ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2024 Математика и механика № 92

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья

УДК 512.552 MSC: 16R99

doi: 10.17223/19988621/92/2

# Изоморфизмы алгебр инцидентности

**Петр Андреевич Крылов[1],**
**Цырендоржи Дашацыренович Норбосамбуев[2]**

[1, 2] *Томский государственный университет, Томск, Россия*
[1] *krylov@math.tsu.ru*
[2] *nstsddts@yandex.ru*

**Аннотация.** Статья посвящена изучению изоморфизмов между алгебрами инцидентности $K' = I(Y, R)$ и $K = I(X, R)$, где $Y$ и $X$ – предупорядоченные множества, $R$ – алгебра над некоторым коммутативным кольцом $T$. При некоторых предположениях доказывается, что любой изоморфизм алгебр $K' \to K$ индуцирует изоморфизм предупорядоченных множеств $Y \to X$. При этом всякий изоморфизм между $K'$ и $K$ равен композиции диагонального изоморфизма из $K'$ в $K$ и внутреннего автоморфизма алгебры $K$.

**Ключевые слова:** алгебра инцидентности, изоморфизм, предупорядоченное множество

**Благодарности:** Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (РНФ) № 23-21-00375, https://rscf.ru/en/project/23-21-00375/

**Для цитирования:** Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д. Изоморфизмы алгебр инцидентности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 19–28. doi: 10.17223/19988621/92/2

Original article

# Isomorphisms of incidence algebras

**Piotr A. Krylov[1], Tsyrendorzhi D. Norbosambuev[2]**

[1, 2] *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*
[1] *krylov@math.tsu.ru*
[2] *nstsddts@yandex.ru*

**Abstract.** Let $Y$ and $X$ be preordered sets, $R$ be an algebra over some commutative ring, $K' = I(Y, R)$ and $K = I(X, R)$ be incidence algebras. Several questions can be formulated regarding isomorphisms between the algebras $K'$ and $K$. One of them is known as the isomorphism problem. It is usually written in the following form. If the algebras $K'$ and $K$ are isomorphic, then will $Y$ and $X$ be isomorphic as preordered sets? Another general question asks us to find the structure of isomorphisms between $K'$ and $K$.

The article contains two theorems. Theorem 3.1, under certain assumptions about the algebras $K'$ and $K$ and the ring $R$, gives a positive answer to the isomorphism problem. Theorem 3.2, under one condition on the algebras $K'$ and $K$, states that any isomorphism of the algebras $K'$ and $K$ after conjugation by an inner automorphism of the algebra $K$ becomes a diagonal (in a certain sense) isomorphism.
**Keywords:** incidence algebra, isomorphism, preordered set

**Acknowledgments:** This work was supported by grant of Russian Science Foundation (RSF) № 23-21-00375, https://rscf.ru/en/project/23-21-00375/

**For citation**: Krylov, P.A., Norbosambuev, T.D. (2024) Isomorphisms of incidence algebras. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 19–28. doi: 10.17223/19988621/92/2

## Введение

Данная работа продолжает статьи [1] и [2], в которых исследованы автоморфизмы и дифференцирования колец инцидентности.

Один из естественных и важных вопросов теории алгебр инцидентности нестрого можно сформулировать следующим образом: насколько предупорядоченное множество $X$ определяет алгебру инцидентности $I(X, R)$? В более точной форме суть данного вопроса выражает известная проблема изоморфизма для колец инцидентности (см.: [3. 7.2]). А в более широком контексте речь идет об описании изоморфизмов между алгебрами инцидентности.

С начальным этапом исследования изоморфизмов колец инцидентности можно ознакомиться в [3]. Итог данного этапа подводит теорема 7.2.5 в этой книге. Она утверждает, что если $X$ и $Y$ – локально конечные частично упорядоченные множества, $F$ – поле и кольца инцидентности $I(X, F)$ и $I(Y, F)$ изоморфны, то $X$ и $Y$ являются изоморфными частично упорядоченными множествами.

