

Научная статья

УДК 539.31, 539.42

doi: 10.17223/19988621/94/11

Условия обратимого деформирования плоских тел, ослабленных вырезом

Вадим Вадимович Глаголев¹, Виктор Вячеславович Козлов²,
Алексей Александрович Маркин³

^{1, 2, 3} Тульский государственный университет, Тула, Россия

¹ vadim@tsu.tula.ru

² vvkozlovtsu@mail.ru

³ markin-nikram@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается деформация тела в форме плоского слоя, ослабленного вырезом. В качестве условия достижения предела обратимого деформирования предлагается использовать поток энергии формоизменения через участок дуги выреза в окрестности точки максимума энергии формоизменения, пропорциональный линейному параметру. Предложен способ определения порогового значения линейного параметра из анализа зависимости внешней нагрузки, соответствующей достижению предела упругости, от максимального радиуса кривизны выреза.

Ключевые слова: поток свободной энергии, предельная упругая нагрузка, полоса с вырезом

Благодарности: Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Для цитирования: Глаголев В.В., Козлов В.В., Маркин А.А. Условия обратимого деформирования плоских тел, ослабленных вырезом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 136–148. doi: 10.17223/19988621/94/11

Original article

Conditions for the reversible deformation of planar bodies weakened by a cut

Vadim V. Glagolev¹, Viktor V. Kozlov², Aleksey A. Markin³

^{1, 2, 3} Tula State University, Tula, Russian Federation

¹ vadim@tsu.tula.ru

² vvkozlovtsu@mail.ru

³ markin-nikram@yandex.ru

Abstract. The body deformation in terms of a planar layer weakened by a cut is considered. As the radius of curvature of the cut tends to zero at the maximum free-energy point,

the cut transforms into a mathematical cut. The use of classical conditions for determining the elastic limit leads to the formation of plastic regions under an arbitrarily small external load. To solve this problem, the free energy flow through a cutout arc section is introduced as the product of the free energy density at the point of its maximum and a linear parameter. The free energy flow is represented by the sum of the volumetric- and shape-change energy flows. The energy flow of the shape change is limited by the elastic limit as a result of the accepted generalized condition of reversible deformation. When moving to technological cutouts, converting this condition into the Mises criterion allows one to obtain the threshold length of the linear parameter. For bodies with technological cutouts, the external load corresponding to the elastic limit depends on the curvature radius. For crack-like notches with radii of curvature varying from a threshold value to zero, the external load is constant. Based on the known asymptotic solutions, the external loads corresponding to the elastic limit are obtained using a threshold linear parameter.

Keywords: free energy flow, ultimate elastic load, strip with a cut

Acknowledgments: This study was carried out within the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation (No. FEWG-2023-0002).

For citation: Glagolev, V.V., Kozlov, V.V., Markin, A.A. (2025) Conditions for the reversible deformation of planar bodies weakened by a cut. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 136–148. doi: 10.17223/19988621/94/11

Введение

Рассматривается деформация тела в форме плоского слоя, ослабленного симметричным вырезом. Границы слоя и распределение внешней нагрузки симметричны относительно оси выреза. При стремлении радиуса кривизны в точке пересечения границы выреза с плоскостью симметрии – минимального радиуса кривизны выреза, к нулю вырез переходит в математический разрез. Уменьшение радиуса кривизны в этой точке приводит к неограниченному росту напряжений и удельной свободной энергии. В результате имеем известный парадокс: использование классических условий для определения предела упругости приводит к началу образования пластических областей при сколь угодно малой внешней нагрузке. В классической модели трещины Гриффитса [1] длина пластической зоны в соответствии с поправкой Ирвина пропорциональна квадрату коэффициента интенсивности напряжений (КИН) [2–4]. Для нахождения КИН используются различные подходы [5–9]. При использовании моделей типа Леонова–Панасюка–Дагдейла [10] длина пластической зоны также начинает расти с ростом внешней нагрузки от нулевого значения, что отражается в формуле Дагдейла. В работе [11] дан обстоятельный обзор моделей учета влияния пластических областей в окрестности сингулярных точек на напряженно-деформированное состояние твердого тела с трещиной. Предложена модель, основанная на определении зон пластичности, исходя из распределения напряжений в результате внешней разгрузки. В статьях [12, 13] используется пластический КИН.

