ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2024 Математика и механика № 92
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 519.64 MSC: 65R20, 31B10
doi: 10.17223/19988621/92/3

Конструктивный метод решения некоторых классов гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода

Эльнур Гасан оглы Халилов

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Баку, Азербайджан;
Западно-Каспийский Университет, Баку, Азербайджан, elnurkhalil@mail.ru

Аннотация. Исследуются приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений, полученных из внешней краевой задачи Неймана и внешней краевой задачи с импедансным условием для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве. Следует указать, что в этих гиперсингулярных интегральных уравнениях участвует оператор, порожденный нормальной производной потенциала двойного слоя. Построенный А.М. Ляпуновым контрпример показывает, что для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью нормальная производная, вообще говоря, не существует, т.е. оператор, порожденный нормальной производной потенциала двойного слоя, не определен в пространстве непрерывных функций. Применяя метод регуляризации, рассматриваемые гиперсингулярные интегральные уравнения внешней краевой задачи Неймана и внешней краевой задачи с импедансным условием для уравнения Гельмгольца приведены к слабосингулярным интегральным уравнениям. Построив квадратурные формулы для одного класса криволинейных интегралов, рассматриваемые интегральные уравнения мы заменяем системой алгебраических уравнений. Затем с использованием теоремы Г.М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений доказано, что полученные системы алгебраических уравнений разрешимы единственным образом и решения системы алгебраических уравнений сходятся к значению точного решения рассматриваемых гиперсингулярных интегральных уравнений в опорных точках. Указывается скорость сходимости метода.
Ключевые слова: краевая задача Неймана, краевая задача с импедансным условием, уравнение Гельмгольца, метод интегральных уравнений, криволинейный гиперсингулярный интеграл, метод коллокации

Для цитирования: Халилов Э.Г. Конструктивный метод решения некоторых классов гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 29–47. doi: 10.17223/19988621/92/3

Original article

Constructive method for solving some classes of hypersingular integral equations of the second kind

Elnur H. Khalilov

Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan;
Western Caspian University, Baku, Azerbaijan, elnurkhalil@mail.ru

Abstract. The paper studies approximate methods for solving hypersingular integral equations obtained from the Neumann external boundary value problem and from the external boundary value problem with the impedance condition for the Helmholtz equation in two-dimensional space. It should be pointed out that these hypersingular integral equations involve an operator generated by the normal derivative of the double layer potential. A counterexample built by A.M. Lyapunov shows that the normal derivative for a double layer potential with continuous density, generally speaking, does not exist, i.e., the operator generated by the normal derivative of the double layer potential is not defined in the space of continuous functions. Using the regularization method, the considered hypersingular integral equations of the external Neumann boundary value problem and the external boundary value problem with the impedance condition for the Helmholtz equation are reduced to weakly singular integral equations. Having constructed quadrature formulas for one class of curvilinear integrals, the integral equations under consideration are replaced by a system of algebraic equations. Then, using G.M. Vainikko's theorem on convergence for linear operator equations, we prove that the resulting systems of algebraic equations are uniquely solvable, and the solutions to the system of algebraic equations converge to the value of the exact solution of the considered hypersingular integral equations at the reference points, and the rate of convergence of the method is indicated.

Keywords: Neumann boundary value problem, impedance boundary value problem, Helmholtz equation, integral equations method, curvilinear hypersingular integral, collocation method

For citation: Khalilov, E.H. (2024) Constructive method for solving some classes of hypersingular integral equations of the second kind. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 29–47. doi: 10.17223/19988621/92/3

1. Введение и постановка задачи

Известно, что в частных случаях (когда область является кругом, квадратом и др.) можно найти точное решение внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве. Однако во многих случаях невозможно найти точное решение внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца. В связи с этим возникает интерес к исследованию приближенного решения таких краевых задач. Одним из методов решения внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца является приведение к интегральному уравнению второго рода. Отметим, что основное преимущество применения метода интегральных уравнений к исследованию внешних краевых задач заключается в том, что подобный подход позволяет свести задачу, поставленную для неограниченной области, к задаче для ограниченной области меньшей размерности.

Пусть $D \subset R^2$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей L, а f, g и λ – заданные непрерывные функции на L. Рассмотрим следующие краевые задачи для уравнения Гельмгольца.

Внешняя краевая задача Неймана. Найти функцию $u \in C^{(2)}\left(R^2 \setminus \overline{D}\right) \cap C\left(R^2 \setminus D\right)$, обладающую нормальной производной в смысле равномерной сходимости, т.е. предел

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu(x)} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \big(\nu(x), grad\, u\left(x + h\,\nu(x)\right)\big), \quad x \in L,$$

существует равномерно на L, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в $R^2 \setminus \overline{D}$, условию излучения Зоммерфельда

$$\left(\frac{x}{|x|}, grad\, u(x)\right) - i\,k\,u(x) = o\left(\frac{1}{|x|^{1/2}}\right), \; x \to \infty,$$

равномерно по всем направлениям $x/|x|$, и граничному условию $\dfrac{\partial u(x)}{\partial \nu(x)} = f(x)$ на L,

где $\nu(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in L$, Δ – оператор Лапласа, k – волновое число, причем $\operatorname{Im} k \geq 0$.

Внешняя задача с импедансным краевым условием. Найти функцию $u \in C^{(2)}\left(R^2 \setminus \overline{D}\right) \cap C\left(R^2 \setminus D\right)$, обладающую нормальной производной в смысле равномерной сходимости, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца в $R^2 \setminus \overline{D}$, условию излучения Зоммерфельда на бесконечности и граничному условию $\dfrac{\partial u(x)}{\partial \nu(x)} + \lambda(x) u(x) = g(x)$ на L, где $\operatorname{Im}\left(\overline{k}\,\lambda(x)\right) \geq 0$, $x \in L$.

