ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Математика и механика № 94
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 533.6.011.34
doi: 10.17223/19988621/94/7

Использование принципа наименьшего действия в исследовании течения идеального газа в дозвуковой части сопла

Геннадий Иванович Афонин[1], Антон Геннадьевич Афонин[2]

[1, 2] Томский государственный университет, Томск, Россия
[1] agi@niipmm.tsu.ru
[2] aag@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Формулируется принцип наименьшего действия применительно к стационарному потоку невязкого и нетеплопроводного идеального газа в осесимметричном канале переменного сечения. Задача о минимуме действия для стационарного потока сводится к вариационной задаче о минимуме лагранжиана в произвольном сечении при заданном расходе. Используя полученное условие оптимальности, строится маршевый метод восстановления параметров течения и формы канала как вниз, так и вверх по потоку относительно условного начального сечения (сечения «входа»), где при задании наклона линий тока предварительно определяются параметры течения и расход газа в канале. Это в дальнейшем позволяет провести численное исследование структуры оптимального (по принципу наименьшего действия) контура канала.
Ключевые слова: идеальная газ, принцип наименьшего действия, вариационная задача, условие оптимальности, краевой экстремум, закон сохранения энергии

Для цитирования: Афонин Г.И., Афонин А.Г. Использование принципа наименьшего действия в исследовании течения идеального газа в дозвуковой части сопла // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 79–92. doi: 10.17223/19988621/94/7

Original article

The use of the principle of least action in a study of ideal gas flow in subsonic parts of a nozzle

Gennadiy I. Afonin[1], Anton G. Afonin[2]

[1, 2] Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation
[1] agi@niipmm.tsu.ru
[2] aag@niipmm.tsu.ru

Abstract. The principle of least action is formulated for a steady flow of an inviscid non-heat conducting ideal gas in an axisymmetric channel of variable cross section. The

© Г.И. Афонин, А.Г. Афонин, 2025

problem on the minimum of action for a steady flow is reduced to a variational problem on the minimum of the Lagrangian in an arbitrary cross section at a given flow rate. Using the obtained optimality condition, a marching method is constructed to derive the flow parameters and channel shape both downstream and upstream relative to a conditional initial section referred to as the "inlet" section, where the flow parameters and gas flow rate in the channel are preliminarily determined by specifying the slope of the streamlines. After this, the structure of the optimal (in accordance with the principle of least action) channel contour is numerically studied.
Keywords: ideal gas, principle of least action, variational problem, optimality condition (Euler equation), boundary extreme value, energy conservation law

For citation: Afonin, G.I. Afonin, A.G. (2025) The use of the principle of least action in a study of ideal gas flow in subsonic parts of a nozzle. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 79–92. doi: 10.17223/19988621/94/7

Введение

К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных теоретическому исследованию стационарных газодинамических внутренних течений (в соплах), основанных на решении уравнений в частных производных. Эти уравнения описывают смешанное течение, т.е. такое, в котором имеются области как дозвуковых, так и сверхзвуковых скоростей. Смешанный характер течения существенно усложняет численное решение системы уравнений, прежде всего из-за принципиального различия методов интегрирования систем гиперболического и эллиптического типов. Подробное изложение большинства имеющихся в настоящее время результатов как для равновесных, так и для неравновесных течений газа в соплах проведено в монографии [1].

Ниже рассматривается принцип наименьшего действия для стационарного потока невязкого, нетеплопроводного идеального газа (ИГ) в осесимметричном канале переменного сечения (КПС). Принцип наименьшего действия (ПНД) относится к интегральным вариационным принципам. Данный принцип утверждает, что истинным среди возможных кинематических движений системы тел между двумя ее положениями в моменты времени t_0 и t_1 является то, для которого среднее значение разности между кинетической и потенциальной энергией за данный промежуток времени будет величиной, самой малой из всех возможных [2]. ПНД показал высокую эффективность и универсальность в математических моделях физики [3]. Однако в гидродинамике он не получил должного развития и используется лишь как еще один способ получения известных уравнений движения для элемента жидкости единичной массы. В [2] подробно обсуждаются трудности применимости ПНД. Они заключаются, прежде всего, в определении двух видов энергии: кинетической и потенциальной. Преодолеть возникающие трудности удается в случае, когда материальные точки в изолированной системе находятся под действием консервативных сил.

