ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Математика и механика № 94
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 517.9 MSC: 90С26; 90С30
doi: 10.17223/19988621/94/4

О функции точного штрафа в нормированном пространстве

Мисраддин Аллахверди оглы Садыгов

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан, misreddin08@rambler.ru

Аннотация. Исследуется класс $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицевых отображений в точке. Приведены классы отображений, удовлетворяющих $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицевому условию в точке. В работе с использованием $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицевых отображений в точке исследуются экстремальные задачи с ограничениями. С помощью функции расстояния в задаче математического программирования получены теоремы о точном штрафе высокого порядка.
Ключевые слова: точный штраф, нормированное пространство, отображение, липшицевая функция

Для цитирования: Садыгов М.А. О функции точного штрафа в нормированном пространстве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 40–56. doi: 10.17223/19988621/94/4

Original article

About the function of the exact penalty in normed space

Misraddin A. Sadygov

Baku State University, Baku, Azerbaijan, misreddin08@rambler.ru

Abstract. The paper studies a class of $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ Lipschitz mappings at a point. Classes of mappings satisfying the $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ Lipschitz condition at a point are given. If a Lipschitz function on a space is equal to zero at a given point, then it is shown that the degree n + 1 of Lipschitz functions satisfies the $(1,n+1,1)$ Lipschitz condition at this point, where $S\equiv 0,\ \omega\equiv 0,\ n\in N$ and $\delta=+\infty$. If a function satisfies the Lipschitz condition in a δ-neighborhood of a point and is equal to zero at this point, then the degree n + 1 of Lipschitz functions satisfies the $(1,n+1,1,\delta)$. Lipschitz condition at this point. In particular, it follows from this that the degree n + 1 of the distance function at any point of the set satisfies the $(1,n+1,1)$ Lipschitz condition. If the coefficients of $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ Lipschitz functions at a point are bounded, then it is shown that the supremum of any family of $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ Lipschitz functions at a point also satisfies the $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ Lipschitz condition at that point. In particular, it follows that the supremum of a finite number of $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ Lipschitz functions at a point also satisfies the $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ Lipschitz condition at this point. The paper shows that a mapping defined in a neighborhood of a point and satisfying various smoothness conditions also satisfies some $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ Lipschitz conditions at this point.

In this paper, using $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ Lipschitz mappings at a point, extremal problems with constraints are investigated. Using the distance function in a mathematical programming problem, theorems on high-order exact penalties are obtained. Theorems on high-order exact penalties in a general minimization problem are obtained. Using the type of functions that is the product of the degree of the norm shift and the degree of the distance function, theorems on high-order exact penalties in the general minimization problem are obtained. Using a general minimization problem, high-order exact penalty theorems are obtained in a mathematical programming problem. In a mathematical programming problem, high-order exact penalty theorems are obtained in three ways. In the first case, the equality constraint with the mapping and the set constraint are considered as one constraint. In the second case, the equality constraint is considered to be $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ regular. In the third case, it is considered that the restriction of the set is an open set and the equality constraint with the mapping covers the given set with a constant.

Keywords: exact penalty, normed space, mapping, Lipschitz function

For citation: Sadygov, M.A. (2025) About the function of the exact penalty in normed space. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 40–56. doi: 10.17223/19988621/94/4

Введение

В задаче минимизации с ограничениями при получении необходимых и достаточных условий экстремума важную роль играет построение функций точного штрафа. В задаче выпуклого программирования функция точного штрафа построена Куна–Таккером в [1]. В задаче математического программирования функция точного штрафа первого порядка изучена А.Д. Иоффе [2], эти вопросы рассмотрены также в книгах [3–7].

В [8, 9] в банаховом пространстве определены $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ и $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ липшицевые функции и отображения в точке соответственно, изучен ряд их свойств и рассмотрены экстремальные задачи с ограничениями. В [8, 9] с использованием типа функций расстояния в классах $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицевых функций в точке получен ряд теорем о точном штрафе, а также необходимые и достаточные условия экстремума высшего порядка для экстремальных задач с ограничениями.

В [10–12] в метрическом пространстве определены $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ и $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицевые функции и отображения в точке соответственно, изучен ряд их свойств и рассмотрены экстремальные задачи с ограничениями.

Для получения необходимого условия первого порядка в книгах Ф. Кларка [3] и Б. Мордуховича [4] используется точная штрафная функция первого порядка. Для задачи минимизации функции f на множестве C точная штрафная функция имеет вид $f(x)+Kd_C(x)$, где *C* подмножество *S*, функция *f* удовлетворяет условию Липшица на *S* с константой *K*, функция $d_C(x)$ является функцией расстояния множества *C*. Эту функцию нельзя использовать для получения необходимого условия второго порядка. Верхняя производная второго порядка по направлению этой функции равна $+\infty$, за исключением тривиальных случаев. Если функция *f* является $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицевой с постоянной *K* в точке x_0, то для задачи минимизации функции *f* на множестве *C* построенная автором точная штрафная функция имеет следующий вид:

$$S_\lambda(x)= f(x)-\varphi(x-x_0)+\lambda(d_D^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\, d_D^{\nu}(x))+\omega(\|x-x_0\|),$$

где $\lambda\geq K$ и $D=\{x\in C:\varphi(x-x_0)\leq 0\}$ (см. теорему 1 ниже). Если $\alpha=1$, то

$$\tilde S_\lambda(x)= f(x)-\varphi(x-x_0)+2\lambda\|x-x_0\|^{\beta-\nu}\, d_D^{\nu}(x)+\omega(\|x-x_0\|),$$

также является точная штрафная функция, и β указывает порядок необходимого условия при $\omega\equiv 0$.

Работа состоит из введения и из трех разделов. В разд. 1 исследуется класс $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицевых отображений в точке. Изучен ряд свойств $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицевых отображений в точке. В разд. 2 получены теоремы о точных штрафах высокого порядка в общей задаче минимизации. В разд. 3 с использованием общей задачи минимизации получены точные штрафные теоремы высокого порядка в задаче математического программирования.

1. Классы $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицевых отображений в точке

Пусть *X* и *Z* – нормированные пространства, $G\subset X$, $F:X\to Z$, $S:X\to Z$, $f:X\to R$, $\varphi:X\to R$, $\alpha>0$, $\nu>0$, $\beta>\alpha\nu$, $\delta>0$ и $\omega:R_+\to R_+$, где $\omega(0)=0$, $R_+=[0,+\infty)$, $B=\{x\in X:\|x\|\leq 1\}$.

Норма в *X*, а также в *Z* будет обозначаться одним и тем же символом $\|\cdot\|$.

Отображение $F:G\to Z$ назовем $S-(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицевым с постоянной *K* в точке $\bar x\in G$ (на множестве *G*), если *F* удовлетворяет условию

$$\begin{aligned}&\|F(y)-F(x)-S(y-\bar x)+S(x-\bar x)\|\leq\\ &\leq K\|y-x\|^{\nu}(\|x-\bar x\|^{\beta-\alpha\nu}+\|y-x\|^{\frac{\beta-\alpha\nu}{\alpha}})+\omega(\|x-\bar x\|)\end{aligned}\qquad(1)$$

при $x,y\in G$. Если $\omega(t)\equiv 0$, то отображение $F:G\to Z$ назовем $S-(\alpha,\beta,\nu)$ липшицевым с постоянной *K* в точке $\bar x\in G$. Если $\omega(t)\equiv 0$ и $S(x)\equiv 0$, то отображение $F:G\to Z$ назовем (α,β,ν) липшицевым с постоянной *K* в точке $\bar x\in G$. Если существует функция $o:R_+\to R_+$, где $\lim\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{o(t)}{t}=0$ такая, что $\omega(\|x-\bar x\|)=o(\|x-\bar x\|^{\beta})$, то $S-(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицевое с постоянной *K* в точке $\bar x\in G$ отображение $F:G\to Z$ назовем $S-(\alpha,\beta,\nu,o(\beta))$ липшицевым с постоянной *K* в точке $\bar x$.