Пусть функция $u(x)$ является решением внешней краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца. В работе [1. С. 116] показано, что неизвестные граничные значения $\psi(x) = u(x)$, $x \in L$ удовлетворяют граничному интегральному уравнению второго рода

$$\psi - K\psi = -S\,f \tag{1}$$

и гиперсингулярному интегральному уравнению первого рода

$$T\psi = f + \tilde{K}\,f, \tag{2}$$

где

$$(S\varphi)(x) = 2\int_L \Phi_k(x, y)\varphi(y)\,dl_y, \quad x \in L,$$

$$(K\varphi)(x) = 2\int_L \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)}\varphi(y)\,dl_y, \quad x \in L,$$

$$(\tilde{K}\varphi)(x) = 2\int_L \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(x)}\varphi(y)\,dl_y, \quad x \in L,$$

$$(T\varphi)(x)=2\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\left(\int_L \frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\nu(y)}\varphi(y)\,dl_y\right),\quad x\in L,$$

$\Phi_k(x,y)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, т.е.

$$\Phi_k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-y|} & при\ \ k=0,\\ \dfrac{i}{4}H_0^{(1)}\left(k|x-y|\right) & при\ \ k\neq 0,\end{cases}$$

здесь $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, определяемая формулой $H_0^{(1)}(z)=J_0(z)+i\,N_0(z)$, $J_0(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{2m}$ – функция Бесселя нулевого порядка, $N_0(z)=\dfrac{2}{\pi}\left(\ln\dfrac{z}{2}+C\right)J_0(z)+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{l=1}^{m}\dfrac{1}{l}\right)\dfrac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{2m}$ – функция Неймана нулевого порядка, а $C=0,57721...$ – постоянная Эйлера.

Построенный А.М. Ляпуновым (см.: [2. С. 89–90]) контрпример показывает, что для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью нормальная производная, вообще говоря, не существует. Следовательно, оператор T не определен в пространстве $C(L)$ всех непрерывных на кривой L функций с нормой $\|\varphi\|_\infty=\max\limits_{x\in L}|\varphi(x)|$. Кроме того, несмотря на разрешимость интегральных уравнений (1) и (2), уравнение (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда волновое число k не совпадает с собственным значением внутренней задачи Дирихле, а уравнение (2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда волновое число k не совпадает с собственным значением внутренней задачи Неймана. Однако в работе [1. С. 117] показано, что если функция $u(x)$ имеет нормальную производную в смысле равномерной сходимости, то гиперсингулярное интегральное уравнение второго рода

$$\psi-K\psi-i\eta T\psi=-Sf-i\eta\left(f+\tilde{K}f\right),\tag{3}$$

полученное из линейных комбинаций уравнений (1) и (2), разрешимо единственным образом в пространстве $\mathrm{N}(L)$ – линейном пространстве всех непрерывных функций ψ, потенциал двойного слоя с плотностью ψ которых имеет непрерывные нормальные производные на обеих сторонах кривой L, где $\eta\neq 0$ – произвольное действительное число, причем $\eta\,\mathrm{Re}\,k\geq 0$. Следует указать, что внешнюю краевую задачу Неймана для уравнения Гельмгольца можно привести к различным интегральным уравнениям, приближенные решения которых исследованы в работах [3–6]. Уравнение (3) имеет то преимущество, что его решение является граничным значением решения внешней краевой задачи Неймана на L. При этом функция

$$u(x)=\int_L\left\{\psi(y)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\nu(y)}-f(y)\Phi_k(x,y)\right\}dl_y,\ x\in R^2\setminus\overline{D},$$

является решением внешней краевой задачи Неймана, если $\psi \in \mathrm{N}(L)$ является решением гиперсингулярного интегрального уравнения (3). Кроме того, следует указать, что решение уравнения (3) является решением уравнения метода нулевого поля, полученного Уотерменом [7] для рассеяния акустических волн.

Кроме того, в работе [1. С. 111] показано, что комбинация потенциалов простого и двойного слоев

$$u(x)=\int_L \left\{ \Phi_k(x,y)+i\eta \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \nu(y)} \right\} \varphi(y)\,dl_y\,,\quad x\in R^2 \setminus \overline{D}\,,$$

где $\eta \neq 0$ – произвольное вещественное число, причем $\eta\,\mathrm{Re}\,k \geq 0$, является решением краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием, если плотность φ есть решение гиперсингулярного интегрального уравнения

$$(1-i\eta\lambda)\varphi-\left(\tilde{K}+i\eta T+i\eta\lambda K+\lambda S\right)\varphi=-2g\,. \tag{4}$$

Отметим, что в работе [8] дано обоснование метода коллокации для гиперсингулярного интегрального уравнения внешней краевой задачи Неймана, а в работе [9] – метода коллокации для гиперсингулярного интегрального уравнения внешней краевой задачи с импедансным условием для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве. Однако известно, что в трехмерном пространстве фундаментальное решение уравнения Гельмгольца имеет вид:

$$\Phi_k(x,y)=\frac{\exp\left(ik|x-y|\right)}{4\pi|x-y|},\ \ x,y\in R^3,\ x\neq y,$$

и поэтому интегральные операторы, участвующие в уравнениях (3) и (4), строго отличаются от интегральных операторов, участвующих в интегральных уравнениях внешней краевой задачи Неймана и внешней краевой задачи с импедансным условием для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве.

Следует отметить, что в работе [10] исследованы приближенные методы решения одного класса гиперсингулярных интегральных уравнений внешней краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца. Здесь после дискретизации получаются гиперсингулярные интегральные уравнения с более простыми ядрами. Настоящая же работа посвящена исследованию приближенного метода решения гиперсингулярных интегральных уравнений (3) и (4) методом приведения их к слабосингулярному интегральному уравнению, что позволяет найти решение полученных уравнений в более широком пространстве и налагать более слабые условия на заданную функцию *f*.

2. Обоснование метода коллокации для гиперсингулярного интегрального уравнения (3)

Так как оператор T является неограниченным в пространстве $\mathrm{N}(L)$ (см.: [1. С. 73]), то проведем регуляризацию уравнения (3). Пусть волновое число k_0 не совпадает с собственными значениями внутренних задач Дирихле или Неймана (для этого достаточно выбрать любое значение k_0 с $\mathrm{Im}\,k_0>0$). В дальнейшем обозначим индексом «0» то обстоятельство, что параметр k, входящий в операторы S, $\tilde{K}$ и T, равен значению k_0. Поскольку оператор

$$A_0 = -S_0\left(I - \tilde{K}_0\right)^{-1}\left(I + \tilde{K}_0\right)^{-1} : C(L) \to \mathrm{N}(L)$$

представляет собой обратный оператор к $T_0 : \mathrm{N}(L) \to C(L)$ (см.: [1. С. 102]), уравнение (3) можно преобразовать к эквивалентному виду:

$$\psi + A\psi = Bf \ , \tag{5}$$

причем полученное уравнение рассматривается в пространстве $C(L)$, где I – единичный оператор на $C(L)$,

$$A\psi = \frac{1}{i\eta} A_0\left(K + i\eta\left(T - T_0\right) - I\right)\psi\,, \quad Bf = \frac{1}{i\eta} A_0\left(S + i\eta\left(I + \tilde{K}\right)\right) f\ .$$

Следует указать, что операторы S, K и $T - T_0$ являются компактными в пространстве $C(L)$ (см.: [1. С. 73–74]), а значит, и оператор A является компактным в пространстве $C(L)$ (см.: [1. С. 105]). Однако, несмотря на обратимость операторов $I + \tilde{K}_0$ и $I - \tilde{K}_0$, явные виды обратных операторов $\left(I + \tilde{K}_0\right)^{-1}$ и $\left(I - \tilde{K}_0\right)^{-1}$ неизвестны, следовательно, неизвестны явные виды операторов A и B.

