

УДК 519.87:519.6:519.178

DOI 10.17223/20710410/66/9

ОТКРЫТИЕ БЕСКОНЕЧНЫХ СЕМЕЙСТВ ОПТИМАЛЬНЫХ ДВУХКОНТУРНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ СЕТЕЙ С ЗАДАННЫМ ШАБЛОНОМ ОБРАЗУЮЩИХ¹

Э. А. Монахова, О. Г. Монахов

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

E-mail: emilia@rav.sccc.ru

Оптимальные кольцевые циркулянтные сети степени четыре рассматриваются как модели надёжных сетей связи с минимальными задержками для сетей на кристалле и мультипроцессорных кластерных систем. Проведён поиск аналитически задаваемых бесконечных семейств оптимальных графов на основе анализа базы данных оптимальных описаний двухконтурных кольцевых циркулянтных сетей. Путём интеграции визуализации данных и аналитических описаний оптимальных графов построены и теоретически обоснованы новые бесконечные семейства оптимальных сетей с линейной образующей вида $s = 4d + \alpha$, где d — диаметр графа. Предложенный подход получения семейств оптимальных сетей является новым и представляет интерес для дальнейшего изучения свойств оптимальных двухконтурных кольцевых сетей.

Ключевые слова: *датасет оптимальных сетей, неориентированные двухконтурные кольцевые сети, циркулянтные сети, минимальный диаметр.*

DISCOVERY OF INFINITE FAMILIES OF OPTIMAL DOUBLE-LOOP NETWORKS WITH A GIVEN TEMPLATE OF GENERATORS

E. A. Monakhova, O. G. Monakhov

*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
Novosibirsk, Russia*

Optimal ring circulant networks of degree four are considered as models of reliable communication networks with minimal delays for networks on a chip and multiprocessor cluster systems. Based on the analysis of a data set of optimal descriptions of double-loop networks, a search has been carried out for analytically determined infinite families of optimal graphs. By integrating data visualization and analytical descriptions of optimal graphs, new infinite families of optimal networks with a linear generator of the form $s = 4d + \alpha$, where d is the diameter of the graph, have been constructed and theoretically justified. The proposed approach to obtaining families of optimal networks is new and is of interest for further studies of the properties of optimal double-loop networks.

Keywords: *dataset of optimal networks, undirected double-loop networks, circulant networks, minimum diameter.*

¹Работа выполнена при финансовой поддержке бюджетного проекта ИВМиМГ СО РАН (код проекта FWNM-2022-0005).

Введение

Двухконтурные кольцевые сети (циркулянтные сети степени четыре) находят широкое применение при проектировании телекоммуникационных сетей, построении суперкомпьютеров, в прикладных задачах криптографии, а также исследуются как сети связи в сетях на кристалле в качестве замены традиционно используемых в них двумерных решёток и торов, имеющих существенно большие задержки при одинаковом числе узлов [1–8]. Удобство таких сетей обусловлено свойствами симметричности, высокой связности и масштабируемости, что позволяет применять их в центрах коллективного пользования, беспроводных сенсорных и нейронных сетях [9–12].

Двухконтурная кольцевая циркулянтная сеть (undirected double-loop network) представляет собой неориентированный граф $C(N; 1, s)$, $1 < s < N/2$, с множеством вершин $V = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ и рёбер $E = \{(i, j) : i - j \equiv \pm 1 \pmod{N}, i - j \equiv \pm s \pmod{N}\}$, где $1, s$ — образующие; N — порядок графа. Пример двухконтурной кольцевой сети с числом узлов $N = 18$ представлен на рис. 1. Задержки при передаче информации в сети и организации коллективных обменов и настройки в системе оцениваются диаметром графа связей (длиной максимального кратчайшего пути между любыми двумя узлами) [3, 4, 13]. Наибольший интерес представляют такие сети, диаметр которых совпадает с теоретической нижней границей диаметра либо отличается от неё на единицу. Данные сети носят названия оптимальных и субоптимальных соответственно. Не меньший интерес для исследователей представляет определение аналитических формул для описания оптимальных сетей (семейств оптимальных сетей). Точная нижняя граница диаметра циркулянтов степени четыре получена в [14, 15]: $D(N) = \lceil (-1 + \sqrt{2N - 1})/2 \rceil$. Известна верхняя граница максимально возможного числа вершин в циркулянтных графах степени четыре с диаметром $d \geq 1$: $N_d = 2d^2 + 2d + 1$.

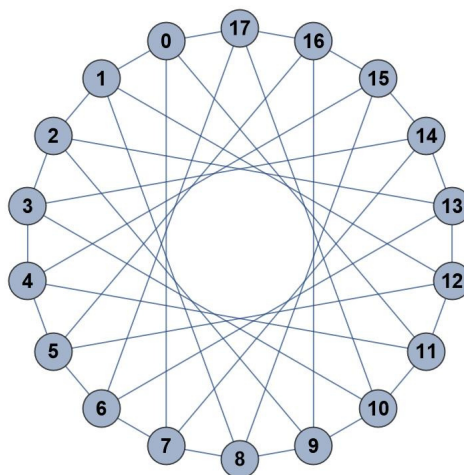


Рис. 1. Двухконтурная кольцевая сеть $C(18; 1, 7)$

Далее *оптимальным* называется граф $C(N; 1, s)$ диаметра $d(C(N; 1, s)) = D(N)$, *субоптимальным* — граф диаметра $d(C(N; 1, s)) = D(N) + 1$. В [16] выдвинута следующая гипотеза: по крайней мере, субоптимальные графы вида $C(N; 1, s)$ существуют для любых N . Справедливость гипотезы проверена для всех $N \leq 8 \cdot 10^6$, а также показано, что при $N \leq 8 \cdot 10^6$ число значений N , для которых нет оптимальных графов, не превышает 6 %.

Оптимальное семейство циркулянтных сетей степени четыре и любого порядка $N > 4$ найдено в [14] и переоткрыто в [15, 17]: $\{C(N; d, d + 1), d \geq 1\}$, где образую-

щая d — ближайшее целое к $(-1 + \sqrt{2N-1})/2$. В [14] доказано, что все графы семейства имеют одновременно минимальный диаметр и среднее расстояние между вершинами. Для данного семейства сетей известны аналитические алгоритмы парной маршрутизации с константной оценкой сложности [3, 17, 18]. Отметим, что для всех $N_{d-1} < N \leq 2d^2 + 1$ оптимальным является также описание $(N; d-1, d)$ [3].

Из описаний циркулянтных графов вида $C(N; d, d+1)$ или $C(N; d-1, d)$ можно получить изоморфные описания путём умножения их образующих на элементы $t \leq \lfloor N/2 \rfloor$ приведённой системы вычетов по модулю N . Но такой метод не может быть использован для получения оптимальных описаний графов $C(N; 1, s)$ при любых N , поскольку для некоторых N они либо не существуют, либо существуют, но не изоморфны описаниям указанных видов.

1. Проблема поиска семейств оптимальных двухконтурных кольцевых сетей

В работе [19] дан подробный анализ существующих в литературе подходов к построению бесконечных семейств оптимальных (или субоптимальных) графов $C(N; 1, s)$, а также вопросов, связанных с применимостью их как моделей сетей связи многопроцессорных систем. Первый результат аналитического решения проблемы получен в [20]:

Теорема 1 [20]. Циркулянты $C(2d^2 + 2d + 1; 1, 2d + 1)$ оптимальны при любых целых $d \geq 1$.

Это семейство переоткрыто в [21, 22] и активно исследовалось для различных применений (см. обзор в [3]). В [23] данное семейство рассмотрено в качестве топологии сетей на кристалле. В большинстве работ, посвящённых поиску бесконечных семейств оптимальных графов $C(N; 1, s)$, используются теоретические верхние оценки диаметра или образующих [16, 24–29]. В [30] реализованы генетические алгоритмы поиска семейств и построены семейства оптимальных графов с линейными образующими $s = 4d \pm \alpha$ и $s = 6d \pm \alpha$. В [16, 24, 27, 29, 31] найдены или исследуются семейства графов с линейными образующими $s = 2d \pm \alpha$, где d — диаметр; в [32–34] — семейства графов с квадратичными образующими от диаметра. Для ряда семейств графов с образующей $s = 4d \pm \alpha$ найдены эффективные алгоритмы маршрутизации [27, 33], а также совершенные доминирующие множества вершин (perfect dominating set) [31].

В [35] впервые построен датасет оптимальных графов $C(N; 1, s)$ до 50 тысяч вершин (<https://github.com/mila0411/Double-loop-networks/tree/main/Dataset>). Точки (N, s, d) датасета соответствуют параметрам описаний оптимальных графов: N — порядок графа; s — образующая; d — диаметр. Для каждого значения N показаны все образующие $s \leq N/2$, которые определяют граф минимально возможного диаметра при данном N .