Отметим, что класс $S-(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицевых отображений новые при $\beta>\alpha\nu$. Если $\beta-\alpha\nu=0$, то считаем, что $S(x)\equiv 0$ и $\|\mathrm{F(y)}-\mathrm{F(x)}\|\le K\|y-x\|^{\nu}$ при $x,y\in G$, т.е. имеем определение класс Гельдеровых отображений.

Если $F(x)=f(x)$, $S(x)=\varphi(x)$ и отображение $F:G\to R$ является $S-(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицевым с постоянной *K* в точке $\bar{x}\in G$, то функцию $f:G\to R$ назовем $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицевой с постоянной *K* в точке $\bar{x}\in G$. Если $\omega(t)\equiv 0$, то функцию $f:G\to R$ назовем $\varphi-(\alpha,\beta,\nu)$ липшицевой с постоянной *K* в точке $\bar{x}\in G$. Если $\omega(t)\equiv 0$ и $\varphi(x)\equiv 0$, то функцию $f:G\to R$ назовем (α,β,ν) липшицевой с постоянной *K* в точке $\bar{x}\in G$.

Положим $B(x,\delta)=\{y\in X:\|x-y\|\le\delta\}$, где $x\in X$, $\delta>0$. Если $G=B(\bar{x},\delta)$ и отображение $F:G\to Z$ является $S-(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицевым с постоянной *K* в точке $\bar{x}$, то отображение $F:B(\bar{x},\delta)\to Z$ назовем $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицевым с постоянной *K* в точке $\bar{x}$, а если $F(x)=f(x)$ и $S(x)=\varphi(x)$, то функцию $f:B(\bar{x},\delta)\to R$ назовем $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицевой с постоянной *K* в точке $\bar{x}$. Если $\omega(t)\equiv 0$, то отображение $F:B(\bar{x},\delta)\to Z$ назовем $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ липшицевым, а функцию *f* назовем $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ липшицевой с постоянной *K* в точке $\bar{x}$. Если $\omega(t)\equiv 0$ и $\varphi(x)\equiv 0$, то $F:B(\bar{x},\delta)\to Z$ и $f:B(\bar{x},\delta)\to R$ назовем $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ липшицевыми с постоянной *K* в точке $\bar{x}$.

Из (1) следует, что отображение $F:G\to Z$ является $S-(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицевым с постоянной *K* в точке $\bar{x}\in G$ тогда и только тогда, когда

$$\|F(\bar{x}+y)-F(\bar{x}+x)-S(y)+S(x)\|\le K\|y-x\|^{\nu}(\|x\|^{\beta-\alpha\nu}+\|y-x\|^{\frac{\beta-\alpha\nu}{\alpha}})+\omega(\|x\|) \qquad (2)$$

при $x,y\in G-\bar{x}$.

Далее считаем, что $S(0)=0$ и $\varphi(0)=0$ (если $S(0)\ne 0$, то следует рассмотреть функцию $\tilde{S}(x)=S(x)-S(0)$).

Рассмотрим ряд классов отображений, которые удовлетворяют $S-(\alpha,\beta,\nu)$ липшицеву условию в точке. Считаем, что *X* и *Z* нормированные пространства и $B(x_0,\delta)\subset X$. Обозначим через *N* множество всех натуральных чисел. Пусть $f:X\to R$. Положим $f^k(x)=(f(x))^k$, где $k\in N$.

Лемма 1. Если функция $f:X\to R$ является липшицевой с постоянной *K* на пространстве X и $f(x_0)=0$, то

$$|f^{n+1}(y)-f^{n+1}(x)|\le(2^{n+1}-1)K^{n+1}\|y-x\|(\|x-x_0\|^n+\|y-x\|^n)$$

при $x,y\in X$, $n\in N$, т.е. функция $f^{n+1}(x):X\to R$ удовлетворяет $(1,n+1,1)$ липшицеву условию с постоянной $(2^{n+1}-1)K^{n+1}$ в точке x_0.

Доказательство. Лемму докажем по методу индукции.

По условию $|f(y)-f(x)|\le K\|y-x\|$ при $x,y\in X$. Поэтому если $k=1$, то

$$\left|f^2(y)-f^2(x)\right|=$$
$$=\left|(f(y)-f(x))(f(y)-f(x_0)+f(x)-f(x_0))\right|\le\left|f(y)-f(x)\right|(\left|f(y)-f(x_0)\right|+$$
$$+\left|f(x)-f(x_0)\right|)\le K^2\|y-x\|(\|y-x_0\|+\|x-x_0\|)\le 2K^2\|y-x\|(\|x-x_0\|+\|y-x\|)$$

при $x,y\in X$. Предположим, что лемма верна при $k=n-1$, где $\mathrm{n}>2$, т.е.

$$\left|f^n(y)-f^n(x)\right|\le(2^n-1)K^n\|y-x\|(\|x-x_0\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-1})$$

при $x,y\in X$.

Покажем, что лемма верна при $k=n$. Так как $(q-1)(q^{n-1}-1)\ge 0$ при $q\ge 1$, то, поделив на b^n и положив $q=\dfrac{a}{b}$, имеем, что $a^{n-1}b+ab^{n-1}\le a^n+b^n$ при $a\ge b>0$, где $n\in N$. Поэтому

$$\left|f^{n+1}(y)-f^{n+1}(x)\right|=\left|(f(x)-f(x_0))^n(f(y)-f(x))+(f(y)-f(x_0))(f^n(y)-f^n(x))\right|\le$$
$$\le K^{n+1}\|x-x_0\|^n\|y-x\|+K^{n+1}\|y-x_0\|(2^n-1)\|y-x\|(\|x-x_0\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-1})\le$$
$$\le K^{n+1}\|x-x_0\|^n\|y-x\|+K^{n+1}(\|y-x\|+\|x-x_0\|)(2^n-1)\|y-x\|(\|x-x_0\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-1})\le$$
$$\le K^{n+1}\|x-x_0\|^n\|y-x\|+K^{n+1}2(2^n-1)\|y-x\|(\|x-x_0\|^n+\|y-x\|^n)\le$$
$$\le K^{n+1}(2^{n+1}-1)\|y-x\|(\|x-x_0\|^n+\|y-x\|^n)$$

при $x,y\in X$. Лемма доказана.

Следствие 1. Если отображение $F:X\to Z$ удовлетворяет липшицеву условию с постоянной K на пространстве X, то

$$\left|\|F(y)-F(x_0)\|^{n+1}-\|F(x)-F(x_0)\|^{n+1}\right|\le(2^{n+1}-1)K^{n+1}\|y-x\|(\|x-x_0\|^n+\|y-x\|^n)$$

при $x,y\in X$, где $n\in N$.

Доказательство. Обозначим $f(x)=\|F(x)-F(x_0)\|$ при $x\in X$. Ясно, что $f(x_0)=0$ и

$$\left|f(y)-f(x)\right|=\left|\|F(y)-F(x_0)\|-\|F(x)-F(x_0)\|\right|\le$$
$$\le\|F(y)-F(x_0)-F(x)+F(x_0)\|=\|F(y)-F(x)\|\le K\|y-x\|$$

при $x,y\in X$. Тогда справедливость следствия 1 следует из леммы 1. Следствие доказано.