Замечания 1. В работе [10] решение уравнения, полученного после дискретизации, исследуется в пространстве $C^{1,\alpha}(L)$, а на заданную функцию f налагается условие $f \in C^{0,\beta}(L)$, где $C^{0,\beta}(L)$ – пространство Гельдера с показателем β, $C^{1,\alpha}(L)$ – пространство непрерывно дифференцируемых функций, производная которых удовлетворяет условию Гельдера с показателем α, причем $0 < \alpha \le \beta < 1$. Как видно, решение уравнения (5) исследуется в пространстве $C(L)$ и заданная функция $f \in C(L)$. Это является одним из преимуществ применяемого метода.

Для обоснования метода коллокации вначале построим квадратурные формулы для $(A\psi)(x)$ и $(Bf)(x)$, $x \in L$. Предположим, что кривая L задана параметрическим уравнением $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t)\right)$, $t \in [a,b]$. Разобьем промежуток $[a,b]$ на $n > 2M_0(b-a)/d$ равных частей: $t_p = a + \dfrac{(b-a)p}{n}$, $p = \overline{0,n}$, где

$$M_0 = \max_{t\in[a,b]} \sqrt{\left(x_1'(t)\right)^2 + \left(x_2'(t)\right)^2} < +\infty$$

(см.: [11. С. 560]) и d – стандартный радиус (см.: [12. С. 400]). В качестве опорных точек возьмем $x\left(\tau_p\right)$, $p = \overline{1,n}$, где $\tau_p = a + \dfrac{(b-a)(2p-1)}{2n}$. Тогда кривая L разбивается на элементарные части: $L = \bigcup\limits_{p=1}^{n} L_p$, где $L_p = \left\{x(t):\ t_{p-1} \le t \le t_p\right\}$.

Известно, что (см.: [13])

(1) $\forall p \in \{1,2,\ldots,n\}:\ r_p(n) \sim R_p(n)$, где

$$r_p(n) = \min\left\{\left|x\left(\tau_p\right) - x\left(t_{p-1}\right)\right|, \left|x\left(t_p\right) - x\left(\tau_p\right)\right|\right\},\ R_p(n) = \max\left\{\left|x\left(\tau_p\right) - x\left(t_{p-1}\right)\right|, \left|x\left(t_p\right) - x\left(\tau_p\right)\right|\right\},$$

а запись $a(n) \sim b(n)$ означает, что $C_1 \le \dfrac{a(n)}{b(n)} \le C_2$, где C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от n;

(2) $\forall p \in \{1,2,...,n\}$: $R_p(n) \le d/2$;

(3) $\forall p, j \in \{1,2,...,n\}$: $r_j(n) \sim r_p(n)$;

(4) $r(n) \sim R(n) \sim \dfrac{1}{n}$, где $R(n) = \max\limits_{p=\overline{1,n}} R_p(n)$, $r(n) = \min\limits_{p=\overline{1,n}} r_p(n)$.

В дальнейшем такое разбиение будем называть разбиением кривой L на «регулярные» элементарные части.

Пусть $L_d(x)$ и $\Gamma_d(x)$ – части соответственно кривой L и касательной прямой $\Gamma(x)$ в точке $x \in L$, заключенные внутри круга $B_d(x)$ радиуса d с центром в точке x. Кроме того, пусть $\tilde{y} \in \Gamma(x)$ – проекция точки $y \in L$. Тогда

$$|x-\tilde{y}| \le |x-y| \le C_1(L)|x-\tilde{y}| \quad \text{и} \quad mesL_d(x) \le C_2(L) mes\Gamma_d(x),$$

где $C_1(L)$ и $C_2(L)$ – положительные постоянные, зависящие лишь от L (если L – окружность, то $C_1(L) = \sqrt{2}$ и $C_2(L) = 2$).

Поступая точно так же, как и в доказательстве леммы 2.1 работы [14], можно показать справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Существуют такие постоянные $C_0' > 0$ и $C_1' > 0$, не зависящие от n, для которых при $\forall p, j \in \{1,2,...,n\}$, $j \ne p$, и $\forall y \in L_j$ справедливы следующие неравенства:*

$$C_0' \left| y - x(\tau_p) \right| \le \left| x(\tau_j) - x(\tau_p) \right| \le C_1' \left| y - x(\tau_p) \right|.$$

Пусть

$$\Phi_k^n(x,y) = \frac{i}{4} H_{0,n}^{(1)}(k|x-y|), \; x, y \in L, \; x \ne y,$$

где

$$H_{0,n}^{(1)}(z) = J_{0,n}(z) + i\, N_{0,n}(z), \quad J_{0,n}(z) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

и

$$N_{0,n}(z) = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{z}{2} + C\right) J_{0,n}(z) + \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l}\right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}.$$

В работах [15] и [16] доказано, что выражения

$$(S_n f)(x(\tau_p)) = \frac{2(b-a)}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne p}}^{n} \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2}\, f(x(\tau_j)), \quad (6)$$

$$(K_n \psi)(x(\tau_p)) = \frac{2(b-a)}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne p}}^{n} \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \nu(x(\tau_j))} \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2}\, \psi(x(\tau_j)), \quad (7)$$

$$(\tilde{K}_n f)(x(\tau_p)) = \frac{2(b-a)}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne p}}^{n} \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \nu(x(\tau_p))} \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2}\, f(x(\tau_j)) \quad (8)$$

и

$$((T-T_0)_n \psi)(x(\tau_p)) =$$

$$= \frac{2(b-a)}{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \frac{\partial}{\partial\nu(x(\tau_p))} \left(\frac{\partial\Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))} - \frac{\partial\Phi_{k_0}^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))} \right) \times \tag{9}$$
$$\times \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2}\, \psi(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p=\overline{1,n}$, являются квадратурными формулами для интегралов $(Sf)(x)$, $(K\psi)(x)$, $(\tilde{K}f)(x)$ и $((T-T_0)\psi)(x)$ соответственно, причем

$$\max_{p=\overline{1,n}} \left|(Sf)(x(\tau_p)) - (S_n f)(x(\tau_p))\right| \le M^1 \left(\omega(f, 1/n) + \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right),$$
$$\max_{p=\overline{1,n}} \left|(K\psi)(x(\tau_p)) - (K_n\psi)(x(\tau_p))\right| \le M \left(\omega(\psi, 1/n) + \|\psi\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right),$$
$$\max_{p=\overline{1,n}} \left|(\tilde{K}f)(x(\tau_p)) - (\tilde{K}_n f)(x(\tau_p))\right| \le M \left(\omega(f, 1/n) + \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right)$$

