ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Математика и механика № 94
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья
УДК 517.54 MSC: 30C45
doi: 10.17223/19988621/94/1

Об одном подклассе почти выпуклых функций, связанных со звездообразными функциями порядка 1/2

Федор Федорович Майер[1], Мейрамбек Габдулиевич Тастанов[2], Анар Алтаевна Утемисова[3]

[1, 2, 3] *Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан*
[1] *maiyer@mail.ru*
[2] *tastao@mail.ru*
[3] *anar_utemisova@mail.ru*

Аннотация. Исследуется специальный подкласс почти выпуклых в единичном круге функций, который задается через звездообразные функции порядка 1/2. Некоторые близкие подклассы активно изучались в ряде работ, опубликованных в последнее десятилетие. Для данного класса функций и его подклассов найдены точные теоремы искажения и радиусы выпуклости, рассмотрены частные случаи. Получены как новые результаты, так и обобщения ранее известных результатов. Для вывода основных результатов используются полученные в статье точные оценки аналитических функций, обобщающие ранее известные оценки.
Ключевые слова: звездообразные функции, почти выпуклые функции, оценки искажения, радиусы выпуклости

Для цитирования: Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А. Об одном подклассе почти выпуклых функций, связанных со звездообразными функциями порядка 1/2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 5–23. doi: 10.17223/19988621/94/1

Original article

On a subclass of close-to-convex functions related to starlike functions of order 1/2

Fedor F. Maiyer[1], Meyrambek G. Tastanov[2], Anar A. Utemissova[3]

[1, 2, 3] *Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan*
[1] *maiyer@mail.ru*

[2] tastao@mail.ru
[3] anar_utemisova@mail.ru

Abstract. The article introduces and investigates a special subclass of close-to-convex functions in a unit disk which is defined in terms of starlike functions of the order 1/2. Functions of this class, as well as starlike functions of the order 1/2, may have omissions in the decomposition.

Some close subclasses have been actively studied in the works of Gao C.-Y., Zhou S.-Q., Kowalczyk J., Les-Bomba E., Prajapat J.K., and other authors published in the last decade. The class of functions introduced in this paper is characterized by the fact that the range of values of the functional used is contained in the right half of the generalized Bernoulli lemniscate with a nodal point 0 and a given angle between the tangents at the nodal point, which allows us to consider many special cases. For example, a disk of arbitrary radius with a point 0 at the border, an angle with a vertex at point 0 of a given size, and others.

For the introduced class of functions and its subclasses, exact distortion theorems and convexity radii are found, and extreme functions are given. Both new results and generalizations of previously known results are obtained.

To solve the extreme problems under consideration, the article provides accurate estimates of the logarithmic derivative in the class of analytical functions, the codomain of values of which are contained in the right half of the generalized Bernoulli lemniscate. These estimates are given both for the case of a standard decomposition of a function in a series, and in the presence of omissions in the decomposition and summarize the well-known results of Goel R.M. and Shaffer D.B.

Keywords: starlike functions, close-to-convex functions, distortion estimates, radii of convexity

For citation: Maiyer, F.F., Tastanov, M.G., Utemissova, A.A. (2025) On a subclass of close-to-convex functions related to starlike functions of order 1/2. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 5–23. doi: 10.17223/19988621/94/1

Введение

Пусть $\mathcal{A}_n$ – класс аналитических в круге $E=\{z:|z|<1\}$ функций $\varphi(z)$ с разложением вида: $\varphi(z)=1+c_n z^n+c_{n+1}z^{n+1}+\dots$, $n\geq 1$, $z\in E$, $\mathcal{P}_{\mathrm{n}}$ – класс функций $\varphi(z)\in\mathcal{A}_n$ с положительной действительной частью $\operatorname{Re}\varphi(z)>0$, $z\in E$, и $\mathcal{N}_n$ – класс аналитических в E функций $f(z)$ вида: $f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\dots$, $n\geq 1$, $z\in E$. Также положим, что $\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}_1$, $\mathcal{P}\equiv\mathcal{P}_1$, $\mathcal{N}\equiv\mathcal{N}_1$. Кроме того, через $\mathcal{P}_n(\gamma)$ будем обозначать класс функций $\varphi(z)\in\mathcal{A}_n$, удовлетворяющих условию $|\arg\varphi(z)|<\gamma\pi/2$, $z\in E$. Очевидно, что $\mathcal{P}_n(1)=\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{P}_1=\mathcal{P}$ – известный класс Каратеодори.

Через S, S°, S^* и K будем обозначать соответственно классы однолистных, выпуклых, звездообразных и почти выпуклых функций $f(z)\in\mathcal{N}$. Кроме того, пусть $S^*(\alpha)$ – класс функций, звездообразных порядка α, т.е. удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}\left(\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha$, $0\leq\alpha<1$. Также пусть $K(\gamma)$ обозначает класс функций, почти выпуклых порядка γ [1, 2]. При этом $f(z) \in K(\gamma)$ тогда и только тогда, когда существует функция $g(z) \in S^*$ такая, что выполняется условие

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{g(z)}\right| < \gamma \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \gamma \le 1, \quad z \in E. \tag{1}$$

При этом $S^{\circ} = K(0) \subset K(\gamma) \subset K(1) = K$.

В 2005 г. Ч.-И. Гао и Ш. Чжоу [3] ввели класс

$$K_S = \left\{ f(z) \in \mathcal{N}: \ \mathrm{Re}\left(-\frac{z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)}\right) > 0, \, g(z) \in S^*(1/2), \, z \in E \right\}$$

аналитических в E функций $f(z)$, являющийся подклассом класса K.

Позже Ж. Ковальчук и Е. Лес-Бомба [4] с помощью условия

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)}\right) > \alpha, \tag{2}$$

где $0 \le \alpha < 1$, $g(z) \in S^*(1/2)$, ввели подкласс $K_s(\alpha)$ функций $f(z) \in \mathcal{N}$. Очевидно, что $K_s(\alpha) \subset K_s(0) = K_s \subset K$.

Обобщая условие (2), авторы [5] ввели класс $\chi_t(\alpha)$ функций $f(z) \in \mathcal{N}$ таких, что в круге E выполняется условие

$$\mathrm{Re}\left(\frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)}\right) > \alpha, \tag{3}$$

где $0 \le \alpha < 1$, $t \in [-1,1] \setminus \{0\}$ и $g(z) \in S^*(1/2)$. Легко заметить, что $\chi_{-1}(\alpha) = K_s(\alpha)$ и $\chi_{-1}(0) = K_s$. Кроме того (см., напр.: [5]), $\chi_t(\alpha) \subset K_S(\alpha) \subset K_S \subset K \subset S$.

В работах [3, 4] установлены некоторые свойства функций соответственно классов K_S и $K_S(\gamma)$. В [5] получены свойства (оценки коэффициентов, теоремы искажения и покрытия и радиус выпуклости) функций класса $\chi_t(\alpha)$, в том числе и обобщающие некоторые результаты предыдущих авторов.

В статьях [6, 7] введен класс $K_S(\varphi_0)$ с помощью расширения условия (2) в форме

$$-\frac{z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)} \prec \varphi_0(z), \tag{4}$$

где функция $\varphi_0(z) \in \mathcal{P}$ и является симметричной относительно действительной оси и выпуклой. Здесь в терминах $\varphi_0(z)$ найдены оценки коэффициентов и теоремы искажения, также рассмотрен частный случай $K_S\left(\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right) \equiv K_S(\alpha)$, $0 \le \alpha < 1$.

