

Научная статья
УДК 681.516
doi: 10.17223/19988605/70/8

Построение множеств простых путей между двумя узлами в нечетких транспортных сетях

Дмитрий Васильевич Сперанский¹, Сергей Александрович Лунев²

^{1,2} *Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия*

¹ *Speranskiy.dv@gmail.com*

² *slunev@mail.ru*

Аннотация. Рассмотрена задача построения множества всех простых путей в нечетких транспортных сетях, соединяющих два заданных в ней узла. Ранее для решения этой и других аналогичных задач для четких транспортных сетей был разработан эффективный математический аппарат с использованием понятия графа простых путей. Показано, что рассматриваемая задача может быть сведена к построению множества простых путей в четкой транспортной сети. Такое сведение основано на преобразовании нечеткого графа (модели нечеткой сети) в соответствующий ему четкий граф.

Ключевые слова: четкие и нечеткие транспортные сети; неориентированные графы; простые пути в графах; методы построения простых путей.

Для цитирования: Сперанский Д.В., Лунев С.А. Построение множеств простых путей между двумя узлами в нечетких транспортных сетях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 70. С. 81–90. doi: 10.17223/19988605/70/8

Original article
doi: 10.17223/19988605/70/8

Construction of sets of simple paths between two nodes in fuzzy transport networks

Dmitriy V. Speranskiy¹, Sergey A. Lunev²

^{1,2} *Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russian Federation*

¹ *Speranskiy.dv@gmail.com*

² *slunev@mail.ru*

Abstract. The problem of constructing a set of all simple paths in fuzzy transport networks connecting two nodes specified in it is considered. Earlier, to solve this and other similar problems for clear transport networks, an effective mathematical apparatus was developed using the concept of a graph of simple paths. It is shown that the problem under consideration can be reduced to the construction of many simple paths in a clear transport network. This reduction is based on the transformation of a fuzzy graph (a fuzzy network model) into a corresponding clear graph.

Keywords: crisp and fuzzy transport networks; undirected graphs; simple paths in graphs; methods of constructing simple paths.

For citation: Speranskiy, D.V., Lunev, S.A. (2015) Construction of sets of simple paths between two nodes in fuzzy transport networks. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 70. pp. 81–90. doi: 10.17223/19988605/70/8

Введение

Транспортная сеть обычно понимается как совокупность линий транспортных связей внутри определенной локации, соединяющих ее транспортные узлы и пункты. Сеть состоит из отдельных транспортных линий (железных или автомобильных дорог, авиалиний, каналов связи, телекоммуникаций, линий электропередач и т.п.). Проблемы построения различных множеств простых путей представляют значительный интерес, поскольку их знание и компактное представление необходимы для оперативного управления такими сетями. Число этих путей, как правило, велико, и представлять их в виде множества затруднительно. В статьях И.А. Головинского [1, 2] предложено представлять совокупность всех простых путей в виде неориентированного графа, который назван графом путей. В этих статьях развит математический аппарат для решения четырех различных задач построения простых путей. Граф путей оказался работоспособным для масштабных сетей и может интерпретироваться как общее решение задач соединения множеств вершин простыми путями.

Описания работы сетей в [1, 2] не содержат никаких неопределенностей (нечеткостей), и потому их можно назвать четкими сетями. Их математическими моделями являются классические неориентированные графы. Однако такие модели неприменимы, если описание реально реализуемой конфигурации самой сети или ее функционирования отсутствует или получить его сложно или невозможно.

Современная наука пришла к пониманию, что некоторые наши знания и связи с внешним миром не соответствуют сложившимся ранее классическим представлениям о них. Сейчас разрабатываются новые подходы, предполагающие принципиальную невозможность обойтись без нечеткостей, которые принимаются как реальность человеческого существования. Это приводит к необходимости разработки новых понятий и методов, где такая нечеткость должна быть учтена в практических приложениях.

В статье Л. Заде [3] было введено понятие нечеткого множества, ставшего основой для создания ныне широко используемой в приложениях теории нечетких множеств и других нечетких объектов. Ныне к одному из активно развивающихся направлений относится теория нечетких графов. Интерес к ней в последнее десятилетие связан с использованием ее результатов в важных практических приложениях (проблемы живучести систем, оценки информационной надежности сложных систем и др.).

В предлагаемой статье нечеткие графы использованы как математические модели нечетких транспортных сетей (НТС). Некоторые используемые здесь понятия и термины будут напомнены. Если их определения не приведены, то они трактуются как общепринятые в теории четких графов (см., напр.: [4–6]) и в монографии по теории нечетких множеств [7].