и

$$\max_{p=\overline{1,n}} \left|((T-T_0)\psi)(x(\tau_p)) - ((T-T_0)_n \psi)(x(\tau_p))\right| \le M \left(\omega(\psi, 1/n) + \|\psi\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right),$$

где через $\omega(\varphi,\delta)$ обозначен модуль непрерывности функции $\varphi \in C(L)$, т.е.

$$\omega(\varphi,\delta) = \max_{\substack{|x-y|\le\delta\\ x,y\in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad \delta > 0 .$$

Пользуясь квадратурными формулами (6)–(9) получаем, что выражения

$$(C_n\psi)(x(\tau_p)) = \sum_{j=1}^{n} c_{pj}\, \psi(x(\tau_j)) \tag{10}$$

и

$$(G_n f)(x(\tau_p)) = \sum_{j=1}^{n} g_{pj}\, f(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p=\overline{1,n}$, являются квадратурными формулами для интегралов

$$(C\psi)(x) = (K\psi)(x) + i\eta((T-T_0)\psi)(x) - \psi(x)$$

и

$$(Gf)(x) = (Sf)(x) + i\eta\, (\tilde{K}f)(x) + i\eta\, f(x)$$

соответственно, причем справедливы следующие оценки:

$$\max_{p=\overline{1,n}} \left|(C\psi)(x(\tau_p)) - (C_n\psi)(x(\tau_p))\right| \le M \left(\omega(\psi, 1/n) + \|\psi\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right),$$
$$\max_{p=\overline{1,n}} \left|(Gf)(x(\tau_p)) - (G_n f)(x(\tau_p))\right| \le M \left(\omega(f, 1/n) + \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right),$$

[1] Здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

здесь

$$c_{pp} = -1 \quad \text{при} \quad p = \overline{1,n},$$

$$c_{pj} = \frac{2(b-a)}{n}\left(i\eta \frac{\partial}{\partial\nu(x(\tau_p))}\left(\frac{\partial\left(\Phi_k^n\left(x(\tau_p), x(\tau_j)\right) - \Phi_{k_0}^n\left(x(\tau_p), x(\tau_j)\right)\right)}{\partial\nu(x(\tau_j))}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\Phi_k^n\left(x(\tau_p), x(\tau_j)\right)}{\partial\nu(x(\tau_j))}\right) \times \sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2}$$

$$\text{при} \quad p, j = \overline{1,n}, \quad p \neq j,$$

и

$$g_{pp} = i\eta \quad \text{при} \quad p = \overline{1,n},$$

$$g_{pj} = \frac{2(b-a)}{n}\left(\Phi_k^n\left(x(\tau_p), x(\tau_j)\right) + i\eta \frac{\partial\Phi_k^n\left(x(\tau_p), x(\tau_j)\right)}{\partial\nu(x(\tau_p))}\right)\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2}$$

$$\text{при} \quad p, j = \overline{1,n}, \quad p \neq j.$$

Через I^n обозначим единичную матрицу n-го порядка, а через C^n – пространство n-мерных векторов $z^n = \left(z_1^n, z_2^n, \ldots, z_n^n\right)^{\mathrm{T}}$, $z_l^n \in C$, $l = \overline{1,n}$, с нормой $\left\|z^n\right\| = \max\limits_{l=\overline{1,n}}\left|z_l^n\right|$, где запись a^{T} означает транспонировку вектора a. Рассмотрим n-мерную матрицу $\tilde{K}_0^n = \left(\tilde{k}_{pj}^0\right)_{p,j=1}^n$ с элементами

$$\tilde{k}_{pj}^0 = \begin{cases} 0 \quad \text{при } p = j, \\ \dfrac{2(b-a)}{n} \dfrac{\partial\Phi_{k_0}^n\left(x(\tau_p), x(\tau_j)\right)}{\partial\nu(x(\tau_p))}\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2} \quad \text{при } p \neq j. \end{cases}$$

Поступая точно так же, как и в работе [17], нетрудно доказать справедливость следующих двух лемм.

Лемма 2. *Если* $\operatorname{Im} k > 0$, *то существует обратная матрица* $\left(I^n + \tilde{K}_0^n\right)^{-1}$, *причем*

$$M_1 = \sup_n \left\|\left(I^n + \tilde{K}_0^n\right)^{-1}\right\| < +\infty$$

и $$\max_{l=\overline{1,n}}\left|\left(\left(I + \tilde{K}_0\right)^{-1} g\right)(x(\tau_l)) - \sum_{j=1}^n \tilde{k}_{lj}^+ g(x(\tau_l))\right| \le M\left(\omega(g, 1/n) + \|g\|_\infty \frac{\ln n}{n}\right),$$

где $g \in C(L)$, *а* $\tilde{k}_{lj}^+$ *– элемент l-й строки и j-го столбца матрицы* $\left(I^n + \tilde{K}_0^n\right)^{-1}$.

Лемма 3. *Если* $\operatorname{Im} k > 0$, *то существует обратная матрица* $\left(I^n - \tilde{K}_0^n\right)^{-1}$, *причем*

$$M_2 = \sup_n \left\|\left(I^n - \tilde{K}_0^n\right)^{-1}\right\| < +\infty$$

и $$\max_{l=\overline{1,n}}\left|\left(\left(I - \tilde{K}_0\right)^{-1} g\right)(x(\tau_l)) - \sum_{j=1}^n \tilde{k}_{lj}^- g(x(\tau_l))\right| \le M\left(\omega(g, 1/n) + \|g\|_\infty \frac{\ln n}{n}\right),$$

где $g \in C(L)$, *а* $\tilde{k}_{lj}^{-}$ *– элемент l-й строки и j-го столбца матрицы* $\left(I^{n} - \tilde{K}_{0}^{n}\right)^{-1}$.