Развивая идеи статьи [5], введем класс $\chi_t^{n,m}(\alpha,\gamma)$ аналитических в E функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\left|\left(\frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)}\right)^{1/\gamma} - \frac{1}{2\alpha}\right| < \frac{1}{2\alpha}, \quad 0<\alpha<1, \quad \gamma \in [-1,1]\setminus\{0\}, \quad z \in E, \tag{5}$$

где $t \in [-1,1]\setminus\{0\}$, $g(z) \in \mathcal{N}_m \bigcap S^*(1/2)$, причем будем обозначать $\chi_t(\alpha,\gamma) \equiv \chi_t^{1,1}(\alpha,\gamma)$.

В настоящей статье рассматриваются свойства функций классов $\chi_t^{n,n}(\alpha,\gamma)$, $\chi_t^{n,1}(\alpha,\gamma)$, в частности получены точные теоремы искажения, а также радиус выпуклости. В частных случаях найдены новые результаты для подклассов класса $\chi_t^{n,n}(\alpha,\gamma)$, полученные в виде ограничений на области значений функционала $tz^2 f'(z)/(g(z)g(tz))$, в том числе и для случая (3). При конкретном выборе функции $g(z)$ в классе $\chi_t^{n,1}(\alpha,\gamma)$ вытекают теоремы искажения и радиусы выпуклости для новых классов функций, выпуклых в направлении мнимой оси и выпуклых в положительном направлении действительной оси. Получены как новые оригинальные результаты, так и обобщения ранее известных результатов.

1. Описание некоторых классов функций из $\mathcal{N}$

Пусть $f(z) \in \mathcal{N}_n$ и пусть $f(z) \in \chi_t^{n,m}(\alpha,\gamma)$, т.е. выполняется условие (5). Обозначим

$$G(z) = \frac{g(z)g(tz)}{tz},$$

где $t \in [-1,1]\setminus\{0\}$. Нетрудно установить, что если $g(z) \in \mathcal{N}_m$, то и $G(z) \in \mathcal{N}_m$. Кроме того, из условия $g(z) \in S^*(1/2)$ сразу вытекает (см. напр.: [5]), что $G(z) \in S^*$.

Поскольку в силу (5) $zf'(z)/G(z) \prec \varphi_0(z)$, где

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-(1-2\alpha)z}\right)^{\gamma}, \tag{6}$$

то

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{G(z)}\right| \le \max_{z\in E}\left|\arg \varphi_0(z)\right| < |\gamma|\frac{\pi}{2}, \quad |\gamma| \le 1, \quad \gamma \ne 0, \quad G(z) \in S^*, \quad z \in E.$$

То есть выполняется условие (1) со звездообразной функцией $G(z) \in \mathcal{N}_m$. Поэтому любая функция $f(z)$ из $\chi_t^{n,m}(\alpha,\gamma)$ является почти выпуклой порядка $|\gamma|$, и $\chi_t^{n,m}(\alpha,\gamma) \subset \chi_t(\alpha,\gamma) \subset K(|\gamma|) \subset K$.

При $\gamma = -1$ получаем класс функций

$$\chi_t^{n,m}(\alpha,\text{-}1) \equiv \chi_t^{n,m}(\alpha) = \left\{ f(z) \in \mathcal{N}_n :\ \mathrm{Re}\frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} > \alpha, 0 \le \alpha < 1, z \in E \right\},$$

который при $n = m = 1$ ранее рассматривался в [5].

Также будут рассматриваться следующие подклассы класса $\chi_t^{n,m}(\alpha,\gamma)$:

$$\chi_t^{n,m}(\alpha,1)=\left\{ f(z)\in \mathcal{N}_n : \left|\frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)}-\frac{1}{2\alpha}\right|<\frac{1}{2\alpha},\ 0<\alpha<1, z\in E\right\},$$

$$\chi_t^{n,m}(0,\gamma)=\left\{ f(z)\in \mathcal{N}_n : \left|\arg\frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)}\right|<\gamma\frac{\pi}{2}, 0<\gamma\le 1, z\in E\right\},$$

$$\chi_t^{n,m}\left(\frac{1}{2},1\right)=\left\{ f(z)\in \mathcal{N}_n : \left|\frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)}-1\right|<1, z\in E\right\}.$$

2. Оценки в некоторых классах аналитических функций

Будем говорить, что функция $\varphi(z)$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n(\alpha,\gamma)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(z)\in\mathcal{A}_n$ и

$$\left|\left(\varphi(z)\right)^{\frac{1}{\gamma}}-\frac{1}{2\alpha}\right|<\frac{1}{2\alpha},\quad 0<\alpha<1,\quad \gamma\in[-1,1]\setminus\{0\},\quad z\in E\ . \tag{7}$$

Лемма 1. *Если* $\varphi(z)\in\mathcal{P}_n(\alpha,\gamma)$, *то*

$$\varphi(z)\prec\varphi_0(z)=\left(\frac{1+z}{1-(1-2\alpha)z}\right)^{\gamma}. \tag{8}$$

Действительно, поскольку

$$w(z)=\frac{1+z}{1-(1-2\alpha)z}$$

есть отображение круга E на круг $\left|w-1/(2\alpha)\right|<1/(2\alpha)$, $0<\alpha<1$, то условие (7) равносильно подчиненности $\left(\varphi(z)\right)^{1/\gamma}\prec w(z)$, откуда следует (8).

Легко заметить, что при $\alpha\to 0$ класс $\mathcal{P}_n(\alpha,\gamma)$ сводится к классу $\mathcal{P}_n(\gamma)$. Кроме того, при любом α, $0<\alpha<1$, в силу (7) выполняется условие $\mathrm{Re}\left(\varphi(z)\right)^{\frac{1}{\gamma}}>0$, т.е. $\left|\arg\varphi(z)\right|<\gamma\frac{\pi}{2}$, $z\in E$. Поэтому при любом α, $0<\alpha<1$, область значений $\varphi(E)$ содержится внутри угла $\left|\arg w\right|<\gamma\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\mathcal{P}_n(\alpha,\gamma)\subset\mathcal{P}_n(0,\gamma)=\mathcal{P}_n(\gamma)\subset\mathcal{P}_n(0,1)=\mathcal{P}_n\ .$$

В случае, когда $0<\alpha<1$, $0<\gamma\le 1$, условие (7) означает, что область значений $\varphi(E)$ содержится в области *D*, ограниченной правой половиной лемнискаты Бернулли с узловой точкой $w=0$ и углом между касательными в узловой точке, равным γπ. При $-1\le\gamma<0$ область значений $\varphi(E)$ содержится в области D_1, получаемой из *D* с помощью отображения $\zeta=1/w$.

Лемма 2. *Пусть функция* $1+\Phi(z)\in\mathcal{A}_n$ и *удовлетворяет условию*

$$\left|\exp\left\{\frac{1}{\gamma}\Phi(z)\right\}-c\right|<c,\ c>\frac{1}{2},\ 0<\gamma\le 1. \tag{9}$$

Тогда при $|z|=r$, $0\le r<1$, *имеет место точная оценка*

$$|\Phi'(z)|\le\frac{\gamma(2c-1)nr^{n-1}}{(1-r^n)\left[c+(c-1)r^n\right]}, \tag{10}$$

которая достигается для функции $\Phi(z)=\Phi_0(z^n)$ *в точке* $z=\sqrt[n]{-1}\,r$, где $\Phi_0(z)=\gamma\ln\dfrac{c(1+z)}{c-(c-1)z}$.

Лемма 2 установлена нами в [8].