В описываемой модели НТС феномен нечеткости проявляется в переходах по ребрам между вершинами графа при прохождении пути в сети. Этот процесс носит стохастический характер. Выбор очередной вершины для перехода в одну из вершин множества альтернативных вершин зависит от степени принадлежности соответствующих ребер нечеткого графа. Показано, что развитый в [1, 2] математический аппарат для решения задач построения простых путей в четких сетях применим и для решения рассматриваемой нами задачи построения простых путей между двумя заданными узлами в НТС. Идея ее решения для НТС состоит в преобразовании заданного исходного нечеткого графа в соответствующий ему некоторый четкий граф. Описывается способ такого преобразования, и доказывается, что множество всех простых путей в исходном нечетком графе, потенциально возникающих в процессе всех ее возможных конкретных реализаций, совпадает с множеством всех простых путей построенного четкого графа.

1. Некоторые основные понятия и определения

Напомним некоторые используемые понятия из [7]. Пусть множество A есть подмножество множества E . Принадлежность элемента x множеству A записывается с использованием характеристической функции $\mu_A(x)$, принимающей любое неотрицательное значение. Содержательно $\mu(x_i)$ определяет степень принадлежности элемента x_i подмножеству A .

Запись вида

$$A = \{x_1 | \mu(x_1), x_2 | \mu(x_2), \dots, x_n | \mu(x_n)\}$$

является заданием нечеткого подмножества A множества E .

Поскольку здесь используется функция принадлежности, необходимо располагать методами ее получения. Разработка методов построения функций принадлежности началась с введением понятия нечеткого множества и продолжается и ныне. Эта проблема лежит вне рамок статьи, и мы не будем на ней останавливаться. По этой тематике имеется много публикаций, в том числе монографии и обзоры соответствующих методов. Укажем некоторые из них: [8–10]. Известно, что функция принадлежности может быть выражена также и в виде значения вероятности.

Напомним определение соответствующего нечеткого графа из [7]. Пусть E_1, E_2 – два множества, и пусть элемент $x \in E_1$, а $y \in E_2$. Множество упорядоченных пар (x, y) определяет декартово произведение $E_1 \times E_2$. Нечеткое подмножество G такое, что

$$\forall (x, y) \in E_1 \times E_2 \quad \mu_G(x, y) \in M,$$

где M – множество принадлежностей множества $E_1 \times E_2$, называется нечетким графом.

Нечеткий неориентированный граф $G = (V, E)$, где V и E – множества его вершин и ребер, задается и графически изображается как классический четкий граф. Две его вершины γ, δ могут быть соединены ребром, обозначаемым как $e(\gamma, \delta)$, или e_i .

Уточним используемые далее другие понятия из классической теории графов [11]. *Маршрут* в неориентированном графе есть конечная или бесконечная последовательность ребер и вершин $(\dots, a_0, e_0, a_1, e_1, \dots, e_{n-1}, a_n, \dots)$, где каждые два соседних ребра e_{i-1} и e_i имеют общую инцидентную вершину.

Путь – это маршрут, в котором все ребра различны. *Путь* называется *простым*, если все вершины в нем различны.

В качестве математических моделей перечисленных понятий в нечетком графе G будут использованы последовательности ребер и вершин, удовлетворяющие указанным в их определениях свойствами.

В статье используется и ряд других общепринятых понятий и операций над графами из классической теории графов, поэтому приводить их все затруднительно. Если некоторые понятия используются, но их определения в статье не приводятся, то они понимаются так, как определены в [1].

2. Формулировка задачи и математическая модель нечеткой транспортной сети

Рассматриваемая далее задача аналогична первой из исследованных в [1] для четких транспортных сетей. Приведем ее формулировку для НТС. Требуется найти в заданной НТС совокупность всех простых путей, потенциально возникающих в процессе всех ее возможных конкретных реализаций, которые соединяют две заданные вершины нечеткого графа G , моделирующего НТС.

В НТС проход по пути иногда связан с переходом в одну из следующих вершин по множеству альтернативных ребер. Выбор конкретного ребра зависит от степеней их принадлежности всему множеству ребер НТС и носит стохастический (вероятностный) характер. Это служит причиной возникновения различных вариантов конкретных реализаций траекторий прохода по одному и тому же пути.

Используемая здесь математическая модель НТС представляет собой нечеткий неориентированный граф $G = (V, E)$ без петель и кратных ребер. Для краткости будем иногда называть эту модель просто графом G . В такой модели в отличие от четкого графа множество V в общем случае содержит вершины трех разных типов. Вершина первого типа – это обычная одиночная вершина (как в четком графе), далее она именуется канонической. Вершина второго типа есть множество канонических вершин с общим числом не менее двух, далее они именуется a -вершинами (альтернативными вершинами). Вершины третьего типа могут содержать в общем случае несколько множеств a -вершин (здесь каноническая вершина считается вырожденной a -вершиной).

