

Научная статья

УДК 512.552

MSC: 08A35, 15B99, 16S50

doi: 10.17223/19988621/93/3

Идемпотентные и ниль-чистые формальные матрицы второго порядка над кольцами вычетов

Анастасия Максимовна Королева¹,
Цырендоржи Дашацыренович Норбосамбуев²,
Максим Вадимович Подкорытов³

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

³ Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

¹ elfimova.nastya@bk.ru

² nstsddts@yandex.ru

³ maximthegreat@yandex.ru

Аннотация. Найдены необходимые и достаточные условия идемпотентности формальной матрицы второго порядка над кольцами вычетов по модулям степеней простого числа p , при этом выявилась интересная связь таких идемпотентных формальных матриц с числами Каталана. Также показано, что кольцо таких формальных матриц для всякого натурального числа k , меньшего $p - 1$, не является k -ниль-чистым. Ранее нами же было показано, что это кольцо формальных матриц является $(p - 1)$ -ниль-чистым.

Ключевые слова: кольцо формальных матриц, идемпотентная формальная матрица, ниль-чистое кольцо, кольцо контекста Мориты

Благодарности: Работа второго автора выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2024-1437).

Для цитирования: Королева А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М.В. Идемпотентные и ниль-чистые формальные матрицы второго порядка над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 30–40. doi: 10.17223/19988621/93/3

Original article

Idempotent and nil-clean formal matrices of order 2 over residue class rings

Anastasia M. Koroleva¹, Tsyrendorzhi D. Norbosambuev²,
Maxim V. Podkorytov³

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

³ Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

¹ elifimova.nastya@bk.ru

² nstsddts@yandex.ru

³ maximthegreate@yandex.ru

Abstract. Let us consider the set of formal matrices

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\}$$

over residue class rings $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$ and $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, where p is a prime, m and n are natural numbers, $m > n > 0$. For any matrices $A, A' \in K$, we define multiplication as follows:

$$\begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbf{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

With entrywise addition and multiplication introduced as above, the set K forms a ring.

It is known that a formal matrix from K is invertible if and only if its elements on the main diagonal are not multiples of p . It is also known that a formal matrix from K is nilpotent if and only if its elements on the main diagonal are multiples of p .

We call the sequence of natural numbers defined as follows Catalan numbers: $C_1 = 1$,

$$C_{k+1} = \sum_{i=1}^k C_i C_{k-i+1}, \text{ i.e. } C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 2, C_4 = 5, C_5 = 14, C_6 = 42 \text{ and so on.}$$

The following theorem is the main result of our paper.

Theorem 1.2. Matrix A is a nontrivial idempotent of K if and only if A has the form

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{v+1} + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & \sigma_v + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ or } A = \begin{pmatrix} \sigma_{v+1} + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & 1 - \sigma_v + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

where $b, c \in \mathbf{Z}$, $v = \left\lceil \frac{n-1}{m-n} \right\rceil$, $\sigma_v = \sum_{k=1}^v C_k (p^{m-n}bc)^k$, where C_i are Catalan numbers.

Note that v here can be equal to 0 (then $\sigma_v = 0$).

Corollary 2.2. The ring K is not a k -nil-clean ring for any natural number k such that $k < p - 1$.

Keywords: formal matrix ring, idempotent formal matrix, nil-clean ring, Morita context ring

Acknowledgments: The work of the second author was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2024-1437) (Norbosambuev T.D.).

For citation: Koroleva, A.M., Norbosambuev, T.D., Podkorytov, M.V. (2025) Idempotent and nil-clean formal matrices of order 2 over residue class rings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 30–40. doi: 10.17223/19988621/93/3

Введение

Данная работа является продолжением статьи [1], и обе они развивают идеи, изложенные в статьях [2] и [3].

Как обычно, через $E(G)$ обозначаем кольцо эндоморфизмов абелевой группы G , через $U(R)$ – группу обратимых элементов кольца R , через $M(n, R)$ – кольцо всех

квадратных матриц порядка n над кольцом R , через $\mathbf{Z}$ – кольцо (и группу) целых чисел, через $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ – кольцо (и группу) вычетов по модулю p^n , символ ■ означает конец доказательства или его отсутствие.