В дальнейшем записанный результат переносился и обобщался на другие кольца инцидентности $I(X, R)$, где $X$ – произвольное предупорядоченное множество, $R$ – некоторое кольцо. Так, работа [4] содержит теорему, подобную теореме 3.1, для случая, когда фактор-кольцо $R/J(R)$ неразложимо ($J(R)$ – радикал Джекобсона кольца $R$; см. п. «e» в конце разд. 2 настоящей статьи). Статья [5] посвящена некоторому аналогу проблемы изоморфизма для алгебр инцидентности категорий Мёбиуса. В [6] и [7] исследуются изоморфизмы так называемых формальных матричных колец инцидентности.

В раздел 1 настоящей работы включена некоторая необходимая информация о кольцах инцидентности. Раздел 2 содержит три вопроса (a)–(c). Два из них касаются проблемы изоморфизма для колец инцидентности. Еще один вопрос относится к задаче об описании изоморфизмов между кольцами инцидентности. Также формулируется несколько условий для алгебр инцидентности. Затем устанавливаются различные соотношения между введенными условиями. Заключительный раздел 3 состоит из двух теорем и их доказательств. При определенных условиях эти теоремы отвечают на вопросы (a)–(c) из раздела 2.

В статье рассматриваются только ассоциативные алгебры с ненулевой единицей.

## 1. Об алгебрах инцидентности

Для удобства чтения приведем некоторую информацию о предупорядоченных множествах (см.: [3]).

Пусть $X$ – произвольное множество и $\leqslant$ – рефлексивное и транзитивное отношение на $X$. В таком случае система $\langle X, \leqslant\rangle$ называется предупорядоченным множеством, а $\leqslant$ – предпорядок на $X$. Если дополнительно отношение $\leqslant$ антисимметрично, то $\langle X, \leqslant\rangle$ – частично упорядоченное множество.

Везде в тексте $\langle X, \leqslant\rangle$ – предупорядоченное множество. Для любых элементов $x$, $y$ из $X$ через $[x, y]$ обозначают подмножество $\{z \in X \mid x \leqslant z \leqslant y\}$ и называют его интервалом в $X$. Интервал вида $[x, x]$ обозначают через $[x]$.

Зададим на $X$ бинарное отношение ~, положив $x \sim y \Leftrightarrow x \leqslant y$ и $y \leqslant x$. Ясно, что ~ – отношение эквивалентности на $X$. Соответствующие классы эквивалентности имеют вид $[x]$ для всевозможных $x \in X$. Отношение предпорядка $\leqslant$ согласовано с отношением эквивалентности ~. Следовательно, на фактормножестве $\bar{X} = X / \sim$ появляется индуцированное отношение $\leqslant$, причем $\langle \bar{X}, \leqslant\rangle$ – частично упорядоченное множество.

Считаем далее, что все интервалы в $X$ конечны. В таком случае $X$ называют локально конечным предупорядоченным множеством. Договоримся в дальнейшем обозначать через $x$ элементы частично упорядоченного множества $\bar{X}$, т.е. классы эквивалентности вида $[x]$. Таким образом, для обозначения класса $[x]$ будем использовать какой-нибудь его представитель. Такая договоренность не приведет к путанице. В конкретной ситуации всегда ясно, об элементах какого именно множества ($\bar{X}$ или $X$) идет речь.

Пусть далее буква $R$ обозначает алгебру над некоторым коммутативным кольцом $T$.

Алгебра инцидентности является некоторым кольцом функций. Пусть $\langle X, \leqslant\rangle$ – произвольное локально конечное предупорядоченное множество. Положим $I(X, R) = \{f : X \times X \to R \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \nleqslant y\}$. Функции складываются поточечно. Произведение функций $f$ и $g$ из $I(X, R)$ задается формулой

$$(fg)(x, y) = \sum_{x \leqslant z \leqslant y} f(x, z) \cdot g(z, y) \qquad (1)$$

для каждых $x, y \in X$. Для любых $t \in T$ и $x, y \in X$ еще полагаем $(tf)(x, y) = tf(x, y)$. В результате получаем $T$-алгебру $I(X, R)$, которая называется алгеброй инцидентности или кольцом инцидентности предупорядоченного множества $X$ над кольцом $R$. Конкретную алгебру $I(X, R)$ будем обозначать буквой $A$.

