

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 514.1:517.965

MSC: 51K99, 34K99

doi: 10.17223/19988621/92/1

**Об одной системе функциональных уравнений по вложению
аддитивной ранга (2,2) в дуальную ранга (3,2)
двуметрических феноменологически симметричных
геометрий двух множеств**

Рада Александровна Богданова

*Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия,
bog-rada@yandex.ru*

Аннотация. Системы двух функциональных уравнений с несколькими неизвестными функциями от нескольких переменных естественно появляются при установлении взаимного вложения двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств (ДФС ГДМ). Вложение оказывается возможным, если соответствующая ему система функциональных уравнений имеет хотя бы одно невырожденное решение. В настоящей работе предлагается разработать метод нахождения общего невырожденного решения системы двух функциональных уравнений, соответствующих вложению аддитивной ДФС ГДМ ранга (2,2) в дуальную ДФС ГДМ ранга (3,2), что представляет собой интересную и содержательную в математическом смысле задачу. Данный метод может быть развит и применен к другим подобного вида системам функциональных уравнений, возникающих в рамках задачи по вложению ДФС ГДМ.

Ключевые слова: двуметрическая феноменологически симметричная геометрия двух множеств, система функциональных уравнений

Для цитирования: Богданова Р.А. Об одной системе функциональных уравнений по вложению аддитивной ранга (2,2) в дуальную ранга (3,2) двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 5–18. doi: 10.17223/19988621/92/1

On one system of functional equations for embedding an additive rank $(2, 2)$ into a dual rank $(3, 2)$ of two-metric phenomenologically symmetric geometries of two sets

Rada Alexandrovna Bogdanova

Gorno-Altai State University, Gorno-Altaysk, Russian Federation, bog-rada@yandex.ru

Abstract. Systems of two functional equations with several unknown functions of several variables naturally appear when establishing the mutual embedding of two-metric phenomenologically symmetric geometries of two sets (TPS GTS). An embedding is possible if the corresponding system of functional equations has at least one nondegenerate solution. Two-metric phenomenologically symmetric geometries were studied previously in the works of G.G. Mihailichenko and R.A. Bogdanova within the framework of the problems of constructing and classifying such geometries arising in a more general theory of phenomenologically symmetric geometries – geometries of maximum mobility. The discovery made in the beginning of the 19th century by Gauss, Lobachevsky, and Bolyai that Euclidean geometry is not the only possible one made it possible in the 20th century, along with other geometries, to discover geometries of maximum mobility, representing a separate class of geometries that admit a maximum group of movements. The origin of this theory in the 1960s was associated with the tasks of mathematical substantiation of the theory of relativity and other classical laws of physics. Phenomenologically symmetric geometries, which are geometries of local maximum mobility, represent a synthesis of two classical approaches to the construction of geometry: the group and metric approaches which for many decades (starting with the works of G. Helmholtz, F. Klein, A. Poincare, S. Lee, A. Cayley, etc.) served as a tool for research in the theory of representations of Lie groups, Riemannian geometry, and other branches of mathematics. Researchers who adhere to this direction associate a pair of points with not one value of a two-point function (a function of a pair of points)—an invariant of the corresponding transformation group – but several.

In this paper, it is proposed to develop a method for finding a general nondegenerate solution of a system of two functional equations corresponding to embedding of an additive rank $(2, 2)$ TPS of GTS into a dual rank $(3, 2)$ TPS of GTS, which is an interesting and meaningful problem in the mathematical sense. This method can be developed and applied to other similar systems of functional equations arising within the framework of the problem of embedding TPS GTS.

Keywords: two-metric phenomenologically symmetric geometry of two sets, a system of functional equations

For citation: Bogdanova, R.A. (2024) On one system of functional equations for embedding an additive rank $(2, 2)$ into a dual rank $(3, 2)$ of two-metric phenomenologically symmetric geometries of two sets. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 5–18. doi: 10.17223/19988621/92/1

Двуметрические феноменологически симметричные геометрии исследовались ранее в работах Г.Г. Михайличенко [1–3], Р.А. Богдановой [4–6] в рамках задач построения и классификации таких геометрий, возникающих в более общей теории феноменологически симметричных геометрий – геометрий максимальной подвижности. Открытие того, что евклидова геометрия не является единственно возможной, сделанное в начале XIX в. Гауссом, Лобачевским и Бойяи, позволило в XX в. наряду с другими геометриями открыть геометрии максимальной подвижности, представляющие отдельный класс геометрий, допускающих максимальную группу движений. Зарождение этой теории в 60-х гг. прошлого века было связано с задачами математического обоснования теории относительности и других классических законов физики [7, 8]. Феноменологически симметричные геометрии, являющиеся геометриями локальной максимальной подвижности, представляют собой синтез двух классических подходов к построению геометрии: группового и метрического, которые на протяжении многих десятилетий (начиная с работ Г. Гельмгольца, Ф. Клейна, А. Пуанкаре, С. Ли, А. Кэли и др.) служат инструментом исследования в теории представлений групп Ли, римановой геометрии и других разделов математики. Исследователи, придерживающиеся этого направления, сопоставляют паре точек не одно значение двухточечной функции (функции пары точек) – инвариант соответствующей группы преобразований, а несколько.

Двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств (ДФС ГДМ) впервые появились в теории физических структур, разработанной Ю.И. Кулаковым [9] и Г.Г. Михайличенко [2]. Известна полная классификация этих геометрий [1, 2, 10], которая была получена функциональным методом в свое время вторым автором. С точностью до замены координат в многообразиях и преобразованиях функции f , задающей двуметрическую феноменологически симметричную геометрию двух множеств, Г.Г. Михайличенко были найдены ДФС ГДМ ранга $(n + 2, 1)$ для $n = 1, 2, 3, 4$, причем им же было установлено, что для $n > 4$ не существует ДФС ГДМ. Под рангом понимается число точек, определяемых на двух множествах. Стоит также отметить, что методом вложения В.А. Кыровым и Г.Г. Михайличенко в их работе [11] была получена классификация ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$. Исследования по изучению геометрических свойств таких геометрий проводились В.А. Кыровым в работе [12].

Предлагаемая работа выполнена в рамках описанной выше концепции, чем и объясняется употребление терминов «метрика» и «метрический» в смысле, характерном для данной концепции и применяемом только в ней. Это, в частности, позволяет соотносить результаты, полученные автором данной работы, с результатами иных исследователей, развивающих указанное направление.

Цель данной работы состоит в разработке метода нахождения общего невырожденного решения одной системы двух функциональных уравнений, соответствующих вложению аддитивной ДФС ГДМ ранга $(2, 2)$ в дуальную ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$, что представляет собой интересную и содержательную в математическом смысле задачу. Эта система двух функциональных уравнений решается, поскольку выражения вектор-функций g и f , входящие в систему, известны.

Основа метода состоит в дифференцировании одного из функциональных уравнений, входящих в систему, с последующим переходом к дифференциальным уравнениям. Далее решения дифференциальных уравнений подставляются

во второе функциональное уравнение исходной системы функциональных уравнений, откуда при соответствующих ограничениях находится общее невырожденное ее решение. Данный метод может быть развит и применен к другим такого же вида системам функциональных уравнений, возникающим в рамках задачи вложения ДФС ГДМ, для нахождения их общего невырожденного решения.

Перейдем к точным формулировкам, которые приведем по монографии [2].

Двуметрическая феноменологически симметричная геометрия двух множеств (ДФС ГДМ) ранга $(n + 1, 2)$, где $n \in N$, задается на двумерном и $2n$ -мерном дифференцируемых многообразиях M^2 и N^{2n} дифференцируемой вектор-функцией (двухкомпонентной функцией) $f : M^2 \times N^{2n} \rightarrow R^2$ с открытой и плотной областью определения в $M^2 \times N^{2n}$, сопоставляющей паре точек два действительных числа [1, 2]. Координатное представление для этой функции $f = (f^1, f^2)$ имеет следующий вид:

$$f = f(x, y, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n}),$$

где (x, y) и $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n})$ – локальные координаты соответственно в многообразиях M^2 и N^{2n} . Дополнительно имеют место следующие аксиомы:

A1. Координатное представление функции f невырождено относительно координат (x, y) и $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n})$.

Невырожденность функции $f = (f^1, f^2)$ в ее координатном представлении выражается необращением в нуль якобианов:

$$\frac{\partial(f(x_i, y_i, \xi_a^1, \xi_a^2, \dots, \xi_a^{2n}))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0,$$

$$\frac{\partial(f(x_{i_1}, y_{i_1}, \xi_a^1, \xi_a^2, \dots, \xi_a^{2n}), \dots, f(x_{i_n}, y_{i_n}, \xi_a^1, \xi_a^2, \dots, \xi_a^{2n}))}{\partial(\xi_a^1, \xi_a^2, \dots, \xi_a^{2n})} \neq 0,$$

где x_i, y_i – координаты некоторой произвольной точки $i \in M^2$, $x_{i_1}, y_{i_1}, \dots, x_{i_n}, y_{i_n}$ – координаты соответственно точек $i_1, i_2, \dots, i_n \in M^2$, а $\xi_a^1, \xi_a^2, \dots, \xi_a^{2n}$ – координаты точки $\alpha \in N^{2n}$.

A2. Для плотного и открытого множества точек

$$(i_1, i_2, \dots, i_{n+1}, \alpha_1, \alpha_2) \in M^2 \times N^{2n}$$

все $4(n + 1)$ значений функции f связаны уравнением

$$\Phi(f^1(i_1, \alpha_1), f^2(i_1, \alpha_1), \dots, f^1(i_{n+1}, \alpha_2), f^2(i_{n+1}, \alpha_2)) = 0,$$

где $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ – вектор-функция (двухкомпонентная функция) $4(n + 1)$ переменных с $\text{rang} \Phi = 2$.

Пусть функция $g = (g^1, g^2) = g(x, y; \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n})$ задает ДФС ГДМ ранга $(n + 1, 2)$, а функция $f = (f^1, f^2) = f(\bar{x}, \bar{y}; \eta^1, \dots, \eta^{2n}, \eta^{2n+1}, \eta^{2n+2})$ задает ДФС ГДМ ранга $(n + 2, 2)$, где $n = 1, 2, 3$.

Определение [13]. Пусть ДФС ГДМ ранга $(n + 1, 2)$ задана на двумерном и $2n$ -мерном многообразиях и ДФС ГДМ ранга $(n + 2, 2)$ задана на двумерном и $4n$ -мерном многообразиях. Говорят, что ДФС ГДМ ранга $(n + 1, 2)$ вложена в ДФС ГДМ ранга $(n + 2, 2)$, если выполняется функциональное соотношение

$$f(\bar{x}, \bar{y}; \eta^1, \dots, \eta^{2n}, \eta^{2n+1}, \eta^{2n+2}) = \chi(g(x, y; \xi^1, \dots, \xi^{2n}), \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}),$$

где $\chi, \bar{x} = \lambda^1(x, y), \bar{y} = \lambda^2(x, y), \eta^1 = \tau^1(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}), \dots, \eta^{2n} = \tau^{2n}(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}), \eta^{2n+1} = \tau^{2n+1}(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}), \eta^{2n+2} = \tau^{2n+2}(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2})$ – дифференцируемые функции, причем выполняются неравенства

$$\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \frac{\partial(\eta^1, \dots, \eta^{2n+2})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^{2n+2})} \neq 0.$$