Пусть $M\subset X$ – непустое множество. Положим $d_M(x)=\inf\{\|u-x\|:u\in M\}$. Обозначим $d_M^n(y)=d_M(y)^n$ при $y\in X$ и $n\in N$. Так как $\left|d_M(y)-d_M(x)\right|\le\|y-x\|$ при $x,y\in X$ (см.: [13. С. 377]), то из леммы 1 вытекает

Следствие 2. Если $x_0\in M$, то

$$\left|d_M^{n+1}(y)-d_M^{n+1}(x)\right|\le(2^{n+1}-1)\|y-x\|(\|x-x_0\|^n+\|y-x\|^n)$$

при $x,y\in X$, где $n\in N$.

Пусть $M=\{x_0\}$. Так как $\left|\|y-x_0\|-\|x-x_0\|\right|\le\|y-x\|$ при $x,y\in X$, то из леммы 1 вытекает

Следствие 3. Если $x_0 \in X$, то

$$\left| \|y - x_0\|^{n+1} - \|x - x_0\|^{n+1} \right| \le (2^{n+1} - 1)\|y - x\|(\|x - x_0\|^n + \|y - x\|^n)$$

при $x, y \in X$, где $n \in N$.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 1.

Лемма 2. Если функция $f : B(x_0; \delta) \to R$ является липшицевой с постоянной K на $B(x_0; \delta)$ и $f(x_0) = 0$, то

$$\left| f^{n+1}(y) - f^{n+1}(x) \right| \le (2^{n+1} - 1)K^{n+1} \|y - x\|(\|x - x_0\|^n + \|y - x\|^n)$$

при $x, y \in B(x_0; \delta)$, где $n \in N$, т.е. функция $f^{n+1}(x) : B(x_0; \delta) \to R$ удовлетворяет $(1, n+1, 1, \delta)$ липшицеву условию с постоянной $(2^{n+1} - 1)K^{n+1}$ в точке x_0 .

Следствие 4. Если $F : B(x_0, \delta) \to Z$, где $\delta > 0$, $F(x_0) = 0$, производная $F'(x_0)$ в смысле Фреше существует, отображение F удовлетворяет липшицеву условию с постоянной K на $B(x_0; \delta)$ и $n \in N$, то

$$\left| \|F(y) - F'(x_0)(y - x_0)\|^{n+1} - \|F(x) - F'(x_0)(x - x_0)\|^{n+1} \right| \le$$
$$\le (2^{n+1} - 1)(K + \|F'(x_0)\|)^{n+1} \|y - x\|(\|x - x_0\|^n + \|y - x\|^n)$$

при $x, y \in B(x_0; \delta)$.

Доказательство. Обозначив $f(x) = \|F(x) - F'(x_0)(x - x_0)\|$, при $x \in B(x_0; \delta)$ имеем, что

$$| f(y) - f(x)| = \left| \|F(y) - F'(x_0)(y - x_0)\| - \|F(x) - F'(x_0)(x - x_0)\| \right| \le$$
$$\le \|F(y) - F'(x_0)(y - x_0) - F(x) + F'(x_0)(x - x_0)\| \le \|F(y) - F(x)\| +$$
$$+ \|F'(x_0)(y - x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\| \le K\|y - x\| + \|F'(x_0)\|\|y - x\| = (K + \|F'(x_0)\|)\|y - x\|$$

при $x, y \in B(x_0; \delta)$, где $f(x_0) = 0$. Тогда справедливость следствия 4 следует из леммы 2. Следствие доказано.

Из леммы 2 вытекает

Следствие 5. Если функция $g : B(x_0; \delta) \to R$ является липшицевой с постоянной K в $B(x_0; \delta)$, то

$$\left| (g(y) - g(x_0))^{n+1} - (g(x) - g(x_0))^{n+1} \right| \le (2^{n+1} - 1)K^{n+1} \|y - x\|(\|x - x_0\|^n + \|y - x\|^n)$$

при $x, y \in B(x_0; \delta)$, где $\delta > 0$, $n \in N$.

Пусть $g_k(x) = \|x - x_0\|^{n-k} d_M^k(x)$, где $0 < k < n$, $x_0 \in M$, $n, k \in N$. Считаем, что $g_0(x) = \|x - x_0\|^n$ и $g_n(x) = d_M^n(x)$ при $n \in N$.

Лемма 3. Если $0 < k < n$, $x_0 \in M$, то

$$\left| \|y - x_0\|^{n-k} d_M^k(y) - \|x - x_0\|^{n-k} d_M^k(x) \right| \le (2^{n+1} - 2)\|y - x\|(\|x - x_0\|^{n-1} + \|y - x\|^{n-1})$$

при $x, y \in X$, $k, n \in N$.

Доказательство. Так как $(a+b)^k \le 2^k(a^k + b^k)$ при $a \ge 0, b \ge 0$, $(q^{k-1} - 1)(q^{n-k} - 1) \ge 0$ при $q \ge 1$, $\|y - x\|^{n-k-1}\|x - x_0\|^k \le \|y - x\|^{n-1} + \|x - x_0\|^{n-1}$ и

$\|y-x\|^{n-k}\|x-x_0\|^{k-1}+\|y-x\|^{k-1}\|x-x_0\|^{n-k}\le\|x-x_0\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-1}$ при $x,y\in X$, $k,n\in N$, $0<k<n$, $n>k+1$, $k>1$, то, используя следствия 2 и 3, получим

$$|g_k(y)-g_k(x)|=\left|\|y-x_0\|^{n-k}d_M^k(y)-\|x-x_0\|^{n-k}d_M^k(x)\right|=$$

$$=\left|\|y-x_0\|^{n-k}d_M^k(y)-\|y-x_0\|^{n-k}d_M^k(x)+\|y-x_0\|^{n-k}d_M^k(x)-\|x-x_0\|^{n-k}d_M^k(x)\right|\le$$

$$\le\left|\|y-x_0\|^{n-k}(d_M^k(y)-d_M^k(x))\right|+\left|\|y-x_0\|^{n-k}-\|x-x_0\|^{n-k}\right|(d_M(x)-d_M(x_0))^k\le$$

$$\le(\|y-x\|+\|x-x_0\|)^{n-k}(2^k-1)\|y-x\|(\|x-x_0\|^{k-1}+\|y-x\|^{k-1})+$$

$$+(2^{n-k}-1)\|y-x\|(\|x-x_0\|^{n-k-1}+\|y-x\|^{n-k-1})\|x-x_0\|^k\le$$

$$\le 2^{n-k}(\|y-x\|^{n-k}+\|x-x_0\|^{n-k})(2^k-1)\|y-x\|(\|x-x_0\|^{k-1}+\|y-x\|^{k-1})+$$

$$+(2^{n-k}-1)\|y-x\|(\|x-x_0\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-k-1}\|x-x_0\|^k)\le$$

$$\le 2^{n-k+1}(2^k-1)\|y-x\|(\|x-x_0\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-1})+2(2^{n-k}-1)\times$$

$$\times\|y-x\|(\|x-x_0\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-1})\le(2^{n+1}-2)\|y-x\|(\|x-x_0\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-1})$$

при $x,y\in X$.

Также, используя следствия 2 и 3, случай $k=1$ или $n=k+1$, $k\ge 2$, можно проверить непосредственно. Лемма доказана.

Если X – нормированное пространство, $g_k(x)=\|x-x_0\|^{n-k}d_M^k(x)$, где $0<k<n$, и $x_0\in M$, $k,n\in N$, то из леммы 3 следует, что

$$|g_k(x_0+y)-g_k(x_0+x)|=\left|\|y\|^{n-k}d_M^k(x_0+y)-\|x\|^{n-k}d_M^k(x_0+x)\right|\le$$

$$\le(2^{n+1}-2)\|y-x\|(\|x\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-1})$$

при $x,y\in X$.