Однако остается открытым вопрос о возможности определения экспериментально обоснованного значения внешней нагрузки, соответствующего обратимому (упругому) деформированию тел, ослабленных вырезами малой кривизны вплоть до математического разреза. Для решения данной проблемы рассмотрим поток свободной энергии через участок дуги выреза в окрестности точки максимума

свободной энергии [14]. Данный поток представляется в виде произведения плотности свободной энергии в точке максимума свободной энергии на линейный параметр (ЛП). В работах [14–16] такое произведение называется энергетическим. Нелокальные критерии квазихрупкого разрушения использовались в статьях [17–19]. Принимается существование порогового значения ЛП, до достижения которого поток свободной энергии не изменяется и совпадает с потоком, накапливаемым, в соответствии с формулой Ирвина, в окрестности кончика математического разреза. Окрестность границы выреза, для которой выполняется данное условие, называем дугой взаимодействия (ДВ), а соответствующие вырезы называем трещиноподобными. При стремлении ЛП к нулю радиус кривизны в точке максимума свободной энергии ДВ также стремится к нулю. Когда радиус кривизны превышает пороговое значение, ЛП не изменяется (остается пороговым). Такие вырезы называем технологическими.

Поток свободной энергии через ДВ представлен суммой потока энергии объемного изменения и потока энергии формоизменения. В отличие от работы [20], где предел упругости полагался независимым от ЛП, принимается обобщенное условие обратимого деформирования: поток энергии формоизменения через ДВ ограничен универсальной для данного материала величиной – пределом упругости потока энергии формоизменения. Требование следования из этого условия критерия Мизеса при переходе к технологическим вырезам позволяет получить пороговую длину ЛП. Данная величина определяется как отношение предела упругости потока энергии формоизменения к пределу упругости плотности энергии формоизменения. Для тел с технологическими вырезами внешняя нагрузка, соответствующая достижению предела упругости потоком энергии формоизменения, называемая внешним пределом упругости, зависит от минимального радиуса кривизны выреза. Для трещиноподобных вырезов с радиусами кривизны меньше порогового внешний предел упругости постоянен и определяется через пороговый радиус кривизны. Используя известные асимптотические решения для вырезов с малыми радиусами кривизны [21], получены представления внешних пределов упругости через пороговый радиус кривизны.

1. Постановка задачи

Рассматривается материальный слой ширины b , толщины h , ослабленный вырезом глубины a с радиусом кривизны ρ в точке A (рис. 1). Уравнение выреза представим в параметрическом виде:

$$x_1 = x_1(\alpha_2), \quad x_2 = x_2(\alpha_2), \quad (1.1)$$

с началом отсчета в точке A с координатами $x_1 = a; x_2 = 0$.

При $\rho = 0$ вырез (1.1) вырождается в математический разрез. Максимальное значение плотности свободной энергии ψ_0 достигается в точке минимума радиуса кривизны.

Определим поток свободной энергии через участок границы выреза с дуговой координатой $-\frac{S_p}{2} \leq S \leq \frac{S_p}{2}$ (рис. 2) в виде:

$$2\gamma = \int_{-\frac{S_p}{2}}^{\frac{S_p}{2}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \psi ds, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к поверхности выреза; $\mathbf{e}$ – единичный вектор вдоль вектора потока; S_p – длина ДВ.

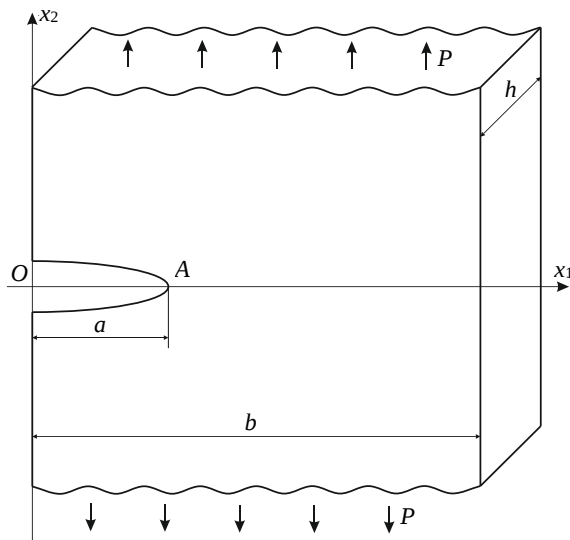


Рис. 1. Схема модели
Fig. 1. Schematic design of the model

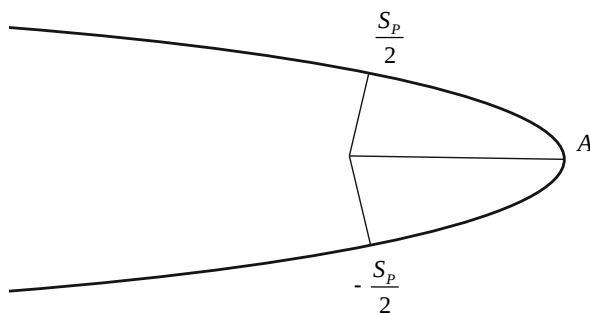


Рис. 2. Окрестность точки A
Fig. 2. Vicinity of point A

Представим выражение (1.2) в виде:

$$2\gamma = \delta_0 \psi_0(\rho), \quad (1.3)$$

где δ_0 – ЛП.