Первоначальный анализ датасета с целью открытия аналитически описываемых семейств оптимальных графов проведён в [35] с помощью подхода, основанного на шаблонах с недоопределёнными коэффициентами и использующего для поиска перспективных шаблонов алгоритмы метаэвристического поиска. В [19] рассмотрен другой метод автоматизации поиска семейств оптимальных графов в датасете, основанный на последовательном делении параметров оптимальных графов для построения коэффициентов полиномов их порядков и образующих, и разработаны алгоритмы поиска семейств оптимальных графов, отличающихся видом образующих с линейной или квадратичной функцией от диаметра. Основной идеей алгоритмов является определение параметров кривой, которая описывает семейство оптимальных графов $C(N; 1, s)$, с последующей проверкой принадлежности других точек датасета этой кривой. Прин-

ципы, положенные в основу этих алгоритмов, были успешно применены для автоматизированного поиска семейств в датасете другого класса графов — оптимальных хордальных кольцевых сетей [36].

В настоящей работе предложен новый подход к решению проблемы, который использует объединение аналитических результатов, полученных с помощью предложенного ранее алгоритма поиска, с графической визуализацией данных из датасета. Далее этот подход мы реализуем на множестве оптимальных графов, имеющих линейные образующие определённого вида.

2. Поиск семейств оптимальных графов с заданным шаблоном образующих

На рис. 2 в координатах (N, s) представлен фрагмент графической визуализации данных из датасета с оптимальными образующими $s \leq 500$. На полученном графике наблюдается интересная картина. Оптимальные образующие линейного вида от диаметра разбились на отдельные ярко выраженные полосы (сегменты), а именно: на нижней полосе точек отображены графы с линейными образующими вида $s = 2d \pm \alpha$, на следующем сегменте — графы с образующими $s = 4d \pm \alpha$ и далее выделяются отдельно сегменты для графов с $s = 6d \pm \alpha$ и $s = 8d \pm \alpha$. Таким образом, обнаружено свойство устойчивого существования образующих вида $s = kd \pm \alpha$ оптимальных графов с чётными коэффициентами $k \geq 2$. С другой стороны, отсутствуют устойчивые семейства оптимальных описаний с нечётными значениями k . Дополнительной проверкой существования в датасете оптимальных образующих вида $s = 3d \pm \alpha$, $s = 5d \pm \alpha$ и $s = 7d \pm \alpha$ мы получили, что при малых диаметрах существуют такие образующие, но при росте N они быстро заканчиваются и не входят в устойчивый режим. Поэтому для поиска семейств оптимальных графов с линейными образующими рассматриваются образующие $s = kd + \alpha$, где k принимает только чётные значения, а α — любые целые значения с $|\alpha| < d$.

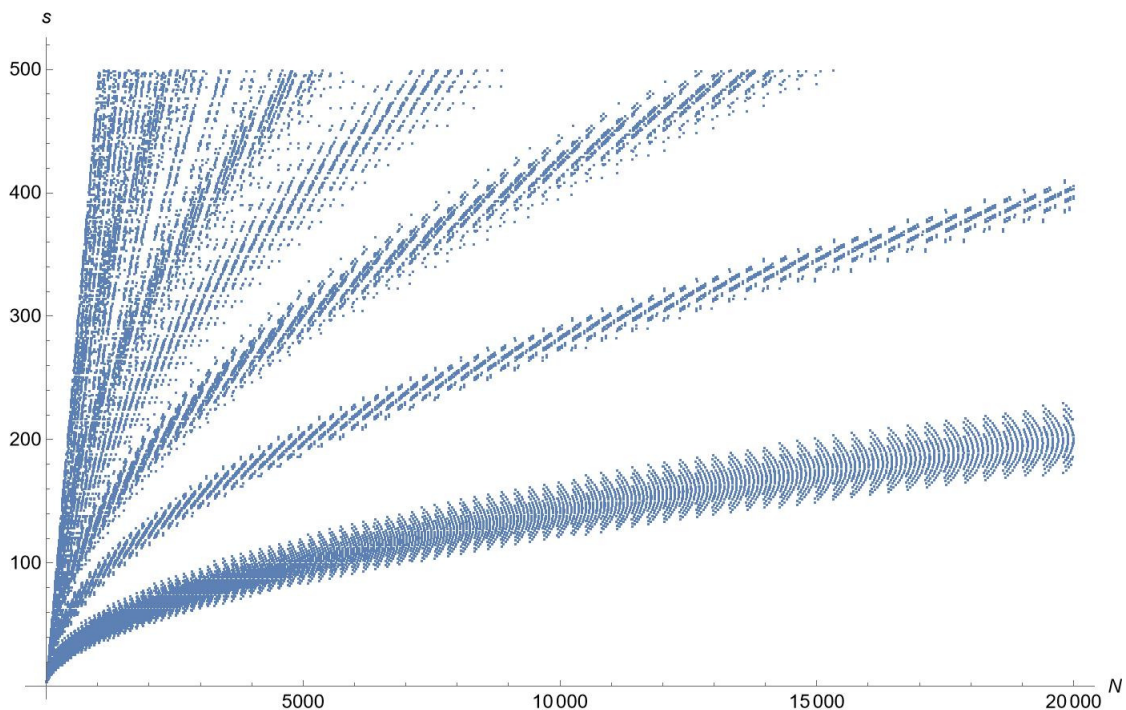


Рис. 2. Точки датасета для графов $C(N; 1, s)$, $s \leq 500$

Множество оптимальных двухконтурных кольцевых циркулянтов с образующими $s = 2d + \alpha$ аналитически описано Д. Тзвиели [16, теоремы 4.2, 4.6]. В настоящей работе будем исследовать в датасете существование множества оптимальных графов с образующими $s = 4d + \alpha$.

В [19] приведён алгоритм поиска семейств двухконтурных кольцевых графов с линейными образующими, который был применён к поиску семейств оптимальных графов с линейными образующими $s = 4d + \alpha$, $|\alpha| < d$. Для решения задачи отдельно рассмотрены поиск графов с чётными и нечётными диаметрами, при этом использовано значение периода повторяемости членов семейства $p = 2$. После этого для дальнейшего исследования отобраны аналитические описания тех семейств, которые соответствуют устойчивому режиму повторяемости на большом диапазоне диаметров. Ниже представлены списки полученных аналитических описаний 72 семейств оптимальных графов, отдельно для чётных и нечётных диаметров. Элементы списков упорядочены в порядке возрастания параметра α .

Список семейств оптимальных графов $C(N; 1, s)$ с чётным диаметром d :

$$(s, N) \in \{(4d - 16, 2d^2 - 3d/2 - 25), (4d - 14, 2d^2 - 3d/2 - 20), (4d - 14, 2d^2 - d/2 - 22), \\ (4d - 12, 2d^2 - d/2 - 17), (4d - 8, 2d^2 - 3d/2 - 5), (4d - 8, 2d^2 - 3d/2 - 4), \\ (4d - 7, 2d^2 - d - 4), (4d - 6, 2d^2 - 3d/2 - 3), (4d - 6, 2d^2 - 3d/2 - 2), \\ (4d - 6, 2d^2 - d/2 - 3), (4d - 5, 2d^2 - 3), (4d - 5, 2d^2 - d - 2), (4d - 4, 2d^2 - d/2 - 2), \\ (4d - 4, 2d^2 + d/2 - 2), (4d - 3, 2d^2 - 1), (4d - 2, 2d^2 + d/2 - 1), (4d - 2, 2d^2 + 3d/2 - 1), \\ (4d, 2d^2 - 3d/2), (4d, 2d^2 - 3d/2 + 1), (4d, 2d^2 + 3d/2), (4d + 1, 2d^2 - d - 1), \\ (4d + 1, 2d^2 - d), (4d + 2, 2d^2 - 3d/2 - 2), (4d + 2, 2d^2 - 3d/2 - 1), (4d + 2, 2d^2 - d/2 - 1), \\ (4d + 2, 2d^2 - d/2), (4d + 3, 2d^2 - 1), (4d + 3, 2d^2 - d - 2), (4d + 3, 2d^2 - d - 1), \\ (4d + 4, 2d^2 - d/2 - 3), (4d + 4, 2d^2 - d/2 - 2), (4d + 4, 2d^2 + d/2 - 1), (4d + 5, 2d^2 - 3), \\ (4d + 6, 2d^2 + d/2 - 4), (4d + 8, 2d^2 - 3d/2 - 10), (4d + 10, 2d^2 - 3d/2 - 17)\}.$$

