

Научная статья

УДК 519.6:532.516

MSC: 93A30

doi: 10.17223/19988621/93/4

Математическая модель динамики биогеохимических процессов в пресноводном озере с учетом кислорода при развитии термобара

Баир Олегович Цыденов¹, Дмитрий Владимирович Деги²,
Андрей Андреевич Барт³, Никита Сергеевич Трунов⁴,
Владислава Васильевна Чуруксаева⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ tsydenov@math.tsu.ru

² dimadegi@rambler.ru

³ bart@math.tsu.ru

⁴ suslayndel@yandex.ru

⁵ chu.vv@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена описанию негидростатической математической модели для воспроизведения биогеохимических процессов в пресноводном озере во время развития термобара с учетом динамики растворенного кислорода. Параметризация поступления атмосферного кислорода в озеро реализована через растворимость кислорода в воде и изменчивость скорости ветра на поверхности водоема. Биохимическая циркуляция кислорода описывается процессами фотосинтеза, дыхания, нитрификации и реминерализации. С помощью предложенной модели получены данные по распределению нитратов, аммония, фосфатов, фито- и зоопланктона для условий Баргузинского залива озера Байкал в период существования весеннего термобара.

Ключевые слова: термобар, растворенный кислород, биогеохимический цикл, математическая модель, численный эксперимент, экосистема водоема, озеро Байкал

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10020, <https://www.rscf.ru/project/23-71-10020/>

Для цитирования: Цыденов Б.О., Деги Д.В., Барт А.А., Трунов Н.С., Чуруксаева В.В. Математическая модель динамики биогеохимических процессов в пресноводном озере с учетом кислорода при развитии термобара // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 41–57. doi: 10.17223/19988621/93/4

A mathematical model of the dynamics of biogeochemical processes in a freshwater lake including oxygen circulation with the development of the thermal bar

Bair O. Tsydenov¹, Dmitriy V. Degi², Andrey A. Bart³,
Nikita S. Trunov⁴, Vladislava V. Churuksaeva⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ tsydenov@math.tsu.ru

² dimadegi@rambler.ru

³ bart@math.tsu.ru

⁴ suslayndel@yandex.ru

⁵ chu.vv@mail.ru

Abstract. In this paper, a nonhydrostatic mathematical model is described for reproducing hydrophysical and biogeochemical processes including the dynamics of dissolved oxygen in a freshwater lake during the thermal bar. The biogeochemical part of the model includes the following variables: oxygen, nitrate, ammonium, phosphate, chlorophyll a, phytoplankton, zooplankton, and small and large detritus. The oxygen supply from the atmosphere to the lake is parameterized taking into account the solubility of oxygen in water and the variability of wind speed on the lake surface. The biochemical dynamics of oxygen are described by processes of photosynthesis, respiration, nitrification, and remineralization. The solution of reaction–convection–diffusion equations of the model is based on the finite volume method with the use of second-order implicit difference schemes in space and time.

The results of simulation showed that the highest level of dissolved oxygen was observed in the thermoactive area on the surface of the lake. The concentration of dissolved oxygen was high throughout the entire depth (due to intense mixing of waters with different temperatures) in the vicinity of the thermal bar, isolines of oxygen were qualitatively similar to isotherms in the estuary region. The content of ammonium supplied with the tributary waters was maximum at the confluence of the river, and in the thermoactive area in front of the thermal bar it decreased due to the growth of phytoplankton biomass. Qualitatively, the distribution patterns of nitrates and phosphates in the thermoinert area were identical.

Keywords: thermal bar, biogeochemical cycle, dissolved oxygen, mathematical model, numerical experiment, lake ecosystem, Lake Baikal

Acknowledgments: This study was funded by the Russian Science Foundation (project No.23-71-10020, <https://www.rscf.ru/en/project/23-71-10020/>)

For citation: Tsydenov, B.O., Degi, D.V., Bart, A.A., Trunov, N.S., Churuksaeva, V.V. (2025) A mathematical model of the dynamics of biogeochemical processes in a freshwater lake including oxygen circulation with the development of the thermal bar. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 41–57. doi: 10.17223/19988621/93/4

Введение

Количество растворенного кислорода – один из ключевых индикаторов качества воды. Кислородный режим водоемов формируется под влиянием гидрофизических, гидрохимических и гидробиологических процессов [1]. Растворенный кислород пополняется за счет контакта с атмосферой, фотосинтеза, расходуется при дыхании живых организмов и окислении органических веществ, а также участвует в других химических реакциях [2]. Основными потребителями кислорода являются фито-, бактерио- и зоопланктонные сообщества, причем на долю последних приходится 5–34% [3].

Несмотря на существенное ускорение темпов изменений, происходящих в водоемах за последние десятилетия, динамика концентрации растворенного кислорода в Байкале остается стабильной на суточном и сезонном масштабах [4]. Деятельность человека оказывает негативное влияние на качество воды главным образом в прибрежной зоне оз. Байкал (например, в дельте р. Селенги [5]), так как основным источником антропогенных и биогенных загрязнителей являются воды притоков, аккумулирующие в себе городские и промышленные стоки водосборного бассейна. Вертикальное перемешивание при разрушении стратификации способствует переносу биогенных элементов из нижних слоев в фотический, что может спровоцировать всплеск цветения воды [6].

В Байкале между поверхностными и глубинными водами существует обмен за счет вертикальных присклоновых циркуляций, плотностного перемешивания на фронте термобара [7, 8]. Исследования микробиологического состава вод Байкала во время развития весеннего термобара свидетельствуют о высоких концентрациях гетеротрофных бактерий и хлорофилла в присклоновых областях, а также на глубинах 400–600 и 900–1 100 м [9]. Прогрев солнечной энергией прибрежных вод весной активизирует рост растительности и многие химические и биологические процессы. Измерения, регулярно проводящиеся на Байкале, показывают, что органическое вещество в нем распределено неравномерно как в фотическом слое, где оно потребляется водорослями, так и в глубоководных частях [4].

При создании математических моделей для исследования биогеохимических циклов в пресноводных экосистемах наряду с лимитирующими рост организмов биогенными элементами – азотом и фосфором – важно рассматривать и первейший индикатор гидробиологических процессов – растворенный кислород, уровень которого аномально растет при интенсивном фотосинтезе (в результате поступления большого количества этих элементов) и резко падает при чрезмерном вымирании фитопланктона. Настоящая работа нацелена на разработку и описание математической модели для воспроизведения биогеохимических процессов в пресноводном озере с учетом динамики растворенного кислорода во время развития весеннего термобара (на примере Баргузинского залива оз. Байкал).