В процессе прохода по любому пути в графе G происходят переходы между парами его вершин α и β (в общем случае это вершины разного типа) по ребру $e(\alpha, \beta)$. Эти переходы будем изображать графически как $\alpha - \beta$. Поскольку теперь в графе используются также ребра разного типа, то, казалось бы, нужно изменить приведенные выше определения маршрута, пути и простого пути, а также методы вычисления степеней принадлежности вершин и ребер. В действительности в этом нет необходимости. Во введении сказано, что решение соответствующей задачи для оперативного управления НТС сводится к решению аналогичной задачи для четких сетей. Но модель четкой сети содержит только канонические вершины. Таким образом, искомые простые пути для НТС, найденные в четком графе, содержательно интерпретируются точно так же, как и в четкой сети. Что касается разработки специальных методов вычисления степеней принадлежности, то по той же причине можно обойтись и без них.

Функция принадлежности нечеткого множества напоминает плотность распределения вероятностей. Отличие их в том, что сумма вероятностей по всем возможным значениям случайной величины всегда равна 1, а сумма S значений функции принадлежности может быть любым неотрицательным числом. Тогда можно свести функцию принадлежности к функции плотности вероятностей ее нормированием, разделив все ее значения на S .

При задании НТС (нечеткого графа) необходимо указать степени принадлежности не только для канонических, но и для вершин второго и третьего типов. Для двух последних типов их степени принадлежности, очевидно, следует положить равными сумме степеней составляющих вершину элементов. Так, например, если $w = (v_1, \dots, v_v)$ – вершина второго типа, то степень ее принадлежности

полагается равной значению $\mu(w) = \sum_{i=1}^v \mu(v_i)$, где слагаемые $\mu(v_i)$ в сумме учитываются столько раз,

сколько v_i участвуют в качестве компонентов во всех вершинах множества заданного нечеткого графа. Это и есть S , упомянутое выше, которое используется при замене функции принадлежности значениями вероятностей. Знание степеней принадлежности (вероятностей) «неканонических» вершин может потребоваться при выборе продолжения траектории при построении простого пути.

Оценка степеней принадлежности ребер (вершин) полученного четкого графа (например, группой экспертов) может производиться и после завершения процесса преобразования исходного нечеткого графа с целью решения других задач, не связанных с построением простых путей.

Задание графа сводится к описанию множества его вершин, ребер и отношения инцидентности [1, 11]. Для конечных графов для этого достаточно пронумеровать множества V и E . Граф можно задать матрицей инцидентности, но в ней каждая строка имеет только два элемента, отличных от нуля, и потому такой способ не является экономным. Отношение инцидентности более экономно задать списком ребер, в котором для них указываются номера вершин, инцидентных ему, и степени их принадлежности.

3. Преобразование нечеткого графа G в четкий граф

Исходной информацией для рассматриваемой задачи является задание нечеткого графа $G = (V, E)$, из которого для каждой его вершины $v \in V$ находятся все ее смежные вершины. Предполагается, что для каждого ребра $e(\alpha, \beta) \in E$ заданы значения степеней принадлежности всех смежных вершин с вершинами α и β этого ребра (возможно в виде вероятности). При использовании списка ребер он может представляться в виде таблицы, имеющей два столбца. В первом столбце указываются все ребра $e(\alpha, \beta)$ графа G , а в той же строке второго столбца – смежные вершины, разрешенные для использования, и значения их степеней принадлежности.

Напомним, что сведение рассматриваемой задачи для заданной НТС к аналогичной задаче для четких сетей предлагается осуществлять путем преобразования заданного исходного нечеткого графа G в соответствующий ему некоторый четкий граф \tilde{G} .

Каждый этап преобразования состоит в замещении выбранного перехода графа G некоторым подграфом, вид которого определяется типом конечных вершин перехода. Для преобразования графа $G = (V, E)$ (кроме задания самого графа) для каждой вершины из V задается также множество исполь-

зуемых (разрешенных) смежных с ней вершин. Заметим, что в общем случае использоваться может только некоторое подмножество разрешенных для заданной вершины ее смежных вершин.