Список семейств оптимальных графов $C(N; 1, s)$ с нечётным диаметром d :

$$(s, N) \in \{(4d - 20, 2d^2 - 3d/2 - 83/2), (4d - 18, 2d^2 - 3d/2 - 69/2), \\ (4d - 12, 2d^2 - 3d/2 - 25/2), (4d - 11, 2d^2 - d - 12), (4d - 10, 2d^2 - 3d/2 - 19/2), \\ (4d - 10, 2d^2 - d/2 - 21/2), (4d - 9, 2d^2 - d - 8), (4d - 8, 2d^2 - d/2 - 15/2), \\ (4d - 8, 2d^2 + d/2 - 17/2), (4d - 6, 2d^2 + d/2 - 11/2), (4d - 4, 2d^2 - 3d/2 - 1/2), \\ (4d - 4, 2d^2 - 3d/2 + 1/2), (4d - 3, 2d^2 - d), (4d - 2, 2d^2 - 3d/2 - 1/2), \\ (4d - 2, 2d^2 - 3d/2 + 1/2), (4d - 2, 2d^2 - d/2 - 1/2), (4d - 2, 2d^2 - d/2 + 1/2), \\ (4d - 1, 2d^2), (4d - 1, 2d^2 - d), (4d, 2d^2 - d/2 - 1/2), (4d, 2d^2 - d/2 + 1/2), \\ (4d, 2d^2 + d/2 + 1/2), (4d + 1, 2d^2), (4d + 1, 2d^2 + d), (4d + 2, 2d^2 + d/2 - 1/2), \\ (4d + 2, 2d^2 + 3d/2 + 1/2), (4d + 3, 2d^2 + d), (4d + 4, 2d^2 - 3d/2 - 7/2), \\ (4d + 4, 2d^2 - 3d/2 - 5/2), (4d + 4, 2d^2 + 3d/2 - 1/2), (4d + 5, 2d^2 - d - 4), \\ (4d + 6, 2d^2 - 3d/2 - 15/2), (4d + 6, 2d^2 - 3d/2 - 13/2), (4d + 6, 2d^2 - d/2 - 9/2), \\ (4d + 7, 2d^2 - d - 8), (4d + 8, 2d^2 - d/2 - 19/2)\}.$$

По сравнению с [30], где для поиска семейств с образующей $s = 4d + \alpha$ использовались генетические алгоритмы, дополнительно найдено 16 новых аналитически описываемых семейств указанного вида.

Для проверки существования найденных семейств при диаметрах графов, выходящих за границы датасета при $d > 158$, на основе программы [37] разработан новый алгоритм проверки оптимальных описаний из списков семейств для $N > 50000$. Алгоритм реализован на языке Си и использует специальную программу определения диаметров циркулянтных графов по их описанию и сравнения полученных диаметров с нижней границей $D(N)$. Семейства проверены выборочно для значений диаметров $d = 200, 201, 300, 301, 400, 401, 500, 501$ (при больших d временные затраты на проверку становятся значительными), их оптимальность подтвердилась для этих диаметров.

3. Общие формулы описания семейств оптимальных графов с линейной образующей $s = 4d + \alpha$

На рис. 3 представлена графическая визуализация точек датасета (N, s) , соответствующих описаниям оптимальных графов с линейными образующими вида $s = 4d + \alpha$ при диаметрах $142 \leq d \leq 158$ и $N \leq 50000$, где $d = 158$ — верхняя граница диаметра графов из датасета. На графике видно, что с ростом N (и d) стабильно повторяются одинаковые графические конфигурации оптимальных описаний как для чётных, так и для нечётных диаметров. На рис. 4 показаны отдельно точки датасета для чётных и нечётных диаметров.

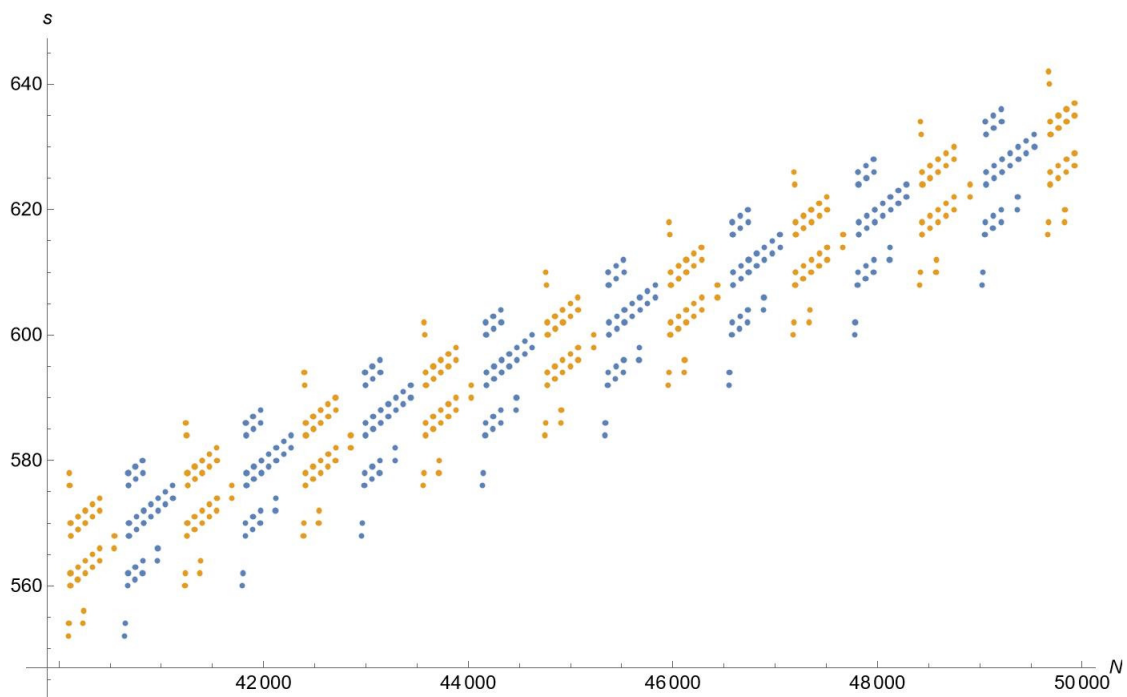
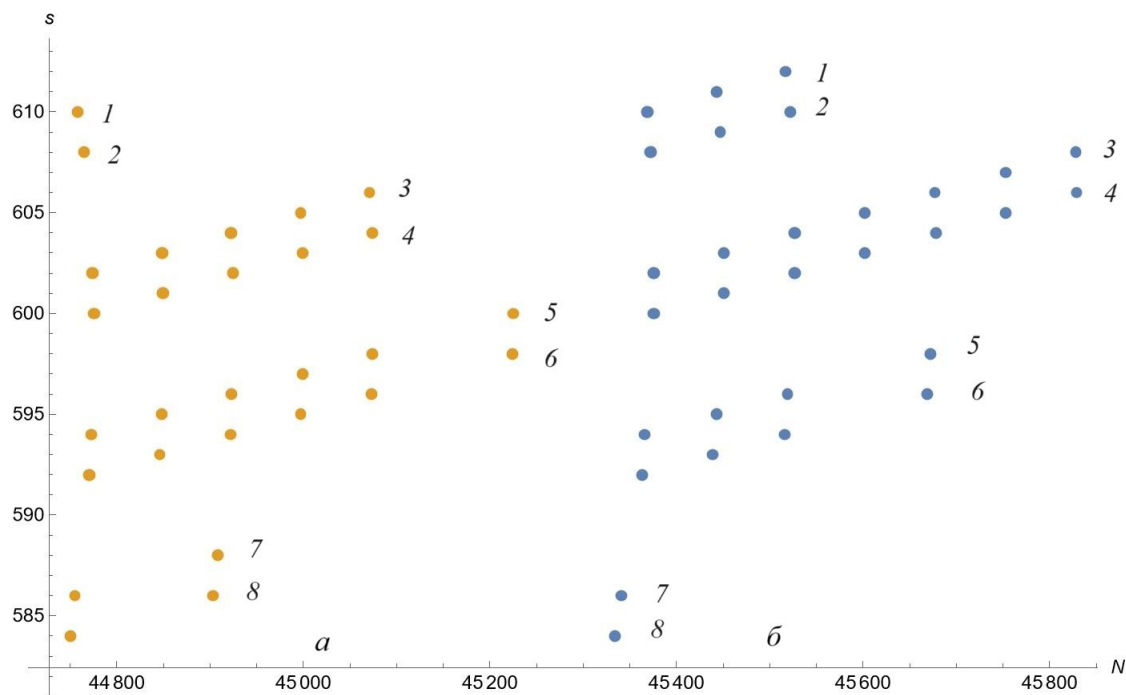


Рис. 3. Визуализация точек датасета в устойчивом режиме

После этого была решена задача отображения описаний оптимальных семейств из полученных списков в точки на графике. Как видно из списков, некоторым точкам с одинаковой образующей соответствуют по 2, 3 или 4 значения порядков графов. Далее мы выделили в качестве базовых те семейства, которые можно описать общими шаблонами (формулами с параметром), учитывая закономерность их появления вдоль линий (обозначены цифрами от 1 до 8) на рис. 4. В табл. 1 и 2 приведены найденные шаблоны для базовых семейств с чётным и нечётным диаметрами соответственно. Здесь n — номер линии, которой соответствуют формулы для s и N ; i — параметр, определяющий на n -й линии местоположение базового семейства.