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(z)\in\mathcal{P}_n(\alpha,\gamma)$. *Тогда при* $|z|=r$, $0\le r<1$, *имеют место точные оценки*

$$\left(\frac{1-r^n}{1+(1-2\alpha)r^n}\right)^{\gamma}\le|\varphi(z)|\le\left(\frac{1+r^n}{1-(1-2\alpha)r^n}\right)^{\gamma}\ \text{при}\ 0<\gamma\le 1, \tag{11}$$

$$\left(\frac{1-(1-2\alpha)r^n}{1+r^n}\right)^{-\gamma}\le|\varphi(z)|\le\left(\frac{1+(1-2\alpha)r^n}{1-r^n}\right)^{-\gamma}\ \text{при}\ -1\le\gamma<0, \tag{12}$$

$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\le\frac{2|\gamma|(1-\alpha)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-2\alpha)r^n)}\ \text{при}\ 0<|\gamma|\le 1 \tag{13}$$

Экстремальная функция имеет вид: $\varphi(z)=\varphi_0(z^n)$, *где* $\varphi_0(z)$ *определяется по формуле* (6).

Доказательство. В силу подчиненности (8) с учетом выпуклости функции $\varphi_0(z)$ и свойства ее симметрии $\varphi_0(\overline{z})=\overline{\varphi_0(z)}$ относительно действительной оси, при любом r, $0\le r<1$, имеем $\varphi(|z|\le r)\subset\varphi_0(|z|\le r^n)$. Поэтому при $0<\gamma\le 1$ с учетом того, что $\varphi_0'(0)>0$, получаем неравенство $\varphi_0(-r^n)\le|\varphi(z)|\le\varphi_0(r^n)$, откуда вытекает оценка (11). Оценка (12) получается аналогично с учетом того, что при $-1\le\gamma<0$ выполняется условие $\varphi_0'(0)<0$.

Рассмотрим функции $\Phi(z)=\ln\varphi(z)$, $\Phi_0(z)=\ln\varphi_0(z)$. Поскольку $\Phi(z)\prec\Phi_0(z)$, то условие (9) можно переписать в виде (7), причем $\gamma\in[-1,1]\setminus\{0\}$. Поэтому при $0<\gamma\le 1$ оценка (13) сразу вытекает из оценки (10).

В случае, когда $-1\le\gamma<0$, функция $\psi(z)=1/\varphi(z)$ удовлетворяет условию (7) $\left|(\psi(z))^{1/\gamma}-1/(2\alpha)\right|<1/(2\alpha)$ с параметром $\gamma\in(0,1]$. Кроме того, $z\psi'(z)/\psi(z)=$ $=-z\varphi'(z)/\varphi(z)$. Поэтому оценка (13) остается справедливой и в этом случае.

Нетрудно установить, что для экстремальной функции $\varphi(z)=\varphi_0(z^n)$, где $\varphi_0(z)$ определяется по формуле (6), в оценке (11) знаки равенства слева и справа достигаются соответственно в точках $z=\sqrt[n]{-1}\,r$ и $z=r$, в оценке (12) – соответственно в точках $z=r$ и $z=\sqrt[n]{-1}\,r$.

Кроме того, при $0<\gamma\le 1$

$$z\frac{\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)}=\frac{2\gamma(1-\alpha)nz^n}{(1+z^n)\left(1-(1-2\alpha)z^n\right)},$$

и в точке $z=\sqrt[n]{-1}\,r$

$$z\frac{\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)}=-\frac{2\gamma(1-\alpha)nr^n}{(1-r^n)\left(1+(1-2\alpha)r^n\right)}.$$

При $-1\le\gamma<0$ для экстремальной функции

$$\varphi_0(z)=\left(\frac{1-(1-2\alpha)z}{1+z}\right)^{-\gamma}$$

находим

$$z\frac{\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)}=\frac{2\gamma(1-\alpha)nz^n}{(1+z^n)\left(1-(1-2\alpha)z^n\right)}.$$

Поэтому в точке $z=\sqrt[n]{-1}\,r$

$$z\frac{\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)}=-\frac{2\gamma(1-\alpha)nr^n}{(1-r^n)\left(1+(1-2\alpha)r^n\right)}=\frac{2|\gamma|(1-\alpha)nr^n}{(1-r^n)\left(1+(1-2\alpha)r^n\right)}.$$

Следовательно, для всех $\gamma\in[-1,1]\setminus\{0\}$ в оценке (13) достигается знак равенства, и поэтому оценку (13) улучшить нельзя.

Примечание. При $\gamma=1$, $n\ge 1$ оценки (11), (13) получены в статье [9. Теор. 1, 7], а при $\gamma=n=1$ – в статьях [10. Лемма 2.1] и [11. Следствие 3].

Кроме того, при $\gamma=n=1$ случаи $\alpha\to 0$ ($\operatorname{Re}\varphi(z)>0$) и $\alpha=1/2$ ($|\varphi(z)-1|<1$) условия (7) приводят к оценкам

$$\left|\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\le\frac{2}{1-r^2}\quad\text{и}\quad\left|\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\le\frac{1}{1-r},$$

полученным Т.Х. МакГрегором [12, 13], а для произвольного $n\ge 1$ в классе функций, заданном условием $\operatorname{Re}\varphi(z)>0$, – к оценке из [14]

$$\left|z\varphi'(z)/\varphi(z)\right|\le 2nr^n/(1-r^{2n}).$$

При $\gamma=\alpha=1/2$ условие (7) равносильно подчиненности $\varphi(z)\prec\varphi_0(z)=\sqrt{1+z}$. Поэтому из теоремы 1 получаем оценки

$$\sqrt{1-r^n}\le|\varphi(z)|\le\sqrt{1+r^n},\qquad\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\le\frac{nr^n}{2(1-r^n)},$$

которые при $n=1$ получены в [15].

При $\gamma=-1$ получаем класс $\mathcal{P}_n(\alpha,-1)=\{\varphi(z)\in\mathcal{A}_n:\ \operatorname{Re}\varphi(z)>\alpha, 0\le\alpha<1, z\in E\}$, которому соответствуют оценки

$$\frac{1-(1-2\alpha)r^n}{1+r^n} \le |\varphi(z)| \le \frac{1+(1-2\alpha)r^n}{1-r^n},$$

$$\left| z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \le \frac{2(1-\alpha)nr^n}{(1-r^n)\left(1+(1-2\alpha)r^n\right)},$$

полученные ранее в [9. Теор. 7; 16. Лемма 2], а при $\gamma=-1$, $\alpha=0$ – в [14] для класса функций с положительной действительной частью.

При $\gamma=-1$, $n=1$, $0\le\alpha<1$ получаем оценки из [17. Теор. 3].

Также отметим, что при $\alpha\to 0$, $0<\gamma\le 1$ класс $\mathcal{P}_n(\alpha,\gamma)$ сводится к классу $\mathcal{P}_n(\gamma)$, и мы получаем точные оценки для класса $\mathcal{P}_n(\gamma)$:

$$\left(\frac{1-r^n}{1+r^n}\right)^{\gamma} \le |\varphi(z)| \le \left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\gamma}, \quad \left| z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \le \frac{2\gamma nr^n}{1-r^{2n}}.$$

3. Теорема искажения в классе $\chi_t^{n,n}(\alpha,\gamma)$

Теорема 2. *Пусть* $f(z)\in\chi_t^{n,n}(\alpha,\gamma)$. *Тогда при* $|z|=r$, $0\le r<1$, *имеют место точные оценки*

$$\left(\frac{1-r^n}{1+(1-2\alpha)r^n}\right)^{\gamma}\frac{1}{(1+r^n)^{2/n}} \le |f'(z)| \le \left(\frac{1+r^n}{1-(1-2\alpha)r^n}\right)^{\gamma}\frac{1}{(1-r^n)^{2/n}}, \tag{14}$$

при $0<\gamma\le 1$,

$$\left(\frac{1-(1-2\alpha)r^n}{1+r^n}\right)^{-\gamma}\frac{1}{(1+r^n)^{2/n}} \le |f'(z)| \le \left(\frac{1+(1-2\alpha)r^n}{1-r^n}\right)^{-\gamma}\frac{1}{(1-r^n)^{2/n}} \tag{15}$$

при $-1\le\gamma<0$.