Из выражений (1.2) и (1.3) получим связь

$$\delta_0 = \int_{-\frac{S_p}{2}}^{\frac{S_p}{2}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \frac{\psi}{\psi_0} ds \quad (1.4)$$

Из (1.4) следует, что при $S_p \rightarrow 0$, $\delta_0 \rightarrow 0$, поверхность выреза свободна от внешней нагрузки. Процесс нагружения остальной поверхности тела полагаем простым:

внешние нагрузки пропорциональны параметру внешнего нагружения t . При этом плотность свободной энергии неограниченно растет с уменьшением радиуса кривизны при сколь угодно малом t и постоянном a . В то же время поток свободной энергии принимает конечное значение, когда вырез переходит в математический разрез. В соответствии с формулой Ирвина [2] при нагружении по моде I имеем

$$2\gamma_0 = \frac{K_1^2}{\hat{E}}, \quad (1.5)$$

где $\hat{E} = E$ – модуль Юнга при плоском напряженном состоянии; $\hat{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$ – при плоском деформированном состоянии; K_1 – коэффициент интенсивности напряжений.

Потребуем, чтобы у вырезов на отрезке изменения ЛП $0 \leq \delta_0 \leq \delta_0^*$ потоки свободной энергии (1.3) и (1.5) совпадали при одинаковом значении параметра t . В результате для вырезов с радиусами кривизны $0 \leq \rho \leq \rho^*$ в соответствии с представлениями (1.3) и (1.5) должны выполняться условия

$$2\gamma(\rho, t) = 2\gamma(t) = \delta_0^* \psi_0(\rho, t) = \delta_0^* \psi_0(\rho^*, t) = 2\gamma_0. \quad (1.6)$$

Окрестность, для которой выполняются условия (1.6), образуют ДВ. Условия (1.6) устанавливают связь между радиусом кривизны и ЛП, обеспечивающую независимость от них потока свободной энергии через ДВ (1.3) на отрезке $0 \leq \rho \leq \rho^*$. Такие вырезы будем называть трещиноподобными.

Для вырезов с радиусами кривизны $\rho \geq \rho^*$ поток энергии в соответствии с представлением (1.3) принимаем в виде, зависящем от радиуса кривизны при неизменном (пороговом) значении ЛП $\delta_0 = \delta_0^*$:

$$2\gamma = 2\gamma_{\rho} = \delta_0^* \psi_0(\rho, t), \quad \rho \geq \rho^*. \quad (1.7)$$

Вырезы, удовлетворяющие условию (1.7), можно назвать технологическими. Возникает вопрос о возможности определения порогового значения ЛП.

2. Условия обратимого деформирования

Обратимое течение процесса нагружения тел из металлических материалов ограничено пределами упругости. Как показывают эксперименты, гидростатическое нагружение изотропных материалов происходит обратимо [22], а переход к необратимому состоянию связан с изменением формы материальной частицы. В связи с этим представим плотность свободной энергии в виде суммы плотности энергии изменения формы и плотности энергии изменения объема [22]:

$$\Psi = \Psi_{\sigma} + \Psi_{\tau}. \quad (2.1)$$

$$\Psi_{\sigma} = \frac{\sigma^2}{2K}; \quad \Psi_{\tau} = \frac{\tau^2}{4G}, \quad (2.2)$$

где G и K – материальные константы; $\sigma = \frac{1}{3} \mathbf{\hat{E}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$ – среднее (гидростатическое) напряжение; $\mathbf{\hat{E}}$ – единичный тензор; $\tau^2 = \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$ – свертка девиатора напряжений (квадрат интенсивности напряжений).

Условие обратимого нагружения по Мизесу имеет вид [22]:

$$\tau^2 = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma} \leq \frac{2}{3} \sigma_e^2, \quad (2.3)$$

где σ_e – предел упругости при растяжении.

Из выражений (2.2) и (2.3) получим энергетическую форму условия Мизеса

$$\psi_\tau \leq \psi_e = \frac{1}{6G} \sigma_e^2, \quad (2.4)$$

где ψ_e – энергетический предел упругости.