Математическая модель

Предложенная математическая модель основана на моделях цикла азота [10], фосфора [11], кислорода [12] и включает в себя следующие переменные: кислород (O_2), нитрат (NO_3), аммоний (NH_4), фосфат (PO_4), хлорофилл *a*, фитопланктон, зоопланктон, крупный и мелкий детрит. Циркуляция растворенного кислорода

в водоеме осуществляется через кислородный обмен с атмосферой, биогеохимические процессы и физический транспорт. Параметризация поступления атмосферного кислорода в озеро реализована с учетом растворимости кислорода в воде [13] и скорости ветра на поверхности водоема [14]. Биохимическая динамика кислорода описывается процессами фотосинтеза, дыхания, нитрификации и реминерализации. Приведенная на рис. 1 схематическая диаграмма иллюстрирует связи между компонентами модели (рис. 1, а), а также физико-биогеохимические процессы, ответственные за круговорот кислорода в водоеме (рис. 1, б). Физический транспорт кислорода в озеро реализован на основе термогидродинамической модели, включающей в себя уравнения неразрывности, количества движения, энергии, турбулентных характеристик и др. [15].

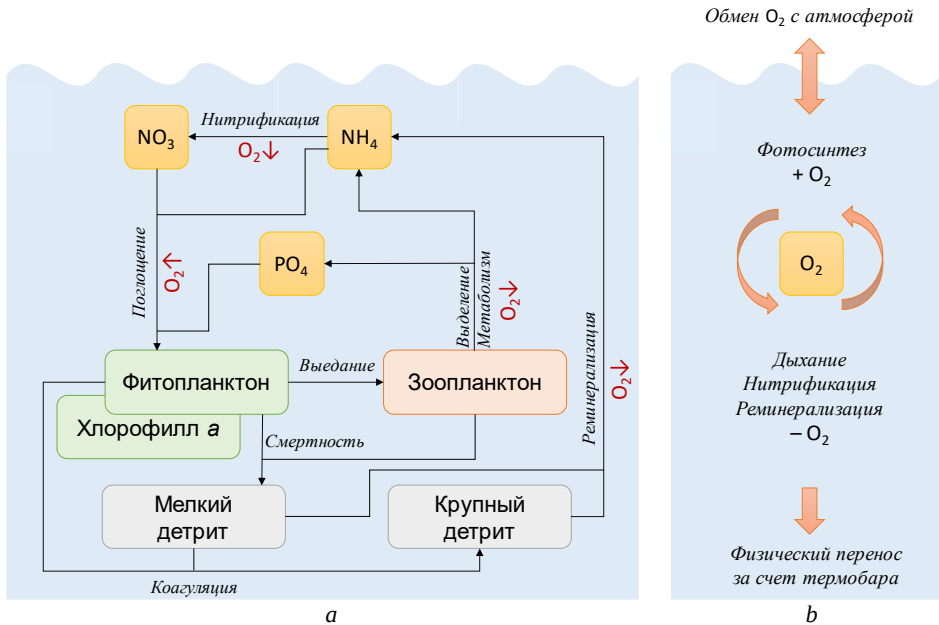


Рис. 1. Схема, демонстрирующая связи между компонентами модели (а) и физико-биогеохимические процессы, ответственные за циркуляцию кислорода в водоеме (б)

Fig. 1. (a) Schematic showing connections between model components and (b) physical and biogeochemical processes responsible for oxygen circulation in a lake

Биогеохимические процессы в пресноводном озере описываются с помощью реакционно-конвективно-диффузионных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\text{NO}_3]}{\partial t} + \frac{\partial u[\text{NO}_3]}{\partial x} + \frac{\partial w[\text{NO}_3]}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial [\text{NO}_3]}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial [\text{NO}_3]}{\partial z} \right) - \\ &- \mu_{\max}(T) f(I) \frac{L_{\text{NO}_3}}{L_N} \min(L_N, L_P) [\text{Phyto}] + L_{\text{O}_2} n [\text{NH}_4]; \\ \frac{\partial [\text{NH}_4]}{\partial t} + \frac{\partial u[\text{NH}_4]}{\partial x} + \frac{\partial w[\text{NH}_4]}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial [\text{NH}_4]}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial [\text{NH}_4]}{\partial z} \right) - \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 & -\mu_{\max}(T)f(I)\frac{L_{NH_4}}{L_N}\min(L_N, L_P)[Phyto]-L_{O_2}\eta[NH_4]+ \\
 & +\left(l_{BM}+l_E\frac{[Phyto]^2}{k_{phyto}+[Phyto]^2}\beta\right)[Zoo]+L_{O_2}(r_{SD}[SD]+r_{LD}[LD]);
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[PO_4]}{\partial t}+\frac{\partial u[PO_4]}{\partial x}+\frac{\partial w[PO_4]}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial[PO_4]}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial[PO_4]}{\partial z}\right)- \\
 -\theta_{N:P}^{-1}\mu_{\max}(T)f(I)\min(L_N, L_P)[Phyto]+
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 & +\theta_{N:P}^{-1}\left(l_{BM}+l_E\frac{[Phyto]^2}{k_{phyto}+[Phyto]^2}\beta\right)[Zoo]+\theta_{N:P}^{-1}L_{O_2}(r_{SD}[SD]+r_{LD}[LD]); \\
 & \frac{\partial[O_2]}{\partial t}+\frac{\partial u[O_2]}{\partial x}+\frac{\partial w[O_2]}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial[O_2]}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial[O_2]}{\partial z}\right)+F_{air-lake}d^{-1}+ \\
 & +\mu_{\max}(T)f(I)\left(\frac{L_{NO_3}}{L_N}R_{O_2:NO_3}+\frac{L_{NH_4}}{L_N}R_{O_2:NH_4}\right)\min(L_N, L_P)[Phyto]-2L_{O_2}\eta[NH_4]-
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 & -R_{O_2:NH_4}\left(l_{BM}+l_E\frac{[Phyto]^2}{k_{phyto}+[Phyto]^2}\beta\right)[Zoo]-R_{O_2:NH_4}L_{O_2}(r_{SD}[SD]+r_{LD}[LD]); \\
 & \frac{\partial[Chl]}{\partial t}+\frac{\partial u[Chl]}{\partial x}+\frac{\partial w[Chl]}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial[Chl]}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial[Chl]}{\partial z}\right)+ \\
 & +\left\{\rho_{Chl}\mu_{\max}(T)f(I)\min(L_N, L_P)-m_{phyto}-\tau([SD]+[Phyto])\right\}[Chl]- \\
 & -g_{\max}\frac{[Phyto]^2}{k_{phyto}+[Phyto]^2}[Zoo]\frac{[Chl]}{[Phyto]};
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[Phyto]}{\partial t}+\frac{\partial u[Phyto]}{\partial x}+\frac{\partial w[Phyto]}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial[Phyto]}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial[Phyto]}{\partial z}\right)+ \\
 +\left\{\mu_{\max}(T)f(I)\min(L_N, L_P)-m_{phyto}-\tau([SD]+[Phyto])\right\}[Phyto]- \\
 -g_{\max}\frac{[Phyto]^2}{k_{phyto}+[Phyto]^2}[Zoo];
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[Zoo]}{\partial t}+\frac{\partial u[Zoo]}{\partial x}+\frac{\partial w[Zoo]}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial[Zoo]}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial[Zoo]}{\partial z}\right)+ \\
 +\left\{(g_{\max}-l_E)\frac{[Phyto]^2}{k_{phyto}+[Phyto]^2}\beta-l_{BM}\right\}[Zoo]-m_{Zoo}[Zoo]^2;
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[SD]}{\partial t}+\frac{\partial u[SD]}{\partial x}+\frac{\partial w[SD]}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial[SD]}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial[SD]}{\partial z}\right)+ \\
 +g_{\max}\frac{[Phyto]^2}{k_{phyto}+[Phyto]^2}(1-\beta)[Zoo]+m_{Zoo}[Zoo]^2+ \\
 +m_{phyto}[Phyto]-\tau([SD]+[Phyto])[SD]-L_{O_2}r_{SD}[SD];
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial[LD]}{\partial t} + \frac{\partial u[LD]}{\partial x} + \frac{\partial w[LD]}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial[LD]}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial[LD]}{\partial z} \right) + \tau([SD] + [Phyto])^2 - L_{O_2} r_{LD}[LD], \end{aligned} \quad (9)$$