Будут полезны некоторые специальные функции из $I(X, R)$. Для данного $x \in X$ положим $e_{[x]}(t, t) = 1$ для всех $t \in [x]$ и $e_{[x]}(z, y) = 0$ для оставшихся пар $(z, y)$. Система $\{e_{[x]} \mid x \in X\}$ состоит из попарно ортогональных центральных в $L$ идемпотентов (кольцо $L$ определено в следующем абзаце). На основании соглашения об обозначении класса $[x]$ каким-то его представителем будем писать $e_x$ вместо $e_{[x]}$.

Определим подкольцо $L$ и идеал $M$ в $A$. Положим $L = \{f \in A \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \nsim y\}$ и $M = \{f \in A \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \sim y\}$. Имеем прямую сумму $T$-модулей $A = L \oplus M$, т.е. кольцо $A$ есть расщепляющееся расширение идеала $M$ с помощью подкольца $L$. Идеал $M$ естественным образом считаем $L$–$L$-бимодулем. Кроме того, $M$ – неунитальная алгебра.

Идеал $M$ лежит в радикале Джекобсона алгебры $A$. Следовательно, элемент $1 + d$ обратим в $A$ для всякого $d \in M$ (см.: [3. Theorem 1.2.3]).

Пусть дан произвольный интервал $[x]$. Обозначим через $R_{[x]}$ множество функций $f \in A$, для которых $f(z, y) = 0$, если $z \not\sim x$ или $y \not\sim x$. Как и в случае идемпотентов $e_x$, пишем $R_x$ вместо $R_{[x]}$. Справедливы равенства $R_x = e_xAe_x = e_xLe_x$. Делаем вывод, что $R_x$ – кольцо с единицей $e_x$. Если перейти к ограничениям функций из $A$ на $[x] \times [x]$, то фактически $R_x$ – это алгебра всех функций $[x] \times [x] \to R$ с поточечным сложением и произведением типа свертки как в (1). Выберем какую-либо нумерацию интервала $[x]$: $[x] = \{x_1, \ldots, x_n\}$. После этого, если функции $f \in R_x$ поставить в соответствие матрицу $(f(x_i, x_j))$, то придем к изоморфизму алгебр $R_x \cong M(n, R)$. Возьмем теперь два различных интервала $[x]$, $[y]$ и положим $M_{xy} = \{ f \in A \mid f(s, t) = 0, \text{ если } s \not\sim x \text{ или } t \not\sim y\}$. Тогда $M_{xy} = e_xAe_y$ и, значит, $M_{xy}$ является $R_x$–$R_y$-бимодулем.

Уточним, что $M_{xy} = 0$, если $x \nleqslant y$. А при $x < y$ существует канонический изоморфизм $M_{xy} \cong M(n \times m, R)$, где $n = \left|[x]\right|, m = \left|[y]\right|,$ относительно указанных выше изоморфизмов $R_x \cong M(n, R)$ и $R_y \cong M(m, R)$. После отождествлений всех алгебр $R_x$ с $M(n, R)$ и бимодулей $M_{xy}$ с $M(n \times m, R)$ становится ясно, что действия колец $R_x$ и $R_y$ на $M_{xy}$ будут обычными умножениями матриц. Понятно также, что $M_{xy}$ есть $L$–$L$-бимодуль. Действие $L$ на $M_{xy}$ сводится к действию $R_x$ слева и $R_y$ справа. Еще раз обратим внимание, что под индексами в $R_x$ и $M_{xy}$ подразумеваем $[x]$ и $[x][y]$ соответственно (см. выше).

Произведение $\prod\limits_{x,\ y \in X} M_{xy}$ обладает структурой $L$–$L$-бимодуля. Именно, если $f \in L$, $(g_{xy}) \in \prod\limits_{x,\ y \in X} M_{xy}$, то $f(g_{xy}) = (f_xg_{xy})$ и $(g_{xy})f = (g_{xy}f_y)$, где $f_x = e_xfe_x$ и $f_y = e_yfe_y$.

Определим теперь в бимодуле $\prod\limits_{x,\ y \in X} M_{xy}$ умножение посредством формулы $(g_{xy})(h_{xy}) = (d_{xy})$, где $d_{xy} = \sum\limits_{x \leqslant z \leqslant y} g_{xz} \cdot h_{zy}$. После чего этот бимодуль становится (неунитальной) алгеброй.