В работе [13] доказано, что в каждую ДФС ГДМ ранга $(n + 2, 2)$ вложена по крайней мере одна из ДФС ГДМ ранга $(n + 1, 2)$, где $n = 1, 2, 3$. Установление всех возможных последовательных по рангу взаимных вложений ДФС ГДМ предполагает рассмотрение 23 систем функциональных уравнений. Нахождение общего невырожденного решения одной из таких систем функциональных уравнений представляет собой сложную задачу как было отмечено В.А. Кыровым и Г.Г. Михайличенко в их работах [14, 15], в которой авторами с применением жордановых форм находятся канонические невырожденные решения одной из таких систем функциональных уравнений, возникающей в задаче о вложении ДФС ГДМ аддитивной, неаддитивной ранга $(2, 2)$ в мультипликативную ранга $(3, 2)$.

В последующем изложении будем использовать более удобные обозначения для координат и функций.

В данной статье ставится задача о нахождении всех возможных вложений аддитивной ДФС ГДМ ранга $(2, 2)$ с вектор-функцией компоненты которой

$$g^1 = x + \xi, \quad g^2 = y + \eta,$$

где x, y – координаты, определенные в двумерном многообразии M^2 , ξ, η – координаты, определенные в двумерном многообразии N^2 , в дуальную ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$ с вектор-функцией, компоненты которой

$$f^1 = x\xi + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi + \nu,$$

где x, y – координаты, определенные в двумерном многообразии M^2 , ξ, η, μ, ν – координаты, определенные в четырехмерном многообразии N^4 , которая сводится к нахождению общего невырожденного решения *особой системы двух функциональных уравнений*

$$\begin{cases} \bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu), \\ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi} + \bar{\nu} = \chi^2(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu) \end{cases} \quad (1)$$

относительно шести неизвестных функций

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}(x, y), \quad \bar{y} = \bar{y}(x, y), \quad \bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, \nu), \\ \bar{\eta} &= \bar{\eta}(\xi, \eta, \mu, \nu), \quad \bar{\mu} = \bar{\mu}(\xi, \eta, \mu, \nu), \quad \bar{\nu} = \bar{\nu}(\xi, \eta, \mu, \nu), \end{aligned} \quad (1.1)$$

зависящих от двух переменных x, y и четырех переменных ξ, η, μ, ν .

Особость системы двух функциональных уравнений (1) состоит в нахождении шести функций $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{v}$ так, чтобы $\bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu}$ и $\bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi} + \bar{v}$ оказались какими угодно (но гладкими) функциями от переменных $x + \xi, y + \eta, \mu, v$. Также стоит отметить, что функции χ^1 и χ^2 , входящие в особую систему функциональных уравнений (1), также являются неизвестными.

Вложение оказывается возможным, если система (1) имеет хотя бы одно невырожденное решение, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \frac{\partial(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{v})}{\partial(\xi, \eta, \mu, v)} \neq 0. \quad (2)$$

При вложении допускаются обратимые замены локальных координат $(x; y) \mapsto (\bar{x}; \bar{y}), (\xi; \eta; \mu; v) \mapsto (\bar{\xi}; \bar{\eta}; \bar{\mu}; \bar{v})$ в двумерном и четырехмерном многообразиях, на которых метрическая функция задает ДФС ГДМ ранга (3,2), а также ее масштабное преобразование $\chi(f) \rightarrow f$. Заметим, что компоненты χ^1 и χ^2 этого преобразования по решению системы (1) и ее уравнениям определяются однозначно, т.е. χ^1 и χ^2 не входят в решение системы функциональных уравнений (1), а строятся путем подстановкой найденных решений $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{v}$ (1.1) в левую часть исходной системы функциональных уравнений (1).

Теорема. Общее невырожденное решение системы двух функциональных уравнений при вложении аддитивной ранга (2,2) ДФС ГДМ с вектор-функцией $g(x, y, \xi, \eta) = (g^1, g^2) = (x + \xi, y + \eta)$ в дуальную ранга (3,2) ДФС ГДМ с вектор-функцией $f(x, y, \xi, \eta, \mu, v) = (f^1, f^2) = (x\xi + \mu, x\eta + y\xi + v)$ определяется строением его первой функции $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$ в классе экспоненциальных и линейных функций.

1. Если первая из искоемых функций $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$ экспоненциальная, то общее невырожденное решение имеет вид:

$$\begin{cases} \bar{x}(x, y) = h \exp(ax + by) + g, \\ \bar{y}(x, y) = (h(cx + \gamma y) + \beta) \exp(ax + by) + \alpha, \\ \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, v) = \bar{\xi}(\mu, v) \exp(a\xi + b\eta), \\ \bar{\eta}(\xi, \eta, \mu, v) = (\bar{\xi}(\mu, v)(c\xi + \gamma\eta) + \bar{\eta}(\mu, v)) \exp(a\xi + b\eta), \\ \bar{\mu}(\xi, \eta, \mu, v) = -g\bar{\xi}(\mu, v) \exp(a\xi + b\eta) + \bar{\mu}(\mu, v), \\ \bar{v}(\xi, \eta, \mu, v) = -[\bar{\xi}(\mu, v)(g(c\xi + \gamma\eta) + \alpha) + g\bar{\eta}(\mu, v)] \exp(a\xi + b\eta) + \bar{v}(\mu, v), \end{cases} \quad (3)$$