Опишем в целом процесс преобразования нечеткого графа G в четкий граф \tilde{G} . Граф G является «стартовым» для получения графа \tilde{G} . Преобразование выполняется поэтапно (пошагово). На очередном этапе в текущем полученном графе произвольным образом выбирается переход между двумя вершинами, по крайней мере одна из которых есть a -вершина. Выбранный переход замещается фрагментом (подграфом), определяемым видом выбранного перехода. После завершения этапа получается новый граф, в котором вершины в общем случае могут быть любого из трех типов. В полученном после этого этапа преобразования новом графе производится аналогичное замещение соответствующим фрагментом другого выбранного перехода между парой вершин, одна из которых не является канонической. Этот процесс продолжается далее до тех пор, пока после выполнения очередного этапа в текущем преобразуемом графе все его вершины не окажутся каноническими. Будет показано, что этот граф и является искомым четким графом \tilde{G} для получения решения рассматриваемой задачи.

С учетом наличия разных типов вершин в графе G возможны следующие виды переходов между ними:

- 1) $v_i - v_j$, где обе вершины канонические;
- 2) $v - w$, где v – каноническая вершина, а w – a -вершина;
- 3) $w_i - w_j$, где обе вершины являются a -вершинами.

Здесь и далее буквами v, w (с индексами и без них) обозначаются соответственно канонические и a -вершины.

Переходы первого вида – это стандартные переходы между каноническими вершинами, изображаемые в виде ребра, связывающего его концевые вершины. Эти переходы не подлежат замещению.

Опишем фрагменты (подграфы), которые замещают остальные виды переходов в поэтапно возникающих новых графах.

Если a -вершину записывать как множество $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, то переход второго вида представляется как $v - \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, а переход третьего вида в общем случае можно представить, например, в виде: $\{w_1, w_2, \dots, w_k\} - \{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_q\}$.

При преобразовании некоторого перехода нечеткого графа (в модели НТС) участвующее в нем ребро может породить несколько ребер, его замещающих.

Рассмотрим переход второго вида $v - \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Содержательно его интерпретация зависит от направления движения по пути в графе. При направлении движения от v к $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ в вершине v происходит разветвление некоторого пути на k ветвей (v_1, v_k). При этом значение степени принадлежности $\mu(v)$ вершины v должно быть распределено (например, экспертами) между степенями принадлежности смежных вершин возникающих k ветвей (v_1, v_k) так, чтобы $\mu(v) = \mu(v_1) + \dots + \mu(v_k)$. При синтезе четкого графа \tilde{G} этот переход замещается фрагментом, изображенным на рис. 1.

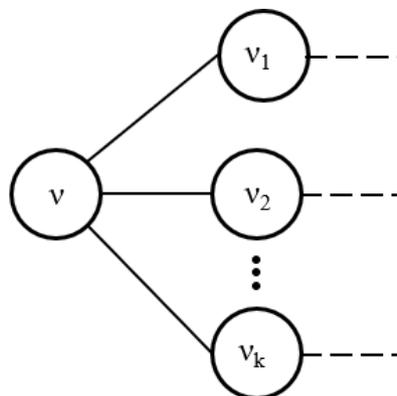


Рис. 1. Фрагмент подграфа для замещения переходов 2-го типа
Fig. 1. A fragment of a subgraph for replacing type 2 transitions

При движении по пути в противоположном направлении происходит слияние ветвей (v_k, v_l) в одну вершину v , и этот переход замещается фрагментом (подграфом), аналогичным фрагменту на рис. 1, в котором нужно поменять местами левую и правую части (зеркальное отображение рис. 1 относительно вертикальной оси). Понятно, что степень принадлежности вершины v в этом случае при заданных значениях принадлежностей для вершин v_i следует положить равной $\mu(v) = \mu(v_1) + \dots + \mu(v_k)$.

Опишем фрагменты, замещающие переходы третьего вида. Общий принцип их построения покажем на примере. Пусть имеется переход между двумя a -вершинами $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} - \{\delta_1, \delta_2\}$. В нашей модели НТС она будет замещаться следующими парами переходов: $\gamma_1 - \delta_1, \gamma_1 - \delta_2, \gamma_2 - \delta_1, \gamma_2 - \delta_2, \gamma_3 - \delta_1, \gamma_3 - \delta_2$. Пусть имеется ограничение на использование переходов $\gamma_3 - \delta_1, \gamma_3 - \delta_2$. Предположим, что в остальных переходах участвуют следующие a -вершины:

$$\gamma_1 = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2\}, \gamma_2 = \{\check{v}_1, \check{v}_2\}, \delta_1 = \{v_1^1, v_2^1\}, \delta_2 = \{v_1^2, v_2^2\}.$$

Здесь литера v означает каноническую вершину. В этих обозначениях переход $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} - \{\delta_1, \delta_2\}$ будет замещен фрагментом из четырех переходов между парами a -вершин, представленным на рис. 2 (переход из вершины γ_3 не разрешен). Эти переходы содержат только a -вершины, и потому потребуются выполняющие последующие промежуточные преобразования графа. Например, переход $\gamma_1 - \delta_1$ ($\{\hat{v}_1, \hat{v}_2\} - \{v_1^1, v_2^1\}$) на одном из следующих этапов будет замещен (по вышеописанному принципу) фрагментом из четырех переходов $\hat{v}_1 - v_1^1, \hat{v}_1 - v_2^1, \hat{v}_2 - v_1^1, \hat{v}_2 - v_2^1$. В этих переходах теперь присутствуют только канонические вершины.