где NO_3 , NH_4 , PO_4 , O_2 , Chl , $Phyto$, Zoo , SD и LD – концентрации нитратов, аммония, фосфатов, растворенного кислорода, хлорофилла a , фитопланктона, зоопланктона, мелкого и крупного детрита соответственно; u и w – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости соответственно; D_x и D_z – коэффициенты турбулентной диффузии в соответствующих направлениях.

Максимальная скорость роста фитопланктона $\mu_{\max}(T)$ зависит от температуры воды [16]:

$$\mu_{\max}(T) = \mu_0 \cdot 1.066^T. \quad (10)$$

Коэффициенты L_{NO_3} , L_{NH_4} , L_{O_2} , L_N и L_P отвечают за лимитирование продуктивности водоема по основным биогенным элементам (табл. 1).

Таблица 1

Коэффициенты лимитирования

Обозначение	Наименование	Расчетная формула
L_{NO_3}	Коэффициент нитратного лимитирования	$\frac{[NO_3]}{k_{NO_3} + [NO_3]} \cdot \frac{1}{1 + [NH_4] / k_{NH_4}}$
L_{NH_4}	Коэффициент аммонийного лимитирования	$\frac{[NH_4]}{k_{NH_4} + [NH_4]}$
L_{O_2}	Коэффициент кислородного лимитирования	$\max \left[\left(\frac{O_2 - O_2^{th}}{k_{O_2} + O_2 - O_2^{th}} \right), 0 \right]$
L_N	Коэффициент биогенного лимитирования по азоту	$L_{NO_3} + L_{NH_4}$
L_P	Коэффициент биогенного лимитирования по фосфору	$\frac{[PO_4]}{k_{PO_4} + [PO_4]}$

Кислородообмен между атмосферой и озером описывается законом

$$F_{air-lake} = \nu k_{O_2} (O_2^* - O_2). \quad (11)$$

Для вычисления концентрации насыщения воды кислородом O_2^* используется аппроксимация эмпирических табличных данных [17] в диапазоне температур 0–20°C:

$$O_2^* = 456.96 - 12.86 \cdot T_C + 0.2771 \cdot T_C^2 - 0.0033 \cdot T_C^3, \quad (12)$$

где T_C – температура воды в °C.

Интенсивность перехода кислорода из газовой фазы в жидкую рассчитывается как [14]

$$\nu k_{O_2} = 0.31 U_{10}^2 \sqrt{\frac{Sc_{CO_2}}{Sc_{O_2}}}, \quad (13)$$

где $U_{10} = \sqrt{u_{10}^2 + v_{10}^2}$ – скорость ветра, Sc_{CO_2} и Sc_{O_2} – число Шмидта для CO_2 и O_2 соответственно. Для пресной воды

$$Sc_{O_2} = 1800.6 - 120.1 \cdot T_C + 3.7818 \cdot T_C^2 - 0.047608 \cdot T_C^3; \quad (14)$$

$$Sc_{CO_2} = 1911.1 - 118.11 \cdot T_C + 3.4527 \cdot T_C^2 - 0.04132 \cdot T_C^3. \quad (15)$$

Функция $f(I)$ представляет связь фотосинтеза и света:

$$f(I) = \frac{\alpha I}{\sqrt{\mu_{\max}^2 + \alpha^2 I^2}}; \quad (16)$$

$$I = I_s \cdot PAR \cdot \exp \left\{ -d \left(k_{water} + k_{chl} \int_d^{L_z} Chl(z) dz \right) \right\}, \quad (17)$$

где I_s – приходящий на поверхность воды свет; PAR – доля света для фотосинтеза ($= 0.43$); k_{water} и k_{chl} – коэффициенты ослабления света для воды ($= 0.04 \text{ м}^{-1}$) и хлорофилла ($= 0.025 \text{ (мг Chl)}^{-1} \text{ м}^{-2}$) соответственно [10]. Параметру I_s в модели соответствует коротковолновая радиация [10], которая вычисляется по формуле (8) из [18].

Участвующая в синтезе хлорофилла доля роста фитопланктона определяется как

$$\rho_{Chl} = \frac{\theta_{\max} \mu_{\max}(T) f(I) \min(I_N, L_P) [Phyto]}{\alpha I [Chl]}. \quad (18)$$

Скорость нитрификации вычисляется [19]:

$$n = n_{\max} \cdot \left(1 - \max \left[0, \frac{I - I_0}{k_I + I - I_0} \right] \right), \quad (19)$$

где $n_{\max}$ – максимальная скорость нитрификации. Параметры, входящие в расчетные формулы биогеохимического блока модели, приведены в табл 2.

Таблица 2

Значения биогеохимических параметров модели

Обозначение	Наименование	Значение
<i>Биогенные элементы</i>		
$n_{\max}$	Максимальная скорость нитрификации	0.05 сут^{-1}
k_I	Интенсивность света, при которой ингибирование нитрификации является полунасыщенным	0.1 Вт/м^2
I_0	Порог ФАР для ингибирования процесса нитрификации	0.0095 Вт/м^2
$\theta_{N:P}$	Соотношение азота к фосфору	16 ммольN/ммольP
<i>Кислород</i>		
k_{O_2}	Константа полунасыщения по кислороду	$3.0 \text{ ммольO}_2/\text{м}^3$
O_2^{th}	Порог по кислороду, ниже которого не происходят процессы аэробного дыхания или нитрификации	$6.0 \text{ ммольO}_2/\text{м}^3$
$R_{O_2:NO_3}$	Стехиометрическое соотношение, соответствующее количеству кислорода, образуемому на моль нитрата, ассимилированного при фотосинтетической продукции органического вещества	$8.5 \text{ ммольO}_2/\text{ммольNH}_4$

