

Научная статья

УДК 512.643

MSC: 15-XX

doi: 10.17223/19988621/93/2

Явные аналитические формулы псевдообращения произвольных матриц

Николай Евгеньевич Зубов¹, Алексей Владимирович Лапин²

^{1,2} *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия*

¹ *Nik.Zubov@gmail.com*

² *AlexeyPoeme@yandex.ru*

Аннотация. В явном виде получены компактные аналитические формулы псевдообращения на основе аннуляторов, применимые к любым матрицам независимо от размерности и ранга. Формулы упрощают существующий общий алгоритм псевдообращения, основанный на расширении матрицы за счет аннуляторов и обращении расширенной матричной конструкции. Снижается вычислительная сложность псевдообращения, а его явный вид позволяет наглядно анализировать результаты. Преимущества предлагаемых формул показаны на примерах псевдообращения матриц неполного ранга.

Ключевые слова: псевдообратная матрица, матрица неполного ранга, аналитические формулы псевдообращения, матричные аннуляторы, вычислительная сложность алгоритмов

Для цитирования: Зубов Н.Е., Лапин А.В. Явные аналитические формулы псевдообращения произвольных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 19–29. doi: 10.17223/19988621/93/2

Original article

Explicit analytical formulas of arbitrary matrices pseudoinverse

Nikolay E. Zubov¹, Alexey V. Lapin²

^{1,2} *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

¹ *Nik.Zubov@gmail.com*

² *AlexeyPoeme@yandex.ru*

Abstract. In this paper, we have obtained concise explicit analytical formulas for matrix pseudoinversion that are applicable to any matrices, regardless of their dimension and

rank. These formulas may be considered as a generalization of the known analytical formulas for complete-rank matrix pseudoinversion to incomplete-rank matrices. The generalization consists in the use of left-side and right-side zero divisors existing for incomplete-rank matrices. In contrast to uniqueness of the known formulas of pseudoinversion for cases with complete rank equal to the number of rows or columns, this paper shows that pseudoinversion of any matrix may be performed by means of two different analytical formulas, one with a left-side zero divisor, and the other with a right-side one. From a computational point of view, the obtained formulas significantly simplify the existing general algorithm of pseudoinversion based on extending the original matrix by its zero divisors, followed by inverting the extended matrix-construction. The simplification is due to the fact that when using the proposed formulas it is not necessary to invert matrix constructions the dimensions of which are larger than those of the original matrix. Besides, each formula uses only one zero divisor (a left-side one or a right-side one), but not both of them as in the existing extended algorithm, so it is not necessary to calculate the other zero divisor.

The explicit form of the proposed analytical formulas allows visual analyzing the results of pseudoinversion. This is important, for example, when the desired pseudoinverse matrix is a multiplier in some product and we need to show that the product is zero. When isolating a pseudoinverse matrix from an inverted block-matrix construction (as in the existing algorithm), in the general case, it is sufficiently difficult or even impossible to analyze properties of the desired pseudoinverse matrix without additional transformations.

As specific examples of incomplete-rank matrices, the paper shows the advantages of the proposed explicit analytical formulas over the existing general algorithm with extended matrix-construction. The advantages involve both decreasing the computing time and simplifying the form of pseudoinversion results.

Keywords: pseudoinverse matrix, incomplete-rank matrix, analytical formulas of pseudoinversion, matrix zero divisors, computational complexity of algorithms

For citation: Zubov, N.E., Lapin, A.V. (2025) Explicit analytical formulas of arbitrary matrices pseudoinverse. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 19–29. doi: 10.17223/19988621/93/2

Введение

Псевдообращение матриц является одной из важных и распространенных операций в современной линейной алгебре [1]. Оно имеет большое прикладное значение, поскольку используется при решении систем линейных алгебраических уравнений [2], линейных матричных уравнений [3], в методе наименьших квадратов [4], аналитических методах модального синтеза [5], инвариантного управления [6], идентификации систем [7], реконфигурации управления [8], теории оптимальных процессов [9].