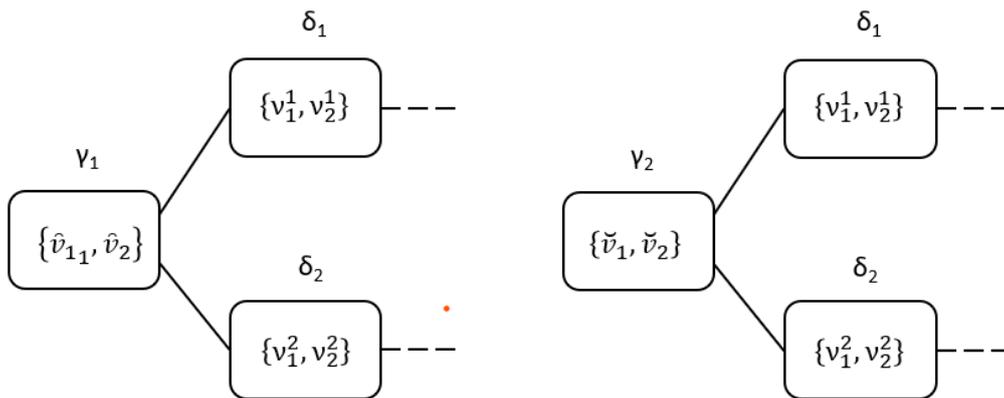


Рис. 2. Фрагменты подграфа для замещения переходов 3-го вида
Fig 2. Fragments of a subgraph to replace transitions of the 3rd type

Понятно, что подобные замещения в графе G за конечное число шагов приведут к тому, что множество вершин после завершающего этапа преобразования графа G будет содержать только канонические вершины, т.е. он является четким. Покажем далее, что этот граф и дает возможность получить решение рассматриваемой задачи.

4. Обоснование метода решения задачи и пример построения графа простых путей

Множество простых путей в классическом графе в [1] предложено представлять в компактной форме с использованием введенного там понятия графа путей. Там же показано, что решение рассматриваемой задачи построения простых путей между двумя заданными вершинами графа (и еще трех аналогичных задач) сводится к вычислениям, которые именуются анализом двусвязности графа. Хорошо известный алгоритм такого анализа был разработан в [12].

Изложенный выше алгоритм преобразования нечеткого графа связан с замещением переходов с a -вершинами на переходы между каноническими вершинами. Из структуры всех использованных фрагментов для замещения очевидно, что наличие в переходе a -вершин означает фактически продолжение пути от этой вершины по разным ветвям графа за счет разветвления. Заметим, что в каждом используемом фрагменте представлены все варианты продолжения простого пути от a -вершины.

Очевидно, что этот факт обеспечивает наличие в построенном графе \tilde{G} всех возможных вариантов простых путей между двумя заданными вершинами α и β в графе G , которые потенциально могут возникнуть в процессе всех конкретных реализаций проходов по путям. Применяя далее к графу \tilde{G} предложенный в [1] математический аппарат, строится граф простых путей, обеспечивающий общее решение рассматриваемой задачи.

Из изложенного вытекает справедливость следующего утверждения:

Теорема 1. Множество всех простых путей четкого графа \tilde{G} , полученного из заданного нечеткого графа G описанным выше алгоритмом преобразования, совпадает с множеством всех простых путей, возникающих в графе G при любых возможных конкретных реализациях прохода по пути между двумя заданными вершинами α и β .

Эта теорема является обоснованием предлагаемого метода решения рассматриваемой задачи. Он состоит из предварительного преобразования нечеткого графа в четкий и последующего построения графа простых путей. Наглядность метода и простота восприятия логики предлагаемого решения очевидны, и поэтому теорема не требует дополнительного математического обоснования.

Граф простых путей, построенный для четкого графа \tilde{G} , соединяющего две вершины α и β , может быть выражен через структуру двусвязного графа [1]. В рассматриваемой задаче графом путей будет объединение всех простых путей в графе G , соединяющих две вершины α и β , который обозначим $P(G, \alpha, \beta)$. Приводимая ниже дословно *теорема* из [1] показывает, что граф $P(G, \alpha, \beta)$ строится посредством декомпозиции (четкого) графа G .

