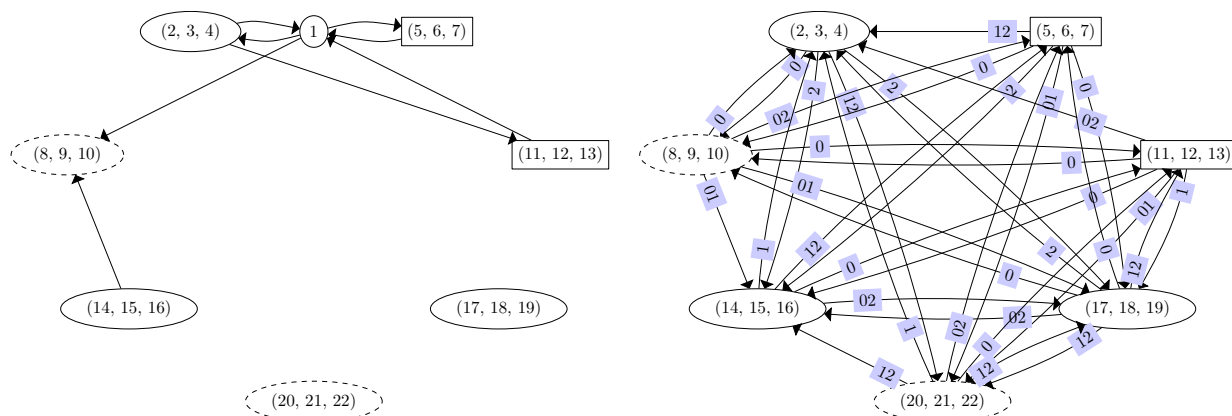


Рис. 6. Скелет и оснастка шестого орграфа

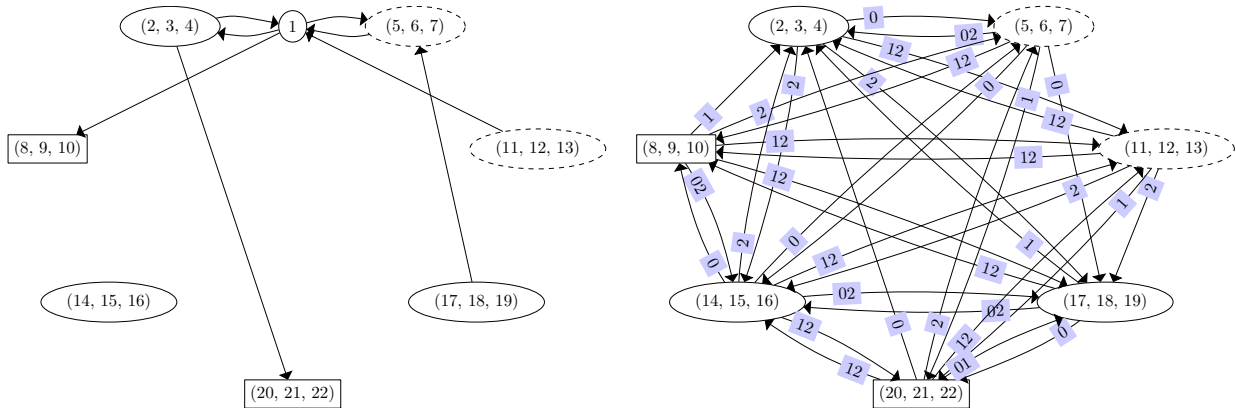


Рис. 7. Скелет и оснастка седьмого орграфа

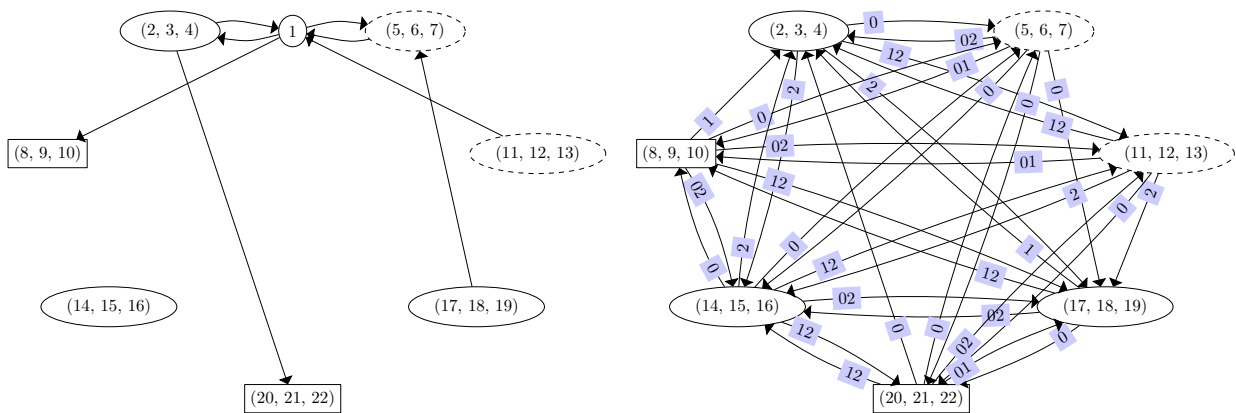


Рис. 8. Скелет и оснастка восьмого орграфа

Замечание 3. Исследование найденных графов на изоморфность было проведено и программно при помощи функции `is_isomorphic` из библиотеки NetworkX [9]. Но авторам кажется, что теоретический анализ структуры графов более информативен, чем простая констатация их количества при помощи программы. Главная цель теоретического анализа — построение системы инвариантов, аналогичные которой могут встретиться и в других задачах.