Напомним кратко о том, как устроены интересующие нас кольца формальных матриц. Пусть p – некоторое простое число, m и n – натуральные числа и $m > n > 0$. Рассмотрим множество формальных матриц

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Для любых $A, A' \in K$ зададим умножение по правилу

$$\begin{aligned} A \cdot A' &= \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbf{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Можно проверить, что относительно поэлементного сложения и умножения, введенного выше, множество K образует кольцо. Его называют кольцом формальных матриц второго порядка над кольцами вычетов $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ и обозначают

$$K = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \text{ Подробнее см.: [1–4].}$$

Справедлив следующий критерий обратимости в кольце K : матрица

$$A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in K \text{ обратима в том и только в том случае, когда } a \text{ и } d \text{ не}$$

кратны p .

Вдохновляясь работами А.Ю. Степановой, Е.А. Тимошенко [3] и П.А. Крылова, А.А. Туганбаева [4, 5], мы в предыдущей своей статье [1] показали, что матрица $A \in K$ нильпотентна тогда и только тогда, когда числа a и d делятся на p . То есть нильпотентные формальные матрицы образуют идеал в K , что, вообще говоря, нехарактерно для некоммутативных колец. Используя критерий нильпотентности, мы показали, что K является $(p-1)$ -ниль-чистым кольцом. Еще одно очевидное замечание: если матрица $A \in K$ не нильпотентна и необратима, то один из ее элементов на главной диагонали должен быть кратен p , а другой – не кратен.

Центральный результат этой работы – теорема 1.2, дающая полное описание идемпотентных матриц в кольце K . Из нее вытекает следствие 2.2 о том, что кольцо K не является k -ниль-чистым ни для какого k такого, что $0 < k < p-1$.

1. Идемпотентные матрицы над кольцами вычетов

Определение 1.1. Элемент e кольца R называется идемпотентным (или просто идемпотентом), если $e^2 = e$. Идемпотент, отличный от 0 и 1, называем нетривиальным идемпотентом.

Ранее нами была поставлена задача нахождения необходимых и достаточных условий идемпотентности формальных матриц в K [1. Проблема 3.8]. При ее решении выявилась очень интересная связь идемпотентных формальных матриц второго порядка над кольцами вычетов с числами Каталана.

Мы называем числами Каталана последовательность натуральных чисел, заданную рекуррентным соотношением: $C_1 = 1$, $C_{k+1} = \sum_{i=1}^k C_i C_{k-i+1}$. То есть $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 2$, $C_4 = 5$, $C_5 = 14$, $C_6 = 42$ и т.д. Заметим, что часто нумерацию последовательности Каталана начинают не с 1, как это делаем мы, а с 0: $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, $C_5 = 42$ и т.д.

Теорема 1.2. Матрица A – нетривиальный идемпотент в K тогда и только тогда, когда A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{v+1} + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & \sigma_v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} \sigma_{v+1} + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & 1 - \sigma_v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где $b, c \in \mathbf{Z}$, $v = \left\lfloor \frac{n-1}{m-n} \right\rfloor$, $\sigma_v = \sum_{k=1}^v C_k (p^{m-n} bc)^k$, C_i – числа Каталана. Отметим,

что при $m \geq 2n$ индекс v равен 0. В таком случае считаем, что $\sigma_v = 0$.

Доказательство. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, – нетривиальный идемпотент кольца K . Тогда матрица A необратима и не нильпотентна, т.е. p делит или a , или d , но не одновременно, как отмечалось выше. Договоримся называть те идемпотентные матрицы, в которых p не делит a , но делит d , идемпотентными матрицами первого типа, а те, в которых p делит a , но не делит d , – идемпотентными матрицами второго типа.