Теорема 2. Пусть L – простой путь в связном графе G , соединяющий вершины α и β ; $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n$ – множество таких блоков графа G , которые содержат хотя бы одно из ребер пути L . Тогда:

- 1) семейство блоков $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n$ не зависит от выбора пути L из множества всех простых путей, соединяющих вершины α и β : оно однозначно определено парой α и β ;
- 2) семейство блоков $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n$ можно линейно упорядочить в такую цепочку, в которой первый и последний блоки содержат вершины α и β соответственно, а пересечение каждых двух соседних блоков в цепочке состоит из их общего шарнира;
- 3) граф простых путей, соединяющих α и β , есть объединение блоков $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n$:

$$P(G, \alpha, \beta) = \Theta_0 + \Theta_1 + \dots + \Theta_n$$

(в теореме знаком плюс обозначено объединение блоков).

Далее рассмотрим в качестве простого примера нечеткий граф $G = (V, E)$, изображенный на рис. 3. В нем множество V содержит 9 вершин, из которых 7 – канонические (литеры v_i), а остальные две – a -вершины (литеры w_i): $w_2 = \{v_2^1, v_2^2\}$, $w_7 = \{v_7^1, v_7^2, v_7^3\}$. Множество ребер E содержит 10 ребер (литеры e_i). Выполненный анализ двусвязности графа G показывает, что он состоит из четырех блоков: $\Theta_0 = \{v_5, v_3\}$, $\Theta_1 = \{v_1, w_2, v_4, v_3\}$, $\Theta_2 = \{v_4, v_6\}$, $\Theta_3 = \{v_6, w_7, v_8, v_9\}$. Блоки $\Theta_0 = \{v_5, v_3\}$ и $\Theta_2 = \{v_4, v_6\}$ называются вырожденными (по определению блок должен иметь более двух вершин, либо быть мостом), так как они образуют мосты.

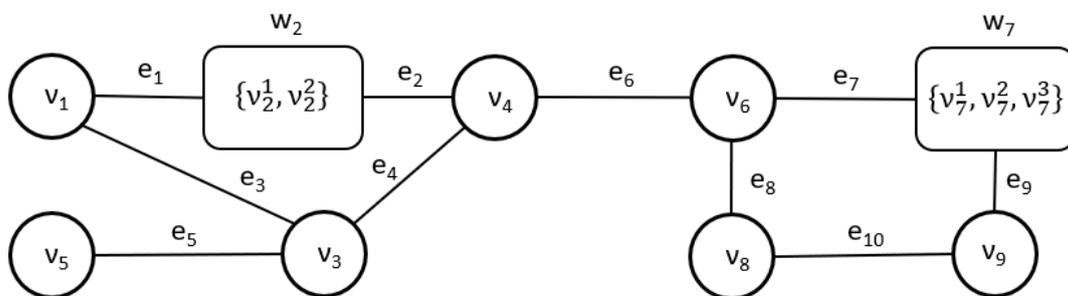


Рис. 3. Пример нечеткого графа для построения простых путей
Fig. 3. An example of a fuzzy graph for constructing simple paths

Блоки Θ_3 и Θ_1 являются по определению компонентами двусвязности графа G , так как они его максимальные двусвязные подграфы.

Вершины v_3 и v_6 являются по определению шарнирами (общая вершина двух блоков). Ребра e_5 , e_6 – мосты, так как по определению они не принадлежат никаким компонентам двусвязности графа.

Легко проверить, что выполнение преобразования графа на рис. 3 описанным выше способом дает четкий граф, изображенный на рис. 4.

Результаты анализа двусвязности показывают, что по теореме 1 четкий граф на рис. 4 представляет собой граф простых путей для рассматриваемого примера.