**Предложение 1.1.** Существуют канонические изоморфизмы алгебр $L \cong \prod\limits_{x \in X} R_x$, а также $L$–$L$-бимодулей и алгебр.

**Доказательство.** Определим отображение $\omega : L \to \prod\limits_{x \in X} R_x$, полагая $\omega(f) = (f_x)$ для каждого $f$ из $L$, где $f_x = e_xfe_x$. Тогда $\omega$ – изоморфизм алгебр. Отображение $\varepsilon : M \to \prod\limits_{x, y \in X} M_{xy}$, $\varepsilon(g) = (g_{xy})$, где $g_{xy} = e_xge_y$, будет изоморфизмом $L$–$L$-бимодулей и алгебр. ■

В дальнейшем мы не будем различать соответствующие объекты относительно изоморфизмов $\omega$ и $\varepsilon$.

## 2. Некоторые определения и вспомогательные результаты

Напоминаем о договоренности из предыдущего раздела о том, что все кольца являются алгебрами над некоторым коммутативным кольцом $T$. Пусть $Y$ и $X$ – произвольные предупорядоченные множества, $\bar{Y}$ и $\bar{X}$ – соответствующие частично упорядоченные множества (см. разд. 1). Далее, пусть $R$ – некоторое кольцо, $K' = I(Y, R)$ и $K = I(X, R)$ – алгебры инцидентности. Сформулируем следующие вопросы.

(a) Когда из изоморфизма алгебр $K' \cong K$ следует изоморфизм частично упорядоченных множеств $\bar{Y} \cong \bar{X}$ ?

(b) Когда из изоморфизма алгебр $K' \cong K$ следует изоморфизм предупорядоченных множеств $Y \cong X$ ?

Вопросы (a) и (b) являются некоторыми вариациями известной проблемы изоморфизма для колец инцидентности.

Третий вопрос связан с описанием изоморфизмов между алгебрами $K'$ и $K$.

(c) При каких условиях любой изоморфизм $\varphi: K' \to K$ можно «диагонализировать»? Подразумевается, что должны найтись внутренний автоморфизм $\nu$ алгебры $K$ и диагональный изоморфизм $\gamma: K' \to K$ такие, что $\varphi = \nu\gamma$.

Как в разделе 1, запишем разложение $K = L \oplus M$ и подобное разложение для алгебры $K'$: $K' = L_1 \oplus M_1$, в котором подкольцо $L_1$ и идеал $M_1$ имеют понятный смысл.

Располагая произвольным гомоморфизмом алгебр $\varphi: K' \to K$, можно стандартным образом составить $2 \times 2$ матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$, где $\alpha: L_1 \to L$, $\beta: M_1 \to M$, $\gamma: M_1 \to L$, $\delta: L_1 \to M$ – определенные $T$-модульные гомоморфизмы.

Мы будем заниматься только «треугольным» случаем, т.е. когда $\gamma = 0$. И рассматриваем лишь изоморфизмы $\varphi$. Также не будем различать изоморфизм $\varphi$ и соответствующую ему $2 \times 2$ матрицу. Иногда пишем «треугольный изоморфизм» $\varphi$, где $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$, и «диагональный изоморфизм» $\varphi$, где $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Если $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ – треугольный изоморфизм алгебр $K' \to K$, то $\alpha$ и $\beta$ являются изоморфизмами алгебр $L_1 \to L$ и $M_1 \to M$ соответственно (считаем $M_1$ и $M$ неунитальными алгебрами).

В разделе 1 были введены идемпотенты $e_x$ алгебры $K$. Обозначим через $f_y$ аналогичные идемпотенты алгебры $K'$.

Условия (I) и (II) ниже можно рассматривать как перенос условий (I) и (II) из раздела 5 работы [8] на ситуацию двух алгебр $K'$ и $K$.

(I) Любой изоморфизм $K' \to K$ является треугольным.

(II) Для любого изоморфизма $\varphi: K' \to K$ и каждого $x \in X$ справедливо включение $\varphi^{-1}(e_x) \in f_y + M_1$ для какого-то $y \in Y$.