Рис. 4. Визуализация точек датасета для $d = 150$ и 151 : a — чётные, b — нечётные диаметры

Т а б л и ц а 1

Шаблоны для базовых семейств оптимальных графов $C(N; 1, s)$ с чётным d

n	s	N	i
1	$4d + 10 + i$	$(d/2 - 2)s + 3d/2 + 3 + \lceil i/2 \rceil$	0
2	$4d + 8 + i$	$(d/2 - 2)s + 5d/2 + 6 + \lfloor i/2 \rfloor$	0
3	$4d + 2 + i$	$(d/2 - 1)s + 3d/2 + \lceil i/2 \rceil$	0, 1, 2, 3, 4
4	$4d + i$	$(d/2 - 1)s + 5d/2 + 1 + \lfloor i/2 \rfloor$	0, 1, 2, 3, 4
5	$4d - 6 + i$	$d/2s + 3d/2 - 3 + \lceil i/2 \rceil$	0, 1, 2, 3, 4, 6
6	$4d - 8 + i$	$d/2s + 5d/2 - 4 + \lfloor i/2 \rfloor$	0, 1, 2, 3, 4, 6
7	$4d - 14 + i$	$(d/2 + 1)s + 3d/2 - 6 + \lceil i/2 \rceil$	0, 2
8	$4d - 16 + i$	$(d/2 + 1)s + 5d/2 - 9 + \lfloor i/2 \rfloor$	0, 2

Т а б л и ц а 2

Шаблоны для базовых семейств оптимальных графов $C(N; 1, s)$ с нечётным d

n	s	N	i
1	$4d + 6 + i$	$(d - 3)s/2 + 3d/2 + 3/2 + \lceil i/2 \rceil$	0, 1, 2
2	$4d + 4 + i$	$(d - 3)s/2 + 5d/2 + 7/2 + \lfloor i/2 \rfloor$	0, 1, 2
3	$4d - 2 + i$	$(d - 1)s/2 + 3d/2 - 3/2 + \lceil i/2 \rceil$	0, ..., 6
4	$4d - 4 + i$	$(d - 1)s/2 + 5d/2 - 3/2 + \lfloor i/2 \rfloor$	0, ..., 6
5	$4d - 10 + i$	$(d + 1)s/2 + 3d/2 - 9/2 + \lceil i/2 \rceil$	0, 1, 2, 4
6	$4d - 12 + i$	$(d + 1)s/2 + 5d/2 - 13/2 + \lfloor i/2 \rfloor$	0, 1, 2, 4
7	$4d - 18 + i$	$(d + 3)s/2 + 3d/2 - 15/2 + \lceil i/2 \rceil$	0
8	$4d - 20 + i$	$(d + 3)s/2 + 5d/2 - 23/2 + \lfloor i/2 \rfloor$	0

Определение общих шаблонов для базовых семейств оптимальных графов из табл. 1 и 2 позволит найти доказательства их существования при любых диаметрах. Дополнительные семейства из списков, не вошедшие в число базовых, будут исследованы

в дальнейшем. В п. 6 приведены условия их оптимальности, которые установлены эмпирически и подтверждены экспериментально.

Необходимым условием оптимальности аналитически описываемого семейства циркулянтных графов диаметра d является условие $N_{d-1} < N \leq N_d$, или

$$2d^2 - 2d + 2 \leq N \leq 2d^2 + 2d + 1. \quad (1)$$

Второе дополнительное условие $s < N/2$ следует из известного свойства циркулянтов [2, 3]: циркулянты $C(N; 1, s)$ и $C(N; 1, N - s)$ изоморфны. Таким образом, все функции $N(d)$ порядков графов оптимальных семейств необходимо должны удовлетворять порогу существования (1) и можно таким способом определить для каждого аналитически описываемого семейства минимальный диаметр d_m , начиная с которого семейство может быть оптимальным. Далее исследуем, какие из построенных семейств графов являются бесконечными, то есть существуют при любых диаметрах, больших d_m .

4. Новые бесконечные оптимальные семейства графов чётного диаметра с образующей $s = 4d + \alpha$

Сначала рассмотрим семейства графов с чётным диаметром.

Для следующих 12 семейств оптимальных графов с образующей $s = 4d + \alpha$ существование при любых диаметрах $d \geq d_m$ следует в силу изоморфизма их описаний описаниям вида $(N; d, d + 1)$ или $(N; d - 1, d)$.

Теорема 2. Пусть d — чётное число. Тогда существуют такие числа d_m , что при любом $d \geq d_m$ семейства циркулянтов

$$\begin{aligned} &C(2d^2 - 3d/2 - 4; 1, 4d - 8), \quad C(2d^2 - 3d/2 - 3; 1, 4d - 6), \quad C(2d^2 - d/2 - 3; 1, 4d - 6), \\ &C(2d^2 - d/2 - 2; 1, 4d - 4), \quad C(2d^2 + d/2 - 2; 1, 4d - 4), \quad C(2d^2 + d/2 - 1; 1, 4d - 2), \\ &C(2d^2 + 3d/2 - 1; 1, 4d - 2), \quad C(2d^2 + 3d/2; 1, 4d) \end{aligned}$$

оптимальны.

Доказательство. Для всех указанных графов $(N, d+1) = 1$ и $s(d+1) \bmod N = d$. Таким образом, графы $C(N; 1, s)$ изоморфны оптимальным графам $C(N; d, d+1)$. Числа d_m определяются из условия (1). Например, определим d_m для графов семейства $C(2d^2 - 3d/2 - 4; 1, 4d - 8)$: имеем $-3d/2 - 4 \geq -2d + 2$, отсюда $d \geq 12$. Аналогично определяются значения d_m для остальных семейств. ■

Теорема 3. Пусть d — чётное число. Тогда существуют такие числа d_m , что при любом $d \geq d_m$ оптимальны следующие семейства циркулянтов:

$$\begin{aligned} &C(2d^2 - 3d/2; 1, 4d), & C(2d^2 - 3d/2 - 1; 1, 4d + 2), \\ &C(2d^2 - d/2 - 1; 1, 4d + 2), & C(2d^2 - d/2 - 2; 1, 4d + 4). \end{aligned}$$

Доказательство. Для всех указанных графов $(N, d-1) = 1$ и $s(d-1) \bmod N = d$. Таким образом, графы $C(N; 1, s)$ изоморфны оптимальным графам $C(N; d-1, d)$. Значения d_m для всех графов семейств определяются из условия (1). ■

Оптимальность семейства $C(2d^2 - d - 1; 1, 4d + 3)$ при любых чётных $d \geq 6$ доказана в [16, пример 5.2].

Следует отметить, что графы всех указанных семейств имеют одновременно минимальный диаметр, совпадающий с $D(N)$, и минимальное среднее расстояние между

вершинами. Докажем оптимальность семейств из табл. 1 с параметрами $n = 1, 3, 5, 7$ и $i = 0$.

Теорема 4. При любом чётном $d \geq d_m$ семейства циркулянтов

$$\begin{aligned} C(2d^2 - 3d/2 - 17; 1, 4d + 10), & \quad C(2d^2 - 3d/2 - 2; 1, 4d + 2), \\ C(2d^2 - 3d/2 - 3; 1, 4d - 6), & \quad C(2d^2 - 3d/2 - 20; 1, 4d - 14) \end{aligned}$$

оптимальны, где $d_m = 38, 8, 10, 44$ соответственно.

Доказательство. Данные семейства соответствуют в табл. 1 значениям $n = 1, 3, 5, 7$ и $i = 0$. Значения d_m для них получены в силу (1).

Обозначим $\lfloor N/s \rfloor = b$, $N \bmod s = r$. Параметры графов семейств приведены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

n	b	r	s
1	$d/2 - 2$	$3d/2 + 3$	$4d + 10$
3	$d/2 - 1$	$3d/2$	$4d + 2$
5	$d/2$	$3d/2 - 3$	$4d - 6$
7	$d/2 + 1$	$3d/2 - 6$	$4d - 14$

Все графы данных семейств соответствуют случаю $r < s/2$.

Пусть $D(v)$ означает длину кратчайшего пути (расстояние) из 0 в вершину v , $v = 1, 2, \dots, N - 1$. Разместим вершины графа на линии, вершины пометим от 0 до N (вершина N по модулю N соответствуют вершине 0). Чтобы доказать, что графы данных семейств имеют диаметр, равный d , будем рассматривать шаги по образующей s на всём расстоянии от 0 до N , а затем их продолжение из N в $2N$, и образующей $-s$ из N в 0, а затем их продолжение из 0 в $-N$.

Интервал вершин $ks \leq v \leq (k+1)s$, $k = 0, 1, \dots, \lfloor b/2 \rfloor$, шагами образующих s и $-s$ разбивается на четыре участка (рис. 5). Вверху обозначены результаты шагов образующих на k -м интервале, внизу — длины участков. Для доказательства теоремы достаточно показать, что расстояния от 0 до всех вершин в интервале $ks \leq v \leq (k+1)s$ не превышают значения d . Для этого используем следующее свойство циркулянтов $C(N; 1, s)$: если в нём u и v — номера вершин, $u < v$, то $\max_{u \leq x \leq v} D(x) = \lfloor (v - u + D(u) + D(v))/2 \rfloor$.