Лемма 4. Если $F:B(x_0,\delta)\to Z$, где $\delta>0$, $F(x_0)=0$, производная $F'(x_0)$ в смысле Фреше существует, отображение F удовлетворяет липшицеву условию с постоянной K на $B(x_0;\delta)$, $0<k<n$, где $k,n\in N$, то

$$\left|\|y-x_0\|^{n-k}\|F(y)-F'(x_0)(y-x_0)\|^k-\|x-x_0\|^{n-k}\|F(x)-F'(x_0)(x-x_0)\|^k\right|\le$$

$$\le(2^{n+1}-2)(K+\|F'(x_0)\|)^k\|y-x\|(\|x-x_0\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-1})$$

при $x,y\in B(x_0;\delta)$.

Доказательство. Положим $f_k(x)=\|x-x_0\|^{n-k}\|F(x)-F'(x_0)(x-x_0)\|^k$. Так как $\|F(x)-F'(x_0)(x-x_0)\|\le\|F(x)-F(x_0)\|+\|F'(x_0)(x-x_0)\|\le(K+\|F'(x_0)\|)\|x-x_0\|$ при $x\in B(x_0;\delta)$ и $\|y-x\|^{n-k}\|x-x_0\|^{k-1}+\|y-x\|^{k-1}\|x-x_0\|^{n-k}\le\|x-x_0\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-1}$ при $x,y\in X$, $k,n\in N$, $0<k<n$, $k>1$, то из следствий 3 и 4 имеем, что

$$|f_k(y)-f_k(x)|=\left|\|y-x_0\|^{n-k}\|F(y)-F'(x_0)(y-x_0)\|^k-\|x-x_0\|^{n-k}\|F(x)-F'(x_0)(x-x_0)\|^k\right|\le$$

$$\le\left|\|y-x_0\|^{n-k}(\|F(y)-F'(x_0)(y-x_0)\|^k-\|F(x)-F'(x_0)(x-x_0)\|^k)\right|+$$

$$+\left|(\|y-x_0\|^{n-k}-\|x-x_0\|^{n-k})\|F(x)-F'(x_0)(x-x_0)\|^k\right|\le$$
$$\le(\|y-x\|+\|x-x_0\|)^{n-k}(2^k-1)(K+\|F'(x_0)\|)^k\|y-x\|(\|x-x_0\|^{k-1}+\|y-x\|^{k-1})+$$
$$+(2^{n-k}-1)\|y-x\|(\|x-x_0\|^{n-k-1}+\|y-x\|^{n-k-1})(K+\|F'(x_0)\|)^k\|x-x_0\|^k\le$$
$$\le 2^{n-k}(2^k-1)(K+\|F'(x_0)\|)^k(\|y-x\|^{n-k}+\|x-x_0\|^{n-k})\|y-x\|(\|x-x_0\|^{k-1}+\|y-x\|^{k-1})+$$
$$+(2^{n-k}-1)(K+\|F'(x_0)\|)^k\|y-x\|(\|x-x_0\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-k-1}\|x-x_0\|^k)\le$$
$$\le 2^{n-k+1}(2^k-1)(K+\|F'(x_0)\|)^k\|y-x\|(\|x-x_0\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-1})+$$
$$+2(2^{n-k}-1)(K+\|F'(x_0)\|)^k\|y-x\|(\|x-x_0\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-1})=$$
$$=(2^{n+1}-2)(K+\|F'(x_0)\|)^k\|y-x\|(\|x-x_0\|^{n-1}+\|y-x\|^{n-1})$$

при $x,y\in B(x_0;\delta)$.

Также, используя следствия 3 и 4, случай $k=1$ или $n=k+1$, $k\ge 2$, можно проверить непосредственно. Лемма доказана.

Из следствия 4 и леммы 4 вытекает

Следствие 6. Если удовлетворяются условия леммы 4, то

$$\|F(x)-F'(x_0)(x-x_0)\|^n+\|x-x_0\|^{n-k}\|F(x)-F'(x_0)(x-x_0)\|^k$$

удовлетворяет $(1,n,1,\delta)$ липшицеву условию с постоянной $(2^n-1)(K+\|F'(x_0)\|)^n+$ $+(2^{n+1}-2)(K+\|F'(x_0)\|)^k$ в точке x_0.

Лемма 5. Пусть $F:X\to Z$, $U\subset X$ – выпуклое множество, производная $F'(y)$ в смысле Фреше существует при $y\in U$ и найдется $L>0$ такое, что $\|F'(u)-F'(\upsilon)\|\le L\|u-\upsilon\|^{\nu}(\|\upsilon-x_0\|^{\beta-\nu}+\|u-\upsilon\|^{\beta-\nu})$ при $u,\upsilon\in U$, где $\beta>\nu>0$, $x_0\in U$. Тогда

$$\|F(u)-F(\upsilon)-F'(x_0)(u-\upsilon)\|\le 2L\|u-\upsilon\|(\|\upsilon-x_0\|^{\beta}+\|u-\upsilon\|^{\beta})$$

при $u,\upsilon\in U$, т.е. отображение $F:U\to Z$ удовлетворяет $F'(x_0)(x)-(1,\beta+1,1)$ липшицеву условию с постоянной $2L$ в точке x_0 на U.

Доказательство. Так как $\|u-\upsilon\|^{\nu}\|\upsilon-x_0\|^{\beta-\nu}\le\|u-\upsilon\|^{\beta}+\|\upsilon-x_0\|^{\beta}$, то по теореме о среднем [14. С. 135] имеем, что

$$\|F(u)-F(\upsilon)-F'(x_0)(u-\upsilon)\|=\|F(u)-F(\upsilon)-F'(x_0)(u-\upsilon)-F'(\upsilon)(u-\upsilon)+F'(\upsilon)(u-\upsilon)\|\le$$
$$\le\|F'(\upsilon)(u-\upsilon)-F'(x_0)(u-\upsilon)\|+$$
$$+\|F(u)-F(\upsilon)-F'(\upsilon)(u-\upsilon)\|\le\|F'(\upsilon)-F'(x_0)\|\|u-\upsilon\|+$$
$$+\sup_{\xi\in[u,\upsilon]}\|F'(\xi)-F'(\upsilon)\|.\|u-\upsilon\|\le$$
$$L\|\upsilon-x_0\|^{\nu}\|\upsilon-x_0\|^{\beta-\nu}\|u-\upsilon\|+L\|u-\upsilon\|^{\nu}(\|\upsilon-x_0\|^{\beta-\nu}+\|u-\upsilon\|^{\beta-\nu})\|u-\upsilon\|\le$$
$$\le L\|u-\upsilon\|(\|\upsilon-x_0\|^{\beta}+\|u-\upsilon\|^{\nu}\|\upsilon-x_0\|^{\beta-\nu}+$$
$$+\|u-\upsilon\|^{\beta})\le 2L\|u-\upsilon\|(\|\upsilon-x_0\|^{\beta}+\|u-\upsilon\|^{\beta})$$

при $u,\upsilon\in U$. Лемма доказана.

Из леммы 5 следует следующее следствие.