Непосредственное использование условий (2.3), (2.4) для определения значения параметра внешней нагрузки t_e , соответствующего достижению предела упругости, приводит к известным парадоксам. А именно, в случае математического разреза ввиду сингулярности свободной энергии переход происходит при сколь угодно малой внешней нагрузке. В связи с этим возникает проблема формулировки условия обратимого деформирования тел с трещиноподобными вырезами с радиусами кривизны на отрезке $0 \leq \rho \leq \rho^*$. При $\rho \geq \rho^*$ данное условие должно переходить в условие Мизеса (2.4).

Исходя из условий (1.3) и (2.1), получим аддитивную форму разделения потока энергии в виде:

$$2\gamma = 2\gamma_\tau + 2\gamma_\sigma, \quad (2.5)$$

где $2\gamma_\sigma = \psi_\sigma \delta_0$ – поток энергии объемного изменения; $2\gamma_\tau = \psi_\tau \delta_0$ – поток энергии формоизменения.

Представим условие обратимого деформирования в следующей форме: поток энергии формоизменения через ДВ ограничен универсальной для данного материала величиной – пределом упругости потока

$$2\gamma_\tau \leq 2\gamma_e, \quad (2.6)$$

где $2\gamma_e$ – предел упругости потока формоизменения.

Для технологических вырезов с $\rho \geq \rho^*$ условие (2.6) в соответствии с (1.7) принимает вид:

$$2\gamma_\tau = \psi_\tau \cdot \delta_0^* \leq 2\gamma_e. \quad (2.7)$$

Условие (2.7) сводится к условию Мизеса (2.3), (2.4), если пороговое значение ЛП определить как отношение предела упругости потока к пределу упругости плотности энергии формоизменения:

$$\delta_0^* = \frac{2\gamma_e}{\psi_e} = \frac{2\gamma_e \cdot 6G}{\sigma_e^2}. \quad (2.8)$$

Из условия (2.8) следует, что размеры ДВ ограничены отрезком $0 \leq \delta_0 \leq \delta_0^*$. При этом, когда $\rho \geq \rho^*$, ЛП остается неизменным, а $\delta_0 = \delta_0^*$.

3. Общий случай асимптотических вырезов

В работе [21] приведены асимптотические формулы распределения напряжений в окрестности точки $x_1 = a$; $x_2 = 0$ выреза. Используется полярная система

координат с центром в точке $x_1 = a - \frac{\rho}{2}$; $x_2 = 0$. Распределение напряжений вдоль осевой прямой $x_1 = a$; $x_2 = 0$ имеет вид:

$$\sigma_{11} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \frac{\rho}{2r}\right); \quad \sigma_{22} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \frac{\rho}{2r}\right); \quad r \geq \frac{\rho}{2}. \quad (3.1)$$

При $\rho = 0$ имеем распределение напряжений на продолжении математического разреза.

Формулы (3.1) применимы для различных видов нормального отрыва (мода 1), задаваемых соответствующим КИН. Напряжения в точке $x_1 = a$; $x_2 = 0$ получаем из (3.1):

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = \frac{2K_1}{\sqrt{\pi\rho}}. \quad (3.2)$$

Находим выражение плотности свободной энергии в точке максимума. Используя (3.2), получим

$$\psi_0 = \frac{1}{\hat{E}} \frac{2K_1^2}{\pi\rho}. \quad (3.3)$$

Найдем связь ЛП и радиуса кривизны на отрезке $0 \leq \rho \leq \rho^*$. Используя условия (1.6) и полагая $t = P$, получим

$$\delta_0 \psi_0(\rho, P) = 2\gamma_0. \quad (3.4)$$

Из условий (3.3) и (3.4) определяем связь между ЛП и радиусом кривизны. Представляя поток свободной энергии формулой Ирвина (1.5), находим

$$\rho = \frac{2\delta_0}{\pi}. \quad (3.5)$$

Определим предел упругости по КИН при плоском напряженном состоянии. В этом случае компоненты тензора напряжений с учетом (3.2) и (3.5) принимают вид:

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = \frac{\sqrt{2}K_1}{\sqrt{\delta_0}}, \quad \sigma_{33} = 0 \quad (3.6)$$

Из (2.2) и (3.6) получим плотность энергии формоизменения в виде: $\psi_\tau = \frac{\tau^2}{4G} = \frac{K_1^2}{3G\delta_0}$. Отсюда по определению (2.5) находим поток энергии формоизменения:

$$2\gamma_\tau = \psi_\tau \delta_0 = \frac{K_1^2}{3G} = \frac{2K_1^2(1+\nu)}{3E} \leq 2\gamma_e. \quad (3.7)$$

При этом поток энергии изменения объема принимает вид:

$$2\gamma_\sigma = \psi_\sigma \delta_0 = \frac{\sigma^2}{2K} \delta_0 = \frac{K_I^2(1-2\nu)}{3E}. \quad (3.8)$$