Доказательство. Пусть $0<\gamma\le 1$. В силу условия (5) с учетом обозначения $G(z)=g(z)g(tz)/(tz)$ на основе оценки (11) получаем

$$\left(\frac{1-r^n}{1+(1-2\alpha)r^n}\right)^{\gamma} \le \left|\frac{zf'(z)}{G(z)}\right| \le \left(\frac{1+r^n}{1-\left(1-2\alpha\right)r^n}\right)^{\gamma}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{G(z)}{z}\right|\left(\frac{1-r^n}{1+(1-2\alpha)r^n}\right)^{\gamma} \le |f'(z)| \le \left|\frac{G(z)}{z}\right|\left(\frac{1+r^n}{1-\left(1-2\alpha\right)r^n}\right)^{\gamma}. \tag{16}$$

Поскольку $G(z)\in\mathcal{N}_n\bigcap S^*$, то при $|z|=r$, $0\le r<1$, имеет место следующая оценка (см. напр.: [18. Теор. 3]:

$$\frac{r}{(1+r^n)^{2/n}} \le |G(z)| \le \frac{r}{(1-r^n)^{2/n}}.$$

Комбинируя данную оценку с оценкой (16), получим (14).

В случае $-1 \le \gamma < 0$ доказательство оценки (15) проводится аналогичным образом с использованием оценки (12).

Для доказательства точности оценки (14) рассмотрим экстремальную функцию

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{1+t^n}{1-(1-2\alpha)t^n} \right)^{\gamma} \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}} . \tag{17}$$

Для нее имеем

$$f_0'(z) = \left(\frac{1+z^n}{1-(1-2\alpha)z^n} \right)^{\gamma} \frac{1}{(1-z^n)^{2/n}} .$$

Поэтому в точках $z = \sqrt[n]{-1}\, r$ и $z = r$ в оценке (14) соответственно слева и справа достигается знак равенства.

Аналогично при $-1 \le \gamma < 0$ для функции

$$f_1(z) = \int_0^z \left(\frac{1+(1-2\alpha)r^n}{1-r^n} \right)^{-\gamma} \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}$$

с учетом того, что $-\gamma \in (0;1]$, получим, что знак равенства в оценке (15) слева и справа достигается соответственно в точках $z = \sqrt[n]{-1}\, r$ и $z = r$.

Теорема доказана.

4. Радиус выпуклости класса $\chi_t^{n,n}(\alpha,\gamma)$

Теорема 3. *Радиус выпуклости* r_0 *класса* $\chi_t^{n,n}(\alpha,\gamma)$ *определяется как единственный на интервале* (0; 1) *корень уравнения* $\tau(r,\alpha,\gamma,n) = 0$, *где* $\tau(r,\alpha,\gamma,n) = (1-2\alpha)r^{3n} - \left[1-4\alpha+2|\gamma|(1-\alpha)n\right]r^{2n} - \left[1+2\alpha+2|\gamma|(1-\alpha)n\right]r^n + 1$.

При $0 < \gamma \le 1$ *радиус выпуклости является точным и достигается для функции* (17).

Доказательство. Если $f(z) \in \chi_t^{n,n}(\alpha,\gamma)$, то существует функция $g(z) \in \mathcal{N}_n \bigcap S^*(1/2)$ такая, что функция $G(z) = g(z)g(tz)/(tz)$ является звездообразной в круге *E*. Поэтому, обозначив

$$\varphi(z) = \frac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} = \frac{zf'(z)}{G(z)} \in \mathcal{P}_n(\alpha,\gamma),$$

имеем $zf'(z) = G(z)\varphi(z)$. Отсюда

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = z\frac{G'(z)}{G(z)} + z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

и при $|z| = r$, $0 \le r < 1$,

$$\mathrm{Re}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \ge \min_{|z|\le r} \mathrm{Re}\left(z\frac{G'(z)}{G(z)}\right) - \max_{|z|\le r}\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|. \tag{18}$$

Поскольку $G(z)\in\mathcal{N}_n\bigcap S^*$, то $z\dfrac{G'(z)}{G(z)}\prec\dfrac{1+z}{1-z}$, откуда при $|z|=r$, $0\le r<1$, сразу вытекает оценка

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{G'(z)}{G(z)}\right)\ge\frac{1-r^n}{1+r^n}.$$

Поэтому с учетом этой оценки и оценки (13) получаем

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\ge\frac{1-r^n}{1+r^n}-\frac{2|\gamma|(1-\alpha)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-2\alpha)r^n)}=\frac{\tau(r,\alpha,\gamma,n)}{(1-r^{2n})(1+(1-2\alpha)r^n)}.$$

Если r_0 является наименьшим на интервале (0; 1) корнем уравнения $\tau(r,\alpha,\gamma,n)=0$, то $\operatorname{Re}\left(1+z\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right)\ge 0$ при $|z|\le r_0$ и функция $f(z)$ является выпуклой в круге $|z|\le r_0$.

Покажем, что уравнение $\tau(r,\alpha,\gamma,n)=0$ на (0; 1) имеет единственный корень r_0. Действительно, нетрудно установить, что функция $m_1(r)=\dfrac{1-r^n}{1+r^n}$ монотонно убывает на [0; 1] от $m_1(0)=1$ до $m_1(1)=0$, а функция $m_2(r)=\dfrac{2|\gamma|(1-\alpha)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-2\alpha)r^n)}$ монотонно возрастает на [0; 1) от $m_2(0)=0$ до $m_2(1)=+\infty$. Поэтому выражение

$$m_1(r)-m_2(r)=\frac{\tau(r,\alpha,\gamma,n)}{(1-r^{2n})(1+(1-2\alpha)r^n)}$$

имеет единственный нуль r_0 на (0; 1), а значит, и уравнение $\tau(r,\alpha,\gamma,n)=0$ на (0; 1) имеет единственный корень r_0.

Докажем, что при $0<\gamma\le 1$ радиус выпуклости является точным. Для этого рассмотрим экстремальную функцию (17), для которой

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{1+z^n}{1-z^n}+\frac{2\gamma(1-\alpha)nz^n}{(1+z^n)(1-(1-2\alpha)z^n)}.$$

Поэтому в точке $z=\sqrt[n]{-1}\,r$ имеем

$$1+\operatorname{Re}z\frac{f''(z)}{f'(z)}\bigg|_{z=\sqrt[n]{-1}\,r_0}=\frac{1-r_0^n}{1+r_0^n}-\frac{2\gamma(1-\alpha)nr_0^n}{(1-r_0^n)(1+(1-2\alpha)r_0^n)}=\frac{\tau(r_0,\alpha,\gamma,n)}{(1-r_0^{2n})(1+(1-2\alpha)r_0^n)}=0.$$

Следовательно, при $0<\gamma\le 1$ радиус выпуклости улучшить нельзя.