Следствие 7. Пусть $F: X \to Z$, производная $F'(y)$ в смысле Фреше существует при $y \in B(x_0;\delta)$ и найдется $L > 0$ такое, что $\|F'(u) - F'(\upsilon)\| \le \le L\|u-\upsilon\|^{\nu}(\|\upsilon - x_0\|^{\beta-\nu} + \|u-\upsilon\|^{\beta-\nu})$ при $u, \upsilon \in B(x_0;\delta)$, где $\beta > \nu > 0$. Тогда

$$\|F(x_0+y) - F(x_0+x) - F'(x_0)(y-x)\| \le 2L\|y-x\|(\|x\|^{\beta} + \|y-x\|^{\beta})$$

при $x, y \in \delta B$, т.е. отображение $F: B(x_0;\delta) \to Z$ удовлетворяет $F'(x_0)(x) - (1, \beta+1, 1, \delta)$ липшицеву условию с постоянной $2L$ в точке x_0.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 5 (см.: [12. Лемма. 4.1.3]).

Лемма 6. Пусть $F: X \to Z$, производная $F'(y)$ в смысле Фреше существует при $y \in B(x_0;\delta)$ и найдется $L > 0$ такое, что $\|F'(u) - F'(\upsilon)\| \le L\|u-\upsilon\|^{\theta}$ при $u, \upsilon \in B(x_0;\delta)$, где $0 < \theta \le 1$. Тогда

$$\|F(x_0+y) - F(x_0+x) - F'(x_0)(y-x)\| \le L\|y-x\|(\|x\|^{\theta} + \|y-x\|^{\theta})$$

при $x, y \in \delta B$, т.е. отображение $F: B(x_0;\delta) \to Z$ удовлетворяет $F'(x_0)(x) - (1, 1+\theta, 1, \delta)$ липшицеву условию с постоянной L в точке x_0.

Пусть X и Z – нормированные пространства, $F: B(x_0,\delta) \to Z$, где $\delta > 0$. Обозначим

$$W_k(x) = F'(x_0)(x) + \tfrac{1}{2}F''(x_0)(x,x) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}F^{(k-1)}(x_0)(x,\ldots,x) + r_k(x),$$

где $r_k(x) = r(x)\|x\|^k$ – остаточный член в формуле Тейлора [14. С. 159], $\lim\limits_{x\to 0} r(x) = r(0) = 0$, $k \in N$.

С использованием формулы Тейлора следующая лемма доказывается аналогично лемме 4.4.4 [12].

Лемма 7. Если $F: B(x_0,\delta) \to Z$, где $\delta > 0$, $F^{(k)}(x_0)$ в смысле Фреше существует, где $k \in N$, $k \ge 2$, то найдется число $K > 0$ такое, что

$$\|F(x_0+y) - F(x_0+x) - W_k(y) + W_k(x)\| \le K\|y-x\|(\|x\|^{k-1} + \|y-x\|^{k-1})$$

при $x, y \in \delta B$, т.е. отображение $F: B(x_0,\delta) \to Z$ удовлетворяет $W_k(x) - (1, k, 1, \delta)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0.

Лемма 8. Если функции $f_\tau: G \to R$ удовлетворяют $\varphi - (\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицеву условию с постоянной L_τ в точке $\bar{x}$ на множестве G при $\tau \in \Omega$, где $\bar{x} \in G$, $L = \sup\limits_{\tau\in\Omega} L_\tau < +\infty$ и $f(x) = \sup\limits_{\tau\in\Omega} f_\tau(x)$, то $f: G \to R$ также удовлетворяет $\varphi - (\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицеву условию с постоянной L в точке $\bar{x}$ на множестве G.

Доказательство. Если $x, y \in G$, то

$$\begin{gathered} f(y) - \varphi(y-\bar{x}) - f(x) + \varphi(x-\bar{x}) = \sup_{\tau\in\Omega}(f_\tau(y) - \varphi(y-\bar{x})) - \sup_{\tau\in\Omega}(f_\tau(x) - \varphi(x-\bar{x})) \le \\ \le \sup_{\tau\in\Omega}(f_\tau(y) - \varphi(y-\bar{x}) - f_\tau(x) + \varphi(x-\bar{x})) \le \\ \le L\|y-x\|^{\nu}(\|x-\bar{x}\|^{\beta-\alpha\nu} + \|y-x\|^{\frac{\beta-\alpha\nu}{\alpha}}) + \omega(\|x-\bar{x}\|), \end{gathered} \tag{3}$$

$$f(y)-\varphi(y-\bar{x})-f(x)+\varphi(x-\bar{x})=\sup_{\tau\in\Omega}(f_\tau(y)-\varphi(y-\bar{x}))+\inf_{\tau\in\Omega}(-f_\tau(x)+\varphi(x-\bar{x}))\geq$$
$$\geq\inf_{\tau\in\Omega}(f_\tau(y)-\varphi(y-\bar{x})-f_\tau(x)+\varphi(x-\bar{x}))\geq \tag{4}$$
$$\geq -L\|y-x\|^{\nu}(\|x-\bar{x}\|^{\beta-\alpha\nu}+\|y-x\|^{\frac{\beta-\alpha\nu}{\alpha}})-\omega(\|x-\bar{x}\|).$$

Из соотношений (3), (4) вытекает, что $f:G\to R$ удовлетворяет $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ локально липшицеву условию с постоянной L в точке $\bar{x}$. Лемма доказана.

2. Точные штрафные теоремы в общей задаче минимизации

Пусть X – нормированное пространство, $G\subset X$, $C\subset G$, $f:G\to R$ и $x_0\in C$. Положим $d_C(x)=\inf\{\|u-x\|:u\in C\}$. Для простоты ниже предполагаем, что $\beta>\alpha\nu$.

Лемма 9. Пусть x_0 – точка минимума функции *f* на множестве *C*, $f:G\to R$ удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицеву условию с постоянной *K* в точке x_0 на множестве *G*, и $C\subset G$. Тогда для любого $\lambda\geq K$ функция

$$\bar{S}_\lambda(x)=f(x)+\lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_C^{\nu}(x))+\omega(\|x-x_0\|)$$

достигает минимума на множестве *G* в точке x_0, и если $\lambda>K$ и *C* замкнуто, то любая точка, минимизирующая $\bar{S}_\lambda(x)$ на множестве *G*, принадлежит *C*.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существуют точка $y\in G$ и $\varepsilon>0$ такие, что $\bar{S}_\lambda(y)<f(x_0)-\lambda\varepsilon$, где $\lambda\geq K$. Возьмем точку $c\in C$ такую, что $\|y-c\|^{\frac{\beta}{\alpha}}+\|y-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\|y-c\|^{\nu}\leq d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y)+\|y-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_C^{\nu}(y)+\varepsilon$. Так как *f* удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицеву условию в точке x_0 на множестве *G* с постоянной *K*, то

$$f(c)\leq f(y)+K(\|y-c\|^{\frac{\beta}{\alpha}}+\|y-c\|^{\nu}\cdot\|y-x_0\|^{\beta-\alpha\nu})+\omega(\|y-x_0\|)\leq$$
$$\leq f(y)+\lambda(\|y-c\|^{\frac{\beta}{\alpha}}+\|y-c\|^{\nu}\cdot\|y-x_0\|^{\beta-\alpha\nu})+\omega(\|y-x_0\|)\leq$$
$$\leq f(y)+\lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y)+\|y-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_C^{\nu}(y))+\omega(\|y-x_0\|)+\lambda\varepsilon<f(x_0).$$

Это противоречит предположению, что *f* достигает минимума в точке x_0 на множестве *C*.

Если $\lambda>K$ и $y\in G$ также минимизирует функции $\bar{S}_\lambda(x)$ на множестве *G*, то из первой части теоремы получим

$$f(y)+\lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y)+\|y-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_C^{\nu}(y))+\omega(\|y-x_0\|)=f(x_0)\leq f(y)+$$
$$+\frac{\lambda+K}{2}(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y)+\|y-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_C^{\nu}(y))+\omega(\|y-x_0\|).$$

Отсюда получим, что $d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y)+\|y-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_C^{\nu}(y)=0$. Поэтому $d_C(y)=0$. Так как *C* замкнуто, то $y\in C$. Теорема доказана.