Псевдообратной матрицей по Муру–Пенроузу [10] (далее – «псевдообратная матрица») называется матрица A^+ , удовлетворяющая двум условиям регулярности

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+$$

и двум условиям симметричности

$$(A^+A)^T = A^+A, \quad (AA^+)^T = AA^+.$$

Доказано, что у любой матрицы независимо от ее размерности и ранга существует псевдообратная матрица, и притом только одна [11]. Однако в явном виде

аналитические формулы псевдообращения известны только для матриц полного ранга [12].

Если полный ранг равен числу строк (у такой матрицы нет левых аннуляторов [5]), псевдообратная матрица рассчитывается из явного левостороннего соотношения

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}. \quad (1)$$

Если полный ранг равен числу столбцов (у такой матрицы нет правых аннуляторов [13]), псевдообратная матрица рассчитывается из явного правостороннего соотношения

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T. \quad (2)$$

Если ранг одновременно равен числу строк и числу столбцов (это квадратная неособенная матрица, у нее нет ни левых, ни правых аннуляторов), псевдообратная матрица совпадает с обратной матрицей:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}. \quad (3)$$

Неполный ранг могут иметь как прямоугольные, так и вырожденные квадратные матрицы. У таких матриц всегда найдутся и левые, и правые аннуляторы. Существующий метод псевдообращения матриц неполного ранга [14] основан на расширении матрицы за счет ее левого и правого аннуляторов с последующим обращением расширенной блочной конструкции:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^+ & \bar{\mathbf{A}}^R \\ \bar{\mathbf{A}}^L & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $\bar{\mathbf{A}}^L$ и $\bar{\mathbf{A}}^R$ – соответственно левый и правый аннуляторы максимального ранга, $\mathbf{L} = \bar{\mathbf{A}}^{L+}$ и $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{A}}^{R+}$ – их псевдообратные матрицы, $\mathbf{0}$ – нулевая матрица подходящей размерности. Псевдообращение левого и правого аннуляторов максимального (полного) ранга выполняется соответственно по формулам (1) и (2):

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{A}}^{LT} (\bar{\mathbf{A}}^L \bar{\mathbf{A}}^{LT})^{-1}, \quad (5)$$

$$\mathbf{R} = (\bar{\mathbf{A}}^{RT} \bar{\mathbf{A}}^R)^{-1} \bar{\mathbf{A}}^{RT}. \quad (6)$$

У метода псевдообращения, основанного на равенстве (4), можно отметить как минимум два существенных недостатка:

1. Из-за расширения матрицы за счет аннуляторов приходится всегда рассчитывать и псевдообращать как левый, так и правый аннулятор (а не только один из них), а также выполнять обращение матричной конструкции большей размерности, чем исходная матрица $\mathbf{A}$. Таким образом, алгоритм характеризуется избыточной вычислительной сложностью.

2. Из правой части равенства (4) необходимо специально выделять блок, соответствующий требуемой псевдообратной матрице $\mathbf{A}^+$. Отсутствие явного аналитического вида не позволяет в полной мере анализировать структуру и свойства получаемой матрицы $\mathbf{A}^+$.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы, обобщив соотношения (1) и (2) на матрицы неполного ранга, получить явные аналитические формулы псевдообращения произвольной матрицы.

1. Теорема о псевдообращении произвольной матрицы

Теорема. Псевдообращение произвольной матрицы $\mathbf{A}$ может быть выполнено по любой из следующих формул:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1}, \quad (7)$$

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T, \quad (8)$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$ – псевдообратные матрицы соответственно левого и правого аннуляторов максимального ранга матрицы $\mathbf{A}$. Если какого-либо из аннуляторов (или их обоих) не существует, соответствующая(-ие) матрица(-ы) $\mathbf{L}$ или (*и*) $\mathbf{R}$ обнуляется(-ются).