5. Некоторые следствия

Следствие 1 ($\gamma=-1$). *Если* $f(z)\in\chi_t^{n,n}(\alpha)$, т.е. $\operatorname{Re}\dfrac{tz^2f'(z)}{g(z)g(tz)}\ge\alpha$, $0\le\alpha<1$, *то при* $|z|=r$, $0\le r<1$, *имеет место точная оценка*

$$\frac{1-(1-2\alpha)r^n}{(1+r^n)^{1+2/n}} \le |f'(z)| \le \frac{1+(1-2\alpha)r^n}{(1-r^n)^{1+2/n}} \tag{19}$$

и функция $f(z)$ *является выпуклой в круге* $|z| \le r_0$, *где* r_0 *– единственный на интервале* (0; 1) *корень уравнения*

$$(1-2\alpha)r^{3n} - \big(1-4\alpha+2(1-\alpha)n\big)r^{2n} - \big(1+2\alpha+2(1-\alpha)n\big)r^n + 1 = 0\,. \tag{20}$$

При $n=1$ оценка (19) дает результат, полученный в [5. Теор. 13].

Следствие 2 ($\alpha \to 0$, $0<\gamma\le 1$). *Если* $f(z) \in \chi_t^{n,n}(0,\gamma)$, *т.е.* $\left|\arg\dfrac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)}\right| < \gamma\dfrac{\pi}{2}$, $0<\gamma\le 1$, *то при* $|z|=r$, $0\le r<1$, *имеет место точная оценка*

$$\frac{(1-r^n)^\gamma}{(1+r^n)^{\gamma+2/n}} \le |f'(z)| \le \frac{(1+r^n)^\gamma}{(1-r^n)^{\gamma+2/n}} \tag{21}$$

и точный радиус выпуклости r_0 *класса* $\chi_t^{n,n}(0,\gamma)$ *определяется по формуле*

$$r_0 = \left(1+\gamma n - \sqrt{(1+\gamma n)^2 - 1}\right)^{1/n}. \tag{22}$$

Доказательство. Оценка (21) сразу вытекает из оценки (14) при $\alpha \to 0$. Уравнение $\tau(r,\alpha,\gamma,n)=0$ теоремы 3 при $\alpha\to 0$ преобразуется к виду: $r^{3n} - (1+2\gamma n)r^{2n} - (1+2\gamma n)r^n + 1 = 0$ или $(r^n+1)(r^{2n} - 2(1+\gamma n)r^n + 1) = 0$, откуда находим радиус выпуклости (22).

Следствие 3 ($\gamma=1$). *Если* $f(z)\in\chi_t^{n,n}(\alpha,1)$, *т.е.* $\left|\dfrac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} - \dfrac{1}{2\alpha}\right| < \dfrac{1}{2\alpha}$, $0<\alpha<1$, *то при* $|z|=r$, $0\le r<1$, *имеет место точная оценка*

$$\frac{1-r^n}{1+(1-2\alpha)r^n}\frac{1}{(1+r^n)^{2/n}} \le |f'(z)| \le \frac{1+r^n}{1-(1-2\alpha)r^n}\frac{1}{(1-r^n)^{2/n}} \tag{23}$$

и точный радиус выпуклости r_0 *класса* $\chi_t^{n,n}(\alpha,1)$ *определяется как единственный на интервале* (0; 1) *корень уравнения* (20).

Если в следствии 1 или в следствии 3 $\alpha\to 0$, то получается класс $\chi_t^{n,n}(0)$, для которого

$$\frac{1-r^n}{(1-r^n)^{1+2/n}} \le |f'(z)| \le \frac{1+r^n}{(1-r^n)^{1+2/n}}. \tag{24}$$

Кроме того, уравнение (20) преобразуется к виду: $r^{3n} - (1+2n)r^{2n} - (1+2n)r^n + 1 = 0$, откуда точный радиус выпуклости определяется по формуле

$$r_0 = \left(1+n-\sqrt{(1+n)^2-1}\right)^{1/n}.$$

В частности, при $n=1$ получаем радиус выпуклости $r_0 = 2-\sqrt{3}$ класса $\chi_t(0)$, полученный в [5. Теор. 14].

При $\alpha = 1/2$ с учетом того, что уравнение (20) приобретает вид: $(1-n)r^{2n} - (2+n)r^n + 1 = 0$, из следствия 3 получаем

Следствие 4 ($\gamma = 1$, $\alpha = 1/2$). *Если* $f(z) \in \chi_t^{n,n}(1/2,1)$, *т.е.* $\left|\dfrac{tz^2 f'(z)}{g(z)g(tz)} - 1\right| < 1$, *то при* $|z| = r$, $0 \le r < 1$, *имеет место точная оценка*

$$\frac{1-r^n}{(1+r^n)^{2/n}} \le |f'(z)| \le \frac{1+r^n}{(1-r^n)^{2/n}} \tag{25}$$

и точный радиус выпуклости r_0 *класса* $\chi_t^{n,n}(1/2,1)$ *определяется по формуле*

$$r_0 = \begin{cases} 1/3, & n = 1, \\ \left(\dfrac{2+n-\sqrt{n(8+n)}}{2(1-n)}\right)^{1/n}, & n > 1 \end{cases}. \tag{26}$$

Заметим, что условия из следствий 2–4 применительно к классу χ_t, а также случай, когда $f(z) \in \mathcal{N}_n$ с $n \ge 1$ ранее в публикациях не использовались.

6. Случай, когда $f(z) \in \mathcal{N}$, и его связь с функциями, выпуклыми в направлении

Теорема 4. *Пусть* $f(z) \in \chi_t^{1,n}(\alpha,\gamma)$. *Тогда при* $|z| = r$, $0 \le r < 1$, *имеют место точные оценки:*

$$\left(\frac{1-r}{1+(1-2\alpha)r}\right)^{\gamma} \frac{1}{(1+r^n)^{2/n}} \le |f'(z)| \le \left(\frac{1+r}{1-(1-2\alpha)r}\right)^{\gamma} \frac{1}{(1-r^n)^{2/n}} \tag{27}$$

при $0 < \gamma \le 1$,

$$\left(\frac{1-(1-2\alpha)r}{1+r}\right)^{-\gamma} \frac{1}{(1+r^n)^{2/n}} \le |f'(z)| \le \left(\frac{1+(1-2\alpha)r}{1-r}\right)^{-\gamma} \frac{1}{(1-r^n)^{2/n}} \tag{28}$$

при $-1 \le \gamma < 0$ *и функция* $f(z)$ *является выпуклой в круге* $|z| \le r_0$ *где* r_0 *– единственный на интервале* (0; 1) *корень уравнения*

$$\frac{1-r^n}{1+r^n} - \frac{2|\gamma|(1-\alpha)r}{(1-r)\big(1+(1-2\alpha)r\big)} = 0. \tag{29}$$

При $0 < \gamma \le 1$ *радиус выпуклости является точным и достигается для функции*

$$f_2(z) = \int_0^z \left(\frac{1+t}{1-(1-2\alpha)t}\right)^{\gamma} \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}.$$

Доказательство теоремы 4 полностью аналогично доказательству теорем 2, 3, только оценки (11)–(13) применяются при $n = 1$. Поэтому проверим лишь точность оценок (27)–(28) и радиуса выпуклости.

Точность правой оценки (27) устанавливается рассмотрением экстремальной функции

$$f_0(z)=\int_0^z\left(\frac{1+t}{1-(1-2\alpha)t}\right)^\gamma\frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}},$$

удовлетворяющей условиям теоремы 4 при $0<\gamma\le 1$, для которой знак равенства в правой оценке (27) достигается в точке $z=r$ при любом $n\in\mathbf{N}$.

Для доказательства точности левой оценки (27) рассмотрим следующие случаи.