Пусть

$$f_{pj}^{0} = \begin{cases} 0 \quad \text{при } p = j, \\ \dfrac{2(b-a)}{n} \Phi_{k_0}^{n}\left(x(\tau_p), x(\tau_j)\right)\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2} \quad \text{при } p \neq j, \end{cases} \tag{11}$$

и

$$a_{lj} = -\frac{1}{i\eta}\sum_{p=1}^{n}\left(f_{lp}^{0}\left(\sum_{m=1}^{n} \tilde{k}_{pm}^{-}\left(\sum_{t=1}^{n} \tilde{k}_{mt}^{+} c_{tj}\right)\right)\right), \quad l, j = \overline{1,n}.$$

Теорема 1. *Выражение*

$$(A_n\psi)(x(\tau_l)) = \sum_{j=1}^{n} a_{lj}\, \psi(x(\tau_j)) \tag{12}$$

в точках $x(\tau_l)$, $l = \overline{1,n}$, *является квадратурной формулой для* $(A\psi)(x)$, *причем*

$$\max_{l=\overline{1,n}} \left|(A\psi)x(\tau_l) - (A_n\psi)x(\tau_l)\right| \le M\left(\omega(\psi, 1/n) + \|\psi\|_{\infty}\frac{\ln n}{n}\right).$$

Доказательство. Так как

$$(A_n\psi)x(\tau_l) = -\frac{1}{i\eta}\sum_{j=1}^{n}\left(f_{lj}^{0}\left(\sum_{p=1}^{n} \tilde{k}_{jp}^{-}\left(\sum_{m=1}^{n} \tilde{k}_{pm}^{+}\left(\sum_{t=1}^{n} c_{mt}\, \psi(x(\tau_t))\right)\right)\right)\right),$$

то справедливо представление

$$(A\psi)(x(\tau_l)) - (A_n\psi)(x(\tau_l)) = -\frac{1}{i\eta}\left(S_0\left(I - \tilde{K}_0\right)^{-1}\left(I + \tilde{K}_0\right)^{-1} C\psi\right)(x(\tau_l)) -$$

$$-\sum_{j=1}^{n} f_{lj}^{0}\left(\left(I - \tilde{K}_0\right)^{-1}\left(I + \tilde{K}_0\right)^{-1} C\psi\right)(x(\tau_j)) -$$

$$-\frac{1}{i\eta}\sum_{j=1}^{n} f_{lj}^{0}\left[\left(\left(I - \tilde{K}_0\right)^{-1}\left(I + \tilde{K}_0\right)^{-1} C\psi\right)(x(\tau_j)) - \sum_{p=1}^{n}\tilde{k}_{jp}^{-}\left(\left(I + \tilde{K}_0\right)^{-1} C\psi\right)(x(\tau_p))\right] -$$

$$-\frac{1}{i\eta}\sum_{j=1}^{n} f_{lj}^{0}\left(\sum_{p=1}^{n}\tilde{k}_{jp}^{-}\left[\left(\left(I + \tilde{K}_0\right)^{-1} C\psi\right)(x(\tau_p)) - \sum_{m=1}^{n}\tilde{k}_{pm}^{+}(C\psi)(x(\tau_m))\right]\right) -$$

$$-\frac{1}{i\eta}\sum_{j=1}^{n} f_{lj}^{0}\left(\sum_{p=1}^{n}\tilde{k}_{jp}^{-}\left(\sum_{m=1}^{n}\tilde{k}_{pm}^{+}\left[(C\psi)(x(\tau_m)) - \sum_{t=1}^{n} c_{mt}\,\psi(x(\tau_t))\right]\right)\right).$$

Тогда, учитывая оценки погрешности квадратурных формул (6) и (10) и принимая во внимание леммы 2 и 3, имеем

$$\left|(A\psi)(x(\tau_l)) - (A_n\psi)(x(\tau_l))\right| \le$$

$$\le M\left[\left\|\left(I - \tilde{K}_0\right)^{-1}\left(I + \tilde{K}_0\right)^{-1} C\psi\right\|_{\infty}\frac{\ln n}{n} + \omega\left(\left(I - \tilde{K}_0\right)^{-1}\left(I + \tilde{K}_0\right)^{-1} C\psi, 1/n\right)\right] +$$

$$+M\left[\left\|\left(I + \tilde{K}_0\right)^{-1} C\psi\right\|_{\infty}\frac{\ln n}{n} + \omega\left(\left(I + \tilde{K}_0\right)^{-1} C\psi, 1/n\right)\right]\sum_{j=1}^{n}\left|f_{lj}^{0}\right| +$$

$$+M\left[\|C\psi\|_{\infty}\frac{\ln n}{n} + \omega(C\psi, 1/n)\right]\sum_{j=1}^{n}\left(\left|f_{lj}^{0}\right|\sum_{p=1}^{n}\left|\tilde{k}_{jp}^{-}\right|\right) +$$

$$+M\left[\|\psi\|_\infty \frac{\ln n}{n}+\omega(\psi,1/n)\right]\sum_{j=1}^{n}\left(\left|f_{lj}^0\right|\sum_{p=1}^{n}\left(\left|\tilde{k}_{jp}^-\right|\sum_{m=1}^{n}\left|\tilde{k}_{pm}^+\right|\right)\right). \qquad (13)$$

Учитывая неравенства

$$\omega(K\psi,1/n)\le M\|\psi\|_\infty \frac{\ln n}{n}, \quad \omega((T-T_0)\psi,1/n)\le M\|\psi\|_\infty \frac{\ln n}{n},$$

имеем:

$$\omega(C\psi,1/n)\le\omega(K\psi,1/n)+|\eta|\,\omega((T-T_0)\psi,1/n)+\omega(\psi,1/n)\le\omega(\psi,1/n)+M\|\psi\|_\infty \frac{\ln n}{n}.$$

Известно (см.: [1. С. 92]), что для любого $g\in C(L)$ уравнение

$$\rho+\tilde{K}_0\rho=g$$

имеет единственное решение $\rho_*\in C(L)$. Тогда получаем, что

$$\omega\left(\left(I+\tilde{K}_0\right)^{-1}g,1/n\right)=\omega(\rho_*,1/n)=\omega\left(g-\tilde{K}_0\rho_*,1/n\right)\le\omega(g,1/n)+\omega\left(\tilde{K}_0\rho_*,1/n\right)\le$$

$$\le\omega(g,1/n)+M\|\rho_*\|_\infty \frac{\ln n}{n}=\omega(g,1/n)+M\left\|\left(I+\tilde{K}_0\right)^{-1}g\right\|_\infty \frac{\ln n}{n}\le$$

$$\le\omega(g,1/n)+M\left\|\left(I+\tilde{K}_0\right)^{-1}\right\|\|g\|_\infty \frac{\ln n}{n}.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\omega\left(\left(I-\tilde{K}_0\right)^{-1}f,1/n\right)\le\omega(f,1/n)+M\|f\|_\infty \frac{\ln n}{n}.$$