Для обоих условий выполняются их симметричные аналоги. Конкретно, если верно (I), то всякий изоморфизм $K \to K'$ также будет треугольным. Прежде чем перейти к (II), раскроем связь между данными условиями.

Доказательство следующей леммы фактически повторяет доказательство леммы 5.6 работы [8], и мы опускаем его.

**Лемма 2.1.** Для алгебр $K'$ и $K$ справедливы следующие утверждения:

1. Из условия (II) вытекает условие (I).

2. Для неразложимого кольца $R$ условия (II) и (I) равносильны.

Напомним об изоморфизме $L=\prod_{x\in X} R_x$ из предложения 1.1. А теперь вернемся к вопросу о симметричности условия (II). Оформим ответ на него в виде следующей леммы.

**Лемма 2.2.** Если условие (II) выполнено, то оно также справедливо для алгебр $K$ и $K'$.

**Доказательство.** Мы должны проверить, что для всякого изоморфизма $\psi\colon K\to K'$ и любого $y\in Y$ имеет место включение $\psi^{-1}(f_y)\in e_x+M$ для некоторого $x\in X$.

Поскольку условие (II) выполнено, то в силу леммы 2.1 все изоморфизмы между $K'$ и $K$ в любом направлении будут треугольными. Поэтому имеем $\psi=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \delta & \beta\end{pmatrix}$ и $\psi^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha^{-1} & 0\\ \delta' & \beta^{-1}\end{pmatrix}$.

Применение условия (II) к $\psi^{-1}$ влечет, что для любого $x\in X$ существует $y\in Y$ со свойством $\psi(e_x)\in f_y+M_1$ для некоторого $y\in Y$. Поэтому $\alpha(e_x)=f_y$, а также $\psi^{-1}(f_y)=e_x+d$, где $d\in M$.

Если $z\in X$, $z\neq x$ и $\alpha(e_z)=f_t$, то из равенства $e_xe_z=0$ вытекает равенство $f_yf_t=0$, откуда $y\neq t$. Делаем вывод о том, что сопоставление $x\to y$, где $\alpha(e_x)=y$, задает биекцию множества $X$ на какое-то подмножество $Y'$ из $Y$.

Достаточно проверить, что $Y'=Y$. Иначе, пусть $y\in Y$ и $y\notin Y'$. Затем, пусть $\alpha(a)=f_y$, где $a\in L$. Запишем $a=(a_x)=a_s+c$, где $a_s\neq 0$, $c\in\prod_{t\neq s} R_t$. Получаем соотношения $\psi(e_s)\in f_k+M_1$ и $\alpha(e_s)=f_k$ для некоторого $k\in Y'$. Затем имеем $\alpha(e_sa)=$ $=f_kf_y=0$. Отсюда $e_sa=a_s=0$, что противоречит выбору элемента $a_s$. Заключаем, что $Y'=Y$. ■

Приведем одно условие на некоторое кольцо $S$.

(1) Для любых ортогональных идемпотентов $e, f\in S$ из равенства $fSe=0$ следует равенство $eSf=0$.

Следующее утверждение является некоторым аналогом леммы 5.7 работы [8]. Его доказательство также повторяет доказательство этой леммы.

**Лемма 2.3.** Если все кольца $R_x$ обладают свойством (1), то для алгебр $K'$ и $K$ выполняется условие (I).

После доказательства леммы 5.7 работы [8] отмечено, что кольцо $M(n, R)$ удовлетворяет условию (1), если кольцо $R$ относится к одному из следующих классов колец:

1) локальные кольца;

2) области главных левых (или правых) идеалов;

3) коммутативные дедекиндовы области.

С учетом лемм 2.1 и 2.3 получаем следующее. Если кольцо $R$ принадлежит одному из классов колец 1–3, то алгебры $K'$ и $K$ удовлетворяют условиям (I) и (II).

Записанное ниже утверждение переносит лемму 5.9 из [8] на ситуацию двух алгебр $K'$ и $K$. При этом и доказательство этой леммы 5.9 после незначительных поправок годится в этой более общей ситуации.