Пусть n – нечетное. Тогда для функции $f_0(z)$ в точке $z=-r$ получаем

$$f_0'(z)=\left(\frac{1-r}{1+(1-2\alpha)r}\right)^\gamma\frac{1}{(1+r^n)^{2/n}},$$

что доказывает точность левой оценки (27) в этом случае.

Если n – четное, то рассмотрим два случая.

1) $n=2,6,10,\ldots,2(2k-1),\ldots,\ k\in\mathbf{N}$. Тогда $i^n=-1$, и для $z=ir$ получаем, что $iz=-r$ и $z^n=-r^n$. Поэтому для функции

$$f_1(z)=\int_0^z\left(\frac{1+it}{1-(1-2\alpha)it}\right)^\gamma\frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}$$

в точке $z=ir$ находим

$$f_1'(z)=\left(\frac{1+iz}{1-(1-2\alpha)iz}\right)^\gamma\frac{1}{(1-z^n)^{2/n}}\bigg|_{z=ir}=\left(\frac{1-r}{1+(1-2\alpha)r}\right)^\gamma\frac{1}{(1+r^n)^{2/n}},$$

то есть левую оценку (27) в этом случае также улучшить нельзя.

2) $n=4,8,12,\ldots,4k,\ldots,\ k\in\mathbf{N}$. Рассмотрим функцию

$$f_2(z)=\int_0^z\left(\frac{1+\varepsilon t}{1-(1-2\alpha)\varepsilon t}\right)^\gamma\frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}},$$

где $\varepsilon=i^{\frac{n-2}{n}}$. В этом случае $i^n=1$, $-\varepsilon^{-1}=i^{\frac{n+2}{n}}$, $\left(-\varepsilon^{-1}\right)^n=-1$, и для $z=-\varepsilon^{-1}r$ имеем $\varepsilon z=-r$ и $z^n=-r^n$. Поэтому в точке $z=-\varepsilon^{-1}r$ получаем

$$f_2'(z)=\left(\frac{1+\varepsilon z}{1-(1-2\alpha)\varepsilon z}\right)^\gamma\frac{1}{(1-z^n)^{2/n}}\bigg|_{z=-\varepsilon^{-1}r}=\left(\frac{1-r}{1+(1-2\alpha)r}\right)^\gamma\frac{1}{(1+r^n)^{2/n}},$$

что доказывает точность левой оценки (27) и в этом случае.

В случае, когда $-1\le\gamma<0$, с учетом того, что $-\gamma\in(0;1]$, точность оценки (28) обосновывается аналогичным образом.

Правая оценка (28) достигается для функции

$$f_3(z)=\int_0^z\left(\frac{1+(1-2\alpha)t}{1-t}\right)^{-\gamma}\frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}$$

в точке $z=r$ при любом $n\in\mathbf{N}$, левая оценка (28) достигается для функции $f_3(z)$ в точке $z=-r$ при любом нечетном $n\in\mathbf{N}$. Если же n четное, то, рассматривая два случая, когда $n=2(2k-1)$, $k\in\mathbf{N}$, и $n=4k$, $k\in\mathbf{N}$, и функции

$$f_4(z)=\int_0^z\left(\frac{1+(1-2\alpha)it}{1-it}\right)^{\gamma}\frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}\,,\quad f_5(z)=\int_0^z\left(\frac{1+(1-2\alpha)\varepsilon t}{1-\varepsilon t}\right)^{\gamma}\frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}\,,$$

нетрудно доказать, что равенства слева в оценке (28) достигаются соответственно в точке $z=ir$ для функции $f_4(z)$ и в точке $z=-\varepsilon^{-1}r$ для функции $f_5(z)$.

Покажем теперь, что при $0<\gamma\le 1$ радиус выпуклости r_0 является точным.

Если n – нечетное, то для функции

$$f_0(z)=\int_0^z\left(\frac{1+t}{1-(1-2\alpha)t}\right)^{\gamma}\frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}\in\chi_t^{1,n}(\alpha,\gamma)$$

в точке $z=-r$, где $r=r_0$, в условии выпуклости достигается знак равенства. Действительно,

$$1+z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)}\bigg|_{z=-r}=\frac{1+z^n}{1-z^n}+\frac{2\gamma(1-\alpha)z}{(1+z)\big(1-(1-2\alpha)z\big)}\bigg|_{z=-r}=\frac{1-r^n}{1+r^n}-\frac{2\gamma(1-\alpha)r}{(1-r)\big(1+(1-2\alpha)r\big)}=0\,.$$

Если n – четное и $n=2(2k-1)$, $k\in\mathbf{N}$, то $i^n=-1$ и для $z=ir$ получаем, что $z^n=-r^n$, $iz=-r$. Поэтому для функции

$$f_1(z)=\int_0^z\left(\frac{1+it}{1-(1-2\alpha)it}\right)^{\gamma}\frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}\in\chi_t^{1,n}(\alpha,\gamma)$$

в точке $z=ir$, где $r=r_0$, имеем

$$1+z\frac{f_1''(z)}{f_1'(z)}\bigg|_{z=ir}=\left(\frac{1+z^n}{1-z^n}+\frac{2\gamma(1-\alpha)iz}{(1+iz)\big(1-(1-2\alpha)iz\big)}\right)\bigg|_{z=ir}=$$

$$=\frac{1-r^n}{1+r^n}-\frac{2\gamma(1-\alpha)r}{(1-r)\big(1+(1-2\alpha)r\big)}=0.$$

Если же $n=4k$, $k\in\mathbf{N}$, то $i^n=1$ и, если обозначить $\varepsilon=i^{\frac{n+2}{n}}$, то для $z=-\varepsilon r$ находим $z^n=-r^n$, $\varepsilon^{-1}z=-r$. Следовательно, для функции

$$f_2(z)=\int_0^z\left(\frac{1+\varepsilon^{-1}t}{1-(1-2\alpha)\varepsilon^{-1}t}\right)^{\gamma}\frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}\in\chi_t^{1,n}(\alpha,\gamma)$$

в точке $z=-\varepsilon r$, где $r=r_0$, находим

$$1+z\frac{f_2''(z)}{f_2'(z)}\bigg|_{z=-\varepsilon r}=\left(\frac{1+z^n}{1-z^n}+\frac{2\gamma(1-\alpha)\varepsilon^{-1}z}{(1+\varepsilon^{-1}z)\big(1-(1-2\alpha)\varepsilon^{-1}z\big)}\right)\bigg|_{z=-\varepsilon r}=$$

$$=\frac{1-r^n}{1+r^n}-\frac{2\gamma(1-\alpha)r}{(1-r)\big(1+(1-2\alpha)r\big)}=0.$$

Поэтому в круге $|z|\le r_0$ при $r>r_0$ условие выпуклости будет нарушаться. То есть радиус выпуклости увеличить нельзя.

Теорема 4 доказана.

Если в теореме 4 в качестве $g(z)$ взять функцию

$$g(z)=\frac{z}{(1-z^n)^{1/n}}\in\mathcal{N}_n\bigcap S^*(1/2),$$

то при $t=1$ получаем, что

$$G(z)=\frac{g(z)g(tz)}{tz}=\frac{z}{(1-z^n)^{2/n}}\in\mathcal{N}_n\bigcap S^*,$$

и условие (5) приобретает вид:

$$\left|\left((1-z^n)^{2/n}f'(z)\right)^{1/\gamma}-\frac{1}{2\alpha}\right|<\frac{1}{2\alpha},\quad 0<\alpha<1,\quad t\in[-1,1]\setminus\{0\},\quad z\in E. \qquad (30)$$

Поэтому при $n=1$ и $n=2$ получаем соответственно следующие следствия.