Окончание табл. 2

Обозначение	Наименование	Значение
$R_{O_2:NH_4}$	Стехиометрическое соотношение, соответствующее количеству кислорода, образующемуся на моль аммония, ассимилированного при фотосинтетической продукции органического вещества	6.625 ммоль O_2 /ммоль NH_4
Фитопланктон		
μ_0	Скорость роста фитопланктона при 0°C	0.69 сут $^{-1}$
α	Начальная крутизна кривой $P-I$	0.1 мг С (мг Chl Вт м $^{-2}$ сут) $^{-1}$
k_{NO_3}	Константа полунасыщения по нитрату	0.8 ммольN/м 3
k_{NH_4}	Константа полунасыщения по аммонiu	0.8 ммольN/м 3
k_{PO_4}	Константа полунасыщения по фосфату	0.06 ммольP/м 3
m_{Phyto}	Смертность фитопланктона	0.15 сут $^{-1}$
τ	Скорость коагуляции фитопланктона и мелкого детрита	0.08 (ммольN/м 3) $^{-1}$ сут $^{-1}$
θ_{max}	Максимальное соотношение хлорофилла к биомассе планктона	0.0535 мгChl(мгC) $^{-1}$
Зоопланктон		
q_{max}	Максимальная скорость питания	0.5 сут $^{-1}$
β	Эффективность ассимиляции	0.75
k_{Phyto}	Константа полунасыщения по потреблению фитопланктона	2 (ммольN/м 3) 2
l_{BM}	Скорость экскреции за счет основного обмена	0.1 сут $^{-1}$
l_E	Максимальная скорость экскреции при ассимиляции	0.1 сут $^{-1}$
m_{Zoo}	Смертность зоопланктона	0.025 (ммольN/м 3) $^{-1}$ сут $^{-1}$
Детрит		
r_{SD}	Скорость реминерализации мелкого детрита	0.03 сут $^{-1}$
r_{LD}	Скорость реминерализации крупного детрита	0.01 сут $^{-1}$

Граничные условия имеют вид:

а) на поверхности водоема

$$\frac{\partial[NO_3]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[NH_4]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[PO_4]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[O_2]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[Chl]}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial[Phyto]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[Zoo]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[SD]}{\partial z} = 0; \frac{\partial[LD]}{\partial z} = 0;$$

б) на твердых границах

$$\frac{\partial[NO_3]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[NH_4]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[PO_4]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[O_2]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[Chl]}{\partial n} = 0;$$

$$\frac{\partial[Phyto]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[Zoo]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[SD]}{\partial n} = 0; \frac{\partial[LD]}{\partial n} = 0,$$

где n – направление внешней нормали к области;

в) на границе впадения реки в озеро

$$[NO_3] = [NO_3]_R; [NH_4] = [NH_4]_R; [PO_4] = [PO_4]_R; [O_2] = [O_2]_R; [Chl] = [Chl]_R;$$

$$[Phyto] = [Phyto]_R; [Zoo] = [Zoo]_R; [SD] = [SD]_R; [LD] = [LD]_R,$$

где $[NO_3]_R$, $[NH_4]_R$, $[PO_4]_R$, $[O_2]_R$, $[Chl]_R$, $[Phyto]_R$, $[Zoo]_R$, $[SD]_R$ и $[LD]_R$ – концентрация нитратов, аммония, фосфатов, растворенного кислорода, хлорофилла a ,

фитопланктона, зоопланктона, мелкого и крупного детрита в устье реки соответственно.

г) на открытой (правой) границе задаются условия радиационного типа:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (\phi = [NO_3], [NH_4], [PO_4], [O_2], [Chl], [Phyto], [Zoo], [SD], [LD]),$$

фазовая скорость c_{ϕ} рассчитывается из пространственных и временных тенденций внутри области [20].

Коэффициенты вертикальной диффузии определяются как

$$D_z = \frac{\nu_T}{Pr_T} + \frac{\nu}{Pr},$$

где ν_T – турбулентная кинематическая вязкость (рассчитывается по k - ω -модели Уилкокса [21]); ν – молекулярная кинематическая вязкость воды; Pr и Pr_T – молекулярное и турбулентное числа Прандтля.

Коэффициенты горизонтальной диффузии заданы постоянными [22]:

$$D_x = 2.5 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Методы решения уравнений модели

Реакционно-конвективно-диффузионные уравнения модели решаются численно на основе метода конечного объема, согласно которому скалярные величины (концентрации нитратов, аммония, фосфатов, растворенного кислорода, хлорофилла a , фитопланктона, зоопланктона, мелкого и крупного детрита) определяются в центре сеточной ячейки, а компоненты вектора скорости – в середине ребер ячеек. Методом блокировки фиктивных областей (сведением к нулю скоростей при помощи больших значений коэффициентов вязкости в выключенной зоне) [23] осуществляется приближение вычислительной области к профилю дна водоема.

Алгоритм численного решения уравнений модели реализован с применением неявных разностных схем второго порядка по пространству и времени: аппроксимация конвективных и нестационарных членов проводится по схемам Леонарда [24] и Кранка–Николсон соответственно. Системы разностных уравнений на каждом шаге по времени решаются методом неполной факторизации [25].

Область исследования и параметры задачи

В качестве области исследования рассматривается вертикальный разрез Баргузинского залива оз. Байкал (рис. 2, *a*). Начало системы координат и направление ее осей определены следующим образом: начало соответствует устью р. Баргузин; ось Ox направлена в центр озера, ось Oy – вдоль берега (поперек устья реки) и ось Oz – вертикально вверх (см. рис. 2). Вычислительная область, имеющая длину 20 км и глубину 100 м (см. рис. 2, *b*), покрыта равномерной ортогональной сеткой с шагами $h_x = 25$ м и $h_z = 2.5$ м. Шаг по времени составляет 10 с.

Начальная температура воды в заливе принята равной 3°C , что отражает среднее значение вертикального распределения температуры в верхнем 100-метровом слое Среднего Байкала в июне [26]. Вода в устье р. Баргузин нагревалась со скоростью $0.2^\circ\text{C}/\text{сут}$ в диапазоне 12 – 18°C . Минерализация воды в реке – 149 мг/л [27], в озере – 96 мг/л [26]. Приустьевая скорость течения реки задана равной 0.5 см/с.

Касательное напряжение ветра, а также потоки коротко- и длинноволновой радиации, явного и скрытого тепла вычислены на основе данных погодных условий станции п. Усть-Баргузин за июнь 2023 г. [27].