Отметим, что $d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_C^{\nu}(x)=\inf\{\|u-x\|^{\frac{\beta}{\alpha}}+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\|u-x\|^{\nu}:u\in C\}$ при $x\in X$.

Замечание 1. Если $\beta=\alpha\nu$ и $0<\nu\le 1$, то считаем, что $\overline{S}_\lambda(x)=f(x)+\lambda d_C^{\nu}(x)+$ $+\omega(\|x-x_0\|)$ при $x\in G$, где $\lambda\ge K$. Если $\nu=1$ и $\omega(x)\equiv 0$, то отсюда следует предложение 2.4.3 [3. С. 55].

Теорема 1. Пусть x_0 – точка минимума функции *f* на множестве *C*, $f:G\to R$ удовлетворяет $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицеву условию с постоянной *K* в точке x_0 на множестве *G*, $C\subset G$, и $D=\{x\in C:\varphi(x-x_0)\le 0\}$. Тогда для любого $\lambda\ge K$ функция

$$S_\lambda(x)=f(x)-\varphi(x-x_0)+\lambda(d_D^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_D^{\nu}(x))+\omega(\|x-x_0\|)$$

достигает минимума на множестве *G* в точке x_0, и если $\lambda>K$ и *D* замкнуто, то любая точка, минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве *G*, принадлежит *D*.

Доказательство. Ясно, что x_0 – точка минимума функции $f(x)-\varphi(x-x_0)$ на множестве $D=\{x\in C:\varphi(x-x_0)\le 0\}$, и функция $f(x)-\varphi(x-x_0)$ удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицеву условию с постоянной *K* в точке x_0 на множестве *G*. Применяя лемму 9, получим, что для любого $\lambda\ge K$ функция

$$S_\lambda(x)=f(x)-\varphi(x-x_0)+\lambda(d_D^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_D^{\nu}(x))+\omega(\|x-x_0\|)$$

достигает минимума на множестве *G* в точке x_0.

Из леммы 9 также следует, что если $\lambda>K$ и *D* замкнуто, то любая точка, минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве *G*, принадлежит *D*. Теорема доказана.

Так как $d_D^{\beta}(x)\le\|x-x_0\|^{\beta-\nu}d_D^{\nu}(x)$ при $x\in X$, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 8. Пусть x_0 – точка минимума функции *f* на множестве *C*, $f:G\to R$ удовлетворяет $\varphi-(1,\beta,\nu,\omega)$ липшицеву условию с постоянной *K* в точке x_0 на множестве *G*, $C\subset G$, и $D=\left\{x\in C:\varphi(x-x_0)\le 0\right\}$. Тогда для любого $\lambda\ge K$ функция

$$\tilde{S}_\lambda(x)=f(x)-\varphi(x-x_0)+2\lambda\|x-x_0\|^{\beta-\nu}d_D^{\nu}(x)+\omega(\|x-x_0\|)$$

достигает минимума на *G* в точке x_0, и если $\lambda>\mathrm{K}$ и *D* замкнуто, то любая точка, минимизирующая $\tilde{S}_\lambda(x)$ на множестве *G*, принадлежит *D*.

Ясно, что при условиях лемм 5–7 условия теоремы 1 выполняются.

3. Теорема о точном штрафе для задачи математического программирования

Пусть *X* и *Z* – нормированные пространства, $G\subset X$, $f_i:G\to R$, $i=0,1,\ldots,n$, $F:G\to Z$ и $C\subset G$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(y)\to\min,\quad y\in\{x\in C:\ f_i(x)\le 0,\ i=1,\ldots,n,\ F(x)=0\}. \tag{5}$$

Положим $H=\{x\in C:\varphi_i(x-x_0)\le 0,\ i=0,1,\dots,n,\ F(x)=0\}$, $E(x)=\max\{r_0(f_0(x)-$ $-\varphi_0(x-x_0)-f_0(x_0))+\sum_{i=1}^{n} r_i(f_i(x)-\varphi_i(x-x_0)):r_i\ge 0,\ i=0,1,\dots,n,\ \sum_{i=0}^{n} r_i=1\}$.

Теорема 2. Пусть x_0 – точка минимума в задаче (5), функции $f_i:G\to R$ удовлетворяют $\varphi_i-(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицеву условию с постоянной *K* в точке x_0 на множестве *G* при $i=0,1,\dots,n$, $C\subset G$. Тогда для любого $\lambda\ge K$ функция

$$\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{x})=\mathrm{E}(\mathrm{x})+\lambda(d_H^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_H^{\nu}(x))+\omega(\|x-x_0\|)$$

достигает минимума на *G* в точке x_0, и если $\lambda>K$ и *H* замкнуто, то любая точка, минимизирующая $E_\lambda(x)$ на множестве *G*, принадлежит *H*.

Доказательство. Предполагая противное, имеем, что функция $E(x)$ неотрицательна на множестве $H=\{x\in C:\varphi_i(x-x_0)\le 0,\ i=0,1,\dots,n,F(x)=0\}$ и точка x_0 минимизирует функцию $E(x)$ на множестве *H* и $E(x_0)=0$. Так как функции $f_0(x)-\varphi_0(x-x_0)-f_0(x_0)$, $f_i(x)-\varphi_i(x-x_0)$, $i=1,\dots,n$, удовлетворяют $(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицеву условию с постоянной *K* в точке x_0 на множестве *G*, то по лемме 8 функция $E(x)$ удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицеву условию с постоянной *K* в точке x_0 на множестве *G*. Применяя лемму 9, имеем, что для любого $\lambda\ge K$ функция $E_\lambda(y)=E(y)+\lambda(d_H^{\frac{\beta}{\alpha}}(y)+\|y-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_H^{\nu}(y))+\omega(\|y-x_0\|)$ достигает минимума на *G* в точке x_0. Из леммы 9 также следует, что если $\lambda>K$ и *H* замкнуто, то любая точка, минимизирующая E_λ на множестве *G*, принадлежит *H*. Теорема доказана.

Если $\varphi_i(x)\equiv 0$ при $i=0,1,\dots,n$, то $H=\{x\in C:\ F(x)=0\}$ и

$$E(x)=\max\{\alpha_0(f_0(x)-f_0(x_0))+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x):\alpha_i\ge 0,\ i=0,1,\dots,n,\ \sum_{i=0}^{n}\alpha_i=1\}.$$

Если положить

$$E(x)=\max\{f_0(x)-\varphi_0(x-x_0)-f_0(x_0),\ f_1(x)-\varphi_1(x-x_0),\dots,\ f_n(x)-\varphi_n(x-x_0)\},$$

то теорема 2 также остается справедливой.

Пусть *X* и *Z* – нормированные пространства, $F:X\to Z$ – произвольное отображение. Обозначим $E=\{x\in D:F(x)=F(x_0)\}$, где $D\subset C$. Отображение *F* будем называть $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$-регулярным в точке $x_0\in E$ относительно множества *D*, если существует такое число $r_D>0$, что

$$d_E^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_E^{\nu}(x)\le r_D(\|F(x)-F(x_0)\|^{\frac{\beta}{\alpha}}+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\|F(x)-F(x_0)\|^{\nu})$$

при $x\in D,\ \|x-x_0\|\le\delta$.