Здесь построение лагранжиана для определения действия и постановка вариационной задачи о минимуме действия проводятся так же, как это было сделано в работе [4] для идеальной несжимаемой жидкости. Полученное условие оптимальности совместно с уравнением движения для поперечной составляющей вектора скорости позволило построить эффективный маршевый метод расчета не

только параметров в до- и трансзвуковой области течения, но одновременно и формы канала. Параметры определяются во всей области течения от начала на бесконечном удалении до сечения, где модуль вектора скорости всюду равен или больше скорости звука. Проведенные расчеты выявили необходимость рассмотрения вариационной задачи с краевым экстремумом. Так, в начальной области истечения рассматривалась вариационная задача с краевым экстремумом, когда часть сечения является линией тока. В трансзвуковой области течения рассматривалось два случая: течение со скоростью звука, т.е. при постоянном давлении, и сверхзвуковое течение при заданном контуре трансзвукового участка канала. Таким образом, было выяснено, что оптимальный контур состоит из трех участков: начального прямолинейного вертикального участка, участка двухстороннего экстремума (участок разворота течения) и участка краевого экстремума, который либо задается и в результате формируется сверхзвуковое течение в выходном сечении, либо происходит дальнейшее «распрямление» стенки канала до достижения скорости звука во всем сечении потока.

1. Принцип наименьшего действия

Рассмотрим стационарный поток невязкого, нетеплопроводного идеального газа в осесимметричном канале переменного сечения. Пусть x, y – прямоугольные координаты в меридиональной плоскости, ось x направлена по оси симметрии в сторону движения потока ИГ слева направо. Поток ИГ характеризуется показателем адиабаты k плотностью ρ, давлением p и вектором скорости $\mathbf{V} = (u, \upsilon)$.

Известно, что каждая единица массы ИГ при движении обладает энергией $\frac{u^2 + \upsilon^2}{2} + h$, где h – энтальпия. Для ИГ:

$$h = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}.$$

Энергия E потока газа с массовым расходом μ

$$\mu = 2\pi \int_0^{y_1} \rho u y dy \tag{1.1}$$

в сечении x (ортогональном оси симметрии) с ординатой контура канала $y_1(x)$ определяется выражением

$$E = 2\pi \left[\int_0^{y_1} \left(\frac{u^2 + \upsilon^2}{2} \right) \rho u y dy + \frac{k}{k-1} \int_0^{y_1} p u y dy \right]. \tag{1.2}$$

В стационарном случае для ИГ E постоянна. Выражение (1.2) представляет собой закон сохранения потока энергии для ИГ в КПС. В (1.2) первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию T потока ИГ, второе – энтальпию потока U. Следует заметить, что в механике и в принципе наименьшего действия при рассмотрении закона сохранения энергии пользуются терминами «кинетическая энергия» и «потенциальная энергия». Поэтому для второго члена в (1.2) в дальнейшем будем использовать термин «потенциальная энергия».

Проведя аналогичные рассуждения и действия, как и в [4] для потока несжимаемой жидкости, и перейдя к безразмерным параметрам p (давление), ρ (плотность), u и υ (составляющие вектора скорости), которые отнесены параметрам затормо-

женного ИГ p_t, ρ_t и $u_c = \sqrt{2\,p_t/\rho_t}$; x, y – к ординате стенки канала в условном начальном сечении, получим Лагранжиан

$$S = 2\int_0^{y_1}\left(u^2 + \upsilon^2 - \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}\right)\rho u y\,dy\,. \tag{1.3}$$

Такое обезразмеривание при $k \to \infty$ для ИГ дает Лагранжиан несжимаемой жидкости [4]. Следует отметить, что расход (1.1) при принятых безразмерных величинах совпадает с коэффициентом расхода.

Минимум (1.3) в каждом сечении x обеспечивает и минимум действия $I = \int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$ на промежутке времени $[t_0, t_1]$.

Лагранжиан (1.3) в дальнейшем так же, как и в [4], будем называть действием. В (1.3) и далее параметры течения представляются только в безразмерном виде при тех же обозначениях.

Размерная скорость звука заторможенного газа a_t связана с размерной критической скоростью звука a_* и масштабом скорости u_c соотношениями

$$a_t^2 = k\frac{p_t}{\rho_t} = \frac{k+1}{2}a_*^2 = \frac{k}{2}u_c^2\,,$$

откуда для безразмерных a_t и a_* имеют место

$$a_t = \sqrt{0.5k}\,,\quad a_* = \sqrt{k/(k+1)}\,.$$

2. Постановка вариационной задачи в условном начальном сечении канала

Вариационная задача для функционала (1.3) с неизвестными функциями одной переменной $u(y)$, $\upsilon(y)$, $p(y)$ и $\rho(y)$ во входном сечении канала x_0 с ординатой стенки канала $y_1(x_0) = 1$ с ограничением в форме заданного расхода μ_0,

$$\mu_0 = 2\int_0^1 \rho u y\,dy\,, \tag{2.1}$$

сводится к задаче на безусловный экстремум [6] функционала

$$I = 2\int_0^1\left(u^2 + \upsilon^2 - \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} - \lambda\right)\rho u y\,dy\,,$$

где $\lambda = const$ – множитель Лагранжа.