Отсюда находим цепочку неравенств

$$\omega\left(\left(I-\tilde{K}_0\right)^{-1}\left(I+\tilde{K}_0\right)^{-1}C\psi,1/n\right)\le\omega\left(\left(I+\tilde{K}_0\right)^{-1}C\psi,1/n\right)+M\left\|\left(I+\tilde{K}_0\right)^{-1}C\psi\right\|_\infty \frac{\ln n}{n}\le$$

$$\le\omega(C\psi,1/n)+M\|C\psi\|_\infty \frac{\ln n}{n}+M\left\|\left(I+\tilde{K}_0\right)^{-1}C\psi\right\|_\infty \frac{\ln n}{n}\le M\left(\omega(\psi,1/n)+\|\psi\|_\infty \frac{\ln n}{n}\right).$$

Поступая точно так же, как и в работе [15], легко показать, что выражение $\sum_{j=1}^{n}\left|f_{lj}^0\right|$ в точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла

$$2\int_L\left|\Phi_{k_0}(x,y)\right|dl_y,$$

причем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|2\int_L\left|\Phi_{k_0}(x(\tau_l),y)\right|dl_y-\sum_{j=1}^{n}\left|f_{lj}^0\right|\right|\le M\frac{\ln n}{n}.$$

Следовательно,

$$\max_{l=\overline{1,n}}\sum_{j=1}^{n}\left|f_{lj}^0\right|\le 2\max_{x\in L}\int_L\left|\Phi_{k_0}(x,y)\right|dl_y+M\frac{\ln n}{n}. \qquad (14)$$

Кроме того, из леммы 2 и 3 очевидны неравенства

$$\max_{j=\overline{1,n}}\sum_{p=1}^{n}\left|\tilde{k}_{jp}^+\right|\le M_1, \quad \max_{j=\overline{1,n}}\sum_{p=1}^{n}\left|\tilde{k}_{jp}^-\right|\le M_2. \qquad (15)$$

В результате, принимая во внимание полученные выше неравенства в (13), получаем доказательство теоремы.

Аналогичным образом можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Выражение*

$$\left(B_n f\right)\left(x\left(\tau_l\right)\right)=\sum_{j=1}^{n} b_{l\,j}\ f\left(x\left(\tau_j\right)\right) \tag{16}$$

в точках $x\left(\tau_l\right), l=\overline{1,n}$*, является квадратурной формулой для* $\left(Bf\right)\left(x\right)$*, причем*

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|\left(Bf\right)x\left(\tau_l\right)-\left(B_n f\right)x\left(\tau_l\right)\right|\le M\left(\omega\left(f,1/n\right)+\|f\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right),$$

где

$$b_{l\,j}=-\frac{1}{i\eta}\sum_{p=1}^{n}\left(f_{l\,p}^{0}\left(\sum_{m=1}^{n}\tilde{k}_{p\,m}^{-}\left(\sum_{t=1}^{n}\tilde{k}_{mt}^{+}\,g_{t\,j}\right)\right)\right),\quad l,j=\overline{1,n}.$$

Теперь дадим обоснование метода коллокации для уравнения (5). Используя квадратурные формулы (12) и (16), уравнение (5) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^n-приближенных значений $\psi\left(x\left(\tau_l\right)\right),\quad l=\overline{1,n}$, которую запишем в виде:

$$\left(I^n+A^n\right)z^n=B^n f^n, \tag{17}$$

где $A^n=\left(a_{l\,j}\right)_{l,j=1}^{n}$, $B^n=\left(b_{l\,j}\right)_{l,j=1}^{n}$, $f^n=p^n f$, а $p^n:C\left(L\right)\to C^n$ – линейный ограниченный оператор, определяемый формулой $p^n f=\left(f\left(x\left(\tau_1\right)\right),f\left(x\left(\tau_2\right)\right),...,f\left(x\left(\tau_n\right)\right)\right)^{\mathrm{T}}$ и называемый оператором простого сноса.

Теорема 3. *Уравнения* (5) *и* (17) *имеют единственные решения* $\psi_*\in C\left(L\right)$ *и* $z_*^n\in C^n$ *соответственно, при этом* $\left\|z_*^n-p^n\psi_*\right\|\to 0$ *при* $n\to\infty$ *с оценкой скорости сходимости*

$$\left\|z_*^n-p^n\psi_*\right\|\le M\left(\omega\left(f,1/n\right)+\frac{\ln n}{n}\right).$$

Доказательство. Отметим, что здесь мы будем использовать теорему Г.М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений [18], при этом воспользуемся обозначениями и необходимыми определениями и предложениями из работы [18]. Проверим выполнение условий теоремы 4.2 работы [18]. В монографии [1. С. 117] показано, что $Ker\left(I+A\right)=\left\{0\right\}$. Очевидно, что операторы I^n+A^n фредгольмовы с нулевым индексом, и система операторов простого сноса $P=\left\{p^n\right\}$ является связывающей для пространств $C\left(L\right)$ и C^n [18. С. 6–7]. Тогда по определению 1.1 из [18] в силу теоремы 2 получаем, что $B^n f^n\xrightarrow{P}Bf$. Теперь покажем, что $I^n+A^n\xrightarrow{PP}I+A$. Принимая во внимание способ разбиения кривой L на «регулярные» элементарные части и лемму 1, нетрудно показать, что выражение

$$F^n\left(x\left(\tau_m\right)\right)=\sum_{\substack{t=1,\\ t\ne m}}^{n}\left|c_{m\,t}\right|$$

в точках $x(\tau_m)$, $m=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для слабо сингулярного интеграла

$$F(x)=2\int_L\left|\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\nu(y)}+i\eta\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\left(\frac{\partial\left(\Phi_k(x,y)-\Phi_{k_0}(x,y)\right)}{\partial\nu(y)}\right)\right|dl_y\ ,\ x\in L\ ,$$

причем

$$\max_{m=\overline{1,n}}\left|F\left(x(\tau_m)\right)-F^n\left(x(\tau_m)\right)\right|\le M\,\frac{\ln n}{n}\,.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\max_{m=\overline{1,n}}\sum_{t=1}^{n}\left|c_{mt}\right|=1+\max_{m=\overline{1,n}}F^n\left(x(\tau_m)\right)\le\\ \le 1+\max_{m=\overline{1,n}}\left|F\left(x(\tau_m)\right)-F^n\left(x(\tau_m)\right)\right|+\max_{x\in L}F(x)\le M.\end{gathered}\tag{18}$$

Принимая во внимание неравенства (14), (15) и (18), приходим к оценке

$$\left\|A^n z^n\right\|=\max_{l=\overline{1,n}}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{lj}\,z_j^n\right|\le M\left\|z^n\right\|,\ \forall z^n\in C^n\,.$$

Пусть $\psi_n\xrightarrow{P}\psi$. Тогда в силу теоремы 1 получаем, что

$$\begin{gathered}\left\|\left(I^n+A^n\right)\psi_n-p^n\left((I+A)\psi\right)\right\|\le\\ \le\left\|\psi_n-p^n\psi\right\|+M\left\|\psi_n-p^n\psi\right\|+\left\|A^n\left(p^n\psi\right)-p^n\left(A\psi\right)\right\|\to 0\\ \text{при }\ n\to\infty\,,\end{gathered}$$

следовательно, по определению 2.1 из [18] имеем, что $I^n+A^n\xrightarrow{PP}I+A$.