Доказательство. На основании соотношений (5) и (6) можно убедиться, что для матриц $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$ справедливы обратные операции

$$\underbrace{(\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T}_{\mathbf{L}^+} = \bar{\mathbf{A}}^L, \quad (9)$$

$$\underbrace{\mathbf{R}^T (\mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1}}_{\mathbf{R}^+} = \bar{\mathbf{A}}^R, \quad (10)$$

а также нулевые равенства, вытекающие из определений аннуляторов

$$\mathbf{A}^T \mathbf{L} = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{A}}^{LT} (\bar{\mathbf{A}}^L \bar{\mathbf{A}}^{LT})^{-1} = \underbrace{(\bar{\mathbf{A}}^L \mathbf{A})^T}_0 (\bar{\mathbf{A}}^L \bar{\mathbf{A}}^{LT})^{-1} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{L}^T \mathbf{A} = (\mathbf{A}^T \mathbf{L})^T = \mathbf{0}, \quad (11)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{A}^T = (\bar{\mathbf{A}}^{RT} \bar{\mathbf{A}}^R)^{-1} \bar{\mathbf{A}}^{RT} \mathbf{A}^T = (\bar{\mathbf{A}}^{RT} \bar{\mathbf{A}}^R)^{-1} \underbrace{(\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}^R)^T}_0 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{R}^T = (\mathbf{R}\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{0}. \quad (12)$$

Рассмотрим левую часть равенства (4). В работе [14] показано, что это неособенная квадратная матрица. Поэтому ее обращение, согласно тождеству (3), можно выполнять по любой из формул псевдообращения (1) или (2).

Для доказательства тождества (7) воспользуемся формулой псевдообращения (1):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{L}\mathbf{L}^T & \mathbf{A}\mathbf{R}^T \\ \mathbf{R}\mathbf{A}^T & \mathbf{R}\mathbf{R}^T \end{bmatrix}^{-1}.$$

Во втором множителе в силу нулевых равенств (12) имеем блочно-диагональную матрицу, которая инвертируется поблочно [15]. Поэтому

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1} & \mathbf{R}^T (\mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1} \\ \mathbf{L}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь правый верхний блок упрощается согласно формуле (10), а левый нижний блок – путем последовательного умножения слева на квадратную неособенную матрицу $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$ и на ее инверсию:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} (\mathbf{L}^T \mathbf{L}) \mathbf{L}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \mathbf{L} \mathbf{L}^T)^{-1} &= \underbrace{(\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T}_{\bar{\mathbf{A}}^L} (\mathbf{L} \mathbf{L}^T + \mathbf{A} \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \mathbf{A}^T) (\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \mathbf{L} \mathbf{L}^T)^{-1} = \\ &= \bar{\mathbf{A}}^L \left(\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \mathbf{L} \mathbf{L}^T)^{-1} \right) = \bar{\mathbf{A}}^L - \underbrace{\bar{\mathbf{A}}^L \mathbf{A} \mathbf{A}^T}_{\mathbf{0}} (\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \mathbf{L} \mathbf{L}^T)^{-1} = \bar{\mathbf{A}}^L. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \mathbf{L} \mathbf{L}^T)^{-1} & \bar{\mathbf{A}}^R \\ \bar{\mathbf{A}}^L & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Соответствие результатов этой формулы и формулы (4) в части верхнего левого блока доказывает формулу (7).

Для доказательства тождества (8) воспользуемся формулой псевдообращения (2):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R} & \mathbf{A}^T \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T \mathbf{A} & \mathbf{L}^T \mathbf{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Во втором множителе в силу нулевых равенств (11) имеем блочно-диагональную матрицу, которая инвертируется поблоку [15]. Поэтому

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T & (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \\ (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь левый нижний блок упрощается согласно формуле (9), а правый верхний блок – путем последовательного умножения справа на квадратную неособенную матрицу $\mathbf{R} \mathbf{R}^T$ и на ее инверсию:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T (\mathbf{R} \mathbf{R}^T) (\mathbf{R} \mathbf{R}^T)^{-1} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R} - \mathbf{A}^T \mathbf{A}) \underbrace{\mathbf{R}^T (\mathbf{R} \mathbf{R}^T)^{-1}}_{\bar{\mathbf{A}}^R} = \\ &= \left(\mathbf{I} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right) \bar{\mathbf{A}}^R = \bar{\mathbf{A}}^R - \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{A}}^R}_{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{A}}^R. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T & \bar{\mathbf{A}}^R \\ \bar{\mathbf{A}}^L & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Соответствие результатов этой формулы и формулы (4) в части верхнего левого блока доказывает формулу (8).

Теорема доказана.

Следствие 1. Для матрицы, имеющей полный ранг, равный числу строк, формула (7) упрощается до вида (1), а формула (8) является альтернативой стандартному расчету (1).