Из (2.5), (3.7), (3.8) и (1.6) приходим к следующему выражению:

$$2\gamma = 2\gamma_0 = \frac{K_I^2(1-2\nu)}{3E} + \frac{2K_1^2(1+\nu)}{3E} = \frac{K_1^2}{\hat{E}}. \quad (3.9)$$

Из условия (2.6) определяем предел упругости по КИН

$$K_{1e} = \sqrt{3G2\gamma_e}.$$

Используя формулу (2.8), представим K_{1e} через пороговый ЛП:

$$K_{1e} = \sigma_e \sqrt{\frac{\delta_0^*}{2}}. \quad (3.10)$$

Найдем предел упругости по КИН при плоском деформированном состоянии. В этом случае компоненты тензора напряжений определяются из закона Гука:

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = \frac{\sqrt{2}K_1}{\sqrt{\delta_0}}, \quad \sigma_{33} = \nu\sigma_{22}. \quad (3.11)$$

Из (3.11) получим девиаторные составляющие напряжений

$$\tilde{\sigma}_{11} = -\frac{1+\nu}{3}\sigma_{22}, \quad \tilde{\sigma}_{22} = \frac{2-\nu}{3}\sigma_{22}, \quad \tilde{\sigma}_{33} = \frac{2\nu-1}{3}\sigma_{22}. \quad (3.12)$$

Из (3.12) по формуле (2.2) находим плотность энергии формоизменения

$$\psi_\tau = \frac{\tau^2}{4G} = \frac{1-\nu+\nu^2}{3G\delta_0} K_1^2.$$

Отсюда условие обратимости (2.6) принимает вид:

$$2\gamma_\tau = \psi_\tau \delta_0 = \frac{1-\nu+\nu^2}{3G} K_1^2 = \frac{2(1-\nu+\nu^2)(1+\nu)}{3E} K_1^2 \leq 2\gamma_e. \quad (3.13)$$

Из (3.11) поток энергии изменения объема принимает вид:

$$2\gamma_\sigma = \psi_\sigma \delta_0 = \frac{\sigma^2}{2K} \delta_0 = \frac{K_1^2 (1+\nu)^2 (1-2\nu)}{3E}. \quad (3.14)$$

Из (2.5), (3.13), (3.14) и (1.6) приходим к следующему выражению:

$$2\gamma = 2\gamma_0 = \frac{(1+\nu)^2 (1-2\nu)}{3E} K_I^2 + \frac{2(1-\nu+\nu^2)(1+\nu)}{3E} K_1^2 = \frac{K_1^2}{\hat{E}}. \quad (3.15)$$

Выражения (3.9) и (3.15) дают представления потока свободной энергии в случае нагружения по моде 1 суммой инвариантных (зависящих только от модулей упругости) слагаемых, пропорциональных квадрату КИН.

Из условия (3.13) определяем предел упругости по КИН:

$$\hat{K}_{1e} = \sqrt{\frac{3G2\gamma_e}{1-\nu+\nu^2}}.$$

Используя формулу (2.8), представим предел упругости по КИН при плоской деформации через пороговый ЛП:

$$\hat{K}_{1e} = \sigma_e \sqrt{\frac{\delta_0^*}{2(1-\nu+\nu^2)}}. \quad (3.16)$$

Так как КИН пропорциональны параметру внешней нагрузки: $K_1 = tL_1$, представим параметры внешней нагрузки в момент достижения предела упругости при плоском напряженном и деформированном состояниях – внешние пределы упругости – в следующем виде:

$$t_e = \frac{K_e}{L_1}; \quad \hat{t}_e = \frac{\hat{K}_e}{L_1}. \quad (3.17)$$

Здесь L_1 – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения тела и распределения внешней нагрузки вдоль границы сечения; t_e и $\hat{t}_e$ – внешние пределы упругости при плоском напряженном и деформированном состояниях. Отметим, что условия (3.17) справедливы для асимптотических вырезов на отрезке радиусов кривизны $0 \leq \rho \leq \rho^*$, где ρ^* определяется по формуле (3.5). На этом отрезке внешний предел упругости не зависит от радиуса кривизны выреза.