Следствие 5. *Пусть функция* $f(z)\in\mathcal{N}$ *удовлетворяет условию*

$$\left|\left((1-z)^2 f'(z)\right)^{1/\gamma}-1/(2\alpha)\right|<1/(2\alpha),\ 0<\alpha<1,\ \gamma\in[-1,1]\setminus\{0\},\ z\in E. \qquad (31)$$

Тогда при $|z|=r$, $0\le r<1$, *имеют место точные оценки*

$$\left(\frac{1-r}{1+(1-2\alpha)r}\right)^{\gamma}\frac{1}{(1+r)^2}\le|f'(z)|\le\left(\frac{1+r}{1-(1-2\alpha)r}\right)^{\gamma}\frac{1}{(1-r)^2}\ \text{при}\ 0<\gamma\le1, \qquad (32)$$

$$\left(\frac{1-(1-2\alpha)r}{1+r}\right)^{-\gamma}\frac{1}{(1+r)^2}\le|f'(z)|\le\left(\frac{1+(1-2\alpha)r}{1-r}\right)^{-\gamma}\frac{1}{(1-r)^2}\ \text{при}\ -1\le\gamma<0 \qquad (33)$$

и функция $f(z)$ *является выпуклой в круге* $|z|\le r_0$, *где* r_0 *– единственный на интервале* (0; 1) *корень уравнения*

$$\frac{1-r}{1+r}-\frac{2|\gamma|(1-\alpha)r}{(1-r)\left(1+(1-2\alpha)r\right)}=0. \qquad (34)$$

При $0<\gamma\le1$ *радиус выпуклости является точным и достигается для функции* (17) *при* $n=1$.

Следствие 6. *Пусть функция* $f(z)\in\mathcal{N}$ *удовлетворяет условию*

$$\left|\left((1-z^2)f'(z)\right)^{1/\gamma}-1/(2\alpha)\right|<1/(2\alpha),\ 0<\alpha<1,\ \gamma\in[-1,1]\setminus\{0\},\ z\in E. \qquad (35)$$

Тогда при $|z|=r$, $0\le r<1$, *имеют место точные оценки*

$$\left(\frac{1-r}{1+(1-2\alpha)r}\right)^{\gamma}\frac{1}{1+r^2}\le|f'(z)|\le\left(\frac{1+r}{1-(1-2\alpha)r}\right)^{\gamma}\frac{1}{1-r^2}\ \text{при}\ 0<\gamma\le1, \qquad (36)$$

$$\left(\frac{1-(1-2\alpha)r}{1+r}\right)^{-\gamma}\frac{1}{1+r^2}\le|f'(z)|\le\left(\frac{1+(1-2\alpha)r}{1-r}\right)^{-\gamma}\frac{1}{1-r^2}\ \text{при}\ -1\le\gamma<0 \qquad (37)$$

и функция $f(z)$ *является выпуклой в круге* $|z|\le r_0$, *где* r_0 *– единственный на интервал* (0; 1) *корень уравнения*

$$\frac{1-r^2}{1+r^2}-\frac{2|\gamma|(1-\alpha)r}{(1-r)\left(1+(1-2\alpha)r\right)}=0. \qquad (38)$$

При $0<\gamma\le 1$ *радиус выпуклости является точным и достигается для функции*

$$f_5(z)=\int_0^z\left(\frac{1+t}{1-(1-2\alpha)t}\right)^{\gamma}\frac{dt}{1-t^2}.$$

Нетрудно установить, что при $0<\alpha<1$, $0<\gamma\le 1$ классы функций, заданные условиями (31) и (35), являются подклассами классов функций, выпуклых в направлении мнимой оси [19] и выпуклых в положительном направлении действительной оси [20], заданных соответственно условиями

$$\operatorname{Re}[(1-z^2)f'(z)]>0 \text{ и } \operatorname{Re}[(1-z)^2 f'(z)]>0. \qquad (39)$$

Условия (39) получаются из условий (31) и (35) при $\alpha\to 0$ и $\gamma=1$. В силу этого следствия 5, 6 являются обобщениями теорем искажения и радиусов выпуклости, найденных в [19, 20]. Кроме того, при $\alpha\to 0$, $0<\gamma\le 1$ получаются соответствующие результаты из [8. Следствия 1–3, теор. 3 при $\lambda=1$; 21. Теор. 1, 2].

Заключение

В статье найдены теоремы искажения и радиусы выпуклости классов $\chi_t^{n,n}(\alpha,\gamma)$ и $\chi_t^{n,1}(\alpha,\gamma)$ аналитических в единичном круге функций $f(z)$, удовлетворяющих условию (5). Остается неисследованным вопрос об оценках коэффициентов функций данных классов, что мы считаем перспективной задачей. Интересно также было бы исследовать связь этих классов с почти звездообразными функциями, например заданными условием

$$\left|\left((1-z^n)^{2/n}\frac{F(z)}{z}\right)^{1/\gamma}-\frac{1}{2\alpha}\right|<\frac{1}{2\alpha},\ 0<\alpha<1,\ t\in[-1,1]\setminus\{0\},\ z\in E$$

(при $n=1$ или при $n=2$, $\gamma=1$, $\alpha\to 0$; см., напр.: [22–24]), и получить новые свойства почти звездообразных функций.

Также перспективным является применение полученных в настоящей статье оценок аналитических функций для решения экстремальных задач в различных подклассах однолистных функций.

Авторы статьи выражают искреннюю благодарность рецензентам за тщательный анализ представленных материалов и рекомендации, выполнение которых, несомненно, послужило повышению качества статьи.

Список источников

1. *Reade M.* The coefficients of close-to-convex functions // Duke Math. J. 1956. V. 23 (3). P. 459–462. doi: 10.1215/S0012-7094-56-02342-0
2. *Renyi A.* Some remarks on univalent functions // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. Sec. A. 1959. V. 3. P. 111–121.
3. *Gao C.-Y., Zhou S.-Q.* On a class of analytic functions related to the class to the starlike functions // Kyungpook Math. J. 2005. V. 45. P. 123–130.
4. *Kowalczyk J., Les-Bomba E.* On a subclass of close-to-convex functions // Appl. Math. Letters. 2010. V. 23. P. 1147–1151.