Воспользуемся уравнением Бернулли в безразмерном виде:

$$\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} + u^2 + \upsilon^2 = \frac{k}{k-1}\,, \tag{2.2}$$

и упростим выражение для I. В результате получим

$$I = 2\int_0^1\left(2\left(u^2+\upsilon^2\right) - \frac{k}{k-1} - \lambda\right)\rho u y\,dy\,. \tag{2.3}$$

Учитывая условие изоэнтропичности ИГ (в безразмерном виде)

$$p = \rho^k\,, \tag{2.4}$$

из (2.2), получим соотношение для плотности ρ в виде:

$$\rho = \left[1 - \frac{k-1}{k}(u^2 + \upsilon^2)\right]^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (2.5)$$

В (2.3) и далее для плотности ρ следует иметь в виду выражение (2.5).

Подынтегральная функция в (2.3) имеет вид:

$$F(y,u,\upsilon) = \left[2\left(u^2 + \upsilon^2\right) - \frac{k}{k-1} - \lambda\right]\rho u y .$$

Отсюда следуют следующие два уравнения Эйлера [5] для функций $u(y)$ и $\upsilon(y)$:

$$\left(6u^2 + 2\upsilon^2 - \frac{k}{k-1} - \lambda\right)\rho + \left[2\left(u^2 + \upsilon^2\right) - \frac{k}{k-1} - \lambda\right]u\frac{\partial\rho}{\partial u} = 0 , \qquad (2.6a)$$

$$4\upsilon\rho + \left[2\left(u^2 + \upsilon^2\right) - \frac{k}{k-1} - \lambda\right]u\frac{\partial\rho}{\partial\upsilon} = 0 . \qquad (2.6b)$$

Частные производные от ρ находятся из (2.5):

$$\frac{\partial\rho}{\partial u} = -\frac{2}{k}\frac{\rho}{\rho^{k-1}}u , \ \frac{\partial\rho}{\partial\upsilon} = -\frac{2}{k}\frac{\rho}{\rho^{k-1}}\upsilon . \qquad (2.7)$$

Подставляя в уравнение (2.6a) соотношения (2.5) и (2.7), получим

$$2\frac{3k-1}{k}u^4 - \left(\frac{7k-5}{k-1} + \frac{k+1}{k}\lambda - 4\frac{2k-1}{k}\upsilon^2\right)u^2 +$$

$$+ 2\frac{k-1}{k}\upsilon^4 - \frac{3k+(k-1)\lambda}{k}\upsilon^2 + \frac{k}{k-1} + \lambda = 0 . \qquad (2.8)$$

Из уравнения (2.6b) следует соотношение $\upsilon = 0$. С учетом этого (2.8) упрощается и дает уравнение для определения скорости на оси симметрии u_0 во «входном» сечении канала:

$$2\frac{3k-1}{k}u_0^4 - \left(\frac{7k-5}{k-1} + \frac{k+1}{k}\lambda\right)u_0^2 + \frac{k}{k-1} + \lambda = 0 . \qquad (2.9)$$

Это уравнение, преобразованное относительно λ, становится значительно нагляднее и удобнее для расчетов:

$$\left(\frac{k+1}{k}u_0^2 - 1\right)\lambda = 2\frac{3k-1}{k}u_0^4 - \frac{7k-5}{k-1}u_0^2 + \frac{k}{k-1} . \qquad (2.10)$$

Вся совокупность возможных течений в канале определяется дозвуковой скоростью ИГ $0 \le u_0 \le \sqrt{k/(k+1)}$ в сечении «входа», при этом для λ из (2.10) следует $k/(1-k) \le \lambda \le \infty$. Максимальный расход μ_{0m} реализуется при скорости $u_{0m} = \sqrt{k/(k+1)}$.

3. Течение в канале с бесконечно медленным изменением площади поперечного сечения

Рассмотрим поставленную выше вариационную задачу в сечении входа в канал для произвольного сечения канала *x* с ординатой стенки $y_1(x)$. Вспомогательный функционал для этой задачи имеет следующий аналогичный (2.3) вид:

$$I = 2\int_0^{y_1}\left(2\left(u^2 + \upsilon^2\right) - \frac{k}{k-1} - \lambda\right)\rho u y dy . \qquad (3.1)$$

Из (3.1) видим, что подынтегральные функции вспомогательных функционалов (2.3) и (3.2) совпадают. В связи с этим условия оптимальности для функционала (3.1) совпадают с условиями оптимальности (2.8) и $\upsilon = 0$ для функционала (2.3). Следует иметь в виду, что если ранее (см. разд. 2) во «входном» сечении заданием λ определялись скорость на оси симметрии u_0 (и наоборот) и расход μ_0, то здесь в каждом сечении x с ординатой стенки $y_1(x)$ с помощью λ обеспечивается условие выполнения равенства расхода μ расходу в сечении «входа» μ_0.

Таким образом, видим, что при отсутствии ограничений на скорости u и υ минимальное действие реализуется в канале с бесконечно медленным изменением площади поперечного сечения при монотонном изменении скорости потока.