Сначала рассмотрим случай, относящийся ко второму типу, т.е. когда $a = px$ и $d = t + py$, где $t, x, y \in \mathbf{Z}$ и $0 < t < p$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} p^2 x^2 + p^{m-n} bc + p^m \mathbf{Z} & ab + bd + p^n \mathbf{Z} \\ ac + cd + p^n \mathbf{Z} & p^{m-n} bc + (t + py)^2 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ & = A^2 = A = \begin{pmatrix} px + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & t + py + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} p^2 x^2 + p^{m-n} bc + p^m \mathbf{Z} = px + p^m \mathbf{Z}, \\ b(a + d) + p^n \mathbf{Z} = b + p^n \mathbf{Z}, \\ c(a + d) + p^n \mathbf{Z} = c + p^n \mathbf{Z}, \\ p^{m-n} bc + (t + py)^2 + p^n \mathbf{Z} = t + py + p^n \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно, что решение системы (1) равносильно решению системы сравнений

$$\begin{cases} p^2 x^2 + p^{m-n} bc \equiv px \pmod{p^m}, \\ b(a + d) \equiv b \pmod{p^n}, \\ c(a + d) \equiv c \pmod{p^n}, \\ p^{m-n} bc + (t + py)^2 \equiv t + py \pmod{p^n}. \end{cases} \quad (2)$$

Получим ее решение, но прежде покажем, что $t = 1$. Рассмотрим последнее сравнение системы (2):

$$p^{m-n}bc + (t + py)^2 \equiv t + py \pmod{p^n},$$

Помня, что $0 < t < p$, можем без потери общности перейти к сравнению по модулю p вместо p^n . Тогда останется

$$t^2 \equiv t \pmod{p}.$$

Из последнего сравнения следует, что $t = 1$, а значит, $d = 1 + py$.

Введем обозначение $N = m - n$. Заметим, что $1 \leq N \leq m - 1$. Теперь вернемся к системе (2) и рассмотрим ее первое сравнение:

$$\begin{aligned} p^2x^2 + p^Nbc &\equiv px \pmod{p^m}, \\ px^2 + p^{N-1}bc - x &\equiv 0 \pmod{p^{m-1}}. \end{aligned}$$

Найдем решение последнего сравнения, показав по индукции, что для всякого натурального числа s , если x является решением сравнения $px^2 + p^{N-1}bc - x \equiv 0 \pmod{p^s}$,

$$\text{то } x \equiv \sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k \pmod{p^s}.$$

Пусть $s = 1$. Тогда $x \equiv p^{N-1}bc \pmod{p}$, что и требуется.

Пусть теперь $s \geq 1$ и $x \equiv \sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k \pmod{p^s}$. Покажем, что отсюда

следует, что если x – решение сравнения $px^2 + p^{N-1}bc - x \equiv 0 \pmod{p^{s+1}}$, то

$$x \equiv \sum_{k=1}^{s+1} C_k p^{Nk-1} (bc)^k \pmod{p^{s+1}}.$$

Для некоторого $z \in \mathbf{Z}$ имеем

$$\begin{aligned} px^2 &= p \left(\sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k + p^s z \right)^2 = \\ &= p \left(\sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k \right)^2 + p^{s+1} \cdot 2 \sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k z + p^{2s+1} z^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим $\left(\sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k \right)^2$. Для всякого $k \in \{2, 3, \dots, s+1\}$ коэффициент при p^{Nk-2} равен

$$\sum_{i=1}^{k-1} C_i (bc)^i C_{k-i} (bc)^{k-i} = (bc)^k \sum_{i=1}^{k-1} C_i C_{k-i} = (bc)^k C_k.$$

Действительно, так как

$$\left(\sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k \right)^2 = \left(C_1 p^{N-1} bc + C_2 p^{2N-1} (bc)^2 + \dots + C_s p^{Ns-1} (bc)^s \right)^2,$$

то:

если $k = 2$, то коэффициент при p^{2N-2} равен $C_1bc \cdot C_1bc = (bc)^2 C_1^2 = (bc)^2 C_2$;

если $k = 3$, то коэффициент при p^{3N-2} равен

$$C_1bc \cdot C_2(bc)^2 + C_2(bc)^2 \cdot C_1bc = (bc)^3 (C_1C_2 + C_2C_1) = (bc)^3 \sum_{i=1}^2 C_i C_{2-i+1} = (bc)^3 C_3;$$

...