5. *Prajapat J.K.* A new subclass of close-to-convex functions // Surv. Math. Appl. 2016. V. 11. P. 11–19. URL: https://www.utgjiu.ro/math/sma/v11/p11_02.pdf
6. *Qing-Hua Xu, Srivastava H.M., Zhou Li.* A certain subclass of analytic and close-to-convex functions // Applied Math. Letters. 2011. V. 24, is. 3. P. 396–401. doi: 10.1016/j.aml.2010.10.0374
7. *Cho N.E., Kwon O.S., Ravichandran V.* Coefficient, distortion and growth inequalities for certain close-to-convex functions // J. of Inequalities and Applications. 2011. V. 2011:100. URL: https://link.springer.com/content/pdf/10.1186/1029-242X-2011-100.pdf?pdf=button
8. *Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Байманкулов А.Т.* Об обобщении некоторых классов почти выпуклых и типично вещественных функций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 5–21. doi: 10.17223/19988621/85/1
9. *Shaffer D.B.* Distortion theorems for a special class of analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 39 (2). P. 281–287. doi: 10.2307/2039632
10. *Goel R.M.* A class of close-to-convex functions // Czechoslovak Math. J. 1968. V. 18 (93). P. 104–116. doi: 10.21136/CMJ.1968.100815
11. *Libera R.J., Livingston A.E.* Bounded functions with positive real part // Czechoslovak Math. J. 1972. V. 22 (97). P. 195–209. doi: 10.21136/cmj.1972.101090
12. *MacGregor T.H.* Functions whose derivative has a positive real part // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 104. P. 532–537. doi: 10.1090/s0002-9947-1962-0140674-7
13. *MacGregor T.H.* A class of univalent functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. P. 311–317.
14. *MacGregor T.H.* The radius of univalence of certain analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V. 14. P. 514–520.
15. *Rosihan M.Ali, Ravichandran V., Sharma K.* Starlikeness of Analytic Functions with Subordinate Ratios // Hindawi J. of Math. 2021. V. 2021. P. 1–8. doi: 10.1155/2021/8373209
16. *Shah G.M.* On the univalence of some analytic functions // Pacific J. Math. 1972. V. 43 (1). P. 239–250. doi: 10.2140/pjm.1972.43.239
17. *Shaffer D.B.* On bounds for the derivative of analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 37. P. 517–520. doi: 10.11568/kjm.2021.29.4.785
18. *Graham I., Varolin D.* Bloch constants in one and several variables // Pacific J. Math. 1996. V. 174 (2). P. 347–357.
19. *Hengartner W., Schober G.* Analytic functions close to mappings convex in one direction // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 28 (2). P. 519–524. URL: https://www.ams.org/journals/proc/1971-028-02/S0002-9939-1971-0277704-9/S0002-9939-1971-0277704-9.pdf
20. *Bshouty D., Lyzzaik A.* Univalent functions starlike with respect to a boundary point // Contemp. Math. 2005. V. 382. P. 83–87.
21. *Майер Ф.Ф.* Геометрические свойства некоторых классов аналитических в круге функций, выпуклых в направлении мнимой оси // Вестник науки КГУ им. А. Байтурсынова. Сер. естественно-технических наук. 2002. Т. 6, № 2. С. 48–50. URL: https://nauka.kz/page.php?page_id=372&lang=3&page=5931
22. *Khatter K., Lee S.K., Ravichandran V.* Radius of starlikeness for classes of analytic functions // arXiv preprint arXiv: 2006.11744. URL: https://arxiv.org/abs/2006.11744
23. *El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S.* Starlikeness of certain analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11734. URL: https://arxiv.org/abs/2006.11734
24. *Sebastianc A., Ravichandran V.* Radius of starlikeness of certain analytic functions // Math. Slovaca. 2021. V. 71 (1). P. 83–104. doi: 10.1515/ms-2017-0454

References

1. Reade M. (1956) The coefficients of close-to-convex functions. *Duke Mathematical Journal*. 23(3). pp. 459–462. DOI: 10.1215/S0012-7094-56-02342-0.

2. Renyi A. (1959) Some remarks on univalent functions. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska Sectio A*. 3. pp. 111–121.
3. Gao C.-Y., Zhou S.-Q. (2005) On a class of analytic functions related to the class to the starlike functions. *Kyungpook Mathematical Journal*. 45. pp. 123–130.
4. Kowalczyk J., Les-Bomba E. (2010) On a subclass of close-to-convex functions. *Applied Mathematics Letters*. 23. pp. 1147–1151.
5. Prajapat J.K. (2016) A new subclass of close-to-convex functions. *Surveys in Mathematics and its Applications*. 11. pp. 11–19.
6. Xua Qing-Hu, Srivastava H.M., Zhou Li. (2011) A certain subclass of analytic and close-to-convex functions. *Applied Mathematics Letters*. 24(3). pp. 396–401. DOI: 10.1016/j.aml.2010.10.0374.
7. Cho N.E., Kwon O.S., Ravichandran V. (2011) Coefficient, distortion and growth inequalities for certain close-to-convex functions. *Journal of Inequalities and Applications*. 2011:100. DOI: 10.1186/1029-242X-2011-100.
8. Maier F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A., Baimankulov A.T. (2023) Ob obobshchenii nekotorykh klassov pochti vypuklykh i tipichno veshchestvennykh funktsiy [On the generalization of some classes of close-to-convex and typically real functions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 5–21. DOI: 10.17223/19988621/85/1.
9. Shaffer D.B. (1973) Distortion theorems for a special class of analytic functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 39(2). pp. 281–287. DOI: 10.2307/2039632.
10. Goel R.M. (1968) A class of close-to-convex functions. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 18(93). pp. 104–116. DOI: 10.21136/CMJ.1968.100815.
11. Libera R.J., Livingston A.E. (1972) Bounded functions with positive real part. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 22 (97). pp. 195–209. DOI: 10.21136/cmj.1972.101090.
12. MacGregor T.H. (1962) Functions whose derivative has a positive real part. *Transactions of the American Mathematical Society*. 104. pp. 532–537. DOI: 10.1090/s0002-9947-1962-0140674-7.
13. MacGregor T.H. (1964) A class of univalent functions. *Transactions of the American Mathematical Society*. 15. pp. 311–317.
14. MacGregor T.H. (1963) The radius of univalence of certain analytic functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*. 14. pp. 514–520.
15. Rosihan M.Ali, Ravichandran V., Sharma K. (2021) Starlikeness of analytic functions with subordinate ratios. *Journal of Mathematics Hindawi*. 1. pp. 1–8. DOI: 10.1155/2021/8373209.
16. Shah G.M. (1972) On the univalence of some analytic functions. *Pacific Journal of Mathematics*. 43(1). pp. 239–250. DOI: 10.2140/pjm.1972.43.239.
17. Shaffer D.B. (1973) On bounds for the derivative of analytic functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 37. pp. 517–520. DOI: 10.11568/kjm.2021.29.4.785.
18. Graham I., Varolin D. (1996) Bloch constants in one and several variables. *Pacific Journal of Mathematics*. 174(2). pp. 347–357.
19. Hengartner W., Schober G. (1971) Analytic functions close to mappings convex in one direction. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 28(2). pp. 519–524.
20. Bshouty D., Lyzzaik A. (2005) Univalent functions starlike with respect to a boundary point. *Contemporary Mathematics*. 382. pp. 83–87.
21. Maier F.F. (2002) Geometricheskiye svoystva nekotorykh klassov analiticheskikh v kruge funktsiy, vypuklykh v napravlenii mnimoy osi [Geometric properties of some classes of analytic functions in a circle in the direction of the imaginary axis]. *Vestnik nauki Kostanayskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya estestvenno-tekhnicheskikh nauk.* 6(2) pp. 48–50.
22. Khatter K., Lee S. K., Ravichandran V. (2020) Radius of starlikeness for classes of analytic functions. Access mode: https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744

23. El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. (2020) Starlikeness of certain analytic functions. Access mode: https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734
24. Sebastianc A., Ravichandran V. (2021) Radius of starlikeness of certain analytic functions. *Mathematica Slovaca*. 71(1). pp. 83–104. DOI: 10.1515/ms-2017-0454.

***Сведения об авторах*:**
Майер Федор Федорович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова (Костанай, Казахстан). E-mail: maiyer@mail.ru
Тастанов Мейрамбек Габдулиевич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова (Костанай, Казахстан). E-mail: tastao@mail.ru
Утемисова Анар Алтаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова (Костанай, Казахстан). E-mail: anar_utemisova@mail.ru

***Information about the authors*:**
Maiyer Fedor F. (Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: maiyer@mail.ru
Tastanov Meyrambek G. (Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: tastao@mail.ru
Utemissova Anar A. (Associate Professor, Candidate of Pedagogical Sciences, Kostanay Regional University named after A. Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: anar_utemisova@mail.ru

The article was submitted 25.01.2024; accepted for publication 10.04.2025

Статья поступила в редакцию 25.01.2024; принята к публикации 10.04.2025