Соотношение (2.10) показывает изменение λ от скорости u_0 потока ИГ на оси. Так, в начальной области истечения (область до сечения «входа») скоростям в диапазоне $0 \le u_0 \le a_* = \sqrt{k/(k+1)}$ соответствует $k/(1-k) \le \lambda \le \infty$. Для сверхзвукового течения в расширяющейся части канала, где $a_* \le u_0 \le \sqrt{k/(k-1)}$, из (2.10) следует, что $-\infty \le \lambda \le k/(k-1)$.

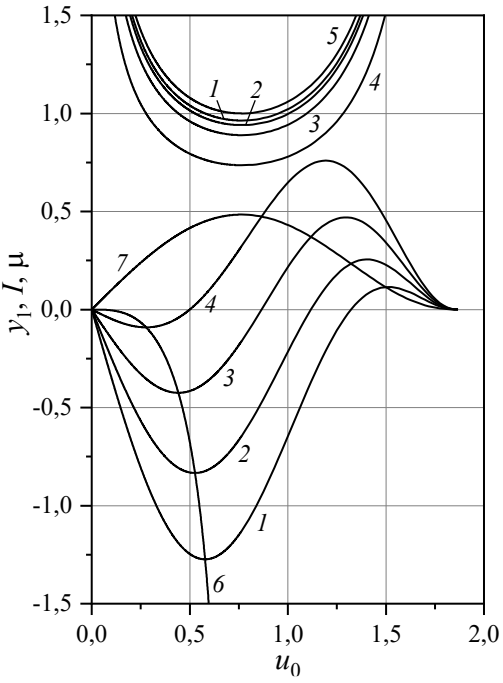

Рис. 1. Профили канала при разных λ (верхние сплошные кривые *1–5*); соответствующие $I(u_0)$ – нижние сплошные кривые *1–4*; *6* – положения минимумов функционала $I(u_0)$ в сечении «входа»; *7* – μ_0

Fig. 1. Channel profiles for various λ (upper solid curves *1–5*) and the corresponding $I(u_0)$ (lower solid curves *1–4*); curve *6*, positions of the minima of the functional $I(u_0)$ in the "inlet" section; curve *7*, the flow rate in the "inlet" section μ_0

На рис. 1 показаны профили каналов с бесконечно медленным изменением площади сечения для течения ИГ ($k = 1.4$). Кривая *1* соответствует $\lambda = 0$ ($\mu \approx 0.4498$), кривая *2* – $\lambda = -1$ ($\mu \approx 0.4284$), *3* – $\lambda = -2$ ($\mu \approx 0.3829$), *4* – $\lambda = -3$ ($\mu \approx 0.2623$), *5* – $\lambda = \infty$ ($\mu \approx 0.4842$). Соответствующие изменения функционала (2.3) показаны кривыми с номерами *1–4* в нижней части рисунка. Кривая *6* представляет собой положения минимумов функционала (2.3) в сечении «входа» для различных λ. Кривая *7* – это совокупность возможных расходов в сечении «входа» при изменении λ ($-3.5 < \lambda < \infty$).

4. Определение параметров течения в условном начальном сечении

Рассмотрим в некотором произвольном сечении *x* канала вариационную задачу о минимуме функционала (3.2), считая при этом $\upsilon(y)$ известной функцией. Для данной постановки задачи из (2.6) видим, что остается только условие оптимальности для $u(y)$ в виде (2.8). Возможность нахождения скорости $u(y)$ из (2.8) в сечении «входа» при известной скорости $\upsilon(y)$ позволяет определить расход μ в канале, давление и плотность. Задавая во «входном» сечении канала тангенс угла наклона линий тока $y'(y)$ (далее просто наклон), исключая при этом скорость $\upsilon = y'u$ из (2.8), получим следующее уравнение для определения продольной скорости $u(y)$ в сечении «входа»:

$$\left(2\frac{3k-1}{k}+4\frac{2k-1}{k}\left(y'\right)^2+2\frac{k-1}{k}\left(y'\right)^2\right)u^4 -$$

$$-\left(\frac{7k-5}{k-1}+\frac{k+1}{k}\lambda+\frac{3k+(k-1)\lambda}{k}\left(y'\right)^2\right)u^2+\frac{k}{k-1}+\lambda=0\,. \qquad (4.1)$$

Из (4.1) видим, что при заданном распределении наклона линий тока y' расход μ является функцией λ. Для того, чтобы определить возможный диапазон изменения λ, необходимо рассмотреть предельный случай, когда на стенке канала при наклоне $y_1'(x_0)$ в сечении «входа» модуль вектора скорости равен критической скорости звука, т.е. $\sqrt{u^2+\upsilon^2}=\sqrt{k/(k+1)}=a_*$. Из этого условия в сечении «входа» на стенке канала для предельной скорости u_{1m} следует

$$u_{1m}=\sqrt{\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{1+\left(y_1'\right)^2}}\,. \qquad (4.2)$$