В следующих теоремах 3 и 4 рассмотрены задачи математического программирования с регулярным ограничением равенств. Ряд достаточных условий регулярности равенства ограничений получен в [4. С. 98–104; 15. С. 59, 151].

Для простоты далее считаем, что $G = B(x_0, \delta)$. Пусть $S: X \to Z$, $\varphi_i : X \to R$, $i = 0,1,\ldots,n$, $F(x_0) = 0$.

Положим

$$D = \{x \in C : \varphi_i(x - x_0) \le 0,\ i = 0,1,\ldots,n,\ S(x - x_0) = 0\},$$

$$D_1 = \{x \in C : \varphi_i(x - x_0) \le 0,\ i = 0,1,\ldots,n\},$$

$$Q(x) = \|F(x) - S(x - x_0)\|^{\frac{\beta}{\alpha}} + \|x - x_0\|^{\beta - \alpha\nu} \|F(x) - S(x - x_0)\|^{\nu},$$

$$h(x) = \max\{ f_0(x) - f_0(x_0) - \varphi_0(x - x_0),\ f_1(x) - \varphi_1(x - x_0), \ldots, f_n(x) - \varphi_n(x - x_0)\}.$$

Теорема 3. Пусть x_0 – точка минимума в задаче (5), функции f_i удовлетворяют $\varphi_i - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 при $i = 0,1,\ldots,n$, отображение F в точке x_0 $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$-регулярно относительно множества D_1 с коэффициентом регулярности r, функции $Q(x)$ и $\omega(\|x - x_0\|)$ удовлетворяют $(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0, и $C \subset B(x_0, \delta)$. Тогда для любого $\mu \ge \max\{2K + K^2 r, Kr\}$ функция

$$h_\mu(x) = h(x) + \mu Q(x) + 2\omega(\|x - x_0\|) + \mu(d_D^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + \|x - x_0\|^{\beta - \alpha\nu} d_D^{\nu}(x))$$

достигает минимума на $B(x_0, \delta)$ в точке x_0, и если D замкнуто и $\mu > \max\{2K + K^2 r, Kr\}$, то любая точка, минимизирующая $h_\mu(x)$ на множестве $B(x_0, \delta)$, принадлежит D.

Доказательство. Так как x_0 – точка минимума в задаче (5), то, предположив противное, имеем, что x_0 является минимумом h на множестве $V = \{x \in C :\ \varphi_i(x - x_0) \le 0,\ i = 0,1,\ldots,n,\ F(x) = 0\}$.

По условию функции $f_0(x) - f_0(x_0) - \varphi_0(x - x_0)$ и $f_i(x) - \varphi_i(x - x_0)$, $i = 1,\ldots,n,$ удовлетворяют $(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке $x_0 \in C$, тогда по лемме 8 имеем, что h удовлетворяет $(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0. Применяя лемму 9 при $G = B(x_0, \delta)$ на пары множеств V и D_1 имеем, что для любого $\lambda \ge K$ функция

$$\bar{h}_\lambda(x) = h(x) + \lambda(d_V^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + \|x - x_0\|^{\beta - \alpha\nu} d_V^{\nu}(x)) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на множестве D_1 в точке x_0 (и если $\lambda > K$ и V замкнуто, то любая точка, минимизирующая $\bar{h}_\lambda(x)$ на множестве D_1, принадлежит V).

Так как отображение F является $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$-регулярным в точке $x_0 \in V$ относительно множества D_1, то существует такое число $r > 0$, что

$$d_V^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + \|x - x_0\|^{\beta - \alpha\nu} d_V^{\nu}(x) \le r(\|F(x)\|^{\frac{\beta}{\alpha}} + \|x - x_0\|^{\beta - \alpha\nu} \|F(x)\|^{\nu})$$

при $x \in D_1$. Отсюда следует, что

$$d_V^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + \|x - x_0\|^{\beta - \alpha\nu} d_V^{\nu}(x) \le r(\|F(x) - S(x - x_0)\|^{\frac{\beta}{\alpha}} + \|x - x_0\|^{\beta - \alpha\nu} \|F(x) - S(x - x_0)\|^{\nu})$$

при $\mathrm{x} \in \mathrm{D}$. Поэтому для любого $\lambda \ge K$ функция

$$h(\mathrm{x}) + \lambda r(\|F(x) - S(x - x_0)\|^{\frac{\beta}{\alpha}} + \|x - x_0\|^{\beta - \alpha\nu} \|F(x) - S(x - x_0)\|^{\nu}) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на D в точке x_0. Так как функция $h(x)+KrQ(x)+\omega(\|x-x_0\|)$ в точке x_0 удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицеву условию с постоянной $2K+K^2r,$ то из леммы 9 при $G=B(x_0,\delta)$ имеем, что для любого $\mu\geq 2K+K^2r$ функция $h(x)+KrQ(x)+2\omega(\|x-x_0\|)+\mu(d_D^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_D^{\nu}(x))$ достигает минимума на $B(x_0,\delta)$ в точке x_0. Поэтому для любого $\mu\geq\max\{2K+K^2r,Kr\}$ функция $h_\mu(x)=h(x)+\mu Q(x)+2\omega(\|x-x_0\|)+\mu(d_D^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_D^{\nu}(x))$ достигает минимума на $B(x_0,\delta)$ в точке x_0, и если $\mu>\max\{2K+K^2r,Kr\}$ и D замкнуто, то по лемме 9 любая точка, минимизирующая $h_\mu(x)$ на множестве $B(x_0,\delta)$, принадлежит D. Теорема доказана.

Если положить
$$h(x)=\max\{\alpha_0(f_0(x)-f_0(x_0)-\varphi_0(x-x_0))+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(f_i(x)-\varphi_i(x-x_0)):\alpha_i\geq 0,\ i=0,1,\ldots,n,\ \sum_{i=0}^{n}\alpha_i=1\},$$
то теорема 3 также остается верной.

Пусть (X,d_X) и (Y,d_Y) – метрические пространства, $F:X\to Y$ – оператор, $B_X(x,r)$ – шар радиуса r с центром в точке x в X, $B_Y(y,r)$ – шар радиуса r с центром в точке y в Y. Пусть $U\subset X$ – открытое множество. Будем говорить, что оператор F накрывает множество U с константой $a>0$, если включение $F(B_X(x,r))\supset B_Y(F(x),ar)$ выполняется для любого $B_X(x,r)\subset U$ (см.: [15. P. 52]).

Пусть $G=B(x_0;\delta)$, $S:X\to R$. Положим
$$D=\{x\in C:\ S(x-x_0)=0\},\qquad f(x)=\max\{f_0(x)-f_0(x_0),f_1(x),\ldots,f_n(x)\},$$
$$Q(x)=\|F(x)-S(x-x_0)\|^{\frac{\beta}{\alpha}}+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\|F(x)-S(x-x_0)\|^{\nu}.$$

Теорема 4. Пусть X – банахово пространство, x_0 – точка минимума в задаче (5), функции f_i, $i=0,1,\ldots,n$, в точке x_0 удовлетворяют $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицеву условию с постоянной K, C – непустое открытое множество, непрерывное отображение $F:C\to Z$ накрывает с константой $a>0$ на множестве C и $C\subset B(x_0,\delta)$, функции $Q(x)$ и $\omega(\|x-x_0\|)$ удовлетворяют $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицеву условию с постоянной K. Тогда существуют числа $m_0>0$ и $t>0$ такие, что для любого $\mu\geq m_0$ функция
$$S_\mu(x)=f(x)+\mu Q(x)+2\omega(\|x-x_0\|)+\mu(d_U^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_U^{\nu}(x))$$
достигает минимума на $B(x_0,\delta)$ в точке x_0, где $U=B(x_0,t)\cap D$, $0<t<\delta$, а если D замкнуто и $\mu>m_0$, то любая точка, минимизирующая $S_\mu(x)$ на множестве $B(x_0,\delta)$, принадлежит U.