где $h \neq 0$, $a\gamma - bc \neq 0$ и $\bar{\mu}(\mu, v)$, $\bar{v}(\mu, v)$, $\bar{\xi}(\mu, v)$ – произвольные функции, входящие в общее решение и зависящие только от μ, v так, что $\partial(\bar{\mu}(\mu, v), \bar{v}(\mu, v)) / \partial(\mu, v) \neq 0$, причем

$$\begin{aligned} \chi^1 &= \bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu} = (h \exp(ax + by) + g) \bar{\xi}(\mu, v) \exp(a\xi + b\eta) - g\bar{\xi}(\mu, v) \exp(a\xi + b\eta) + \bar{\mu}(\mu, v) = \\ &= h\bar{\xi}(\mu, v) \exp(a(x + \xi) + b(y + \eta)) + \bar{\mu}(\mu, v), \\ \chi^2 &= \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi} + \bar{v} = \\ &= [\bar{\xi}(\mu, v)(h(c(x + \xi) + \gamma(y + \eta)) + \beta) + h\bar{\eta}(\mu, v)] \exp(a(x + \xi) + b(y + \eta)) + \bar{v}(\mu, v). \end{aligned}$$

2. Если первая из искоемых функций $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$ линейная, то общее невырожденное решение имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}(x, y) = ax + by + g, \\ \bar{y}(x, y) = \frac{acx^2}{2} + bcxy + \frac{b\gamma y^2}{2} + (h + gc)x + (\beta + g\gamma)y + \alpha, \\ \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, \nu) = \bar{\xi}(\mu, \nu), \\ \bar{\eta}(\xi, \eta, \mu, \nu) = \bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + \gamma\eta) + \bar{\eta}(\mu, \nu), \\ \bar{\mu}(\xi, \eta, \mu, \nu) = \bar{\xi}(\mu, \nu)(a\xi + b\eta) + \bar{\mu}(\mu, \nu), \\ \bar{v}(\xi, \eta, \mu, \nu) = \bar{\xi}(\mu, \nu) \left(\frac{ac\xi^2}{2} + bc\xi\eta + \frac{b\gamma\eta^2}{2} + h\xi + \beta\eta \right) + \bar{\eta}(\mu, \nu)(a\xi + b\eta) + \bar{v}(\mu, \nu), \end{array} \right. \quad (4)$$

где

$$a\gamma - bc = 0, \quad a\beta - bh \neq 0,$$

$$(a\beta - bh)\partial(\bar{\xi}(\mu, \nu), \bar{\eta}(\mu, \nu)) / \partial(\mu, \nu) - (\beta c - h\gamma)\partial(\bar{\xi}(\mu, \nu), \bar{\mu}(\mu, \nu)) / \partial(\mu, \nu) \neq 0,$$

причем

$$\begin{aligned} \chi^1 &= \bar{\xi}(\mu, \nu)(a(x + \xi) + b(y + \eta) + g) + \bar{\mu}(\mu, \nu), \\ \chi^2 &= \bar{\xi}(\mu, \nu)(ac(x + \xi)^2 / 2 + (x + \xi)(y + \eta) + \beta\gamma(y + \eta)^2 / 2 + \\ &+ (h + gc)(x + \xi) + (\beta + g\gamma)(y + \eta) + \alpha) + \bar{\eta}(\mu, \nu)(a(x + \xi) + b(y + \eta)) + \bar{v}(\mu, \nu). \end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, что в первое уравнение системы (1) из шести неизвестных функций входят только три, а именно: $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, \nu)$ и $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\xi, \eta, \mu, \nu)$. Определив их как его решение и подставив во второе уравнение системы (1), можно будет найти возможные на них ограничения, а также оставшиеся три неизвестные функции $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi, \eta, \mu, \nu)$ и $\bar{v} = \bar{v}(\xi, \eta, \mu, \nu)$. Первое уравнение системы (1) продифференцируем отдельно по переменным x и ξ . Поскольку в его правую часть они входят в виде суммы $x + \xi$, результаты дифференцирования по ним его левой части должны совпадать, откуда следует равенство

$$\bar{x}_x \bar{\xi} = \bar{x} \bar{\xi}_\xi + \bar{\mu}_\xi. \quad (5)$$

По шести независимым переменным x, y и ξ, η, μ, ν равенство (5) является тождеством. Зафиксируем в нем последние четыре переменные ξ, η, μ, ν . Учитывая, что по второму из условий (2) имеем $\bar{\xi} \neq 0$, для функции $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$ по переменной x получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\bar{x}_x = a\bar{x} + c. \quad (6)$$

Если $a \neq 0$, то решение уравнения (6) будет экспоненциальным:

$$\bar{x} = \bar{x}(y)e^{ax} - c/a, \quad (7)$$

причем по первому из условий (2) $\bar{x}(y) \neq 0$.

Если же $a = 0$, но $c \neq 0$, то решение будет линейным:

$$\bar{x} = cx + \bar{x}(y). \quad (8)$$

Если же, наконец, $a = 0$ и $c = 0$, то решение уравнения (6) от переменной x зависеть не будет:

$$\bar{x} = \bar{x}(y), \quad (9)$$

причем по первому из условий (2) $\bar{x}'(y) \neq 0$, т.е. $\bar{x}(y) \neq const$. В дифференциальное равенство (5) подставим сначала экспоненциальное решение (7):

$$a\bar{x}(y)e^{ax}\bar{\xi} = (\bar{x}(y)e^{ax} - c/a)\bar{\xi}_{\xi} + \bar{\mu}_{\xi},$$

откуда для функций $\bar{\xi}$ и $\bar{\mu}$ получаем систему уравнений $\bar{\xi}_{\xi} = a\bar{\xi}$, $\bar{\mu}_{\xi} = c\bar{\xi}$ со следующим решением:

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi}, \quad \bar{\mu} = c\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi} / a + \bar{\mu}(\eta, \mu, \nu), \quad (10)$$

где, очевидно, $\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) \neq 0$.