Для определения предельного $\lambda_m(y_1')$ из (4.1) при условии (4.2) следует уравнение

$$\left(2\frac{3k-1}{k}+4\frac{2k-1}{k}\left(y_1'\right)^2+2\frac{k-1}{k}\left(y_1'\right)^4\right)u_{1m}^4 -$$

$$-\left(\frac{7k-5}{k-1}+3\left(y_1'\right)^2\right)u_{1m}^2+\frac{k}{k-1}=-\frac{2}{k+1}\frac{\left(y_1'\right)^2}{1+\left(y_1'\right)^2}\lambda_m\,. \qquad (4.3)$$

Из (4.3) видим, что λ_m не зависит от задания закона распределения наклона линий тока $y'(y)$. Таким образом, для λ следует $k/(1-k) \le \lambda \le \lambda_m$. Для $y_1' = 0$ изменение λ, как было показано выше, определяется неравенством $k/(1-k) \le \lambda \le \infty$. Для расхода при $k = 1.4$ следует $0 \le \mu \le 0.4842$. При $y_1' \to -\infty$ $u_{1m} \to 0$, $\lambda_m \to k(k-3)/(k^2-1)$, и для $k = 1.4$ $\lambda_m \to -2.33(3)$. Уравнение (2.9) при $\lambda_m = k(k-3)/(k^2-1)$ преобразуется к виду:

$$\frac{3k-1}{k} u_{0m}^4 - 4u_{0m}^2 + \frac{k}{k+1} = 0 .$$

Отсюда следует выражение для предельной скорости на оси симметрии канала u_{0m}:

$$u_{0m} = \sqrt{\frac{k}{3k-1}\left(2 - \sqrt{\frac{k+5}{k+1}}\right)} . \qquad (4.4)$$

На рис. 2 представлены предельные значения параметров возможных решений при изменении y_1'. Кривая *1* – u_{0m} получено согласно (2.9) при условиях (4.2) и (4.3), *2* – скорость u_{1m} согласно (4.2), *3* – скорость $\upsilon_{1m} = y_1' u_{1m}$, *4* – λ_m, *5* – μ_m, *6* – S_m.

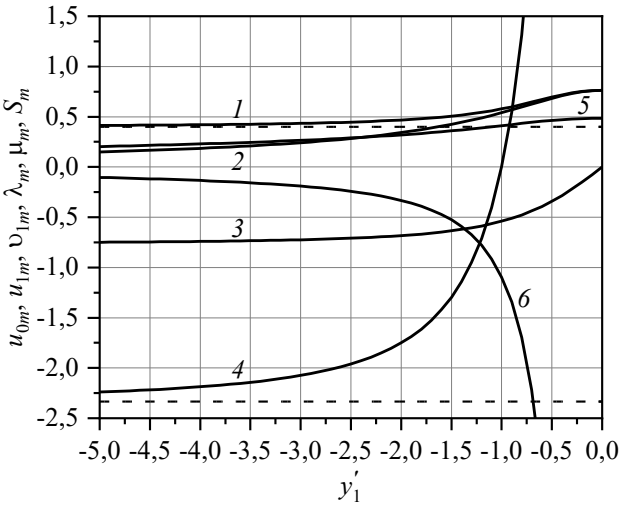

Рис. 2. Предельные значения параметров возможных решений при изменении y_1'

Fig. 2. Limit values of the parameters of possible solutions at various y_1'

На рис. 3 представлены все возможные решения $\mu = \mu(u_0)$ для линейного закона распределения наклона линий тока: $y'(y) = y_1' y$. Сплошная кривая *1* построена для $y_1' = 0$, *2* – для $y_1' = -1$, *3* – для $y_1' = -2$, *4* – $y_1' = -5$. Пунктирные линии соответствуют тем же значениям y_1', для квадратичного закона распределения наклона: $y'(y) = y_1' y^2$. Кроме этих кривых на рис. 3 представлены их огибающие μ_m для всего диапазона изменения y_1' ($0 \le y_1' < \infty$). Пунктирными прямыми отмечены

максимальное значение μ, соответствующее $y_1' = 0$ и критическому значению модуля скорости.

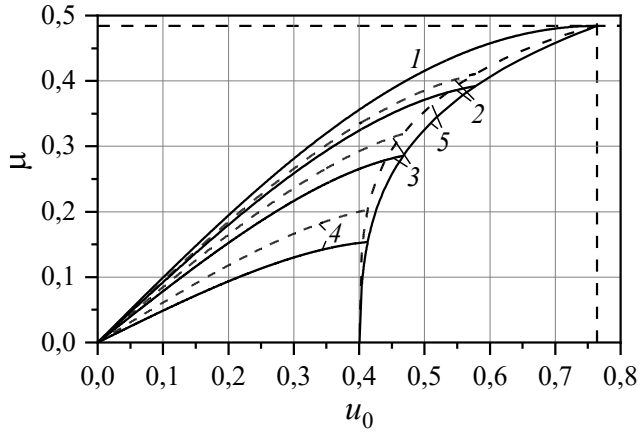

Рис. 3. μ = μ (u_0) для линейного и квадратичного законов распределения наклона линий тока
Fig. 3. μ = μ (u_0) for the linear and quadratic laws of the streamline slope distribution

5. Определение формы канала дозвукового течения

Система уравнений для нахождения параметров потока в сечениях канала ниже «входного» состоит из уравнения (2.8) для скорости u, уравнения для линии тока

$$uy' - \upsilon = 0 \qquad (5.1)$$

и уравнения для определения скорости υ на линиях тока

$$u\upsilon' + \frac{p_y}{2\rho} = 0\,, \qquad (5.2)$$

где $\upsilon' = \dfrac{d\upsilon}{dx} = \dfrac{\partial\upsilon}{\partial x} + \dfrac{\upsilon}{u}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}$. Плотность определяется согласно (2.5), а давление находится из (2.4).