**Лемма 2.4.** Условие (II) для алгебр $K'$ и $K$ будет справедливо, если фактор-кольцо $R/J(R)$ неразложимо.

А теперь можно в целом воспроизвести текст, помещенный в конце раздела 5 работы [8]. Сделаем это очень кратко.

Самым общим и удобным условием для ответов на вопросы (a)–(c) можно указать условие (II). Алгебры $K'$ и $K$ удовлетворяют условию (II), если кольцо $R$ относится к одному из следующих классов колец:

a) локальные кольца;

b) области главных левых (или правых) идеалов;

c) коммутативные дедекиндовы области;

d) $Y$ и $X$ – частично упорядоченные множества и $R$ не имеет ненулевых идемпотентов, кроме 1;

e) такое кольцо $R$, что фактор-кольцо $R/J(R)$ неразложимо.

В следующем разделе считаем, что алгебры $K'$ и $K$ удовлетворяют условию (II). В частности, это будет так, если $R$ – какое-то кольцо из списка a–e.

## 3. Вопросы (a)–(c)

Символы $Y$, $X$, $\bar{Y}$, $\bar{X}$, $K'$ и $K$ продолжают иметь значение, приданное им в предыдущем разделе. Также действует недавняя договоренность по поводу алгебр $K'$ и $K$. Серьезную роль будет играть $(n, m)$-условие, сформулированное ниже (см. текст перед теоремой 9.1 в [8]).

*Для любых* $n, m \in \mathbf{N}$ *из* $M(n, R) \cong M(m, R)$ *следует* $n = m$.

Например, $(n, m)$-условию удовлетворяют кольца $R$ из следующего списка: коммутативные кольца, локальные кольца, области главных левых (правых) идеалов.

**Теорема 3.1.** Для алгебр $K'$ и $K$, удовлетворяющих условию (II), справедливы следующие утверждения.

1. Любой изоморфизм алгебр $K' \to K$ индуцирует изоморфизм частично упорядоченных множеств $\bar{Y} \to \bar{X}$.

2. Если кольцо $R$ удовлетворяет $(n, m)$-условию, то всякий изоморфизм $K' \to K$ индуцирует изоморфизм предупорядоченных множеств $Y \to X$.

**Доказательство.**

1. Зафиксируем некоторый изоморфизм $\varphi$: $K' \to K$. Он треуголен, поскольку выполняется условие (II) (лемма 2.1). Если $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$, то $\alpha$ – изоморфизм алгебр $L_1 \to L$. Для всякого $y \in Y$ найдется такой $x \in X$, что $\alpha(f_y) = e_x$. Если $t \in Y$, $t \neq y$ и $\alpha(f_t) = e_s$, то из $f_y f_t = 0$ вытекает $e_x e_s = 0$ и, значит, $x \neq s$.

Пусть теперь $z \in X$. Так как обратный изоморфизм $\varphi^{-1}$ имеет вид: $\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, то заключаем, что $\alpha^{-1}(e_z) = f_y$ для какого-то $y \in Y$ и $\alpha(f_y) = e_z$. Делаем вывод, что $\alpha$ индуцирует биекцию частично упорядоченных множеств $\bar{\tau} : \bar{Y} \to \bar{X}$. Именно, если $\alpha(f_y) = e_x$, то $\bar{\tau}(y) = x$ и, следовательно, $\alpha(f_y) = e_{\bar{\tau}(y)}$. (Еще раз обратим внимание на соглашение в разделе 1 об индексах $x, y, \ldots$ в символах $e_x, f_y, \ldots$)

Покажем, что $\bar{\tau}$ – изоморфизм частично упорядоченных множеств. Пусть $y, z \in \bar{Y}$ и $y < z$. Тогда $(M_1)_{yz} = f_y M_1 f_z \neq 0$. Далее получаем $\varphi(f_y) = \alpha(f_y) + \delta(f_y) = e_{\bar{\tau}(y)} + \delta(f_y)$ и аналогично $\varphi(f_z) = e_{\bar{\tau}(z)} + \delta(f_z)$. Существует внутренний автоморфизм $\mu$ алгебры $K$, для которого по теореме 5.5 работы [8] верны равенства $\mu(e_{\bar{\tau}(y)} + \delta(f_y)) = e_{\bar{\tau}(y)}$, $\mu(e_{\bar{\tau}(z)} + \delta(f_z)) = e_{\bar{\tau}(z)}$. Теперь можем записать равенства $\mu\varphi(M_1)_{yz} = \mu\varphi(f_y M_1 f_z) = e_{\bar{\tau}(y)} M e_{\bar{\tau}(z)} = M_{\bar{\tau}(y)\bar{\tau}(z)} \neq 0$. Отсюда $\bar{\tau}(y) < \bar{\tau}(z)$.