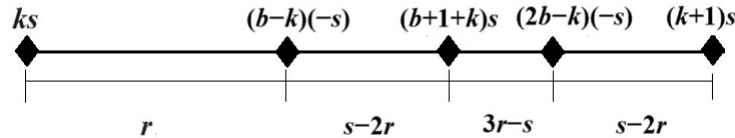


Рис. 5. Интервал вершин $\{ks, \dots, (k+1)s\}$

Имеем $D(ks) = k$, $D((b-k)(-s)) = b-k$, $D((b+1+k)s) = b+1+k$, $D((2b-k)(-s)) = 2b-k$, $D((k+1)s) = k+1$. Зная длины всех участков на рис. 5 и применяя указанное свойство, получим максимальные значения функции $D(v)$ для вершин всех четырёх участков:

$$\begin{aligned}
\max_{ks \leq x \leq ks+r} D(x)[1] &= \lfloor (b+r)/2 \rfloor, \\
\max_{ks+r \leq x \leq (k+1)s-r} D(x)[2] &= b-r + \lceil s/2 \rceil, \\
\max_{(k+1)s-r \leq x \leq ks+2r} D(x)[3] &= \lfloor (3(b+r) - s + 1)/2 \rfloor, \\
\max_{ks+2r \leq x \leq (k+1)s} D(x)[4] &= b-r + \lceil s/2 \rceil.
\end{aligned} \tag{2}$$

Подставив в (2) значения b , r и s из табл. 3, получим максимум расстояний от нуля до вершин всех четырёх участков (табл. 4):

Т а б л и ц а 4

n	$\max D(x)[1]$	$\max D(x)[2]$	$\max D(x)[3]$	$\max D(x)[4]$
1	d	d	$d-3$	d
3	$d-1$	d	$d-2$	d
5	$d-2$	d	$d-1$	d
7	$d-3$	d	d	d

Теорема 4 доказана. ■

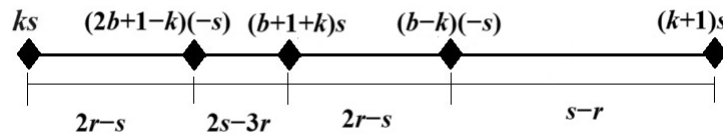
Докажем оптимальность семейств из табл. 1 с параметрами $n = 2, 4, 6, 8$ и $i = 0$.

Теорема 5. При любом чётном $d \geq d_m$ семейства циркулянтов

$$\begin{aligned}
C(2d^2 - 3d/2 - 10; 1, 4d + 8), & \quad C(2d^2 - 3d/2 + 1; 1, 4d), \\
C(2d^2 - 3d/2 - 4; 1, 4d - 8), & \quad C(2d^2 - 3d/2 - 25; 1, 4d - 16)
\end{aligned}$$

оптимальны, где $d_m = 24, 4, 12, 54$ соответственно.

Доказательство. Данные семейства соответствуют в табл. 1 значениям $n = 2, 4, 6, 8$ и $i = 0$. Значения d_m для них получены в силу (1). Метод доказательства и основные обозначения такие же, как в теореме 4. При этом табл. 3 заменяется на табл. 5, рис. 5 — на рис. 6, (2) заменяется на (3). В отличие от теоремы 4, графы данных семейств соответствуют случаю $r > s/2$.

Рис. 6. Интервал вершин $\{ks, \dots, (k+1)s\}$

Т а б л и ц а 5

n	b	r	s
2	$d/2 - 2$	$5d/2 + 6$	$4d + 8$
4	$d/2 - 1$	$5d/2 + 1$	$4d$
6	$d/2$	$5d/2 - 4$	$4d - 8$
8	$d/2 + 1$	$5d/2 - 9$	$4d - 16$

Максимальные значения функции $D(v)$:

$$\begin{aligned}
 \max_{ks \leq x \leq (k-1)s+2r} D(x)[1] &= b + r - \lfloor s/2 \rfloor, \\
 \max_{(k-1)s+2r \leq x \leq (k+1)s-r} D(x)[2] &= \lfloor 3(b-r)/2 + s + 1 \rfloor, \\
 \max_{(k+1)s-r \leq x \leq ks+r} D(x)[3] &= b + r - \lfloor s/2 \rfloor, \\
 \max_{ks+r \leq x \leq (k+1)s} D(x)[4] &= \lfloor (b-r+s+1)/2 \rfloor.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Подставив значения b , r и s из табл. 5 в (3), получим максимум расстояний от нуля до вершин всех четырёх участков (табл. 6).

Т а б л и ц а 6

n	$\max D(x)[1]$	$\max D(x)[2]$	$\max D(x)[3]$	$\max D(x)[4]$
2	d	$d-3$	d	d
4	d	$d-2$	d	$d-1$
6	d	$d-1$	d	$d-2$
8	d	d	d	$d-3$

Теорема 5 доказана. ■

5. Новые бесконечные оптимальные семейства графов нечётного диаметра с образующей $s = 4d + \alpha$

Перейдём к доказательствам бесконечности существования семейств оптимальных графов нечётного диаметра.

Применив при любых нечётных $d \geq 5$ теорему 5.1 из [16], как следствие получим доказательство оптимальности шести семейств из нашего списка:

$$\begin{aligned}
 C(2d^2 - d; 1, 4d - 1), & \quad C(2d^2; 1, 4d + 1), & \quad C(2d^2 + d; 1, 4d + 3), \\
 C(2d^2 - d; 1, 4d - 3), & \quad C(2d^2; 1, 4d - 1), & \quad C(2d^2 + d; 1, 4d + 1).
 \end{aligned}$$

Эти семейства соответствуют следующим параметрам в табл. 2: $n = 3, i = 1$; $n = 3, i = 3$; $n = 3, i = 5$; $n = 4, i = 1$; $n = 4, i = 3$; $n = 4, i = 5$. Далее доказывается оптимальность при всех нечётных $d \geq d_m$ других 12 семейств графов из списка.

Теорема 6. Пусть d — нечётное число. Тогда существуют числа d_m , такие, что при любом $d \geq d_m$ следующие семейства циркулянтов оптимальны:

$$\begin{aligned}
 C(2d^2 - 3d/2 + 1/2; 1, 4d - 4), & \quad C(2d^2 - 3d/2 - 1/2; 1, 4d - 2), & \quad C(2d^2 - d/2 + 1/2; 1, 4d - 2), \\
 C(2d^2 - d/2 - 1/2; 1, 4d), & \quad C(2d^2 + d/2 + 1/2; 1, 4d), & \quad C(2d^2 + d/2 - 1/2; 1, 4d + 2), \\
 C(2d^2 + 3d/2 + 1/2; 1, 4d + 2), & \quad C(2d^2 + 3d/2 - 1/2; 1, 4d + 4).
 \end{aligned}$$

Доказательство. Для всех указанных графов $(N, d) = 1$ и $sd \bmod N = d+1$. Таким образом, графы $C(N; 1, s)$ изоморфны оптимальным графам $C(N; d, d+1)$. Числа d_m для всех семейств определяются из условия (1). ■

Теорема 7. Пусть d — нечётное число. Тогда существуют числа d_m , такие, что при любом $d \geq d_m$ следующие семейства циркулянтов оптимальны:

$$\begin{aligned}
 C(2d^2 - 3d/2 - 1/2; 1, 4d - 4), & \quad C(2d^2 - 3d/2 + 1/2; 1, 4d - 2), \\
 C(2d^2 - d/2 - 1/2; 1, 4d - 2), & \quad C(2d^2 - d/2 + 1/2; 1, 4d).
 \end{aligned}$$

Доказательство. Для всех указанных графов $(N, d) = 1$ и $sd \bmod N = d - 1$. Таким образом, графы $C(N; 1, s)$ изоморфны оптимальным графам $C(N; d - 1, d)$. Для оптимальных графов диаметра d должно выполняться условие (1). Определим d_m для графов семейства $C(2d^2 - 3d/2 + 1/2; 1, 4d - 2)$. Имеем $-3d/2 + 1/2 \geq -2d + 2$, отсюда с учётом условия $s < N/2$ получаем $d \geq 5$. Аналогично определяются значения d_m для остальных семейств. ■

Графы всех указанных семейств имеют одновременно минимальный диаметр, совпадающий с $D(N)$, и минимальное среднее расстояние между вершинами.

Теорема 8. При любом нечётном $d \geq d_m$ семейства циркулянтов

$$\begin{aligned} C(2d^2 - 3d/2 - 15/2; 1, 4d + 6), & \quad C(2d^2 - 3d/2 - 1/2; 1, 4d - 2), \\ C(2d^2 - 3d/2 - 19/2; 1, 4d - 10), & \quad C(2d^2 - 3d/2 - 69/2; 1, 4d - 18) \end{aligned}$$

оптимальны, где $d_m = 19, 5, 23, 73$ соответственно.

Доказательство. Данные семейства соответствуют значениям $n = 1, 3, 5, 7$ и $i = 0$ в табл. 2. Значения d_m для них получены в силу (1). Доказательство данной теоремы идентично доказательству теоремы 4, включая обозначения, рис. 5, функции (2) и табл. 4, с той разницей, что табл. 3 заменяется на табл. 7. ■

Т а б л и ц а 7
Параметры семейств из теоремы 8

n	b	r	s
1	$(d - 3)/2$	$(3d + 3)/2$	$4d + 6$
3	$(d - 1)/2$	$(3d - 3)/2$	$4d - 2$
5	$(d + 1)/2$	$(3d - 9)/2$	$4d - 10$
7	$(d + 3)/2$	$(3d - 15)/2$	$4d - 18$

Теорема 9. При любом нечётном $d \geq d_m$ семейства циркулянтов

$$\begin{aligned} C(2d^2 - 3d/2 - 5/2; 1, 4d + 4), & \quad C(2d^2 - 3d/2 + 1/2; 1, 4d - 4), \\ C(2d^2 - 3d/2 - 25/2; 1, 4d - 12), & \quad C(2d^2 - 3d/2 - 83/2; 1, 4d - 20) \end{aligned}$$

оптимальны, где $d_m = 9, 5, 29, 87$ соответственно.