Так как $I^n\to I$ устойчиво по определению 3.2 из [18], то согласно предложению 3.5 и определению 3.3 из работы [18] осталось проверить условие компактности, которое вследствие предложения 1.1 из работы [18] равносильно условию $\forall\{z^n\}$, $z^n\in C^n$, $\|z^n\|\le M$, существует относительно компактная последовательность $\{A_n z^n\}\subset C(L)$ такая, что

$$\left\|A^n z^n-p^n\left(A_n z^n\right)\right\|\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty\,.$$

В качестве $\{A_n z^n\}$ выберем последовательность

$$\left(A_n z^n\right)(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j(x)z_j^n\ ,\quad x\in L\,,$$

где

$$a_j(x)=-\frac{1}{i\eta}\sum_{p=1}^{n}\left(f_p^0(x)\left(\sum_{m=1}^{n}\tilde{k}_{pm}^-\left(\sum_{t=1}^{n}\tilde{k}_{mt}^+c_{tj}\right)\right)\right),\quad j=\overline{1,n}\,,$$

$$f_p^0(x)=2\int_{L_p}\Phi_{k_0}(x,y)dl_y\ ,\quad x\in L\,,\quad p=\overline{1,n}\,.$$

Принимая во внимание способ разбиения кривой L на «регулярные» элементарные части и лемму 1, имеем

$$\sum_{p=1}^{n}\left| f_{lp}^{0}-f_{p}^{0}\left(x\left(\tau_{l}\right)\right)\right| \leq 2\sum_{\substack{p=1\\p\neq l}}^{n}\int_{L_p}\left|\Phi_{k_0}\left(x\left(\tau_l\right),y\right)-\Phi_{k_0}\left(x\left(\tau_l\right),x\left(\tau_p\right)\right)\right|dl_y+ \\ +2\int_{L_l}\left|\Phi_{k_0}\left(x\left(\tau_l\right),y\right)\right|dl_y \leq M\,\frac{\ln n}{n},\quad l=\overline{1,n}. \tag{19}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\sum_{p=1}^{n}\left| f_{p}^{0}(x)\right| \leq 2\int_{L}\left|\Phi_{k_0}(x,y)\right|dl_y \leq M\,. \tag{20}$$

Так как

$$\left(A_n z^n\right)(x)=-\frac{1}{i\eta}\sum_{j=1}^{n}\left(f_j^0(x)\left(\sum_{p=1}^{n}\tilde{k}_{jp}^{-}\left(\sum_{m=1}^{n}\tilde{k}_{pm}^{+}\left(\sum_{t=1}^{n}c_{mt}\,z_t^n\right)\right)\right)\right),$$

то, учитывая условие $\left\|z^n\right\|\leq M$ и неравенства (15), (18) и (19), получаем, что

$$\left\| A^n z^n - p^n\left(A_n z^n\right)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty\,.$$

Возьмем любые точки $x',\,x''\in L$ такие, что $\left|x'-x''\right|=\delta<d/2$. Тогда, принимая во внимание неравенства (15) и (18) и поступая точно так же, как и в работе [16], можно показать, что

$$\left|\left(A_n z^n\right)(x')-\left(A_n z^n\right)(x'')\right| \leq M\left\|z^n\right\|\sum_{j=1}^{n}\left| f_j^0(x')-f_j^0(x'')\right| \leq \\ \leq M\left\|z^n\right\|\int_{L}\left|\Phi_{k_0}(x',y)-\Phi_{k_0}(x'',y)\right|dl_y \leq \\ \leq M\left\|z^n\right\|\int_{L_{\delta/2}(x')}\left|\Phi_{k_0}(x',y)\right|dl_y + M\left\|z^n\right\|\int_{L_{\delta/2}(x'')}\left|\Phi_{k_0}(x'',y)\right|dl_y + \\ + M\left\|z^n\right\|\int_{L_{\delta/2}(x')}\left|\Phi_{k_0}(x'',y)\right|dl_y + M\left\|z^n\right\|\int_{L_{\delta/2}(x'')}\left|\Phi_{k_0}(x',y)\right|dl_y + \\ + M\left\|z^n\right\|\int_{L\setminus\left(L_{\delta/2}(x')\cup L_{\delta/2}(x'')\right)}\left|\Phi_{k_0}(x',y)-\Phi_{k_0}(x'',y)\right|dl_y \leq M\left\|z^n\right\|\delta\left|\ln\delta\right|, \tag{21}$$

а значит, $\left\{A_n z^n\right\}\subset C(L)$.

Относительная компактность последовательности $\left\{A_n z^n\right\}$ следует из теоремы Арцеля. Действительно, равномерная ограниченность непосредственно вытекает из неравенств (15), (18) и (20) и условия $\left\|z^n\right\|\leq M$, а равностепенная непрерывность следует из оценки (21). Тогда, применяя теорему 4.2 из работы [18], получаем, что уравнения (5) и (17) имеют единственные решения $\psi_*\in C(L)$ и $z_*^n\in C^n$ соответственно, причем

$$m_3\,\delta_n \leq \left\| z_*^n - p^n\psi_*\right\| \leq M_3\,\delta_n\,,$$

где

$$m_3 = 1/\sup_n\left\| I^n + A^n\right\| > 0\ ,\quad M_3=\sup_n\left\|\left(I^n+A^n\right)^{-1}\right\|<\infty\,,$$

$$\delta_n=\left\|\left(I^n+A^n\right)\left(p^n\psi_*\right)-B^n f^n\right\|.$$

В силу теорем 1 и 2 находим

$$\delta_n = \max_{l=\overline{1,n}} \left| \psi_*\left(x(\tau_l)\right) + \sum_{j=1}^{n} a_{lj}\ \psi_*\left(x(\tau_j)\right) - \sum_{j=1}^{n} b_{lj}\ f\left(x(\tau_j)\right) \right| =$$

$$= \max_{l=\overline{1,n}} \left| \left((Bf)\left(x(\tau_l)\right) - \sum_{j=1}^{n} b_{lj}\ f\left(x(\tau_j)\right) \right) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{lj} \psi_*\left(x(\tau_j)\right) - (A\psi_*)\left(x(\tau_j)\right) \right) \right| \le$$

$$\le M\left(\omega(f,1/n) + \omega(\psi_*,1/n) + \left(\|f\|_\infty + \|\psi_*\|_\infty\right)\frac{\ln n}{n} \right).$$