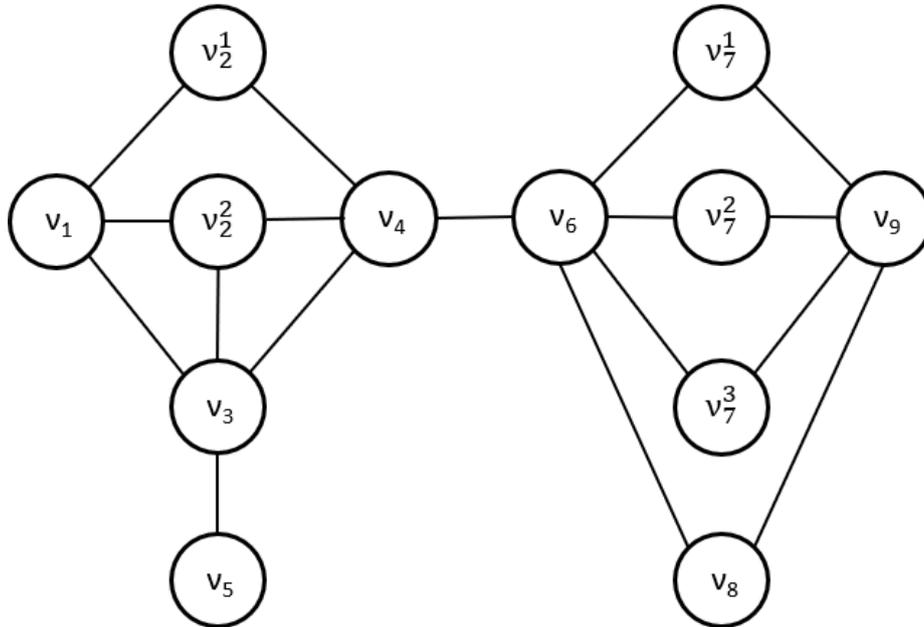


Рис. 4. Четкий граф, полученный после преобразования графа на рис. 3
 Fig. 4. A clear graph obtained after the graph transformation in Fig. 3

Используя граф на рис. 4, построим, например, множество всех простых путей между вершинами v_1 и v_9 . Их поиск в графе можно осуществить путем его обхода с посещением всех вершин и исследованием всех ребер. Такой обход можно выполнить многими способами, в частности наиболее распространенными стратегиями – поисками в глубину и ширину [4]. Отметим, что из теоремы 1 в [1] вытекает, что пространство поиска может сократиться при использовании графа простых путей (по сравнению с поиском во всем исходном заданном графе в глубину или в ширину). Заметим, что сам процесс поиска может быть организован более эффективно благодаря линейной упорядоченности блоков и специфики структуры графа простых путей.

В нашем примере благодаря простоте структуры графа на рис. 4 найти все множество его простых путей очень легко. В первом (слева) блоке графа имеется пять потенциальных начальных отрезков простых путей $(v_1 - v_2^1 - v_4; v_1 - v_2^2 - v_4; v_1 - v_3 - v_4; v_1 - v_2^2 - v_3 - v_4; v_1 - v_3 - v_2^2 - v_4)$. Во втором блоке (справа) четкого графа имеется четыре потенциальных завершающих отрезка простых путей $(v_6 - v_7^1 - v_9; v_6 - v_7^2 - v_9; v_6 - v_7^3 - v_9; v_6 - v_8 - v_9)$.

Понятно, что объединенные мостом $v_4 - v_6$ все возможные пары из начальных и завершающих отрезков образуют множество всех простых путей полученного четкого графа. Таким образом, в графе на рис. 4 имеется 20 (5×4) различных простых путей.

Заключение

В статье предложен метод сведения рассмотренной задачи к аналогичной задаче для четких транспортных сетей. Он основан на преобразовании заданной НТС к четкой сети. Алгоритм такого преобразования достаточно прост, что следует из его описания. Он практически очевиден благодаря

наглядности и легко понимаемой логике построения. Отсюда понятна и простота обоснования алгоритма.

В [2] справедливо указывается, что для алгоритмов важна не только их вычислительная сложность, но также логическая простота и содержательная ясность. Два последних качества фактически определяют трудозатраты на отладку и развитие компьютерных программ реализации алгоритмов.

Важность задач построения простых путей объясняется возможностью приложений для решения некоторых актуальных проблем, например указанных в [2]: контроля надежной связности транспортных сетей, обнаружения узких мест в них, визуализации и резервирования, вычисления препятствий при движении по сети и др.