если $k = s + 1$, то коэффициент при $p^{N(s+1)-2}$ равен

$$\begin{aligned} & C_1bc \cdot C_s(bc)^s + C_2(bc)^2 \cdot C_{s-1}(bc)^{s-1} + \dots + C_s(bc)^s \cdot C_1bc = \\ & = (bc)^{s+1} (C_1C_s + C_2C_{s-1} + \dots + C_sC_1) = (bc)^{s+1} \sum_{i=1}^s C_i C_{s-i+1} = (bc)^{s+1} C_{s+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\left(\sum_{k=1}^s C_k p^{Nk-1} (bc)^k \right)^2 = \sum_{k=2}^{s+1} C_k p^{Nk-2} (bc)^k + M$, где, очевидно, M делится на $p^{N(s+2)-2}$. Тогда сравнение $px^2 + p^{N-1}bc - x \equiv 0 \pmod{p^{s+1}}$ примет вид:

$$p \sum_{k=2}^{s+1} C_k p^{Nk-2} (bc)^k + pM + p^{N-1}bc - x \equiv 0 \pmod{p^{s+1}},$$

$$\sum_{k=1}^{s+1} C_k p^{Nk-1} (bc)^k + pM - x \equiv 0 \pmod{p^{s+1}}.$$

Так как pM делится на $p^{N(s+2)-1}$, то pM делится и на p^{s+1} в силу того, что $N(s+2) - 1 \geq s + 1$ (так как $N(s+2) \geq s + 2$). Тогда

$$x \equiv \sum_{k=1}^{s+1} C_k p^{Nk-1} (bc)^k \pmod{p^{s+1}}.$$

Итак, индукция завершена.

Тогда решение сравнения $px^2 + p^{N-1}bc - x \equiv 0 \pmod{p^{m-1}}$ имеет вид:

$$x + p^{m-1}Z = \sum_{k=1}^{m-1} C_k p^{Nk-1} (bc)^k + p^{m-1}Z. \text{ Значит,}$$

$$a + p^m Z = px + p^m Z = p \left(\sum_{k=1}^{m-1} C_k p^{Nk-1} (bc)^k \right) + p^m Z = \sum_{k=1}^{m-1} C_k p^{Nk} (bc)^k + p^m Z.$$

Так как $N = m - n$ и $(m-n) \left(\left\lceil \frac{m-1}{m-n} \right\rceil + 1 \right) \geq m$, то в предыдущей сумме можем

оставить только слагаемые с номерами не больше $\left\lceil \frac{m-1}{m-n} \right\rceil$. Обозначим число

$$\left\lceil \frac{m-1}{m-n} \right\rceil \text{ через } \mu, \text{ тогда } a + p^m Z = \sum_{k=1}^{\mu} C_k (p^{m-n} bc)^k + p^m Z.$$

Возвращаясь к системе (2), рассмотрим последнее сравнение

$$p^{m-n}bc + (1 + py)^2 \equiv 1 + py \pmod{p^n},$$

$$p^{m-n}bc + 1 + 2py + p^2y^2 \equiv 1 + py \pmod{p^n},$$

$$py^2 + p^{m-n-1}bc + y \equiv 0 \pmod{p^{n-1}}.$$

Полагая $y = -q$, получим $pq^2 + p^{m-n-1}bc - q \equiv 0 \pmod{p^{n-1}}$. Выше показано,

что решение данного сравнения имеет вид: $q + p^{n-1}\mathbf{Z} = \sum_{k=1}^{n-1} C_k p^{Nk-1} (bc)^k + p^{n-1}\mathbf{Z}$.

В силу неравенства $(m-n) \left(\left\lceil \frac{n-1}{m-n} \right\rceil + 1 \right) \geq n$ можем заметить, что p^{Nk} делится на p^n ,

если номер k больше, чем $v = \left\lfloor \frac{n-1}{m-n} \right\rfloor$. Тогда получаем

$$d + p^n\mathbf{Z} = 1 + py + p^n\mathbf{Z} = 1 - pq + p^n\mathbf{Z} = 1 - \sum_{k=1}^v C_k (p^{m-n}bc)^k + p^n\mathbf{Z}.$$

Заметим, что $v+1 = \left\lfloor \frac{n-1}{m-n} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{n-1}{m-n} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{m-1}{m-n} \right\rceil = \mu$. Поэтому далее от обозначения μ откажемся и будем писать только v и $v+1$ там, где нужно.