Наоборот, если дано, что $\bar{\tau}(y) < \bar{\tau}(z)$, то аналогичным методом, используя изоморфизм $\varphi^{-1}$, можно получить неравенство $y < z$. Все сказанное подводит к мысли, что $\bar{\tau}$ – изоморфизм частично упорядоченных множеств $\bar{Y} \to \bar{X}$.

2. Снова предположим, что $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} : K' \to K$ – изоморфизм. Из доказательства п. 1 вытекает, что $\varphi$ индуцирует изоморфизм $\alpha$: $L_1 \to L$. Последний, в свою очередь, индуцирует изоморфизм между $R'_y$ и $R_{\bar{\tau}(y)}$ для всякого $y \in Y$ (подразумевается, что мы располагаем равенством $L_1 = \prod_{y \in Y} R'_y$, аналогичным равенству $L = \prod_{x \in X} R_x$ из предложения 1.1). Если $R'_y \cong M(n, R)$ и $R_{\bar{\tau}(y)} \cong M(m, R)$, то в силу $(n, m)$-условия получаем $n = m$. Из этого следует равномощность интервалов $[y]$ в $Y$ и $[\bar{\tau}(y)]$ в $X$. Следовательно, изоморфизм $\bar{\tau} : \bar{Y} \to \bar{X}$ можно поднять до изоморфизма предупорядоченных множеств $\tau$: $Y \to X$. ■

Вторая теорема дает положительный ответ на вопрос (с) для наших колец $K'$ и $K$.

**Теорема 3.2.** Пусть алгебры $K'$ и $K$ удовлетворяют условию (II). Тогда всякий изоморфизм между $K'$ и $K$ равен композиции диагонального изоморфизма из $K'$ в $K$ и внутреннего автоморфизма алгебры $K$.

**Доказательство.** Возьмем произвольный изоморфизм $\varphi: K' \to K$, и пусть $\bar{\tau} : \bar{Y} \to \bar{X}$ – изоморфизм из доказательства теоремы 3.1, п. 1. Образуем элемент $v = (v_{st})$ в $K$, где $v_{st} = \varphi(f_{\bar{\tau}^{-1}(t)})(s, t)$ для любых $s, t \in X$. Заметим, что $ve_x = \varphi(f_{\bar{\tau}^{-1}(x)})e_x$ при всяком $x \in X$. Имеем $v_{tt} = 1$, и поэтому элемент $v$ обратим в $K$ (предложение 4.1 в [8]).

Итак, для каждого $z \in Y$ можно записать равенство $ve_{\bar{\tau}(z)} = \varphi(f_z)e_{\bar{\tau}(z)}$. Справедливо также равенство $\varphi(f_z)v = \varphi(f_z)e_{\bar{\tau}(z)}$. Таким образом, имеем равенства $\varphi(f_z)v = ve_{\bar{\tau}(z)}$, $v^{-1}\varphi(f_z)v = e_{\bar{\tau}(z)}$ для всякого $z \in Y$. Пусть $\mu$ – внутренний автоморфизм алгебры $K$, определяемый элементом $v$. Тогда верно равенство $\mu\varphi(f_z) = e_{\bar{\tau}(z)}$, $z \in Y$. Полагая $\gamma = \mu\varphi$, получаем $\varphi = \mu^{-1}\gamma$, где $\gamma$ – диагональный изоморфизм $K' \to K$, а $\mu^{-1}$ – внутренний автоморфизм алгебры $K$. ■

**Следствие 3.3.** Пусть алгебры $I(Y, R)$ и $I(X, R)$ удовлетворяют условию (II), $Y$ и $X$ – частично упорядоченные множества. Тогда из изоморфизма $I(Y, R) \cong I(X, R)$ вытекает изоморфизм $Y \cong X$.