Следствие 2. Для матрицы, имеющей полный ранг, равный числу столбцов, формула (8) упрощается до вида (2), а формула (7) является альтернативой стандартному расчету (2).

2. Примеры эффективного использования аналитических формул псевдообращения

Покажем на примерах псевдообращения матриц неполного ранга, как доказанные аналитические формулы (7) и (8) устраняют названные выше недостатки алгоритма, основанного на равенстве (4).

Пример 1. Сравнить затраты вычислительного времени на работу различных алгоритмов псевдообращения (формулы (4), (7) и (8)) в MATLAB на примере следующей матрицы в символьном виде:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & a & a+b \\ 0 & c & 0 & c \\ d & e & d & d+e \\ 0 & f & 0 & f \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Рассматриваемая квадратная матрица (13) имеет неполный ранг $\text{rank } \mathbf{A} = 2$. Ее левый и правый аннуляторы максимального ранга соответственно имеют вид:

$$\bar{\mathbf{A}}^L = \begin{bmatrix} -d/a & (bd - ae)/(ac) & 1 & 0 \\ 0 & -f/c & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}}^R = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Процедуры, реализующие различные алгоритмы псевдообращения (формулы (4), (7) и (8)) в MATLAB, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Реализация различных алгоритмов псевдообращения в MATLAB

Алгоритм (4)	Формула (7)	Формула (8)
<pre>function Ap = func_pinv_AA(A) [n,m] = size(A); AL = null(A.').'; L = AL./(AL*AL. '); AR = null(A); R = (AR.*AR)\AR. '; np = size(R,1); mp = size(L,2); AA = [A L; R zeros(np,mp)]; inv_AA = inv(AA); Ap = inv_AA(1:m,1:n); end</pre>	<pre>function Ap = func_pinv_AL(A) AL = null(A.').'; L = AL./(AL*AL. '); Ap = A./(A*A.' + L*L. '); end</pre>	<pre>function Ap = func_pinv_AR(A) AR = null(A); R = (AR.*AR)\AR. '; Ap = (A.*A + R.*R)\A. '; end</pre>

Затраты вычислительного времени на работу процедур `func_pinv_AA`, `func_pinv_AL` и `func_pinv_AR` применительно к матрице (13) определялись с по-

мощью встроенной функции MATLAB `timeit` [16] на стандартном офисном ПК по 10 независимым замерам. Результаты замеров приведены в табл. 2.

Таблица 2

Вычислительные затраты (в секундах) на псевдообращение матрицы (13) в MATLAB

№ замера	Алгоритм (4)	Формула (7)	Формула (8)
1	0.3646	0.2284	0.0386
2	0.3573	0.2202	0.0386
3	0.3633	0.2236	0.0405
4	0.3597	0.2227	0.0395
5	0.3582	0.2269	0.0385
6	0.3643	0.2222	0.0385
7	0.3606	0.2269	0.0376
8	0.3525	0.2152	0.0418
9	0.3513	0.2289	0.0397
10	0.3549	0.2256	0.0391

Из табл. 2 видно, что алгоритмы, построенные по предлагаемым аналитическим формулам (7) и (8), работают быстрее, чем существующий алгоритм, основанный на формуле (4). Выигрыш в быстродействии объясняется тем, что в формуле (4) выполняется обращение матрицы шестого порядка, а в формулах (7) и (8) – четвертого порядка. Кроме того, в алгоритме (7) рассчитывается только левый аннулятор, в алгоритме (8) – только правый аннулятор, а в алгоритме (4) – оба аннулятора.

Преимущество по быстродействию алгоритма (8) относительно алгоритма (7) обусловлено тем, что для матрицы (13) правый аннулятор $\bar{\mathbf{A}}^R$ оказался по своей форме существенно проще левого аннулятора $\bar{\mathbf{A}}^L$. Это наглядно видно из представленных выше значений (14).

Таким образом, данный пример демонстрирует устранение первого недостатка алгоритма (4) с помощью явных аналитических формул (7) или (8). Выбор в пользу той или иной аналитической формулы с точки зрения вычислительной простоты осуществляется, исходя из вида аннуляторов.