Таким образом, мы показали, что если $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$ – нетривиальный идемпотент кольца K , для которого a делится на p , а d не делится, то

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_{v+1} + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & 1 - \sigma_v + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \text{ где } \sigma_v = \sum_{k=1}^v C_k (p^{m-n}bc)^k.$$

Обратно, пусть $A = \begin{pmatrix} \sigma_{v+1} + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & 1 - \sigma_v + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$. Тогда

$$A^2 = \begin{pmatrix} \sigma_{v+1}^2 + p^{m-n}bc + p^m\mathbf{Z} & \sigma_{v+1}b + b(1 - \sigma_v) + p^n\mathbf{Z} \\ c\sigma_{v+1} + (1 - \sigma_v)c + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb + (1 - \sigma_v)^2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\sigma_{v+1}^2 + p^{m-n}bc + p^m\mathbf{Z} = \sigma_{v+1} + p^m\mathbf{Z}$. Для этого рассмотрим σ_{v+1}^2 . Аналогично рассуждениям выше,

$$\sigma_{v+1}^2 = \left(\sum_{k=1}^{v+1} C_k p^{(m-n)k} (bc)^k \right)^2 = \sum_{k=2}^{v+1} C_k p^{(m-n)k} (bc)^k + M,$$

где M делится на $p^{(m-n)(v+2)}$, а значит, делится и на p^m . Тогда

$$\sigma_{v+1}^2 + p^{m-n}bc + p^m\mathbf{Z} = \sum_{k=2}^{v+1} C_k (p^{m-n}bc)^k + M + p^{m-n}bc + p^m\mathbf{Z} =$$

$$= \sum_{k=1}^{v+1} C_k (p^{m-n}bc)^k + p^m \mathbf{Z} = \sigma_{v+1} + p^m \mathbf{Z}.$$

Теперь покажем, что $\sigma_{v+1} - \sigma_v + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{v+1} - \sigma_v + p^n \mathbf{Z} &= \sum_{k=1}^{v+1} C_k (p^{m-n}bc)^k - \sum_{k=1}^v C_k (p^{m-n}bc)^k + p^n \mathbf{Z} = \\ &= C_{v+1} (p^{m-n}bc)^{v+1} + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Значит, $b(1 + \sigma_{v+1} - \sigma_v) + p^n \mathbf{Z} = b + p^n \mathbf{Z}$ и $c(1 + \sigma_{v+1} - \sigma_v) + p^n \mathbf{Z} = c + p^n \mathbf{Z}$.

Далее, $p^{m-n}bc + (1 - \sigma_v)^2 + p^n \mathbf{Z} = p^{m-n}bc + 1 - \sigma_v - \sigma_v + \sigma_v^2 + p^n \mathbf{Z}$. Мы только что показали, что σ_{v+1} и σ_v совпадают по модулю p^n . Тогда $\sigma_v^2 + p^{m-n}bc + p^n \mathbf{Z} = \sigma_v + p^n \mathbf{Z}$ и, следовательно, $p^{m-n}bc + (1 - \sigma_v)^2 + p^n \mathbf{Z} = 1 - \sigma_v + p^n \mathbf{Z}$.

Таким образом, $A^2 = A$, то есть матрица A является идемпотентом.

Наконец, осталось рассмотреть случай, относящийся к первому типу, когда в идемпотентной матрице $A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$ число a не кратно p , а d кратно.

Заметим, что $(-b)(-c) = bc$ для любых целых b и c . По сути, $\sigma_v = \sum_{k=1}^v C_k (p^{m-n}bc)^k$ — функция от произведения чисел bc . Тогда для любых целых чисел b и c у идемпотентных матриц

$$\begin{pmatrix} \sigma_{v+1} + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & 1 - \sigma_v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ и } A' = \begin{pmatrix} \sigma'_{v+1} + p^m \mathbf{Z} & -b + p^n \mathbf{Z} \\ -c + p^n \mathbf{Z} & 1 - \sigma'_v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$$

совпадают элементы на главной диагонали, и мы можем записать $\sigma_v = \sigma'_v$, $\sigma_{v+1} = \sigma'_{v+1}$.