Доказательство. Данные семейства соответствуют значениям $n = 2, 4, 6, 8$ и $i = 0$ в табл. 2. Значения d_m для них получены в силу (1). Отметим, что для $n = 4$ необходимо учесть дополнительное условие $s < N/2$. Основные обозначения и метод доказательства такие же, как в теореме 5. При этом рис. 6, функции (3), табл. 6 такие же, как в теореме 5, а табл. 5 заменяется на табл. 8. ■

Т а б л и ц а 8
Параметры семейств из теоремы 9

n	b	r	s
2	$d/2 - 3/2$	$5d/2 + 7/2$	$4d + 4$
4	$d/2 - 1/2$	$5d/2 - 3/2$	$4d - 4$
6	$d/2 + 1/2$	$5d/2 - 13/2$	$4d - 12$
8	$d/2 + 3/2$	$5d/2 - 23/2$	$4d - 20$

Оптимальность графов оставшихся семейств при любых диаметрах, превышающих нижний порог, может быть доказана путём построения соответствующих схем шагов образующих в прямом и обратном направлениях от нулевой вершины.

Важно отметить следующее свойство оптимальных графов $C(N; 1, s)$ с образующей $s = 4d + \alpha$. При поиске кратчайших путей в графе достаточно рассмотреть шаги по образующим s ($-s$) на расстоянии от 0 до $2N$ (от N до $-N$), что составляет два оборота по N . Это свойство позволяет сократить время поиска кратчайших путей при применении таких графов в качестве подсистемы связей в сетях на кристалле, если реализуются алгоритмы маршрутизации с многократными оборотами по N , как, например, в [38, 39].

6. Условие оптимальности семейств графов с образующей $s = 4d + \alpha$

Определим условие оптимальности, которое должно выполняться на всём множестве базовых семейств оптимальных графов с образующей $s = 4d + \alpha$ для любых диаметров и порядков этих графов. Для этого рассмотрим функции (2) и (3). Участки вершин, на которых достигается значение диаметра d , — это второй и четвёртый в (2) и первый и третий в (3).

Получены следующие условия оптимальности, которые должны выполняться для всех рассмотренных базовых семейств:

$$\lfloor N/s \rfloor - N \bmod s + \lceil s/2 \rceil = d \quad \text{при} \quad N \bmod s < s/2; \quad (4)$$

$$\lfloor N/s \rfloor + N \bmod s - \lfloor s/2 \rfloor = d \quad \text{при} \quad N \bmod s > s/2. \quad (5)$$

Условие (4) соответствует точкам базовых семейств на линиях с $n = 1, 3, 5, 7$, а условие (5) — точкам базовых семейств на линиях с $n = 2, 4, 6, 8$. Эти условия определяют соотношения между N , s и d для оптимальных графов с $d = D(N)$.

Проверив выполнение условий оптимальности (4) и (5) на всём датасете, мы получили график рис. 7. Множество графов оптимальных семейств с образующей $s = 4d + \alpha$ соответствует точкам второй линии снизу на рис. 7.

Условия оптимальности (6) и (7) для дополнительных (не базовых) семейств оптимальных графов найдены экспериментально:

$$\lfloor N/s \rfloor - N \bmod s + \lceil s/2 \rceil = d - 1 \quad \text{при} \quad N \bmod s < s/2; \quad (6)$$

$$\lfloor N/s \rfloor + N \bmod s - \lfloor s/2 \rfloor = d - 1 \quad \text{при} \quad N \bmod s > s/2. \quad (7)$$

Выполнимость их также проверена на всём датасете, получен график рис. 8, аналогичный графику на рис. 7, с ним не пересекающийся и дополняющий его.

Из полученных графиков следует, что найденным условиям оптимальности удовлетворяет не только всё множество семейств оптимальных графов с образующей $s = 4d + \alpha$, но и представительная часть графов датасета с линейными образующими других видов, что даёт возможность поиска новых описаний аналитических семейств для других классов образующих.

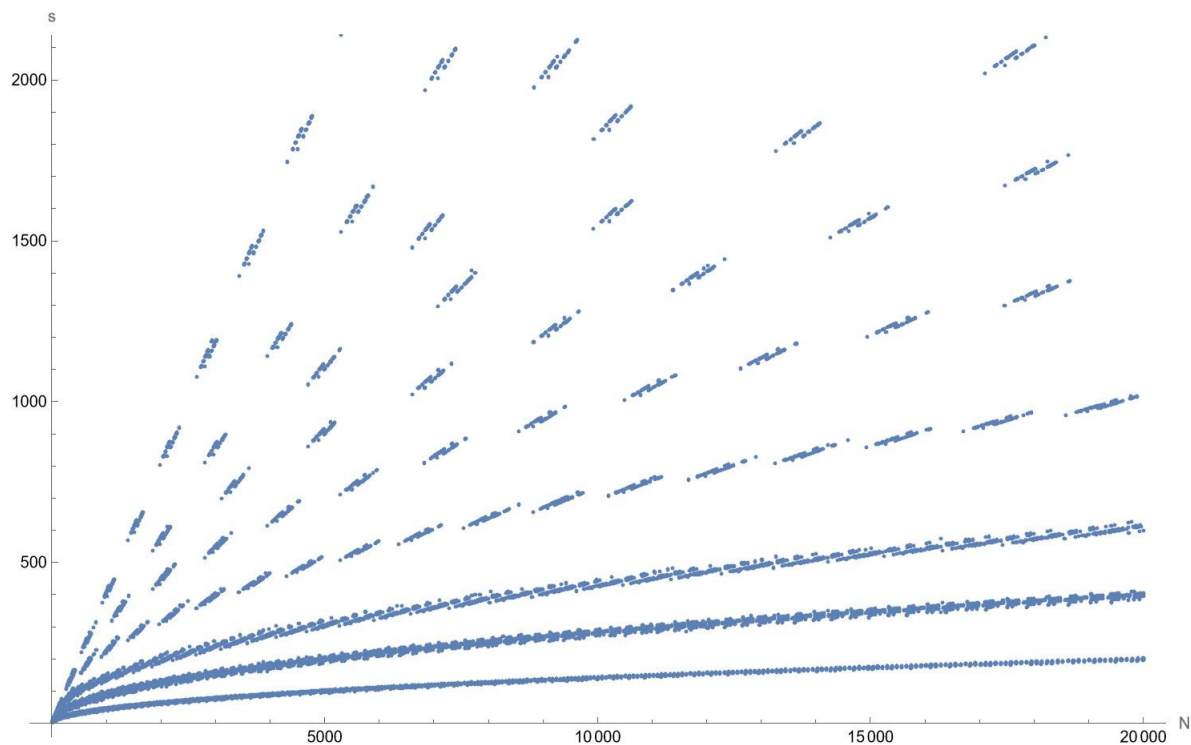


Рис. 7. Выполнение условий (4) и (5) на точках датасета, фрагмент с $N \leq 20000$