Пример 2. Задана пара матриц состояния $\mathbf{A}$ и управления $\mathbf{B}$. Известно, что матрица $\mathbf{B}$ имеет неполный ранг. Пусть $\mathbf{U}$ – матрица, составленная из первых двух блочных столбцов матрицы управляемости Калмана. Требуется доказать, что какова бы ни была матрица $\mathbf{A}$, справедливо тождество

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}^{RT} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{B}}^{RT} \end{bmatrix} \underbrace{[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}]}_{\mathbf{U}}^+ = \mathbf{0},$$

где $\bar{\mathbf{B}}^R$ – правый аннулятор матрицы $\mathbf{B}$.

Если ранг блочной матрицы $\mathbf{U}$ равен числу строк, псевдообращение можно выполнить по стандартной аналитической формуле (1):

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}]^+ = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}]^T (\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \end{bmatrix} (\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^{-1}.$$

В этом случае требуемое тождество легко доказываются по свойству $\bar{\mathbf{B}}^{RT} \mathbf{B}^T = (\mathbf{B}\bar{\mathbf{B}}^R)^T = \mathbf{0}$ правого аннулятора.

Однако матрица $\mathbf{A}$ может оказаться такой, что ранг блочной матрицы $\mathbf{U}$ останется меньше числа строк. Тогда появится левый аннулятор (максимального ранга) $\bar{\mathbf{U}}^L$, и формула (1) станет неприменимой. В то же время при использовании конструкции (4) *неочевидно*, что обе блочные строки псевдообратной матрицы $\mathbf{U}^+$ раскладываются на множители, причем крайним левым множителем в обоих случаях является матрица $\mathbf{B}^T$.

Применяя общую аналитическую формулу (7)

$$[\mathbf{B} \ ; \ \mathbf{AB}]^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \left(\mathbf{U} \mathbf{U}^T + \bar{\mathbf{U}}^L + (\bar{\mathbf{U}}^L)^T \right)^{-1},$$

независимо от значений матрицы $\mathbf{A}$ приходим к нужному результату.

Таким образом, данный пример демонстрирует устранение второго недостатка алгоритма (4) с помощью формулы (7).

Пример 3. *Задана пара матриц состояния $\mathbf{A}$ и наблюдения $\mathbf{C}$. Известно, что матрица $\mathbf{C}$ имеет неполный ранг. Пусть $\mathbf{N}$ – матрица, составленная из первых двух блочных строк матрицы наблюдаемости Калмана. Требуется доказать, что какова бы ни была матрица $\mathbf{A}$, справедливо тождество*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}^{LT} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \vdots & \bar{\mathbf{C}}^{LT} \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

$\mathbf{N}$

где $\bar{\mathbf{C}}^L$ – левый аннулятор матрицы $\mathbf{C}$.

Если ранг блочной матрицы $\mathbf{N}$ равен числу столбцов, псевдообращение можно выполнить по стандартной аналитической формуле (2):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^+ = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^T = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} [\mathbf{C}^T \ ; \ \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T].$$

В этом случае требуемое тождество легко доказываются по свойству $\mathbf{C}^T \bar{\mathbf{C}}^{LT} = (\bar{\mathbf{C}}^L \mathbf{C})^T = \mathbf{0}$ левого аннулятора.

Однако матрица $\mathbf{A}$ может оказаться такой, что ранг блочной матрицы $\mathbf{N}$ останется меньше числа столбцов. Тогда появится правый аннулятор (максимального ранга) $\bar{\mathbf{N}}^R$, и формула (2) станет неприменимой. В то же время при использовании конструкции (4) *неочевидно*, что оба блочные столбца псевдообратной матрицы $\mathbf{N}^+$ раскладываются на множители, причем крайним правым множителем в обоих случаях является матрица $\mathbf{C}^T$.

Применяя общую аналитическую формулу (8)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^+ = \left(\mathbf{N}^T \mathbf{N} + (\bar{\mathbf{N}}^{R+})^T \bar{\mathbf{N}}^{R+} \right)^{-1} [\mathbf{C}^T \ ; \ \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T],$$

независимо от значений матрицы $\mathbf{A}$ приходим к нужному результату.

Таким образом, данный пример демонстрирует устранение второго недостатка конструкции (4) с помощью формулы (8).