Некоторые кольца $R$, для которых алгебры $I(Y, R)$ и $I(X, R)$ удовлетворяют условию (II), указаны в конце предыдущего раздела.

**Замечание.** Если $X$ – конечное предупорядоченное множество, то кольцо инцидентности $I(X, R)$ часто называют кольцом структуральных матриц. Об этих кольцах хорошо написано во введении к статье [9], в которой доказана следующая теорема. Пусть $R$ – полупервичное нётерово кольцо, $B_1$ и $B_2$ – булевы матрицы порядка $n$ такие, что $M(n, B_1, R) \cong M(n, B_2, R)$. Тогда найдется подстановка $\tau$ порядка $n$ со свойством $B_2 = \tau B_1$.

## Список источников


1. *Кайгородов Е.В., Крылов П.А.* Кольца инцидентности и их автоморфизмы // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 41–50.
2. *Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д.* Об автоморфизмах и дифференцированиях редуцированных алгебр и коалгебр инцидентности // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2024. № 90. С. 33–39.
3. *Spiegel E., O'Donnell C.J.* Incidence Algebras. New York : Marcel Dekker, 1997. 334 p.
4. *Voss E.R.* On the isomorphism problem for incidence rings // Illinois J. Math. 1980. Vol. 24 (4). P. 624–638.
5. *Leroux P.* The isomorphism problem for incidence algebras of Möbius categories // Illinois J. Math. 1982. Vol. 26 (1). P. 52–61.
6. *Tapkin D.T.* Isomorphisms of formal matrix incidence rings // Russian Mathematics. 2017. Vol. 61. P. 73–79.
7. *Tapkin D.T.* Isomorphisms of formal matrix rings with zero trace ideals // Siberian Math. Zh. 2018. Vol. 59. P. 523–535.
8. *Krylov P., Tuganbaev A.* Incidence rings: automorphisms and derivations // arXiv:2305.02984v1 [math.RA], 2023. doi: 10.48550/arXiv.2305.02984
9. *Dăscălescu S., van Wyk L.* Do Isomorphic Structural Matrix Rings have Isomorphic Graphs? // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 124 (5). P. 1385–1391.


## References


1. Kaigorodov E.V., Krylov P.A. (2024) Incidence ring and their automorphisms. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 41–50.
2. Krylov P.A., Norbosambuev T.D. (2024) On automorphisms and derivations of reduced incidence algebras and coalgebras. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*. 90. pp. 33–39.
3. Spiegel E., O'Donnell C.J. (1997) *Incidence Algebras*. New York: Marcel Dekker.
4. Voss E.R. (1980) On the isomorphism problem for incidence rings. *Illinois Journal of Mathematics*. 24. pp. 624–638.
5. Leroux P. (1982) The isomorphism problem for incidence algebras of Möbius categories. *Illinois Journal of Mathematics*. 26. pp. 52–61.
6. Tapkin D.T. (2017) Isomorphisms of formal matrix incidence rings. *Russian Mathematics*. 61. pp. 73–79.
7. Tapkin D.T. (2018) Isomorphisms of formal matrix rings with zero trace ideals. *Siberian Mathematical Journal*. 59. pp. 523–535.
8. Krylov P., Tuganbaev A. (2023) Incidence rings: automorphisms and derivations. arXiv:2305.02984v1 [math.RA]. DOI: 10.48550/arXiv.2305.02984.
9. Dăscălescu S., van Wyk L. (1996) Do Isomorphic Structural Matrix Rings Have Isomorphic Graphs? *Proceedings of the American Mathematical Society*. 124. pp. 1385–1391.

***Сведения об авторах*:**
**Крылов Петр Андреевич** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: krylov@math.tsu.ru
**Норбосамбуев Цырендоржи Дашацыренович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nstsddts@yandex.ru

***Information about the authors*:**
**Krylov Piotr A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: krylov@math.tsu.ru
**Norbosambuev Tsyrendorzhi D.** (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nstsddts@yandex.ru

*The article was submitted 03.06.2024; accepted for publication 09.12.2024*

*Статья поступила в редакцию 03.06.2024; принята к публикации 09.12.2024*