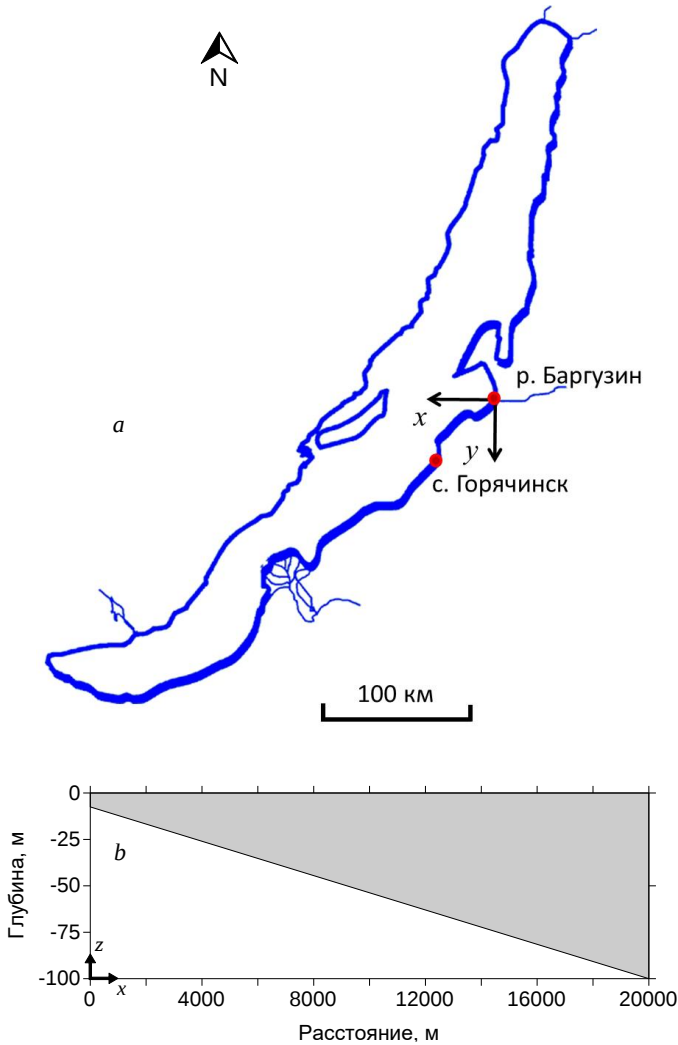


Рис. 2. Схема разреза (а) и вычислительная область (b)
Fig. 2. (a) Lake Baikal cross-section and (b) calculation domain

Значения концентрации нитратов, аммония, фосфатов и кислорода приняты равными 1.0 ммольN/м^3 , 1.0 ммольN/м^3 , 0.05 ммольP/м^3 и $312 \text{ ммольO}_2/\text{м}^3$ соответственно. Начальное распределение концентрации для планктонных и детритных компонентов составляет 0.2 и 0.1 ммольN/м^3 соответственно. Количество хлорофилла a задано исходя из соотношения 1.59 для $[Chl]/[Phyto]$. Граничные условия на месте впадения реки в озеро для переменных биогеохимической модели совпадают с их начальными значениями.

Результаты расчетов

Согласно результатам численного моделирования концентрация растворенного кислорода (рис. 3, *b1*, *b2*) увеличивается во всем водоеме с течением времени. Наибольшая концентрация наблюдается в теплоактивной области перед термобаром. На 5-е сут эта концентрация достигает $336 \text{ ммоль O}_2/\text{м}^3$ на расстоянии 3 км, а на 10-е сут – $346 \text{ ммоль O}_2/\text{м}^3$ на расстоянии 4.5 км от устья речного притока на поверхности водоема. На открытой границе расчетной области уровень растворенного кислорода на 5-е сут в придонной области $< 318 \text{ ммоль O}_2/\text{м}^3$, а на 10-е сут $< 328 \text{ ммоль O}_2/\text{м}^3$ по всей глубине. По мере развития термобара устанавливается вертикально однородное распределение кислорода в открытой части озера.

Наблюдается тенденция роста количества нитратов в направлении открытого озера как на 5-е сут (рис. 3, *c1*), так и на 10-е сут (рис. 3, *c2*). Причем в глубоководной части залива концентрация нитратов максимальна: на правой границе расчетной области $> 1.03 \text{ ммоль/м}^3$ на 5-е сут и $> 1.06 \text{ ммоль/м}^3$ на 10-е сут. В целом содержание нитратов с течением времени растет по всему водоему, за исключением приустьевой зоны.

На особенность распределения аммония в заливе оказывает сильное влияние эффект термобара (рис. 3, *d*). На месте втекания речного притока концентрация аммония сначала падает с ростом расстояния от устья реки, потом увеличивается при приближении к термическому фронту и затем снова снижается по мере удаления от термобара в открытое озеро. С развитием биогеохимических процессов в водоеме количество аммония в целом уменьшается, что связано с увеличением биомассы фитопланктона (рис. 3, *f*). На 5-е сут минимальное значение концентрации аммония в теплоактивной области ниже 0.981 ммоль/м^3 , максимальное значение вблизи термобара – выше 0.986 ммоль/м^3 , а на расстоянии 20 000 м от устья концентрация падает до 0.982 ммоль/м^3 ближе ко дну (рис. 3, *d1*). Здесь максимум за термическим фронтом по всей глубине достигается в температурной зоне $3.5\text{--}4.0^\circ\text{C}$ (рис. 3, *a1*). На 10-е сут содержание аммония в теплоактивной области ниже 0.958 ммоль/м^3 , вблизи термобара – выше 0.973 ммоль/м^3 (максимум сосредоточен в нижней части термобара, в температурной области $4.0\text{--}4.5^\circ\text{C}$ (рис. 3, *a1*) ближе ко дну), а в открытом озере концентрация аммония падает до 0.965 ммоль/м^3 .

Истощение фосфатов наблюдается в теплоактивной области (рис. 3, *e*), а дальше с увеличением расстояния от устья реки происходит постепенный рост. Концентрация фосфатов на 5-е сут достигает минимума 0.0488 ммоль/м^3 при $x \approx 1\,500 \text{ м}$ по всей глубине (рис. 3, *e1*) и на 10-е сут – 0.0474 ммоль/м^3 при $x \approx 2\,500 \text{ м}$ на поверхности озера (рис. 3, *e2*). При этом на правой границе расчетной области на 5-е сут концентрация фосфатов $> 0.0508 \text{ ммоль/м}^3$ в придонной области (рис. 3, *e1*), а на 10-е сут $> 0.0514 \text{ ммоль/м}^3$ по всей глубине (рис. 3, *e2*).

Активный рост фитопланктона происходит в теплоактивной области залива (рис. 3, *f*). Так, на 5-е сут достигает максимума $> 0.21 \text{ ммоль N/м}^3$ на расстоянии $1\,500 \text{ м}$ (рис. 3, *f1*), а на 10-е сут $> 0.225 \text{ ммоль N/м}^3$ на расстоянии $2\,000 \text{ м}$ (рис. 3, *f2*) по всей глубине. На открытой границе расчетной области на 5-е сут биомасса фитопланктона менее $0.185 \text{ ммоль N/м}^3$ (рис. 3, *f1*) и на 10-е сут – менее 0.17 ммоль N/м^3 (рис. 3, *f2*). Следует заметить, что минимумы концентраций фосфатов и фитопланктона снижаются со временем, а их максимумы – возрастают.