Замечание 4. В [1] доказано: если оргграф G является сильно регулярным с набором параметров (v, k, t, λ, μ) , то оргграф G' , являющийся дополнением G , также сильно регулярный с набором параметров $(v, v - k - 1, v - 2k + t - 1, v - 2k + \mu - 2, v - 2k + \lambda)$ (матрица смежности графа G' равна $A' = J_v - I_v - A$, где A — матрица смежности графа G). Из этого следует, что в работе автоматически построено семейство сильно регулярных оргграфов с набором параметров $(22, 12, 9, 6, 7)$.

Заключение

В работе построено семейство сильно регулярных оргграфов с набором параметров $(22, 9, 6, 3, 4)$, вопрос о существовании которых ранее считался открытым. Построение матрицы основано на идее О. Гриценко [7]. Кроме того, предложена некоторая естественная структура, позволяющая решить вопрос об их изоморфности простым, интуитивно наглядным способом (не требующим переборной программы). Структурная декомпозиция оказалась нетривиальной в том смысле, что первый структурный элемент (скелет) не всегда определяет второй (оснастку) однозначно, и полезной в том

смысле, что (теоретически) позволяет вручную проверить соответствие орграфа требуемым ограничениям.

Очевидно, что описанная конструкция (разбиение части матрицы без первой строки и первого столбца на циркулянтные блоки) применима только для наборов параметров (v, k, t, λ, μ) , для которых числа $v - 1$, k , t делятся на размер блока. Эта ситуация нередко встречается среди нерешённых на данный момент задач, поэтому метод, использованный авторами, потенциально применим и к ним, однако о других продвижениях такого типа авторам неизвестно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Duval A. M.* A directed graph version of strongly regular graphs // J. Combinat. Theory. Ser. A. 1988. V. 47. No. 1. P. 71–100.
2. *Brouwer A. E. and Maldeghem H. V.* Strongly Regular Graphs. Cambridge: Cambridge University Press, 2022. 425 p.
3. <https://homepages.cwi.nl/~aeb/math/dsrg/dsrg.html> — Parameters of directed strongly regular graphs. 2024.
4. *Brouwer A. E., Crnkovic D., and Svob A.* A Construction of Directed Strongly Regular Graphs with Parameters $(63, 11, 8, 1, 2)$. <http://arxiv.org/abs/2404.03100v2>. 2024.
5. *Kra I. and Simanca S. R.* On circulant matrices // Notices Amer. Math. Soc. 2012. V. 59. No. 3. P. 368–377.
6. *Shrikhande S. S.* The uniqueness of the L_2 association scheme // Ann. Math. Statistics. 1959. V. 30. No. 3. P. 781–798.
7. *Gritsenko O.* On Strongly Regular Graph with Parameters $(65; 32; 15; 16)$. <https://arxiv.org/abs/2102.05432>. 2021.
8. <https://www.artelys.com/solvers/kalis/> — Artelys Kalis. 2024.
9. *Hagberg A. A., Schult D. A., and Swart P. J.* Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX // Proc. SciPy 2008. Pasadena, California, August 19–24, 2008. P. 11–15.

REFERENCES

1. *Duval A. M.* A directed graph version of strongly regular graphs. J. Combinat. Theory, Ser. A, 1988, vol. 47, no. 1, pp. 71–100.
2. *Brouwer A. E. and Maldeghem H. V.* Strongly Regular Graphs. Cambridge, Cambridge University Press, 2022. 425 p.
3. <https://homepages.cwi.nl/~aeb/math/dsrg/dsrg.html> — Parameters of directed strongly regular graphs, 2024.
4. *Brouwer A. E., Crnkovic D., and Svob A.* A Construction of Directed Strongly Regular Graphs with Parameters $(63, 11, 8, 1, 2)$. <http://arxiv.org/abs/2404.03100v2>, 2024.
5. *Kra I. and Simanca S. R.* On circulant matrices. Notices Amer. Math. Soc., 2012, vol. 59, no. 3, pp. 368–377.
6. *Shrikhande S. S.* The uniqueness of the L_2 association scheme. Ann. Math. Statistics, 1959, vol. 30, no. 3, pp. 781–798.
7. *Gritsenko O.* On Strongly Regular Graph with Parameters $(65; 32; 15; 16)$. <https://arxiv.org/abs/2102.05432>, 2021.
8. <https://www.artelys.com/solvers/kalis/> — Artelys Kalis, 2024.
9. *Hagberg A. A., Schult D. A., and Swart P. J.* Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. Proc. SciPy 2008, Pasadena, California, August 19–24, 2008, pp. 11–15.