Выражения (7), (10) для функций $\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\mu}$ подставим в первое уравнение системы (1):

$$\bar{x}(y)\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu)e^{a(x+\xi)} + \bar{\mu}(\eta, \mu, \nu) = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu).$$

Производные его левой части по переменным y и η совпадают, поскольку в его правую часть они входят в виде суммы $y + \eta$, откуда следует равенство

$$\bar{x}'(y)\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu)e^{a(x+\xi)} = \bar{x}(y)\bar{\xi}_{\eta}(\eta, \mu, \nu)e^{a(x+\xi)} + \bar{\mu}_{\eta}(\eta, \mu, \nu),$$

а из него затем система уравнений

$$\bar{x}'(y) = b\bar{x}(y), \quad \bar{\xi}_{\eta}(\eta, \mu, \nu) = b\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu), \quad \bar{\mu}_{\eta}(\eta, \mu, \nu) = 0$$

для функций $\bar{x}(y)$, $\bar{\xi}(\eta, \mu, \nu)$, $\bar{\mu}(\eta, \mu, \nu)$ со следующим решением:

$$\bar{x}(y) = he^{by}, \quad \bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) = \bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta}, \quad \bar{\mu}(\eta, \mu, \nu) = \bar{\mu}(\mu, \nu). \quad (11)$$

Соединяя выражения (7), (10) с решением (11), получим экспоненциальное решение первого уравнения системы (1)

$$\begin{cases} \bar{x} = he^{ax+by} - c/a, \\ \bar{\xi} = \bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta}, \\ \bar{\mu} = c\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta} / a + \bar{\mu}(\mu, \nu) \end{cases} \quad (12)$$

с явной зависимостью функции $\bar{x}$ от переменной x , поскольку $a \neq 0$, в котором, очевидно, $h \neq 0$ и $\bar{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$.

Проводя аналогичные рассуждения в отношении линейных решений (8), получим линейное решение первого уравнения системы (1)

$$\begin{cases} \bar{x} = cx + dy + g, \\ \bar{\xi} = \bar{\xi}(\mu, \nu), \\ \bar{\mu} = \bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + d\eta) + \bar{\mu}(\mu, \nu) \end{cases} \quad (13)$$

с явной зависимостью $\bar{x}$ от переменной x , поскольку $c \neq 0$, в котором $\bar{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$.

Покажем, что полученное решение (13) верно. Подставим выражения (13) в первое уравнение системы (1):

$$x\bar{\xi} + \bar{\mu} = (cx + dy + g)\bar{\xi}(\mu, \nu) + \bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + d\eta) + \bar{\mu}(\mu, \nu) =$$

$$= c(x + \xi)\bar{\xi}(\mu, \nu) + d(y + \eta)\bar{\xi}(\mu, \nu) + g\bar{\xi}(\mu, \nu) + \bar{\mu}(\mu, \nu) = \\ = (c(x + \xi) + d(y + \eta))\bar{\xi}(\mu, \nu) + g\bar{\xi}(\mu, \nu) + \bar{\mu}(\mu, \nu)$$

Полученное выражение есть явный вид некоторой функции $\chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu)$, т.е.

$$\chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu) = (c(x + \xi) + d(y + \eta))\bar{\xi}(\mu, \nu) + g\bar{\xi}(\mu, \nu) + \bar{\mu}(\mu, \nu),$$

где $\bar{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$ – произвольная функция, зависящая только от двух переменных μ, ν . Здесь стоит напомнить, что решение особой системы уравнений (1) зависит только от переменных $x + \xi, y + \eta, \mu, \nu$, причем неважно, каким образом проявляется зависимость между переменными μ, ν , поскольку глобальная задача данной работы состоит в том, чтобы найти такие решения особой системы функциональных уравнений (1), при которых является возможным структурно вложение геометрии меньшего ранга (2,2) в геометрию большего ранга (3,2).

Далее, проводя аналогичные рассуждения в отношении последних решений (9), получим общее экспоненциальное решение первого уравнения системы (1), не противоречащее условиям (2):

$$\begin{cases} \bar{x}(y) = he^{ax+by} + g, \\ \bar{\xi}(\eta, \mu, \nu) = \bar{\xi}(\mu, \nu)e^{ax+b\eta}, \\ \bar{\mu}(\eta, \mu, \nu) = -g\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta} + \bar{\mu}(\mu, \nu), \end{cases} \quad (14)$$

где $a^2 + b^2 \neq 0$, $h \neq 0$, $\bar{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$, и линейное решение первого уравнения системы (1), в котором функция $\bar{x}$ не зависит от переменной x

$$\begin{cases} \bar{x} = qy + s, \\ \bar{\xi} = \bar{\xi}(\mu, \nu), \\ \bar{\mu} = q\bar{\xi}(\mu, \nu)\eta + \bar{\mu}(\mu, \nu), \end{cases} \quad (15)$$

где $p = 0$, $q \neq 0$, $\bar{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$.

Решение (15) можно включить в решение (13), если ввести новые обозначения констант и допустить в нем более общее ограничение $a^2 + b^2 \neq 0$ (тогда при $a = 0$, должно быть $b \neq 0$):

$$\begin{cases} \bar{x} = ax + by + g, \\ \bar{\xi} = \bar{\xi}(\mu, \nu), \\ \bar{\mu} = \bar{\xi}(\mu, \nu)(a\xi + b\eta) + \bar{\mu}(\mu, \nu), \end{cases} \quad (16)$$

где $a^2 + b^2 \neq 0$, $\bar{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$.