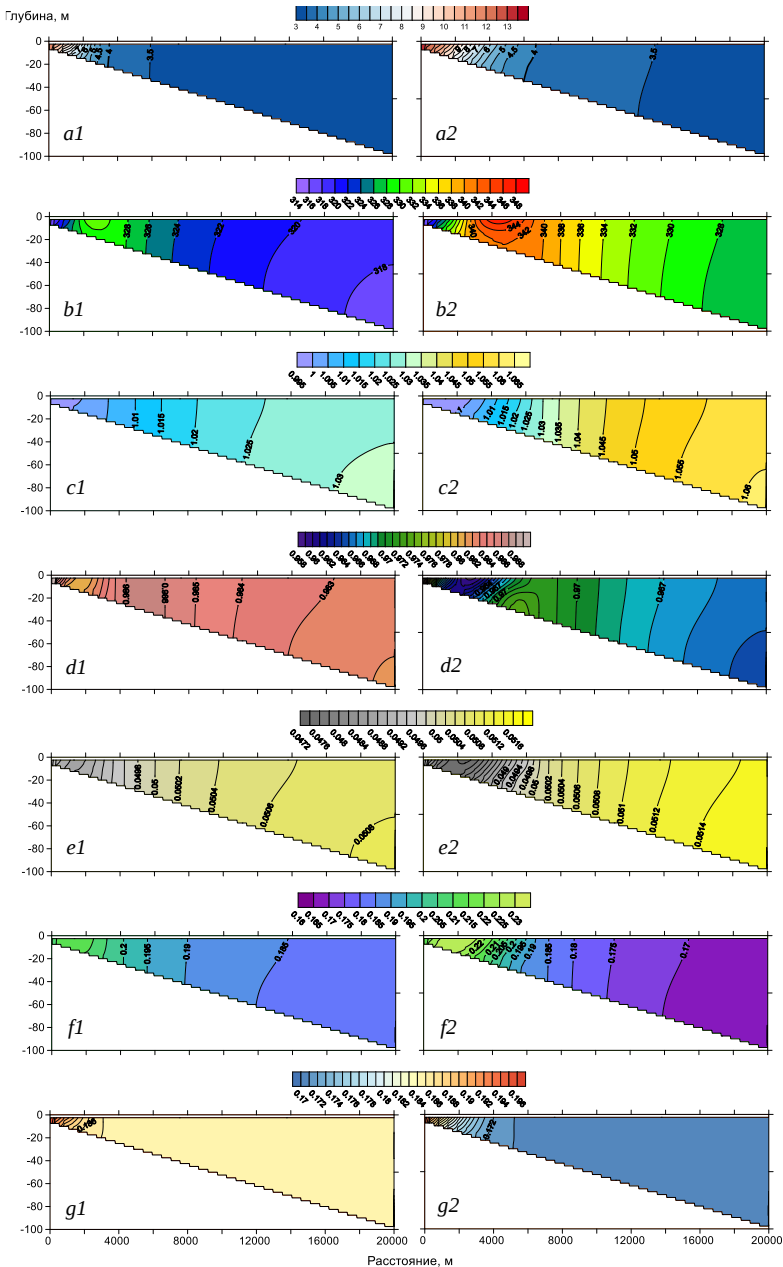


Рис. 3. Распределение температуры (жирной линией показана изотерма 4°C) [°C] (a), растворенного кислорода [ммольO₂/м³] (b), нитратов [ммоль/м³] (c), аммония [ммоль/м³] (d), фосфатов [ммоль/м³] (e), фитопланктона [ммольN/м³] (f) и зоопланктона [ммольN/м³] (g) на 5 (1) и 10 (2) сут

Fig. 3. (a) Distributions of temperature (the bold line is the 4°C isotherm) [°C], (b) dissolved oxygen [mmolO₂/m³], (c) nitrate [mmol/m³], (d) ammonium [mmol/m³], (e) phosphate [mmol/m³], (f) phytoplankton [mmolN/m³], and (g) zooplankton [mmolN/m³] on day 5 (1) and 10 (2)

Содержание зоопланктона постепенно уменьшается с увеличением расстояния от устья речного притока, где оно имеет самое высокое значение, и однородно в теплоинертной области (рис. 3, *g*). Концентрация зоопланктона устанавливается на отметке $< 0.185 \text{ ммольN/м}^3$ при $x > 3\,000 \text{ м}$ на 5-е сут (рис. 3, *g1*) и $< 0.171 \text{ ммольN/м}^3$ при $x > 5\,100 \text{ м}$ на 10-е сут (рис. 3, *g2*). Видно, что с течением времени популяция зоопланктона сокращается во всей области моделирования.

Важно заметить, что изотермы отклоняются в сторону открытого озера у поверхности воды (см. рис. 3, *a*), наклон тем больше, чем ближе к впадению реки, что показывает перемешивание речных вод с озерными в приповерхностном слое. При этом в силу небольшой глубины залива речной приток в месте впадения влияет на температуру воды в озере по всей глубине мелководья. Структура полученных для батиметрии Баргузинского залива изотерм (см. рис. 3, *a*) существенно отличается от структуры распределения температуры на разрезе р. Болдакова – прол. Малое Море, характеризующегося большими глубинами [29].

Заключение

Представленная в статье математическая модель позволяет в период существования весеннего термобара воспроизводить биогеохимические процессы в крупном водоеме с учетом динамики растворенного кислорода. Результаты расчетов показали, что наибольший уровень растворенного кислорода наблюдается в теплоактивной области на поверхности озера. В окрестности термобара концентрация растворенного кислорода имеет высокое значение по всей глубине (за счет интенсивного перемешивания вод с разной температурой), в приустьевой зоне ее изолинии обладают качественным сходством с изотермами. Содержание аммония, поступающего с водами притока, максимально в месте впадения реки, а в теплоактивной области перед термобаром оно падает вследствие роста биомассы фитопланктона. В качественном отношении картина распределений нитратов и фосфатов в теплоинертной области идентична.