Доказательство. Положим $f(x)=\max\{f_0(x)-f_0(x_0),f_1(x),\ldots,f_n(x)\}$ при $x\in B(x_0,\delta)$. Так как x_0 – точка минимума в задаче (5), то x_0 также минимизирует функцию f на множестве $E=\{x\in C:F(x)=0\}$. Если функции f_i, $i=0,1,\ldots,n$, удовлетворяют $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0, то по лемме 8 имеем, что функция f также удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицеву условию с постоянной K в точке x_0. Полагая $E=\{x\in C: F(x)=0\}$, по лемме 9 имеем, что для любого $\lambda\geq K$ функция

$$S_\lambda(x)= f(x)+ \lambda(d_E^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\, d_E^{\nu}(x))+\omega(\|x-x_0\|)$$

достигает минимума на $B(x_0,\delta)$ в точке x_0 (и если $\lambda>K$ и E замкнуто, то любая точка, минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве $B(x_0,\delta)$, принадлежит E). Так как непрерывное отображение $F:C\to Y$ накрывает с константой $a>0$ на открытом множестве C, то по лемме 44 [15. С. 151] существуют числа $m>0$ и $t>0$ такие, что выполняется неравенство $d_E(x)\leq m\|F(x)\|$ при $x\in B(x_0,t)$, где $B(x_0,t)\subset C$. Поэтому для любого $\lambda\geq K$ имеем, что

$$f(x_0)\leq f(x)+\lambda(d_E^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\, d_E^{\nu}(x))+\omega(\|x-x_0\|)\leq f(x)+$$

$$+\lambda\bar{r}(\|F(x)\|^{\frac{\beta}{\alpha}}+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\,\|F(x)\|^{\nu})+\omega(\|x-x_0\|)$$

при $x\in B(x_0,t)$, где $\bar{r}=\max\{m^{\frac{\beta}{\alpha}},m^{\nu}\}$. Отсюда следует, что функция $f(x)+\lambda\bar{r}\,Q(x)+\omega(\|x-x_0\|)$ достигает минимума на $U=D\cap B(x_0,t)$ в точке x_0. Так как функция $\tilde{S}(\mathrm{x})= f(\mathrm{x})+K\,\bar{r}\,Q(x)+\omega(\|x-x_0\|)$ в точке x_0 удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицеву условию (см.: [12. С. 200. Лемма 4.4.1]) с постоянной $K^2\bar{r}+2K$, то по лемме 9 для любого $\mu\geq\bar{r}\,K^2+2K$ функция

$$S(x)= f(x)+K\bar{r}Q(x)+2\omega(\|x-x_0\|)+\mu(d_U^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\, d_U^{\nu}(x))$$

достигает минимума на $B(x_0,\,\delta)$ в точке x_0. Поэтому для любого $\mu\geq\max\{\,K^2\bar{r}+2K,\,K\bar{r}\}$ функция

$$S_\mu(x)= f(x)+\mu Q(x)+2\omega(\|x-x_0\|)+\mu(d_U^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\, d_U^{\nu}(x))$$

достигает минимума на $B(x_0,\,\delta)$ в точке x_0. Если D замкнуто и $\mu>\max\{\,K^2\bar{r}+2K,\,K\bar{r}\}$, то по лемме 9 любая точка, минимизирующая $S_\mu(x)$ на множестве $B(x_0,\,\delta)$, принадлежит U. Теорема доказана.

Отметим, что из теоремы точного штрафа высокого порядка легко можно получить необходимые условия экстремума высокого порядка (см.: [12]).

Список источников

1. *Kuhn H.W., Tucker A.W.* Nonlinear programming // Proceedings of the Second Berkeley Sumposium on Mathematics, Statistics and Probability. Univ. of Calif. Press. 1951. P. 481–482.
2. *Ioffe A.D.* Necessary and sufficient conditions for a local minima. I // SIAM J.Contr. Optimiz. 1979. V. 17, № 2. P. 245–250.
3. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука,1988. 280 с.

4. *Мордухович Б.Ш.* Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 350 с.
5. *Clarke F.* Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control. London: Springer-Verlag, 2013. 591 p.
6. *Penot J.P.* Calculus Without Derivatives, Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 2013. 524 p.
7. *Mordukhovch B.S.* Variational analysis and applications. Cham: Springer, 2018. 622 p.
8. *Садыгов М.А.* Экстремальные задачи для негладких систем. Баку: Изд-во Азербайджа. техн. ун-та, 1996. 148 с.
9. *Садыгов М.А.* Исследование негладких оптимизационных задач. Баку: Элм, 2002. 125 с.
10. *Садыгов М.А.* Экстремальные задачи с ограничением в метрическом пространстве // Доклады Академии наук. 2012. Т. 447, № 6. С. 615–618.
11. *Садыгов М.А.* Задачи на экстремум с ограничениями в метрическом пространстве // Доклады Академии наук. 2013. Т. 452, № 5. С. 490–493.
12. *Садыгов М.А.* Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. 359 p.
13. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
14. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
15. *Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.* Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во МГУ, 2004. 168 с.

References

1. Kuhn H.W., Tucker A.W. (1951) Nonlinear programming. *Proceedings of the Second Berkeley Sumposium on Mathematics, Statistics and Probability*. University of California Press. pp. 481–482.
2. Ioffe A.D. (1979) Necessary and sufficient conditions for a local minima. I. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 17(2). pp. 245–250.
3. Clarke F. (1983) *Optimization and Nonsmooth Analysis*. New York: Wiley.
4. Mordukhovich B.S. (1988) *Metody approksimatsii v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Approximation methods in optimization and control problems]. Moscow: Nauka.
5. Clarke F. (2013) *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. London: Springer-Verlag.
6. Penot J.-P. (2013) *Calculus without Derivatives*. New York: Springer.
7. Mordukhovich B.S. (2018) *Variational analysis and applications*. Cham: Springer.
8. Sadygov M.A. (1996) *Ekstremal'nyye zadachi dlya negladkikh sistem* [Extremum Problems for Nonsmooth Systems]. Baku: Azerbaijan Technical University.
9. Sadygov M.A. (2002) *Issledovaniye negladkikh optimizatsionnykh zadach* [Study of nonsmooth optimization problems]. Baku: Elm.
10. Sadygov M.A. (2012) Extremum Problems with Constraints in a Metric Space. *Doklady Mathematics*. 86(3). pp. 861–864.
11. Sadygov M.A. (2013) Extremum Problems in the Presence of Restrictions in the Metric Space. *Doklady Mathematics*. 88(2). pp. 573–576.
12. Sadygov M.A. (2014) Subdifferential of High Orders and Optimization. Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing.
13. Engelking R. (1968) *Outline of General Topology*. North-Holland Publishing Company.
14. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. (1979) *Optimal'noye upravleniye* [Optimal control]. Moscow: Fizmatlit.
15. Milyutin A.A., Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. (2004) Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii [The principle of maximum in optimal control]. Moscow: Moscow State University.

***Сведения об авторе*:**
Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы – доктор физико-математических наук, профессор Бакинского государственного университета (Баку, Азербайджан). E-mail: misreddin08@rambler.ru

***Information about the author*:**
Sadygov Misraddin A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Baku State University, Baku, Azerbayjan). E-mail: misreddin08@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 20.01.2024; принята к публикации 10.04.2025

The article was submitted 20.01.2024; accepted for publication 10.04.2025