Проведение расчета течения с помощью этих уравнений показало, что в рамках данной вариационной задачи существует два типа краевого экстремума. Первый – когда в части рассматриваемого сечения имеет место дозвуковое течение ИГ, и к нему примыкает часть краевого экстремума, где модуль вектора скорости на всех линиях тока равен скорости звука. Второй тип краевого экстремума соответствует части сечения, примыкающей к заданной стенке канала, где поток движется со сверхзвуковыми скоростями.

Рассмотрим краевой экстремум, когда модуль вектора скорости на линии тока достигает скорости звука и дальнейшее движение вдоль линии тока происходит при постоянной скорости и постоянном давлении. Первый раз это происходит на стенке контура. Часть сечения со звуковым течением ИГ монотонно увеличивается при приближении скорости потока на оси u_0 к скорости звука и, когда $u_0 = a$, становится равной всему сечению. Таким образом, в выходном сечении формируется поток ИГ, который движется параллельно оси симметрии со скоростью звука $u = a$.

Условие оптимальности (2.8) в области краевого экстремума дает уравнение для определения скорости υ

$$\left(\frac{3k-1}{k-1}+\frac{k+1}{k}\lambda\right)\upsilon^2=\frac{4k}{k+1}. \tag{5.3}$$

Из (5.3) видим, что на отрезке краевого экстремума при звуковом течении скорость υ постоянна.

Другой краевой экстремум требует задания контура канала для того, чтобы формировать область сверхзвуковых скоростей. Причем следует отметить, что он не должен пересекать контур канала, который получен при условии $u^2+\upsilon^2=a^2$. Понятно, что в этом случае вместо соотношения (2.8) необходимо использовать уравнение движения для скорости u. Определение параметров на участке краевого экстремума ведется методами расчета сверхзвуковых течений, в данном случае удобно использовать обратный метод характеристик.

При определении параметров потока вверх от «входного» сечения канала система уравнений остается неизменной. Здесь, также как и в [4], возникает необходимость рассмотрения вариационной задачи с краевым экстремумом. Расчет параметров потока в области краевого экстремума осуществляется следующим образом из соотношения (2.8) на границе $\bar{y}$ ($u=0$) следует

$$2\frac{k-1}{k}\bar{\upsilon}^4-\frac{3k+(k-1)\lambda}{k}\bar{\upsilon}^2+\frac{k}{k-1}+\lambda=0. \tag{5.4}$$

Далее плотность $\bar{\rho}$ определяется из (2.5). Параметры потока ρ и υ в области краевого экстремума определяются (вдоль линии тока) из соотношений

$$\rho^2(1-\rho^{k-1})=\frac{k-1}{k}\left(\frac{\bar{\rho}\bar{\upsilon}\bar{y}}{y}\right)^2 \tag{5.5}$$

$$\upsilon=\frac{\bar{\rho}\,\bar{\upsilon}\,\bar{y}}{\rho\,y}.$$

Численный расчет течения вверх от сечения «входа» осуществляется таким образом, что при достижении начала первого краевого экстремума для линии тока соответствующей стенки контура $u_N=0$. Дальше расчет продолжается и ведется последовательно для всех линий тока от $i=(N-1)$ до достижения $u_i=0$ при условии выполнения для каждой соответствующего коэффициента расхода μ_i. Начало области краевого экстремума x_0 находится путем интерполяции вдоль границы $\bar{y}_i(x_i)$ на ось симметрии.

На рис. 4 для канала с линейным распределением наклона линий тока в сечении «входа» $y'=y_1'y$ ($y_1'=-0.5$) представлены линии тока. Пунктирные линии показывают границы начала области краевых экстремумов и линию тока (вертикальная линия), которую можно считать границей между неподвижной областью постоянного давления (слева) и движущимся потоком (справа). Характерным для области краевого экстремума первого типа является резкое «распрямление» линий тока, которое связано с торможением потока в том смысле, что ускоренное движение в этой области переходит в движение без ускорения.