Список источников

1. Ерина О.Н. Режим растворенного кислорода в стратифицированных водохранилищах Москворецкой системы водоснабжения г. Москвы : дис. ... канд. геогр. наук. М., 2015. 188 с.
2. Palshin N., Zdorovenнова G., Efremova T., Bogdanov S., Terzhevnik A., Zdorovenнов R. Dissolved oxygen stratification in a small lake depending on water temperature and density and wind impact // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2021. V. 937. Art. 032019. doi: 10.1088/1755-1315/937/3/032019
3. Иванова М.Б. Продукция планктонных ракообразных в пресных водах. Л. : Наука и техника, 1985. 220 с.
4. Domysheva V., Vorobyeva S., Golobokova L., Netsvetaeva O., Onischuk N., Sakirko M., Khuriganova O., Fedotov A. Assessment of the current trophic status of the Southern Baikal littoral zone // Water. 2023. V. 15 (6). Art. 1139. doi: 10.3390/w15061139
5. Tomberg I.V., Sorokovikova L.M., Popovskaya G.I., Bashenkhayeva N.V., Sinyukovich V.N., Ivanov V.G. Concentration dynamics of biogenic elements and phytoplankton at Selenga R. Mouth and in Selenga shallows (Lake Baikal) // Water Resour. 2014. V. 41 (6). P. 687–695. doi: 10.1134/S0097807814050157

6. Reynolds C.S. Phytoplankton assemblages and their periodicity in stratifying lake systems // *Holarctic Ecol.* 1980. V. 3 (3). P. 141–159. doi: 10.1111/j.1600-0587.1980.tb00721.x
7. Shimaraev M.N., Granin N.G., Zhdanov A.A. Deep ventilation of Lake Baikal waters due to spring thermal bars // *Limnol. Oceanogr.* 1993, V. 38 (5). P. 1068–1072. doi: 10.4319/lo.1993.38.5.1068
8. Troitskaya E.S., Shimaraev M.N. Cases of mass development of intrusions in Lake Baikal and the correlation of intrusions with atmospheric circulation processes // *Limnology and Freshwater Biology.* 2022. V. 6. P. 1712–1719. doi: 10.31951/2658-3518-2022-A-6-1712
9. Parfenova V.V., Shimaraev M.N., Kostornova T.Y., Domysheva V.M., Levin L.A., Dryukker V.V., Zhdanov A.A., Gnatovskii R.Yu., Tsekhanovskii V.V., Logacheva N.F. On the vertical distribution of microorganisms in lake Baikal during spring deep-water renewal // *Microbiology.* 2000. V. 69 (3). P. 357–363. doi: 10.1007/BF02756748
10. Fennel K., Wilkin J., Levin J., Moisan J., O'Reilly J., Haidvogel D. Nitrogen cycling in the Middle Atlantic Bight: Results from a three-dimensional model and implications for the North Atlantic nitrogen budget // *Global Biogeochemical Cycles.* 2006. V. 20 (3). GB3007. doi: 10.1029/2005GB002456
11. Gan J., Lu Z., Cheung A., Dai M., Liang L., Harrison P.J., Zhao X. Assessing ecosystem response to phosphorus and nitrogen limitation in the Pearl River plume using the Regional Ocean Modeling System (ROMS) // *J. Geophys. Res.: Oceans.* 2014. V. 119 (12). P. 8858–8877. doi: 10.1002/2014JC009951
12. Fennel K., Hu J., Laurent A., Marta-Almeida M., Hetland R. Sensitivity of hypoxia predictions for the Northern Gulf of Mexico to sediment oxygen consumption and model nesting // *J. Geophys. Res.: Oceans.* 2013. V. 118 (2). P. 990–1002. doi: 10.1002/jgrc.20077
13. Garcia H.E., Gordon L.I. Oxygen solubility in seawater: Better fitting equations // *Limnol. Oceanogr.* 1992. V. 37 (6). P. 1307–1312. doi: 10.4319/lo.1992.37.6.1307
14. Wanninkhof R. Relationship between wind speed and gas exchange // *J. Geophys. Res.* 1992. V. 97. P. 7373–7382. doi: 10.1029/92JC00188
15. Цыденов Б.О. Математическая модель транспорта растворенного кислорода при развитии термобара // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2023. № 86. С. 176–187. doi: 10.17223/19988621/86/14
16. Eppley R.W. Temperature and phytoplankton growth in the sea // *Fish. Bull.* 1972. V. 70 (4). P. 1063–1085.
17. The Engineering ToolBox. Oxygen – solubility in fresh and sea water vs. temperature. URL: https://www.engineeringtoolbox.com/oxygen-solubility-water-d_841.html (accessed: 14.08.2023).
18. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. To the selection of heat flux parameterization models at the water-air interface for the study of the spring thermal bar in a deep lake // *Proc. SPIE* 9680, 96800H. 2015. P. 1–8. doi: 10.1117/12.2205687
19. Olson R.J. Differential photoinhibition of marine nitrifying bacteria: A possible mechanism for the formation of the primary nitrite maximum // *J. Mar. Res.* 1981. V. 39 (2). P. 227–238.
20. Orlanski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows // *J. Comput. Phys.* 1976. V. 21 (3). P. 251–269. doi: 10.1016/0021-9991(76)90023-1
21. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // *AIAA J.* 1988. V. 26 (11). P. 1299–1310. doi: 10.2514/3.10041
22. Holland P.R., Kay A., Botte V. Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake // *J. Mar. Syst.* 2003. V. 43 (1-2). P. 61–81. doi: 10.1016/S0924-7963(03)00089-7
23. Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. CRC Press, 1980. 197 p.
24. Leonard B. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 1979. V. 19 (1). P. 59–98. doi: 10.1016/0045-7825(79)90034-3
25. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М. : Физматлит, 1995. 288 с.

26. Shimaraev M.N., Verbolov V.I., Granin N.G., Sherstyankin P.P. Physical Limnology of Lake Baikal: A Review. Irkutsk–Okayama, 1994. 81 p.
27. Вотинцев К.К. Гидрохимия // Проблемы Байкала / ред. Г.И. Галазий, К.К. Вотинцев. Новосибирск, 1978. Т. 16, № 36. С. 124–146.
28. Расписание Погоды. URL: <https://rp5.ru/> (дата обращения: 14.08.2023).
29. Tsydenov B.O., Trunov N.S., Churuksaeva V.V., Degi D.V. Wind effects on deep convection in Lake Baikal during the autumnal thermal bar // Moscow University Physics Bulletin. 2024. V. 79 (2). P. 283–290. doi: 10.3103/S0027134924700280