Пусть $A \in K$ — нетривиальный идемпотент, относящийся к первому типу, у которого элемент, стоящий в левом верхнем углу, не делится на p , а элемент в нижнем правом — делится. Тогда A есть в точности матрица $E - A'$, где A' — идемпотент второго типа. Так как общий вид идемпотентов второго типа уже найден, в силу сказанного в предыдущем абзаце имеем

$$\begin{aligned} E - A' &= \begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 1 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_{v+1} + p^m \mathbf{Z} & -b + p^n \mathbf{Z} \\ -c + p^n \mathbf{Z} & 1 - \sigma_v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \sigma_{v+1} + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & \sigma_v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} = A, \end{aligned}$$

т.е. идемпотенты первого типа также имеют требуемый в теореме вид. ■

Следствие 1.3. Число нетривиальных идемпотентных матриц кольца K равно $2p^{2n}$.

Доказательство. Нетривиальные идемпотентные матрицы в K определяются элементами, стоящими на побочной диагонали. Число всех возможных комбинаций двух элементов из $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ равно p^{2n} . Есть два типа идемпотентных матриц. Итого получается $2p^{2n}$ различных идемпотентов. ■

Замечание 1.4. При $v = 0$ общий вид нетривиальной идемпотентной матрицы $A \in K$ заметно упрощается:

$$A = \begin{pmatrix} p^{m-n}bc + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & 1 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = \begin{pmatrix} 1 - p^{m-n}bc + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & 0 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где $b, c \in \mathbf{Z}$. ■

2. Ниль-чистые и k -ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов

Напомним, что элемент кольца называем *ниль-чистым*, если его можно представить как сумму идемпотентного и нильпотентного элементов кольца. Кольцо называем *ниль-чистым*, если все его элементы ниль-чисты. Соответственно, элемент кольца называем *k -ниль-чистым*, если его можно разложить в сумму одного нильпотентного и k идемпотентных элементов кольца, где k – натуральное число. Кольцо называем *k -ниль-чистым*, если все его элементы k -ниль-чисты.

Замечание 2.1. Очевидным образом из ниль-чистоты как для отдельного элемента, так и для всего кольца следует k -ниль-чистота, $k > 1$. ■

Больше о свойствах, похожих на k -ниль-чистоту, см., напр.: [6–8].

В нашей предыдущей работе [1] мы показали, что кольцо K формальных матриц над кольцами вычетов является $(p-1)$ -ниль-чистым. Там же мы задались вопросом: может ли K быть ниль-чистым кольцом при $p > 2$ [1. Вопрос 3.7]? Следующий результат, вытекающий из теоремы 1.2, дает ответ на этот вопрос.

Следствие 2.2. Кольцо K не является k -ниль-чистым кольцом ни для какого натурального числа k такого, что $k < p-1$.

Доказательство. Пусть $A = \begin{pmatrix} p-1 + p^m\mathbf{Z} & 0 + p^n\mathbf{Z} \\ 0 + p^n\mathbf{Z} & 0 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in K$. Предположим, что

A – k -ниль-чистая матрица, т.е. найдутся нильпотентная матрица B и идемпотентные матрицы $C_1, \dots, C_k$ такие, что $A = B + C_1 + \dots + C_k$.

Поскольку B – нильпотентная матрица, то $B = \begin{pmatrix} px + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & py + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$, где

$x, y, b, c \in \mathbf{Z}$. Допустим, что среди идемпотентов $C_1, \dots, C_k$ есть r единичных матриц, s матриц первого типа и t матриц второго типа, а остальные матрицы – нулевые; здесь r, s, t – неотрицательные целые и $0 \leq r + s + t \leq k < p-1$. Тогда

$$p-1 + p^m\mathbf{Z} = px + r + s - \sum_{i=1}^s (\sigma_{v+1})_i + \sum_{j=1}^t (\sigma_{v+1})_j + p^m\mathbf{Z},$$