Используя формулы (3.10), (3.16) и (3.17), можно решить обратную задачу – найти пороговый ЛП по величине критической внешней нагрузки, определяемой в испытаниях на трещиностойкость в соответствии с ГОСТ 25.506–85. Для данного типа образца и схемы его нагружения известен КИН и получена зависимость «нагрузка–смещение» (P – v -диаграмма). Отсюда определяем с заданным допуском линейный участок изменения внешней нагрузки $0 \leq P \leq \hat{P}_e$ и предел упругости по

КИН при плоской деформации $K_1 = \hat{K}_e$. Используя формулу (3.16), находим пороговое значение ЛП в виде:

$$\delta_0^* = 2(1 - \nu + \nu^2) \hat{P}_e^2 \left(\frac{L_1}{\sigma_e} \right)^2. \quad (3.18)$$

В случае плоского напряженного состояния $0 \leq P \leq P_e$ и

$$\delta_0^* = 2P_e^2 \left(\frac{L_1}{\sigma_e} \right)^2. \quad (3.19)$$

Отметим, что предельный ЛП, определяемый по формулам (3.18) либо (3.19), как и модули упругости и предел упругости, является универсальной постоянной данного материала. При этом критический поток свободной энергии также является универсальной константой материала. Данные константы связаны условием (2.8).

Рассмотрим бесконечную полосу шириной b с вырезом глубиной a , растягиваемую вдоль оси x_2 распределенной нагрузкой с постоянной интенсивностью P (см. рис. 1).

КИН для такой схемы определяется по формуле Гросса [23]:

$$K_1 = PL_1 = P\sqrt{\pi a}Y,$$

где $Y = 1.12 - 0.23\lambda + 10.53\lambda^2 - 21.72\lambda^3 + 30.39\lambda^4$; $\lambda = \frac{a}{b} < 0.7$.

Из формул (3.10) и (3.16) находим для плоской деформации и плоского напряженного состояния выражения пределов упругости внешней нагрузки в виде:

$$\hat{P}_e = \frac{\sigma_e}{Y} \sqrt{\frac{\delta_0^*}{2\pi a(1 - \nu + \nu^2)}}; \quad P_e = \frac{\sigma_e}{Y} \sqrt{\frac{\delta_0^*}{2\pi a}}. \quad (3.20)$$

Таким образом, если известны материальные константы ν , σ_e , δ_0^* , то внешний предел упругости для данных размеров a , b находим по формулам (3.20). Этот предел одинаков для радиусов кривизны на отрезке $0 \leq \rho \leq \rho^*$, следовательно, справедлив и для математического разреза. Используя формулы (3.20), можно решить обратную задачу: определить по найденному из эксперимента значению внешнего предела упругости величину пороговых ЛП и радиуса кривизны. При этом раз-

меры a , b и материальные константы ν , σ_e известны. В результате из (3.5) и (3.20) относительное пороговое значение радиуса кривизны определится по формулам

$$\hat{\rho}^* = \frac{\rho^*}{a} = \left(\frac{\hat{P}_e Y}{\sigma_e} \right)^2 (1 - \nu + \nu^2) = \left(\frac{P_e Y}{\sigma_e} \right)^2. \quad (3.21)$$

Так как рассматриваются асимптотические вырезы, то $\hat{\rho}^* \ll 1$, и из (3.21) следует, что относительные внешние пределы упругости на порядок превосходят пороговое значение радиуса кривизны. При этом внешний предел упругости плоского деформированного состояния превосходит внешний предел плоского напряженного состояния.

Заключение

Представление потока свободной энергии в форме энергетического произведения (1.3) позволяет выделить трещиноподобные вырезы. Поток энергии через ДВ трещиноподобного выреза не зависит от его кривизны в тупиковой точке и совпадает с потоком через кончик соответствующего математического разреза. При этом поток энергии может быть представлен в виде суммы двух инвариантных слагаемых, а именно потоков изменения формы и объема.

Предложено обобщенное условие упругости в следующей форме: поток упругой энергии формоизменения ограничен универсальной для данного материала величиной – пределом упругости потока. Данное условие позволяет установить значение ЛП (пороговое), соответствующее переходу от трещиноподобных вырезов к технологическим, если известен предел упругости по КИН для данной геометрии тела и схемы его нагружения, а также коэффициент Пуассона и предел упругости на растяжение.

Универсальная связь между ЛП и радиусом кривизны в тупиковой точке трещиноподобного выреза позволяет считать гладкие трещиноподобные вырезы одинаковой длины асимптотически эквивалентными, так как внешний предел упругости у них одинаков. При этом величины внутренних напряжений и значения удельной энергии формоизменения различны. Однако в пороговом вырезе удельная энергия формоизменения не превосходит критерий Мизеса. Это позволяет на упругопластической стадии нагружения порогового выреза использовать классические варианты теории пластичности.