References

1. Erina O.N. (2015) *Rezhim rastvorennogo kisloroda v stratifitsirovannykh vodokhranilishchakh Moskvoretskoy sistemy vodosnabzheniya g. Moskvy* [Dissolved oxygen regime in stratified reservoirs of the Moskvoretsk water supply system of Moscow]. Dissertation. Moscow State university.
2. Palshin N., Zdorovenнова G., Efremova T., Bogdanov S., Terzhevik A., Zdorovenнов R. (2021) Dissolved oxygen stratification in a small lake depending on water temperature and density and wind impact. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 937. 032019. DOI: 10.1088/1755-1315/937/3/032019.
3. Ivanova M.B. (1985) *Produksiya planktonnykh rakoobraznykh v presnykh vodakh* [Production of planktonic crustaceans in fresh waters]. Leningrad: Nauka i tekhnika.
4. Domysheva V., Vorobyeva S., Golobokova L., Netsvetaeva O., Onischuk N., Sakirko M., Khuriganova O., Fedotov A. (2023) Assessment of the current trophic status of the Southern Baikal littoral zone. *Water*. 15(6). p. 1139. DOI: 10.3390/w15061139.
5. Tomberg I.V., Sorokovikova L.M., Popovskaya G.I., Bashenkhaeva N.V., Sinyukovich V.N., Ivanov V.G. (2014) Concentration dynamics of biogenic elements and phytoplankton at Selenga R. Mouth and in Selenga shallows (Lake Baikal). *Water Resources*. 41(6). pp. 687–695. DOI: 10.1134/S0097807814050157.
6. Reynolds C.S. (1980) Phytoplankton assemblages and their periodicity in stratifying lake systems. *Holarctic Ecology*. 3(3). pp. 141–159. DOI: 10.1111/j.1600-0587.1980.tb00721.x.
7. Shimaraev M.N., Granin N.G., Zhdanov A.A. (1993) Deep ventilation of Lake Baikal waters due to spring thermal bars. *Limnology and Oceanography*. 38(5). pp. 1068–1072. DOI: 10.4319/lo.1993.38.5.1068.
8. Troitskaya E.S., Shimaraev M.N. (2022) Cases of mass development of intrusions in Lake Baikal and the correlation of intrusions with atmospheric circulation processes. *Limnology and Freshwater Biology*. 6. pp. 1712–1719. DOI: 10.31951/2658-3518-2022-A-6-1712.
9. Parfenova V.V., Shimaraev M.N., Kostornova T.Y., Domysheva V.M., Levin L.A., Dryukker V.V., Zhdanov A.A., Gnatovskii R.Yu., Tsekhanovskii V.V., Logacheva N.F. (2000) On the vertical distribution of microorganisms in Lake Baikal during spring deep-water renewal. *Microbiology*. 69(3). pp. 357–363. DOI: 10.1007/BF02756748.
10. Fennel K., Wilkin J., Levin J., Moisan J., O'Reilly J., Haidvogel D. (2006) Nitrogen cycling in the Middle Atlantic Bight: Results from a three-dimensional model and implications for the North Atlantic nitrogen budget. *Global Biogeochemical Cycles*. 20(3). GB3007. DOI: 10.1029/2005GB002456.
11. Gan J., Lu Z., Cheung A., Dai M., Liang L., Harrison P.J., Zhao X. (2014) Assessing ecosystem response to phosphorus and nitrogen limitation in the Pearl River plume using the Regional Ocean Modeling System (ROMS). *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 119(12). pp. 8858–8877. DOI: 10.1002/2014JC009951.
12. Fennel K., Hu J., Laurent A., Marta-Almeida M., Hetland R. (2013) Sensitivity of hypoxia predictions for the Northern Gulf of Mexico to sediment oxygen consumption and model nesting. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 118(2). pp. 990–1002. DOI: 10.1002/jgrc.20077.

13. Garcia H.E., Gordon L.I. (1992) Oxygen solubility in seawater: Better fitting equations. *Limnology and Oceanography*. 37(6). pp. 1307–1312. DOI: 10.4319/lo.1992.37.6.1307.
14. Wanninkhof R. (1992) Relationship between wind speed and gas exchange. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 97. pp. 7373–7382. DOI: 10.1029/92JC00188.
15. Tsydenov B.O. (2023) A mathematical model of dissolved oxygen transport during the thermal bar evolution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 176–187. DOI: 10.17223/19988621/86/14.
16. Eppley R.W. (1972) Temperature and phytoplankton growth in the sea. *Fishery Bulletin*. 70(4). pp. 1063–1085.
17. The Engineering ToolBox (2005). Oxygen – Solubility in Fresh and Sea Water vs. Temperature. [online] Access mode: https://www.engineeringtoolbox.com/oxygen-solubility-water-d_841.html (accessed 14.08.2023).
18. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. (2015) To the selection of heat flux parameterization models at the water-air interface for the study of the spring thermal bar in a deep lake. *Proceedings of SPIE*. 9680. 96800H. pp. 1–8. DOI: 10.1117/12.2205687.
19. Olson R.J. (1981) Differential photoinhibition of marine nitrifying bacteria: A possible mechanism for the formation of the primary nitrite maximum. *Journal of Marine Research*. 39(2). pp. 227–238.
20. Orlanski I. (1976) A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics*. 21(3). pp. 251–269. DOI: 10.1016/0021-9991(76)90023-1.
21. Wilcox D.C. (1988) Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*. 26(11). pp. 1299–1310. DOI: 10.2514/3.10041.
22. Holland P.R., Kay A., Botte V. (2003) Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake. *Journal of Marine Systems*. 43(1-2). pp. 61–81. DOI: 10.1016/S0924-7963(03)00089-7.
23. Patankar S. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. London: Hemisphere Publishing.
24. Leonard B. (1979) A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 19(1). pp. 59–98. DOI: 10.1016/0045-7825(79)90034-3.
25. Il'in V.P. (1995) *Metody nepolnoy faktorizatsii dlya resheniya algebraicheskikh sistem* [Incomplete factorization methods for solving algebraic systems]. Moscow: Fizmatlit.
26. Verbovol V.I., Granin N.G., Sherstyankin P.P. (1994). *Physical Limnology of Lake Baikal: A Review*. Irkutsk: Baikal International Center for Ecological Research.
27. Votintsev K.K. (1978) Gidrokimiya [Hydrochemistry], in: Galazii G.I., Votintsev K.K. (Eds.). *Problemy Baykala* [Problems of Lake Baikal], 16(36). pp. 124–146.
28. Raspisaniye pogody. Access mode: <https://rp5.ru/> (accessed 14.08.2023).
29. Tsydenov B.O., Trunov N.S., Churuxsaeva V.V., Degi D.V. (2024) Wind effects on deep convection in Lake Baikal during the autumnal thermal bar. *Moscow University Physics Bulletin*. 79(2). pp. 283–290. DOI: 10.3103/S0027134924700280.

Сведения об авторах:

Цыденов Баир Олегович – кандидат физико-математических наук, заведующий научно-исследовательской лабораторией вычислительной геофизики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tsydenov@math.tsu.ru

Дегин Дмитрий Владимирович – программист научно-исследовательской лаборатории вычислительной геофизики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: dimadegi@rambler.ru

Барт Андрей Андреевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории вычислительной геофизики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bart@math.tsu.ru

Трунов Никита Сергеевич – младший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории вычислительной геофизики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: suslayndel@yandex.ru

Чуруксаева Владислава Васильевна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории вычислительной геофизики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: chu.vv@mail.ru

Information about the authors:

Tsydenov Bair O. (Candidate of Physics and Mathematics, Head of Laboratory, Laboratory of Computational Geophysics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tsydenov@math.tsu.ru

Degi Dmitriy V. (Programmer, Laboratory of Computational Geophysics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dimadegi@rambler.ru

Bart Andrey A. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Laboratory of Computational Geophysics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bart@math.tsu.ru

Trunov Nikita S. (Junior Researcher, Laboratory of Computational Geophysics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: suslayndel@yandex.ru

Churuksaeva Vladislava V. (Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Laboratory of Computational Geophysics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: chu.vv@mail.ru

Статья поступила в редакцию 19.06.2024; принята к публикации 07.02.2025

The article was submitted 19.06.2024; accepted for publication 07.02.2025