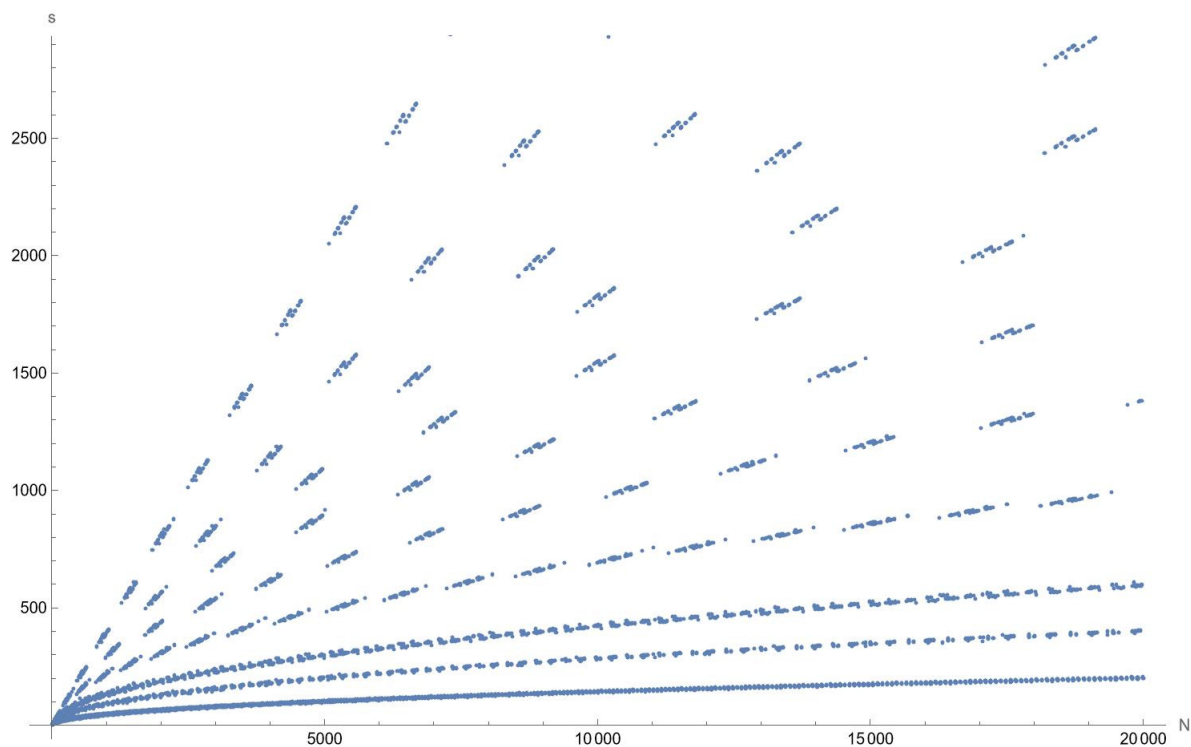


Рис. 8. Выполнение условий (6) и (7) на точках датасета, фрагмент с $N \leq 20000$

Заключение

Предложен новый метод открытия аналитических зависимостей параметров описаний семейств оптимальных двухконтурных кольцевых графов, представляющих практический интерес при моделировании систем связи для сетей на кристалле и кластеров

мультипроцессорных систем. Новый подход объединяет визуализацию точек датасета оптимальных графов с их алгоритмически найденными аналитическими описаниями и построение общих схем оптимальных аналитических описаний устойчивых рядов (серий) оптимальных графов. Построены и теоретически обоснованы новые бесконечные семейства оптимальных сетей с линейной образующей вида $s = 4d + \alpha$, где d — диаметр графа. Большая часть найденных семейств сетей имеет наилучшие возможные значения диаметра и среднего расстояния между узлами, что обеспечивает минимизацию задержек в сети и, в конечном итоге, повышение производительности системы [4]. Важным преимуществом применения семейств оптимальных графов с образующей $s = 4d + \alpha$ в качестве топологии в сетях на кристалле является, как показано для некоторых подсемейств в [27, 33], возможность разработки для них эффективных алгоритмов маршрутизации.

Для будущих исследований остаётся открытым вопрос — какие ещё принципы построения семейств оптимальных (субоптимальных) двухконтурных кольцевых графов могут быть реализованы при анализе полученного датасета. Планируется также рассмотреть построение бесконечных семейств оптимальных графов с линейными образующими вида $s = 6d + \alpha$, $8d + \alpha$ и др., которые также, как показывает визуализация на рис. 2, образуют устойчивые, повторяющиеся с ростом диаметра, конфигурации оптимальных описаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bermond J.-C., Comellas F., and Hsu D. F.* Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distrib. Comput. 1995. No. 24 (1). P. 2–10.
2. *Hwang F. K.* A survey on multi-loop networks // Theoret. Comput. Sci. 2003. V. 299. P. 107–121.
3. *Монахова Э. А.* Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. 2011. № 3. С. 92–115.
4. *Huang X., Ramos A. F., and Deng Y.* Optimal circulant graphs as low-latency network topologies // J. Supercomput. 2022. V. 78. P. 13491–13510.
5. *Monakhova E. A., Monakhov O. G., and Romanov A. Yu.* Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: Comparative analysis for networks-on-chip // IEEE Trans. Netw. Sci. Eng. 2023. V. 10. No. 1. P. 413–425.
6. *Perez-Roses H., Bras-Amoros M., and Seradilla-Merintero J. M.* Greedy routing in circulant networks // Graphs Combinatorics. 2022. V. 38. Iss. 3. <https://doi.org/10.1007/s00373-022-02489-9>.
7. *Pai K.-J., Yang J.-S., Chen G.-Y., and Chang J.-M.* Configuring protection routing via completely independent spanning trees in dense Gaussian on-chip networks // IEEE Trans. Netw. Sci. Eng. 2022. V. 9. No. 2. P. 932–946.
8. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks // Proc. 1st Int. Conf. Mobile Ad-hoc and Sensor Networks MSN 2005, Wuhan, China, December 2005. P. 309–316.
9. *Hoffmann R., Deserale D., and Seredynski F.* Cellular automata rules solving the wireless sensor network coverage problem // Natural Computing. 2022. V. 21. P. 417–447.
10. *Chen Y. B., Li Y., and Zheng X.* Research on undirected double-loop data center networks // Proc. Int. Conf. Advanced Cloud and Big Data. Huangshan, China, 2014. P. 180–183.
11. *Erickson A., Stewart I. A., Navaridas J., and Kiasari A. E.* The stellar transformation: From interconnection networks to datacenter networks // Computer Networks. 2017. V. 113. P. 29–45.

12. *Fei J. and Lu C.* Adaptive sliding mode control of dynamic systems using double loop recurrent neural network structure // IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst. 2018. V.29. P.1275–1286.
13. *Monakhov O. G., Monakhova E. A., Romanov A. Y., et al.* Adaptive dynamic shortest path search algorithm in networks-on-chip based on circulant topologies // IEEE Access. 2021. V.9. P.160836–160846.
14. *Монахова Э. А.* Об аналитическом описании оптимальных двумерных диофантовых структур однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. 1981. № 90. С.81–91.
15. *Boesch F. and Wang J.-F.* Reliable circulant networks with minimum transmission delay // IEEE Trans. Circuits Syst. 1985. V. 32. No. 12. P.1286–1291.
16. *Tzvieli D.* Minimal diameter double-loop networks. 1. Large infinite optimal families // Networks. 1991. V. 21. P.387–415.
17. *Liu H., Li X., and Wang S.* Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing // Mathematics. 2022. V. 10. P. 1–17.
18. *Monakhova E. A., Romanov A. Y., and Lezhnev E. V.* Shortest path search algorithm in optimal two-dimensional circulant networks: Implementation for networks-on-chip // IEEE Access. 2020. V.8. P.215010–215019.
19. *Монахова Э. А., Монахов О. Г.* Анализ базы данных оптимальных двухконтурных кольцевых сетей // Прикладная дискретная математика. 2024. № 64. С. 56–71.
20. *Монахова Э. А.* Синтез оптимальных диофантовых структур // Вычислительные системы. 1979. № 80. С. 18–35.
21. *Bermond J. C., Iliades G., and Peyrat C.* An optimization problem in distributed loop computer networks // Ann. New York Acad. Sci. 1989. V.555. С. 45–55.
22. *Yebra J. L. A., Fiol M. A., Morillo P., and Alegre I.* The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations // Ars Combinatoria. 1985. No. 20B. P. 159–172.
23. *Sukhov A. M., Romanov A. Y., and Amerikanov A. A.* The problem of a symmetric graph with a maximum number of vertices and minimum diameter // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44. P. 5453–5459.
24. *Du D.-Z., Hsu D. F., Li Q., and Xu J.* A combinatorial problem related to distributed loop networks // Networks. 1990. V. 20. P.173–180.
25. *Li Y., Chen Y., Tai W., and Wang R.* The minimum distance diagram and diameter of undirected double-loop networks // Proc. 3rd Inter. Conf. ICMEMTC. Taiyuan, China, 2016. P.1682–1687.
26. *Loudiki L., Kchikech M., and Essaky E. H.* A New Approach for Computing the Distance and the Diameter in Circulant Graphs. <https://arxiv.org/abs/2210.11116>. 2022.
27. *Jha P. K.* Dense bipartite circulants and their routing via rectangular twisted torus // Discr. Appl. Math. 2014. V. 166. P.141–158.
28. *Jha P. K. and Smith J. D. H.* Cycle Kronecker products that are representable as optimal circulants // Discr. Appl. Math. 2015. V. 181. P. 130–138.
29. *Liu H., Yang Y., and Hu M.* Tight optimal infinite families of undirected double-loop networks // Systems Engineering Theory and Practice. 2002. V. 1. P. 75–79.
30. *Монахова Э. А., Монахов О. Г.* Эволюционный синтез семейств оптимальных двумерных циркулянтных сетей // Вестник СибГУТИ. 2014. № 2. С. 72–81.
31. *Jha K. P.* Tight-optimal circulants vis-a-vis twisted tori // Discr. Appl. Math. 2014. V. 175. P.24–34.
32. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* Some new optimal and suboptimal infinite families of undirected double-loop networks // DMTCS. 2006. V.8. P.299–312.