Список источников

1. Головинский И.А. Построение графов простых путей в транспортных сетях. I. Общие примеры и решения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2021. № 1. С. 124–159. doi: 10.31857/S0002338821010066
2. Головинский И.А. Построение графов простых путей в транспортных сетях. II. Анализ двусвязности графов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2021. № 2. С. 47–61. doi: 10.31857/S0002338821020049
3. Zadeh L. Fuzzy sets // *Information and Control*. 1965. V. 8. P. 338–353.
4. Алексеев В.Е., Таланов В.А. Графы и алгоритмы. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 320 с.
5. Харари Ф. Теория графов. М. : Мир, 1973. 300 с.
6. Ахо А.В., Хопкрофт Дж.Э., Ульман Дж.Д. Структуры данных и алгоритмы. М. ; СПб. ; Киев : Вильямс, 2003. 384 с.
7. Кофман А.В. Введение в теорию нечетких множеств. М. : Радио и связь, 1982. 432 с.
8. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д.А. Поспелова. М. : Наука, 1986. 312 с.
9. Норвич А.М., Турсон И.Б. Построение функции принадлежности и теория вероятностей : последние достижения : пер. с англ. / под ред. Р.Р. Ягера. М. : Радио и связь, 1986. 408 с.
10. Шопин А.Г. Построение функции принадлежности нечеткого множества и оценка его вероятностных характеристик // Исследовано в России : электронный многопредметный научный журнал. Шопин А.Г. Построение функции принадлежности нечеткого множества и оценка его вероятностных характеристик // Исследовано в России : электронный многопредметный научный журнал. Т. 6. С. 453–467. URL: <https://web.archive.org/web/20040320064103/http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/040.pdf>
11. Кузнецов А.П., Адельсон-Вельский Т.М. Дискретная математика для инженера. М. : Энергоатомиздат, 1988. 480 с.
12. Hopcroft J.E., Tarjan R.E. Efficient Algorithms for Graph Manipulation // *Comm. ACM*. 1973. V. 16 (6), P. 372–378.

References

1. Golovinskiy, I.A. (2021) Postroenie grafov prostykh putey v transportnykh setyakh. I. Obshchie primery i resheniya [Construction of simple path graphs in transport networks: I. General solutions and examples]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*. 60(1). pp. 118–152. DOI: 10.31857/S0002338821010066
2. Golovinskiy, I.A. (2021) Postroenie grafov prostykh putey v transportnykh setyakh. II. Analiz dvusvyaznosti grafov [Construction of simple path graphs in transport networks: II. Analysis of graphs' biconnectivity]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*. 60(2). pp. 213–226. DOI: 10.31857/S0002338821020049
3. Zadeh, L. (1965) Fuzzy sets. *Information and Control*. 8. pp. 338–353.
4. Alekseev, V.E. & Talanov, V.A. (2011) *Grafy i algoritmy* [Graphs and Algorithms]. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy.
5. Harari, F. (1973) *Teoriya grafov* [Graph Theory]. Moscow: Mir.
6. Aho, A.V., Hopcroft, G.E. & Ulman, G.D. (2003) *Struktury dannykh i algoritmy* [Data Structures and Algorithms]. Moscow; St. Petersburg; Kiev: Vil'yams.
7. Kofman, A.V. (1982) *Vvedenie v teoriyu nechetkikh mnozhestv* [Introduction to the Theory of Fuzzy Sets]. Moscow: Radio i svyaz'.
8. Pospelova, D.A. (ed.) (1986) *Nechetkie mnozhestva v modelyakh upravleniya i iskusstvennogo intellekta* [Fuzzy sets in control and artificial intelligence models]. Moscow: Nauka.
9. Norvich, A.M. & Turson, I.B. (1986) *Postroenie funktsii prinadlezhnosti i teoriya veroyatnostey: poslednie dostizheniya* [Construction of the membership function and probability theory: Recent achievements]. Translated from English. Moscow: Radio i svyaz'.
10. Shopin, A.G. (2003) Postroenie funktsii prinadlezhnosti nechetkogo mnozhestva i otsenka ego veroyatnostnykh kharakteristik [Construction of the membership function of a fuzzy set and evaluation of its probabilistic characteristics]. *Issledovano v Rossii*. 6. pp. 453–467. [Online] Available from: <https://web.archive.org/web/20040320064103/http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/040.pdf>
11. Kuznetsov, A.P. & Adel'son-Vel'skiy, T.M. (1988) *Diskretnaya matematika dlya inzhenera* [Discrete Mathematics for Engineers]. Moscow: Energoatomizdat.
12. Hopcroft, J.E. & Tarjan, R.E. (1973) Efficient Algorithms for Graph Manipulation. *Comm. ACM*. 16(6). pp. 372–378.

Информация об авторах:

Сперанский Дмитрий Васильевич – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры «Системы управления транспортной инфраструктурой» Российского университета транспорта (МИИТ) (Москва, Россия). E-mail: speranskiy.dv@gmail.com

Лунев Сергей Александрович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры «Системы управления транспортной инфраструктурой» Российского университета транспорта (МИИТ) (Москва, Россия). E-mail: slunev@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Speranskiy Dmitriy V. (Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Transportation Infrastructure Management Systems of Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russian Federation). E-mail: speranskiy.dv@gmail.com

Lunev Sergey A. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Transportation Infrastructure Management Systems of Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russian Federation). E-mail: slunev@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 31.10.2024; принята к публикации 03.03.2025

Received 31.10.2024; accepted for publication 03.03.2025