Список источников

1. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. 1921. V. 221. P. 163–189. doi: 10.1098/rsta.1921.0006
2. Irwin G.R. Plastic zone near a crack and fracture toughness // 7th Sagamore Ordnance Materials Research Conf. 1960. P. IV–63.
3. Irwin G.R., Kies J.A. Critical energy rate analysis of fracture strength // Welding Journal Research Supplement. 1954. V. 33. P. 193–198.
4. Irwin G.R. Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control // Engineering Fracture Mechanics. 1968. V. 1, is. 2. P. 241–257. doi: 10.1016/0013-7944(68)90001-5
5. Малик А.В., Лавит И.М. Метод расчета коэффициента интенсивности напряжений для неподвижной трещины нормального разрыва при динамическом нагружении // Вестник

- Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 54. С. 88–102. doi: 10.17223/19988621/54/8
6. Murakami Y. A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method // *Engineering Fracture Mechanics*. 1976. V. 8 (4). P. 643–655. doi: 10.1016/0013-7944(76)90038-2
 7. Rybicki E.F., Kanninen M.F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral // *Engineering Fracture Mechanics*. 1977. V. 9 (4). P. 931–938. doi: 10.1016/0013-7744(77)90013-3
 8. Caicedo J., Portela A. Direct computation of stress intensity factors in finite element method // *European Journal of Computational Mechanics*. 2017. V. 26 (3). P. 309–335. doi: 10.1080/17797179.2017.1354578
 9. Seweryn A., Lukaszewicz A. Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches // *Engineering Fracture Mechanics*. 2002. V. 69 (13). P. 1487–1510. doi: 10.1016/S0013-7944(01)00138-2
 10. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1960. V. 8 (2). P. 100–104. doi: 10.1016/0022-5096(60)90013-2
 11. Дерюгин Е.Е. Модель трещины с градиентами пластической деформации // *Физическая мезомеханика*. 2022. Т. 25, № 1. С. 43–65. doi: 10.55652/1683-805X_2022_25_1_43
 12. Захаров А.П., Шлянников В.Н., Иштыряков И.С. Пластический коэффициент интенсивности напряжений в задачах механики разрушения // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2019. № 2. С. 100–115. doi: 10.15593/perm.mech/2019.2.08
 13. Hilton P.D., Hutchinson J.W. Plastic intensity factors for cracked plates // *Engineering Fracture Mechanics*. 1971. V. 3. P. 435–451.
 14. Глаголев В.В., Маркин А.А. Влияние линейного параметра на хрупкое разрушение упругого слоя с круговым отверстием // *Прикладная механика и техническая физика*. 2023. Т. 64, № 5. С. 159–165. doi: 10.15372/PMTF202315252
 15. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *International Journal of Solids and Structures*. 2019. V. 158. P. 141–149. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
 16. Глаголев В.В., Маркин А.А. Модель деформирования ДКБ-образца с упругопластическими свойствами // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2021. № 2. С. 55–63. doi: 10.15593/perm.mech/2021.2.06
 17. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. A body failure model with a notch based on the scalable linear parameter // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2018. Is. 4. P. 93–97. doi: 10.15593/perm.mech/2018.4.08
 18. Сукнев С.В. Нелокальные и градиентные критерии разрушения квазихрупких материалов при сжатии // *Физическая мезомеханика*. 2018. Т. 21, № 4. С. 22–32. doi: 10.24411/1683-805X-2018-14003
 19. Сукнев С.В. Применение подхода механики конечных трещин для оценки разрушения квазихрупкого материала с круговым отверстием // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2021. № 3. С. 13–25. doi: 10.31857/S0572329921020161
 20. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. К нахождению предела упругости адгезионного слоя при его нормальном разрыве // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2023. № 83. С. 59–73. doi: 10.17223/19988621/83/6
 21. Creager M. The elastic stress field near the tip of a blunt crack: Master's Thesis. Lehigh University, 1966.
 22. Ильюшин А.А. Пластичность. М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. Ч. 1: Упругопластические деформации. 376 с.
 23. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения. СПб.: Профессия, 2012. 552 с.