33. *Jha P. K.* Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants // *J. Inter. Networks*. 2013. V. 14. No. 1. Article 1350002.
34. *Bermond J.-C. and Tzvieli D.* Minimal diameter double-loop networks: dense optimal families // *Networks*. 1991. V. 21. P. 1–9.
35. *Монахова Э. А., Монахов О. Г.* Генерация и анализ датасета оптимальных двухконтурных циркулянтных сетей // *Программная инженерия*. 2024. Т. 15. № 8. С. 402–410.
36. *Монахова Э. А., Монахов О. Г.* Метод автоматического поиска семейств оптимальных хордальных кольцевых сетей // *Дискретн. анализ и исслед. опер.* 2024. Т. 31. № 1. С. 85–108.
37. *Монахов О. Г., Монахова Э. А.* Программа вычисления характеристик регулярных графов с параметрическим описанием. Свидетельство об официальной регистрации программ на ЭВМ № 2013619128. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, 2013.
38. *Romanov A. Y.* Development of routing algorithms in networks-on-chip based on ring circulant topologies // *Heliyon*. 2019. V. 5. Iss. 4. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405844018355208>.
39. *Liu H. and Yang Y.* On the fault-tolerant routing in distributed loop networks // *J. Electronics (China)*. 2000. V. 17. P. 84–89.

REFERENCES

1. *Bermond J.-C., Comellas F., and Hsu D. F.* Distributed loop computer networks: a survey. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 1995, no. 24 (1), pp. 2–10.
2. *Hwang F. K.* A survey on multi-loop networks. *Theoret. Comput. Sci.*, 2003, vol. 299, pp. 107–121.
3. *Monakhova E. A.* Strukturnye i kommunikativnye svoystva tsirkulyantnykh setey [Structural and communicative properties of circulant networks]. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2011, no. 3, pp. 92–115. (in Russian)
4. *Huang X., Ramos A. F., and Deng Y.* Optimal circulant graphs as low-latency network topologies. *J. Supercomput.*, 2022, vol. 78, pp. 13491–13510.
5. *Monakhova E. A., Monakhov O. G., and Romanov A. Yu.* Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: Comparative analysis for networks-on-chip. *IEEE Trans. Netw. Sci. Eng.*, 2023, vol. 10, no. 1, pp. 413–425.
6. *Perez-Roses H., Bras-Amoros M., and Seradilla-Merinerio J. M.* Greedy routing in circulant networks. *Graphs Combinatorics*, 2022, vol. 38, iss. 3, <https://doi.org/10.1007/s00373-022-02489-9>.
7. *Pai K.-J., Yang J.-S., Chen G.-Y., and Chang J.-M.* Configuring protection routing via completely independent spanning trees in dense Gaussian on-chip networks. *IEEE Trans. Netw. Sci. Eng.*, 2022, vol. 9, no. 2, pp. 932–946.
8. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks. *Proc. 1th Int. Conf. Mobile Ad-hoc and Sensor Networks MSN 2005*, Wuhan, China, December 2005, pp. 309–316.
9. *Hoffmann R., Deserale D., and Seredynski F.* Cellular automata rules solving the wireless sensor network coverage problem. *Natural Computing*, 2022, vol. 21, pp. 417–447.
10. *Chen Y. B., Li Y., and Zheng X.* Research on undirected double-loop data center networks. *Proc. Int. Conf. Advanced Cloud and Big Data*, Huangshan, China, 2014, pp. 180–183.
11. *Erickson A., Stewart I. A., Navaridas J., and Kiasari A. E.* The stellar transformation: From interconnection networks to datacenter networks. *Computer Networks*, 2017, vol. 113, pp. 29–45.

12. *Fei J. and Lu C.* Adaptive sliding mode control of dynamic systems using double loop recurrent neural network structure. *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.*, 2018, vol. 29, pp. 1275–1286.
13. *Monakhov O. G., Monakhova E. A., Romanov A. Y., et al.* Adaptive dynamic shortest path search algorithm in networks-on-chip based on circulant topologies. *IEEE Access*, 2021, vol. 9, pp. 160836–160846.
14. *Monakhova E. A.* Ob analiticheskom opisanii optimal'nykh dvumernykh diofantovykh struktur odnorodnykh vychislitel'nykh sistem [On analytical representation of optimal two-dimensional Diophantine structures of homogeneous computer systems]. *Vychislitel'nye Sistemy*, 1981, no. 90, pp. 81–91. (in Russian)
15. *Boesch F. and Wang J.-F.* Reliable circulant networks with minimum transmission delay. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1985, vol. 32, no. 12, pp. 1286–1291.
16. *Tzvieli D.* Minimal diameter double-loop networks. 1. Large infinite optimal families. *Networks*, 1991, vol. 21, pp. 387–415.
17. *Liu H., Li X., and Wang S.* Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing. *Mathematics*, 2022, vol. 10, pp. 1–17.
18. *Monakhova E. A., Romanov A. Y., and Lezhnev E. V.* Shortest path search algorithm in optimal two-dimensional circulant networks: Implementation for networks-on-chip. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 215010–215019.
19. *Monakhova E. A. and Monakhov O. G.* Analiz bazy dannykh optimal'nykh dvukhkonturnykh kol'tsevykh setey [Database analysis of optimal double-loop networks]. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2024, no. 64, pp. 56–71. (in Russian)
20. *Monakhova E. A.* Sintez optimal'nykh diofantovykh struktur [Synthesis of optimal Diophantine structures]. *Vychislitel'nye Sistemy*, 1979, no. 80, pp. 18–35. (in Russian)
21. *Bermond J. C., Illiades G., and Peyrat C.* An optimization problem in distributed loop computer networks. *Ann. New York Acad. Sci.*, 1989, vol. 555, pp. 45–55.
22. *Yebra J. L. A., Fiol M. A., Morillo P., and Alegre I.* The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations. *Ars Combinatoria*, 1985, no. 20B, pp. 159–172.
23. *Sukhov A. M., Romanov A. Y., and Amerikanov A. A.* The problem of a symmetric graph with a maximum number of vertices and minimum diameter. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, pp. 5453–5459.
24. *Du D.-Z., Hsu D. F., Li Q., and Xu J.* A combinatorial problem related to distributed loop networks. *Networks*, 1990, vol. 20, pp. 173–180.
25. *Li Y., Chen Y., Tai W., and Wang R.* The minimum distance diagram and diameter of undirected double-loop networks. *Proc. 3rd Inter. Conf. ICMEMTC*, Taiyuan, China, 2016, pp. 1682–1687.
26. *Loudiki L., Kchikech M., and Essaky E. H.* A New Approach for Computing the Distance and the Diameter in Circulant Graphs. <https://arxiv.org/abs/2210.11116>. 2022.
27. *Jha P. K.* Dense bipartite circulants and their routing via rectangular twisted torus. *Discr. Appl. Math.*, 2014, vol. 166, pp. 141–158.
28. *Jha P. K. and Smith J. D. H.* Cycle Kronecker products that are representable as optimal circulants. *Discr. Appl. Math.*, 2015, vol. 181, pp. 130–138.
29. *Liu H., Yang Y., and Hu M.* Tight optimal infinite families of undirected double-loop networks. *Systems Engineering Theory and Practice*, 2002, vol. 1, pp. 75–79.
30. *Monakhova E. A. and Monakhov O. G.* Evolyutsionnyy sintez semeystv optimal'nykh dvumernykh tsirkulyantnykh setey [Evolutionary synthesis of families of optimal two-dimensional circulant networks.] *Vestnik SibGUTI*, 2014, no. 2, pp. 72–81. (in Russian)

31. *Jha K. P.* Tight-optimal circulants vis-a-vis twisted tori. *Discrete Appl. Math.*, 2014, vol. 175, pp. 24–34.
32. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* Some new optimal and suboptimal infinite families of undirected double-loop networks. *DMTCS*, 2006, vol. 8, pp. 299–312.
33. *Jha P. K.* Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants. *J. Inter. Networks*, 2013, vol. 14, no. 1, article. 1350002.
34. *Bermond J.-C. and Tzvieli D.* Minimal diameter double-loop networks: dense optimal families. *Networks*, 1991, vol. 21, pp. 1–9.
35. *Monakhova E. A. and Monakhov O. G.* Generatsiya i analiz dataseta optimal'nykh dvukhkонтурных tsirkulyantnykh setey [Generation and analysis of a dataset of optimal double-loop circulant networks]. *Programmnaya Inzheneriya*, 2024, vol. 15, no. 8, pp. 402–410. (in Russian)
36. *Monakhova E. A. and Monakhov O. G.* A method for automatic search for families of optimal chordal ring networks *J. Appl. Industr. Math.*, 2024, vol. 18, no. 1, pp. 122–136.
37. *Monakhov O. G., Monakhova E. A.* Programma vychisleniya kharakteristik regul'yarnykh grafov s parametricheskimi opisaniem. Svidetel'stvo ob ofitsial'noy registratsii programm na EVM № 2013619128 [Program for calculating characteristics of regular graphs with parametric description. Certificate of official registration of computer programs No. 2013619128]. Moscow, Federal Service for Intellectual Property, Patents and Trademarks, 2013. (in Russian)
38. *Romanov A. Y.* Development of routing algorithms in networks-on-chip based on ring circulant topologies. *Heliyon*, 2019, vol. 5, iss. 4, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405844018355208>.
39. *Liu H. and Yang Y.* On the fault-tolerant routing in distributed loop networks. *J. Electronics (China)*, 2000, vol. 17, pp. 84–89.