Заметим, что общее линейное решение (16) первого уравнения системы (1), как и его общее экспоненциальное решение (14), не противоречит условиям (2). В совокупности же эти решения составляют общее решение первого уравнения системы (1). Для того чтобы найти общее невырожденное решение системы (1) необходимо общие решения (14) и (16) ее первого уравнения подставить в ее второе уравнение. Поставим во второе уравнение системы (1) решение (14):

$$(he^{ax+by} + g)\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta} + \bar{v} = \chi^2(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu). \quad (17)$$

Производные левой части уравнения (17) по переменным x и ξ , очевидно, совпадают:

$$ahe^{ax+by}\bar{\eta} + \bar{y}_x\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta} = (he^{ax+by} + g)\bar{\eta}_\xi + a\bar{y}\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta} + \bar{v}_\xi.$$

Фиксируя в этом равенстве переменные ξ, η, μ, ν , сначала получим уравнения для функции $\bar{y}$, используя которое затем из того же равенства получаем уравнения для функций $\bar{\eta}$ и $\bar{v}$. В итоге имеем систему уравнений $\bar{y}_x - a\bar{y} = che^{ax+by} + d$, $\bar{\eta}_\xi - a\bar{\eta} = c\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta}$, $\bar{v}_\xi + g\bar{\eta}_\xi = d\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta}$ со следующими решениями:

$$\begin{cases} \bar{y} = chxe^{ax+by} + \bar{y}(y)e^{ax} - d/a, \\ \bar{\eta} = c\bar{\xi}(\mu, \nu)\xi e^{a\xi+b\eta} + \bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi}, \\ \bar{v} = (-gc\xi + d/a)\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta} - g\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi} + \bar{v}(\eta, \mu, \nu), \end{cases} \quad (18)$$

если $a \neq 0$, и

$$\begin{cases} \bar{y} = (che^{by} + d)x + \bar{y}(y), \\ \bar{\eta} = c\bar{\xi}(\mu, \nu)\xi e^{b\eta} + \bar{\eta}(\eta, \mu, \nu), \\ \bar{v} = (-gc + d)\bar{\xi}(\mu, \nu)\xi e^{b\eta} - g\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu) + \bar{v}(\eta, \mu, \nu), \end{cases} \quad (19)$$

если $a = 0$, причем $b \neq 0$, так как $a^2 + b^2 \neq 0$.

В уравнение (17), полагая $a \neq 0$, подставим выражения (18):

$$ch\bar{\xi}(\mu, \nu)(x + \xi)e^{a(x+\xi)+b(y+\eta)} + (\bar{y}(y)\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta} + h\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)e^{by})e^{a(x+\xi)} + \bar{v}(\eta, \mu, \nu) = \chi^2(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu). \quad (20)$$

Производные левой части уравнения (20) по переменным y и η , очевидно, совпадают:

$$\begin{aligned} &(\bar{y}'(y)\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta} + bh\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)e^{by})e^{a(x+\xi)} = \\ &= (b\bar{y}(y)\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta} + h\bar{\eta}_\eta(\eta, \mu, \nu)e^{by})e^{a(x+\xi)} + \bar{v}_\eta(\eta, \mu, \nu), \end{aligned}$$

откуда для функций $\bar{y}(y)$, $\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)$, $\bar{v}(\eta, \mu, \nu)$ получаем уравнения $\bar{y}'(y) - b\bar{y}(y) = \gamma he^{by}$,

$\bar{\eta}_\eta(\eta, \mu, \nu) - b\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu) = \gamma\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta}$, $\bar{v}_\eta(\eta, \mu, \nu) = 0$ со следующими решениями:

$$\begin{cases} \bar{y}(y) = \gamma h y e^{by} + \beta e^{by}, \\ \bar{\eta}(\eta, \mu, \nu) = \gamma\bar{\xi}(\mu, \nu)\eta e^{b\eta} + \bar{\eta}(\mu, \nu)e^{b\eta}, \\ \bar{v}(\eta, \mu, \nu) = \bar{v}(\mu, \nu), \end{cases} \quad (21)$$

которые являются также и решениями функционального уравнения (20).

Объединяя выражения (18) и (21), получим решения исходного функционального уравнения (17) для случая $a \neq 0$:

$$\begin{cases} \bar{y} = (h(cx + \gamma y) + \beta)e^{ax+by} - d/a, \\ \bar{\eta} = (\bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + \gamma\eta) + \bar{\eta}(\mu, \nu))e^{a\xi+b\eta}, \\ \bar{v} = (-g\bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + \gamma\eta) + d\bar{\xi}(\mu, \nu)/a - g\bar{\eta}(\mu, \nu))e^{a\xi+b\eta} + \bar{v}(\mu, \nu). \end{cases} \quad (22)$$

В уравнение (17) с $a = 0$ подставим выражения (19):

$$hc\bar{\xi}(\mu, \nu)(x + \xi)e^{b(y+\eta)} + h\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)e^{by} + d\bar{\xi}(\mu, \nu)(x + \xi)e^{b\eta} + \bar{y}'(y)\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta} + \bar{v}(\eta, \mu, \nu) = \chi^2(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu). \quad (23)$$

Производные левой части уравнения (23) по переменным y и η , очевидно, совпадают:

$$hb\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)e^{by} + \bar{y}'(y)\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta} = h\bar{\eta}_\eta(\eta, \mu, \nu)e^{by} + bd\bar{\xi}(\mu, \nu)(x + \xi)e^{b\eta} + b\bar{y}(y)\bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta} + \bar{v}_\eta(\eta, \mu, \nu),$$