Выводы

В работе в явном виде получены и доказаны две взаимно дуальные аналитические формулы псевдообращения произвольных матриц с использованием левого

или правого матричного аннулятора. Данные формулы выводятся из существующего аналитического алгоритма псевдообращения, основанного на инвертировании расширенной матричной конструкции с последующим выделением из нее искомой псевдообратной матрицы. Доказательство осуществляется с помощью формул Фробениуса инвертирования блочных матриц.

Полученные формулы являются обобщением и расширением известных аналитических формул псевдообращения, справедливых только для матриц полного ранга. Обобщение распространяется на все без исключения матрицы, полного и неполного ранга, в том числе на вырожденные квадратные матрицы. Явный аналитический вид доказанных формул дает возможность наглядно анализировать результаты псевдообращения, что в общем случае затруднительно сделать при выделении псевдообратной матрицы из расширенной блочной конструкции. К любой матрице применимы обе доказанные формулы, что позволяет наглядно представлять структуру получаемой псевдообратной матрицы в виде правостороннего или левостороннего матричного произведения.

Благодаря отсутствию повышения размерности инвертируемых матриц и использованию только левого или только правого аннулятора (а не обоих сразу) каждая из двух доказанных формул оказывается проще в вычислительном плане по сравнению с существующим аналитическим алгоритмом. В существенной мере это проявляется при псевдообращении матриц большой размерности и в символьном виде.

В работе приведены примеры, подтверждающие эффективность применения обобщенных аналитических формул псевдообращения как по затратам вычислительного времени, так и по форме получаемых результатов.

Список источников

1. Ben-Israel A., Greville T.N. Generalized Inverses: Theory and Applications. New York : Springer, 2003. 420 p. (CMS Books in Mathematics; vol. 15). doi: 10.1007/b97366
2. Карелин А.Е., Светлаков А.А. Скелетные разложения прямоугольных матриц и их применение в структурной регуляризации плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 51–60.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. : Физматлит, 2010. 560 с.
4. Penrose R. On Best Approximate Solutions of Linear Matrix Equations // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1956. Vol. 52, is. 1. P. 17–19. doi: 10.1017/s0305004100030929
5. Зубов Н.Е., Лапин А.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Управление по выходу спектром линейной динамической системы на основе подхода Ван дер Вуда // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476, № 3. С. 260–263.
6. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Условия инвариантности динамической системы на основе регуляризации // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465, № 1. С. 20–22. doi: 10.7868/s0869565215310084
7. Мелешко В.И. Применение рекуррентных оптимальных оценок с псевдообращением в задачах идентификации // Автоматика и телемеханика. 1978. № 9. С. 79–89.
8. Желтов С.Ю., Каляев И.А., Косьянчук В.В. и др. Реконфигурация систем управления воздушных судов. М. : РАН, 2021. 204 с.
9. Погодаев А.К., Блюмин С.Л., Миловидов С.П. и др. Оптимизация. Псевдообращение. Итерации и рекурсии : учеб. пособие. Липецк : Изд-во ЛГТУ, 2015. 193 с.
10. Penrose R. A Generalized Inverse for Matrices // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1955. Vol. 51, is. 3. P. 406–413. doi: 10.1017/S0305004100030401

11. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М. : Наука, 1996. 304 с.
12. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М. : Наука, 1983. 336 с.
13. Zubov N.E., Lapin A.V., Ryabchenko V.N. Аналитический синтез модального регулятора по выходу для управления ориентацией спускаемого аппарата при спуске в атмосфере Земли // Известия вузов. Авиационная техника. 2019. № 3. С. 46–59.
14. Zubov N.E., Ryabchenko V.N. О вычислении псевдообратной матрицы. Общий случай // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 1. С. 16–25. doi: 10.18698/1812-3368-2018-1-16-25
15. Буков В.Н., Горюнов С.В. Обращение и канонизация блочных матриц // Математические заметки. 2006. Т. 79, № 5. С. 662–673. doi: 10.4213/mzm2738
16. Дьяконов В.П. MATLAB : полный самоучитель. М. : ДМК Пресс, 2012. 768 с.