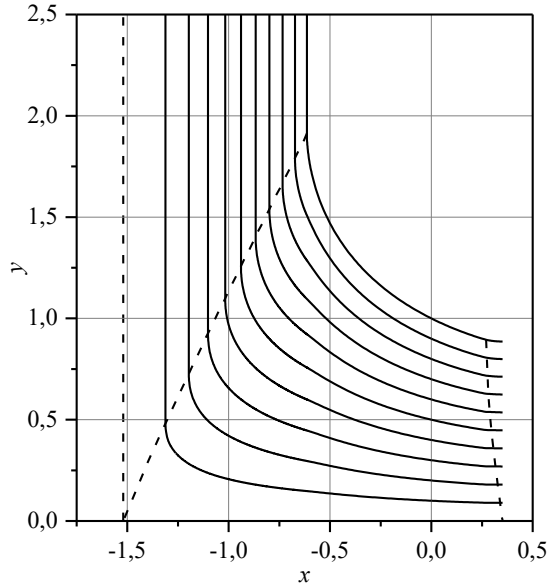

Рис. 4. Линии тока в канале с $y_1' = -0.5$

Fig. 4. Streamlines in the channel at $y_1' = -0.5$

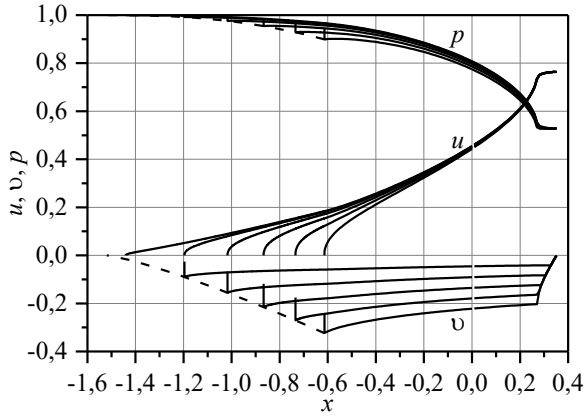

Рис. 5. Параметры течения u, υ и p вдоль линий тока

Fig. 5. Velocities u, υ and pressure p along the streamlines

На рис. 5 представлены параметры течения u, υ и p на линиях тока. Вертикальные прямолинейные участки соответствуют краевому экстремуму $u = 0$. Из рисунка видим, что наибольшее влияние краевой экстремум $u^2 + \upsilon^2 = a^2$ оказывает на скорость υ, так на граничной линии тока она изменяется от -0.2 до нуля при постоянном давлении и практически неизменной скорости u.

На рис. 6 в различных поперечных сечениях канала представлены скорости u, υ. В положительной полуплоскости показаны продольные составляющие u. Пунктирная линия показывает изменение u в сечении, где на стенке канала $u = 0$. Ниже

этой линии показаны изменения u в сечениях, где часть сечения соответствует краевому экстремуму $u = 0$.

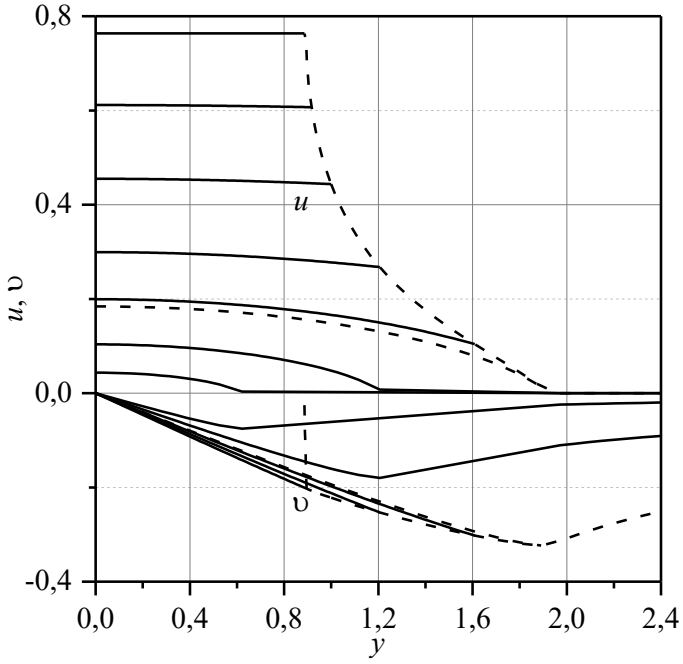

Рис. 6. Скорости u, υ в различных сечениях канала
Fig. 6. Velocities u, υ in different sections of the channel