откуда выводим, что $d = 0$, так как $b \neq 0$, $\bar{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$, и для функций $\bar{y}(y)$, $\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu)$, $\bar{v}(\eta, \mu, \nu)$ получаем уравнения

$\bar{y}'(y) - b\bar{y}(y) = \gamma h e^{by} + \alpha$, $\bar{\eta}_\eta(\eta, \mu, \nu) - b\bar{\eta}(\eta, \mu, \nu) = \gamma \bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta}$, $\bar{v}_\eta(\eta, \mu, \nu) = \alpha \bar{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta}$ со следующими решениями:

$$\begin{cases} \bar{y}(y) = \gamma h y e^{by} + \beta e^{by} - \alpha / b, \\ \bar{\eta}(\eta, \mu, \nu) = \gamma \bar{\xi}(\mu, \nu) \eta e^{b\eta} + \bar{\eta}(\mu, \nu) e^{b\eta}, \\ \bar{v}(\eta, \mu, \nu) = \alpha \bar{\xi}(\mu, \nu) e^{b\eta} / b + \bar{v}(\mu, \nu), \end{cases} \quad (24)$$

которые удовлетворяют также и уравнению (23) с $d = 0$. Соединяя выражения (24) с выражениями (19), в которых должно быть $d = 0$, получаем решение уравнения (17) при $a = 0$:

$$\begin{cases} \bar{y} = (h(cx + \gamma y) + \beta) e^{by} - \alpha / b, \\ \bar{\eta} = (\bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + \gamma\eta) + \bar{\eta}(\mu, \nu)) e^{b\eta}, \\ \bar{v} = (-g\bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + \gamma\eta) + \alpha \bar{\xi}(\mu, \nu) / b - g\bar{\eta}(\mu, \nu)) e^{b\eta} + \bar{v}(\mu, \nu). \end{cases} \quad (25)$$

Решение (25) можно включить в решение (22), введя единое ограничение $a^2 + b^2 \neq 0$ и переобозначения $d \rightarrow -\alpha a$, $\alpha / b \rightarrow -\alpha$,

$$\begin{cases} \bar{y} = ((h(cx + \gamma y) + \beta) + \beta) e^{ax+by} + \alpha, \\ \bar{\eta} = (\bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + \gamma\eta) + \bar{\eta}(\mu, \nu)) e^{a\xi+b\eta}, \\ \bar{v} = -(\bar{\xi}(\mu, \nu)(g(c\xi + \gamma\eta) + \alpha) + g\bar{\eta}(\mu, \nu)) e^{a\xi+b\eta} + \bar{v}(\mu, \nu). \end{cases} \quad (26)$$

Соединяя общие решения (14) и (26) первого и второго уравнений системы (1), получим её общее экспоненциальное решение (3). Дополнительные ограничения в нём ($a\gamma - bc \neq 0$, $\partial(\bar{\mu}(\mu, \nu)) / \partial(\mu, \nu) \neq 0$) определяются условиями (2) его невырожденности, а компоненты χ^1 и χ^2 масштабной функции χ находятся его подстановкой в соответствующие функциональные уравнения системы (1).

В результате подстановки во второе уравнение системы (1) общего решения (16) получим следующее линейное решение:

$$\begin{cases} \bar{y} = acx^2 / 2 + bcxy + b\gamma y^2 / 2 + (h + gc)x + (\beta + g\gamma)y + \alpha, \\ \bar{\eta} = \bar{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + \gamma\eta) + \bar{\eta}(\mu, \nu), \\ \bar{v} = \bar{\xi}(\mu, \nu)(ac\xi^2 / 2 + bc\xi\eta + b\gamma\eta^2 / 2 + h\xi + \beta\eta) + \bar{\eta}(\mu, \nu)(a\xi + b\eta) + \bar{v}(\mu, \nu). \end{cases} \quad (27)$$

в котором $a\gamma - bc = 0$.

В совокупности общие решения (16) и (27) первого и второго уравнений системы (1) представляют собой ее общее линейное решение (4). Дополнительные к связи $a\gamma - bc = 0$ ограничения в нем (в частности, $a\beta - bh \neq 0$) вытекают из условий (2) его невырожденности, а компоненты масштабной функции $\chi = (\chi^1, \chi^2)$ находятся его подстановкой в каждое из уравнений системы (1), что и завершает доказательство теоремы.

Поставленная выше задача полностью решена. Найдено общее невырожденное решение системы функциональных уравнений (1), что подтверждает вложимость аддитивной ранга (2,2) ДФС ГДМ с известной вектор-функцией $g(x, y, \xi, \eta) = (g^1, g^2) = (x + \xi, y + \eta)$ в дуальную ранга (3,2) ДФС ГДМ с известной вектор-функцией $f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu) = (f^1, f^2) = (x\xi + \mu, x\eta + y\xi + \nu)$.