References

1. Ben-Israel A., Greville T.N. (2003) *Generalized Inverses: Theory and Applications*. New York: Springer. DOI: 10.1007/b97366.
2. Karelin A.E., Svetlakov A.A. (2013) Skeletnyye razlozheniya pryamougol'nykh matrity i ikh primeneniye v strukturnoy regularizatsii plokho obuslovlennykh sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy [Skeleton decompositions of rectangular matrices and its application for structural regularization of ill-conditioned systems of linear algebraic equations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25), pp. 51–60.
3. Gantmacher F.R. (1980) *The Theory of Matrices*. New York: Chelsea Publishing Company.
4. Penrose R. (1956). On best approximate solutions of linear matrix equations. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 52(1), pp. 17–19. DOI: 10.1017/S0305004100030929.
5. Zubov N.E., Lapin A.V., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. (2017) Output control of the spectrum of a linear dynamic system in terms of the Van der Woude method. *Doklady Mathematics*. 96(2), pp. 457–460. DOI: 10.1134/S1064562417050179.
6. Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V.N. (2015) Invariance conditions for MIMO systems based on regularization. *Doklady Mathematics*. 92(3), pp. 664–666. DOI: 10.1134/S106456241506006X.
7. Meleshko V.I. (1978) Primeneniye rekurrentnykh optimal'nykh otsenok s psevdooobrashcheniyem v zadachakh identifikatsii [The use of recurrence optimal estimates with pseudoinversion in identification problems]. *Avtomatika i Telemekhanika*. 9, pp. 79–89.
8. Zheltov S.Yu., Kalyaev I.A., V.V. Kos'yanchuk et al. (2021) Rekonfiguratsiya sistem upravleniya vozдушnykh sudov [Reconfiguration of Aircraft Control Systems]. Moscow: Russian Academy of Sciences.
9. Pogodaev A.K., Blyumin S.L., Milovidov S.P. et al. (2015) Optimizatsiya. Psevdooobrashcheniye. Iteratsii i rekursii: uchebnoye posobiye. [Optimization. Pseudoinverse. Iterations and recursions: a study guide]. Lipetsk: Lipetsk State Technical University.
10. Penrose R. (1955) A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3), pp. 406–413. DOI: 10.1017/S0305004100030401.
11. Prasolov V.V. (1996) *Problems and Theorems in Linear Algebra*. American Mathematical Society.
12. Beklemishev D.V. (1983) *Dopolnitel'nyye glavy lineynoy algebrы* [Advanced linear algebra]. Moscow: Nauka.
13. Zubov N.E., Lapin A.V., Ryabchenko V.N. (2019) Analytical synthesis of a modal controller by output vector for attitude control of a descent module during its descent in the Earth's atmosphere. *Russian Aeronautics*. 62(3), pp. 401–416. DOI: 10.3103/S1068799819030073.
14. Zubov N.E., Ryabchenko V.N. (2018) O vychislenii psevdooobratnoy matrity. Obshchiy sluchay [On calculation of the pseudoinverse matrix. General case]. *Vestnik MGTU imeni N.E. Bauman. Seriya «Estestvennyye nauki» – Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*. 1, pp. 16–25. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-16-25.

15. Bukov V.N., Goryunov S.V. (2006) Inversion and canonization of block matrices. *Mathematical Notes*. 79. pp. 614–624. DOI: 10.1007/s11006-006-0070-2.
16. D'yakonov V.P. (2012) MATLAB. Polnyy samouchitel' [MATLAB. Complete tutorial]. Moscow: DMK Press.

Сведения об авторах:

Зубов Николай Евгеньевич – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры систем автоматического управления Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия) E-mail: Nik.Zubov@gmail.com

Лапин Алексей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры систем автоматического управления Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия) E-mail: AlexeyPoeme@yandex.ru

Information about the authors:

Zubov Nikolay E. (Prof., Dr. Sci. (Eng.), Professor of Automatic Control Systems Department at Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: Nik.Zubov@gmail.com

Lapin Alexey V. (Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor of Automatic Control Systems Department at Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: AlexeyPoeme@yandex.ru

The article was submitted 08.12.2023; accepted for publication 07.02.2025

Статья поступила в редакцию 08.12.2023; принята к публикации 07.02.2025