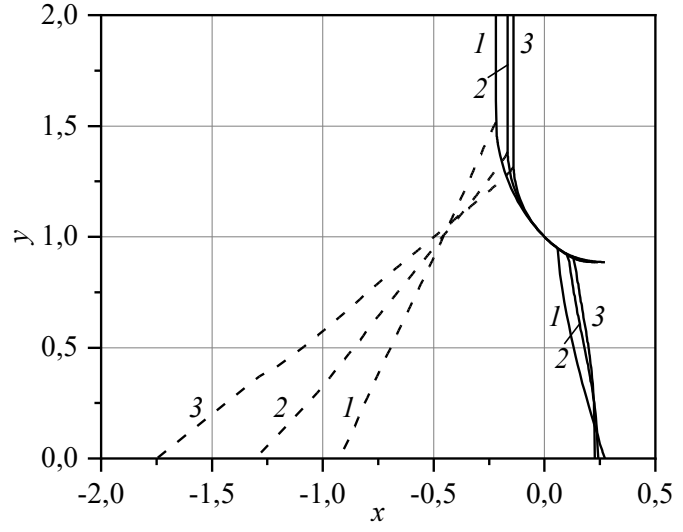

Рис. 7. Области движения ИГ ($y_1' = -1$): *1* – $y' = y_1' y$, *2* – $y' = y_1' y^2$, *3* – $y' = y_1' y^3$
Fig. 7. Areas with moving ideal gas ($y_1' = -1$): $y' =$ (*1*) $y_1' y$, (*2*) $y_1' y^2$, and (*3*) $y_1' y^3$

В отрицательной полуплоскости показаны поперечные составляющие вектора скорости υ в тех же сечениях, что и скорости u. Нижняя пунктирная кривая показывает изменение υ вдоль контура. Практически вертикальный участок этой кривой – это зона действия краевого экстремума $u^2 + \upsilon^2 = a^2$, где υ определяется из (5.3). Кривые после излома показывают изменение υ на вертикальном участке линий тока, где υ определяется из (5.5). В бесконечно удаленной точке согласно (5.4) эта скорость достигает нуля.

На рис. 7 представлены три области истечения ИГ с одинаковым значением $y_1' = -1$. В канале *1* наклон линий тока изменяется по закону $y' = y_1' y = -y$, в канале *2* – по закону $y' = y_1' y^2 = -y^2$, в канале *3* – по закону $y' = y_1' y^3 = -y^3$. Видим, что чем выше нелинейность y', тем больше расход ИГ и больше область движущегося потока.

Заключение

Основываясь на утверждении, что управление движением тел (в данном случае жидкости или газа) осуществляется двумя экспериментальными законами: законом сохранения энергии и ПНД, – удалось построить законченную модель течения идеального газа в КПС в смысле нахождения его параметров и формы канала от бесконечно удаленной области торможения до достижения сверхзвуковых скоростей потока. Условие оптимальности вариационной задачи о минимуме действия стационарного потока ИГ в КПС положено в основу метода определения параметров течения и формы канала. Численное исследование структуры оптимального контура, проведенное данным методом, показало наличие краевых экстремумов: область краевого экстремума со звуковым течением в итоге дает плоскую переходную поверхность, если же рассматривается область краевого экстремума со сверхзвуковым течением, то задается контур канала и условие оптимальности заменяется уравнением движения для продольной составляющей вектора скорости. В дозвуковой области течения краевой экстремум представляет собой границу области вертикального движения идеального газа.

Знание структуры оптимального контура расширяет возможности при проектировании до- и трансзвуковой части сопла с заданными геометрическими параметрами и заданным расходом газа.

Список источников

1. *Пирумов У.Г., Росляков Г.С.* Газовая динамика сопел. М.: Наука, 1990. 364 с.
2. *Пуанкаре А.* Наука и гипотеза. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 235 с.
3. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики. Их развитие и применение в физике. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 600 с.
4. *Афонин Г.И.* К вопросу о принципе наименьшего действия при течении несжимаемой жидкости в осесимметричном канале переменного сечения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 73–86. doi: 10.17223/19988621/81/7
5. *Гюнтер Н.М.* Курс вариационного исчисления. СПб.: Лань, 2009. 320 с.

References

1. Pirumov U.G., Roslyakov G.S. (1990) *Gazovaya dinamika v soplakh*. [Gas dynamics in nozzles]. Moscow: Nauka.
2. Poincare A. (1905) *Science and Hypothesis*. London: Walter Scott Publishing.
3. Polak L.S. (2010) *Variatsionnye printsipy mekhaniki. Ikh razvitie i primenenie v fizike* [Variational principles of mechanics. Their development and application in physics]. Moscow: LIBROKOM.
4. Afonin G.I. (2023) *K voprosu o printsipe naimen'shego deystviya pri techenii neszhimaemoy zhidkosti v osesimmetrichnom kanale peremennogo secheniya* [On the principle of least action in terms of incompressible fluid flow in a channel of variable cross-section]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 73–86. doi: 10.17223/19988621/81/7
5. Günther N.M. (2009) *Kurs variatsionnogo ischisleniya* [A course in the calculus of variations]. Saint Petersburg: Lan'.

***Сведения об авторах*:**
Афонин Геннадий Иванович – кандидат физико-математических наук, сотрудник отдела математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: agi@niipmm.tsu.ru
Афонин Антон Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, сотрудник отдела математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: aag@niipmm.tsu.ru

***Information about the authors*:**
Afonin Gennadiy I. (Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: agi@niipmm.tsu.ru
Afonin Anton G. (Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aag@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 15.10.2024; принята к публикации 10.04.2025

The article was submitted 15.10.2024; accepted for publication 10.04.2025