References

1. Griffith A.A. (1921) The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*. 221. pp. 163–189. doi: 10.1098/rsta.1921.0006.
2. Irwin G.R. (1960) Plastic zone near a crack and fracture toughness. *7th Sagamore Ordnance Materials Research Conference*. P. IV–63.
3. Irwin G.R., Kies J.A. (1954) Critical energy rate analysis of fracture strength. *Welding Journal Research Supplement*. 33. pp. 193–198.
4. Irwin G.R. (1968) Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control. *Engineering Fracture Mechanics*. 1(2). pp. 241–257. doi: 10.1016/0013-7944(68)90001-5
5. Malik A.V., Lavit I.M. (2018) Metod rascheta koeffitsienta intensivnosti napryazheniy dlya nepodvizhnoy treshchiny normal'nogo razryva pri dinamicheskom nagruzhenii [On the computation method for the stress intensity factor of a stationary crack in mode I under dynamic loading]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 54. pp. 88–102. doi: 10.17223/19988621/54/8
6. Murakami Y. (1976) A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*. 8(4). pp. 643–655. doi: 10.1016/0013-7944(76)90038-2
7. Rybicki E.F., Kanninen M.F. (1977) A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Engineering Fracture Mechanics*. 9(4). pp. 931–938. doi: 10.1016/0013-7744(77)90013-3
8. Caicedo J., Portela A. (2017) Direct computation of stress intensity factors in finite element method. *European Journal of Computational Mechanics*. 26(3). pp. 309–335. doi: 10.1080/17797179.2017.1354578
9. Seweryn A., Lukaszewicz A. (2002) Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches. *Engineering Fracture Mechanics*. 69(13). pp. 1487–1510. doi: 10.1016/S0013-7944(01)00138-2
10. Dugdale D.S. (1960) Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 8(2). pp. 100–104. doi: 10.1016/0022-5096(60)90013-2
11. Deryugin E.E. (2022) Model' treshchiny s gradientami plasticheskoy deformatsii [Crack model with plastic strain gradients]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 25(1). pp. 43–65. doi: 10.55652/1683-805X_2022_25_1_43
12. Zakharov A.P., Shlyannikov V.N., Ishtyryakov I.S. (2019) Plasticheskiy koeffitsient intensivnosti napryazheniy v zadachakh mekhaniki razrusheniya [Plastic stress intensity factor in fracture mechanics]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 100–115. doi: 10.15593/perm.mech/2019.2.08
13. Hilton P.D., Hutchinson J.W. (1971) Plastic intensity factors for cracked plates. *Engineering Fracture Mechanics*. 3. pp. 435–451. doi: 10.1016/0013-7944(71)90057-9
14. Glagolev V.V., Markin A.A. (2023) Effect of a linear parameter on the brittle fracture of an elastic layer with a circular hole. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 64(5). pp. 871–877. doi: 10.1134/S0021894423050164
15. Glagolev V.V., Markin A.A. (2019) Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter. *International Journal of Solids and Structures*. 158. pp. 141–149. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
16. Glagolev V.V., Markin A.A. (2021) Model' deformirovaniya DKB-obraztsa s uprugoplasticheskimi svoystvami [The deformation model of the DCB-sample with elastoplastic properties]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 55–63. doi: 10.15593/perm.mech/2021.2.06

17. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. (2018) A body failure model with a notch based on the scalable linear parameter. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 4. pp. 93–97. doi: 10.15593/perm.mech/2018.4.08
18. Suknev S.V. (2018) Nelokal'nye i gradientnye kriterii razrusheniya kvazi khrupkikh materialov pri szhatii [Nonlocal and gradient fracture criteria for quasi-brittle materials under compression]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 21(4). pp. 22–32. doi: 10.24411/1683-805X-2018-14003
19. Suknev S.V. (2021) Application of the finite fracture mechanics approach to assess the failure of a quasi-brittle material with a circular hole. *Mechanics of Solids*. 56(3). pp. 301–311. doi: 10.3103/S0025654421030110
20. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. (2023) K nakhozhdeniyu predela uprugosti adgezionnogo sloya pri ego normal'nom razryve [On determining the elastic limit of an adhesive layer in the opening mode of loading]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 59–73. doi: 10.17223/19988621/83/6
21. Creager M. (1966) *The Elastic Stress Field Near the Tip of a Blunt Crack*. Master's thesis. Lehigh University.
22. Il'yushin A.A. (1948) *Plastichnost'. Chast' I. Uprugoplasticheskie deformatsii* [Plasticity. Part 1. Elastoplastic deformations]. Moscow–Leningrad: GITTL.
23. Pestrikov V.M., Morozov E.M. (2012) *Mekhanika razrusheniya* [Fracture mechanics]. Saint Petersburg: Professiya.

Сведения об авторах:

Глаголев Вадим Вадимович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (Тула, Россия). E-mail: vadim@tsu.tula.ru

Козлов Виктор Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (Тула, Россия). E-mail: vvkozlovtsu@mail.ru

Маркин Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (Тула, Россия). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

Information about the authors:

Glagolev Vadim V. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: vadim@tsu.tula.ru

Kozlov Viktor V. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: vvkozlovtsu@mail.ru

Markin Aleksey A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 05.04.2024; принята к публикации 10.04.2025

The article was submitted 05.04.2024; accepted for publication 10.04.2025