Список источников

1. Михайличенко Г.Г. Двуметрические феноменологические структуры ранга $(n+1,2)$ // Сибирский математический журнал. 1993. Т. 34, № 3. С. 132–143.
2. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии. Барнаул : Барнауль. гос. пед. ун-т, 2004. 132 с.
3. Михайличенко Г.Г. Полиметрические геометрии. Новосибирск : НГУ, 2001. 143 с.
4. Богданова Р.А. Классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 3 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1 (27). С. 11–24
5. Богданова Р.А. Двухточечные инварианты групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1 (39). С. 5–12. doi: 10.17223/19988621/39/1
6. Богданова Р.А., Михайличенко Г. Г., Мурадов Р.М. Последовательное по рангу $(n + 1,2)$ вложение двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств // Известия вузов. Математика. 2020. № 6. С. 9–14.
7. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. М. : МГУ, 1996. 262 с.
8. Владимиров Ю.С. Метафизика. 2-е изд., перераб. и доп. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 568 с.
9. Кулаков Ю.И. Теория физических структур. М. : Доминико, 2004. 847 с.
10. Михайличенко Г.Г. Математические основы и результаты Теории физических структур. Горно-Алтайск : РИО ГАГУ, 2016. 297 с.
11. Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Вложение аддитивной двуметрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга (2,2) в двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга (3,2) // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, № 1. С. 305–327. doi: 10.20537/vm180304
12. Кыров В.А. Двуметрические пространства // Известия вузов. Математика. 2005. № 8. С. 27–38.
13. Кыров В.А. О вложении двуметрических феноменологически симметричных геометрий // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 56. С. 5–16. doi: 10.17223/19988621/56/1
14. Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Невырожденные канонические решения одной системы функциональных уравнений // Известия вузов. Математика. 2021. № 8. С. 46–55. doi: 10.26907/0021-3446-2021-8-46-55.
15. Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Невырожденные канонические решения некоторой системы функциональных уравнений // Владикавказский математический журнал. 2022. Т. 24, № 1. С. 44–53. doi: 10.46698/u7680-5193-0172-d

References

1. Mikhailichenko G.G. (1993) Bimetric physical structures of rank $(n+1, 2)$. *Siberian Mathematical Journal*. 34(3). pp. 513–522.
2. Mikhailichenko G.G. (2004) *Dvumernyye geometrii* [Two-dimensional geometries]. Barnaul: Barnaul State Pedagogical University.
3. Mikhailichenko G.G. (2001) *Polimetricheskiye geometrii* [Polymetric geometries]. Novosibirsk: Novosibirsk State University.
4. Bogdanova R.A. (2014) Klassifikatsiya dvumetricheskikh fenomenologicheskikh simmetrichnykh dvumernykh geometriy ranga 3 [Classification of bi-metric phenomenological symmetric geometries of rank 3]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 27(1). pp. 11–24.
5. Bogdanova R.A. (2016) Dvukhtocheynyye invarianty grupp dvizheniy nekotorykh fenomenologicheskikh simmetrichnykh dvumernykh geometriy [Two-point invariants of groups of motions of some phenomenologically symmetric two-dimensional geometries]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 39(1). pp. 5–12. DOI: 10.17223/19988621/39/1.
6. Bogdanova R.A., Mikhailichenko G.G., Muradov R.M. (2020) Successive in rank $(n+1, 2)$ embedding of dimetric phenomenologically symmetric geometries of two sets. *Russian Mathematics*. 64(6). pp. 6–10.
7. Vladimirov Yu.S. (1996) *Relyatsionnaya teoriya prostranstva-vremeni i vzaimodeystviy. Chast 1. Teoriya sistem otnocheniy* [Relational theory of the space-time and interactions. Part 1. Theory of systems of relations]. Moscow: Moscow State University.
8. Vladimirov Yu.S. (2009) *Metafizika* [Metaphysics]. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy.
9. Kulakov Yu.I. (2004) *Teoriya fizicheskikh struktur* [Theory of physical structures]. Moscow: Dominiko.
10. Mikhailichenko G.G. (2016) *Matematicheskiye osnovy i rezultaty teorii fizicheskikh struktur* [Mathematical foundations and results of the theory of physical structures]. Gorno-Altaysk: Gorno-Altaysk State University.
11. Krov V.A., Mikhailichenko G.G. (2018) Vlozheniye additivnoy dvumetricheskoy fenomenologicheskikh simmetrichnoy geometrii dvukh mnozhestv ranga $(2, 2)$ v dvumetricheskiye fenomenologicheskikh simmetrichnyye geometrii dvukh mnozhestv ranga $(3, 2)$ [Embedding of the additive two-metric phenomenologically symmetric geometry of two sets of rank $(2, 2)$ into the two-metric phenomenologically symmetric geometries of two sets of rank $(3, 2)$]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki*. 28(3). pp. 305–327. DOI: 10.20537/vm180304.
12. Krov V.A. (2005) Two-Metric Spaces. *Russian Mathematics*. 49(5). pp. 25–35.
13. Krov V.A. (2018) O vlozhenii dvumetricheskikh fenomenologicheskikh simmetrichnykh geometriy [On the embedding of two-dimetric phenomenologically symmetric geometries]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 56. pp. 5–16. DOI: 10.17223/19988621/56/1.
14. Krov V.A., Mikhailichenko G.G. (2021) Nondegenerate canonical solutions of one system of functional equations. *Russian Mathematics*. 65(8). pp. 40–48. DOI: 10.3103/S1066369X21080053.
15. Krov V.A., Mikhailichenko G.G. (2022) Nevrozhdennyye kanonicheskiye resheniya nekotorykh sistem funktsional'nykh uravneniy [Nondegenerate canonical solutions of a system of functional equations]. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal – Vladikavkaz Mathematical Journal*. 24(1). pp. 44–53. DOI: 10.46698/u7680-5193-0172-d.

Сведения об авторе:

Богданова Рада Александровна – доцент, и.о. заведующего кафедрой математики, физики и информатики Горно-Алтайского государственного университета (Горно-Алтайск, Россия).
E-mail: bog-rada@yandex.ru

Information about the author:

Bogdanova Rada A. (Associate Professor, Acting Head of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science of the Gorno-Altai State University, Gorno-Altaysk, Russian Federation). E-mail: bog-rada@yandex.ru

The article was submitted 12.03.2024; accepted for publication 09.12.2024

Статья поступила в редакцию 12.03.2024; принята к публикации 09.12.2024