откуда следует, что

$$s + r + 1 \equiv p - px + \sum_{i=1}^s (\sigma_{v+1})_i - \sum_{j=1}^t (\sigma_{v+1})_j \pmod{p^m},$$

где все слагаемые вида σ_{v+1} , конечно, кратны p . Однако $s + r + 1$ не делится на p , так как $0 < s + r + 1 < p$. Значит, матрицу A нельзя представить в виде суммы нильпотентной и k идемпотентных матриц кольца K , то есть матрица A не k -ниль-

чиста. Следовательно, кольцо K не является k -ниль-чистым ни для какого $0 < k < p - 1$. ■

Следствие 2.3. Если p – простое число и $p > 2$, то кольцо K не является ниль-чистым. ■

Список источников

1. Елфимова А.М., Норбосамбиев Ц.Д., Подкорытов М.В. Нильпотентные, ниль-хорошие и ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 31–40. doi: 10.17223/19988621/91/3
2. Норбосамбиев Ц.Д. Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 32–42. doi: 10.17223/19988621/85/3
3. Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 30–42. doi: 10.17223/19988621/74/4
4. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. М. : МЦНМО, 2017.
5. Крылов П.А. Определители обобщенных матриц порядка 2 // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. № 5 (20). С. 95–112.
6. Diesl A.J. Nil clean rings // J. Algebra. 2013. V. 383. P. 197–211. doi: 10.1016/j.jalgebra.2013.02.020
7. Călugăreanu G., Lam T.Y. Fine rings: A new class of simple rings // J. Algebra Appl. 2016. V. 15 (9). Art. 1650173. doi: 10.1142/S0219498816501735
8. Danchev P. Nil-good unital rings // Int. J. Algebra. 2016. V. 10 (5). P. 239–252. doi: 10.12988/ija.2016.6212

References

1. Elfimova A.M., Norbosambuev T.D., Podkorytov M.V. (2024) Nil'potentnyye, nil'-khoroshiye i nil'-chistyye formal'nyye matritsy nad kol'tsami vychetov [Nilpotent, nil-good, and nil-clean formal matrices over residue class rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 31–40. DOI: 10.17223/19988621/91/3.
2. Norbosambuev T.D. (2023) Khoroshiye kol'tsa formal'nykh matrits nad kol'tsami vychetov [Good formal matrix rings over residue class rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 32–42. DOI: 10.17223/19988621/85/3.
3. Stepanova A.Yu., Timoshenko E.A. (2021) Matrichnoye predstavleniye endomorfizmov primarnykh grupp malykh rangov [Matrix representation of endomorphisms of primary groups of small ranks]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 30–42. DOI: 10.17223/19988621/74/4.
4. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal Matrices*. (Algebra and Applications, Vol. 23). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-53907-2.
5. Krylov P.A. (2018) Determinants of generalized matrices of order 2. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 230(3). pp. 414–427. DOI: 10.1007/s10958-018-3748-6.
6. Diesl A.J. (2013) Nil clean rings. *Journal of Algebra*. 383. pp. 197–211. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.02.020.
7. Călugăreanu G., Lam T.Y. (2016) Fine rings: A new class of simple rings. *Journal of Algebra and Its Applications*. 15(9). Article ID: 1650173. DOI: 10.1142/S0219498816501735.

8. Danchev P. (2016) Nil-good unital rings. *International Journal of Algebra*. 10(5). pp. 239–252. DOI: 10.12988/ija.2016.6212.

Сведения об авторах:

Королева Анастасия Максимовна – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета; ассистент кафедры общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: elfimova.nastya@bk.ru

Норбосамбуев Цырендоржи Дашацыренович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета; доцент кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nstsddts@yandex.ru

Подкорытов Максим Вадимович – студент механико-математического факультета Новосибирского государственного университета (Новосибирск, Россия). E-mail: maximthegreate@yandex.ru

Information about the authors:

Koroleva Anastasia M. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: elfimova.nastya@bk.ru

Norbosambuev Tsyrendorzhi D. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nstsddts@yandex.ru

Podkorytov Maxim V. (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: maximthegreate@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 15.10.2024; принята к публикации 07.02.2025

The article was submitted 15.10.2024; accepted for publication 07.02.2025