Так как $\psi_* = (I+A)^{-1} Bf$, то

$$\|\psi_*\|_\infty \le \left\|(I+A)^{-1}\right\| \|B\| \|f\|_\infty .$$

Кроме того, принимая во внимание оценку

$$\omega(F_0\rho,1/n) \le M\ \|\rho\|_\infty \frac{\ln n}{n},$$

имеем

$$\omega(Bf,1/n) \le M\ \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n}, \quad \omega(A\psi_*,1/n) \le M\ \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n}.$$

Следовательно,

$$\omega(\psi_*,1/n) = \omega(Bf - A\psi_*,1/n) \le \omega(Bf,1/n) + \omega(A\psi_*,1/n) \le M\ \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n},$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Замечания 2. Как видно, если $f \in C(L) \setminus C^\beta(L)$, то предложенный в работе [10] метод не дает возможности исследовать решение интегрального уравнения, полученного после дискретизации рассматриваемого уравнения. Кроме того, если $f \in C^\beta(L)$, то скорость сходимости данного метода равна $\omega(f,1/n) + \frac{\ln n}{n} \approx \frac{1}{n^\beta}$, а в работе [10] скорость сходимости метода составила $\frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}}$, т.е. в этом случае скорость сходимости данного метода является более сильной, чем скорость сходимости метода в работе [10], где $0 < \alpha \le \beta < 1$.

3. Обоснование метода коллокации для гиперсингулярного интегрального уравнения (4)

Сначала проведем регуляризацию уравнения (4). Пусть волновое число k_0 не совпадает с собственными значениями внутренних задач Дирихле или Неймана (для этого достаточно выбрать любое значение k_0 с $\operatorname{Im} k_0 > 0$). Обозначим индексом «0» то обстоятельство, что параметр k, входящий в операторы S, $\widetilde{K}$ и T, равен значению k_0. Поскольку оператор

$$A_0 = -S_0\left(I - \widetilde{K}_0\right)^{-1}\left(I + \widetilde{K}_0\right)^{-1}$$

представляет собой обратный оператор к T_0, уравнение (4) можно преобразовать к эквивалентному виду (см.: [1. С. 111]):

$$\varphi + \tilde{A}\varphi = \tilde{B}g\ , \tag{22}$$

причем полученное уравнение рассматривается в пространстве $C(L)$, где

$$\tilde{A}\varphi = -\frac{1}{i\eta}A_0\Big[\big(1 - i\eta\lambda\big)I - \Big(\tilde{K} + i\eta\big(T - T_0\big) + i\eta\lambda K + \lambda S\Big)\Big]\varphi\,, \qquad \tilde{B}g = \frac{2}{i\eta}A_0 g\ .$$

Для обоснования метода коллокации вначале построим квадратурные формулы для интегралов $\big(\tilde{A}\varphi\big)(x)$ и $\big(\tilde{B}g\big)(x)$, $x \in L$. Разобьем L на «регулярные» элементарные части: $L = \bigcup_{j=1}^{n} L_j$. Принимая во внимание построенные квадратурные формулы (6)–(9) для интегралов S, K, $\tilde{K}$ и $T - T_0$ соответственно и их оценки погрешности, нетрудно показать, что выражение

$$\big(\tilde{C}_n\varphi\big)\big(x(\tau_l)\big) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{lj}\,\varphi\big(x(\tau_j)\big)$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l = \overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла

$$\big(\tilde{C}\varphi\big)(x) = \big(1 - i\eta\lambda(x)\big)\varphi(x) -$$

$$-\Big(\big(\tilde{K}\varphi\big)(x) + i\eta\big((T - T_0)\varphi\big)(x) + i\eta\lambda(x)\big(K\varphi\big)(x) + \lambda(x)\big(S\varphi\big)(x)\Big),$$

где

$$\tilde{c}_{ll} = 1 - i\eta\lambda\big(x(\tau_l)\big) \quad \text{при} \quad l = \overline{1,n}\,,$$

$$\tilde{c}_{lj} = -\frac{2(b-a)}{n}\sqrt{\big(x_1'(\tau_j)\big)^2 + \big(x_2'(\tau_j)\big)^2}\ \times$$

$$\times\left(\frac{\partial\Phi_k^n\big(x(\tau_l), x(\tau_j)\big)}{\partial\nu\big(x(\tau_l)\big)} + i\eta\frac{\partial}{\partial\nu\big(x(\tau_l)\big)}\left(\frac{\partial\Big(\Phi_k^n\big(x(\tau_l), x(\tau_j)\big) - \Phi_{k_0}^n\big(x(\tau_l), x(\tau_j)\big)\Big)}{\partial\nu\big(x(\tau_j)\big)}\right) + \right.$$

$$\left. + i\eta\lambda\big(x(\tau_l)\big)\frac{\partial\Phi_k^n\big(x(\tau_l), x(\tau_j)\big)}{\partial\nu\big(x(\tau_j)\big)} + \lambda\big(x(\tau_l)\big)\Phi_k^n\big(x(\tau_l), x(\tau_j)\big)\right) \ \text{при}\ l, j = \overline{1,n}\,, \quad l \neq j\ ,$$

причем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\Big|\big(\tilde{C}\varphi\big)\big(x(\tau_l)\big) - \big(\tilde{C}_n\varphi\big)\big(x(\tau_l)\big)\Big| \le M\left(\omega(\varphi, 1/n) + \|\varphi\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right).$$

Пусть элементы f_{lj}^0, $l, j = \overline{1,n}$, определяются формулой (11), $\tilde{k}_{lj}^-$ – элемент l-й строки и j-го столбца матрицы $\big(I^n - \tilde{K}_0^n\big)^{-1}$, $\tilde{k}_{lj}^+$ – элемент l-й строки и j-го столбца матрицы $\big(I^n + \tilde{K}_0^n\big)^{-1}$,

$$\tilde{a}_{lj} = \frac{1}{i\eta}\sum_{p=1}^{n}\left(f_{lp}^0\left(\sum_{m=1}^{n}\tilde{k}_{pm}^-\left(\sum_{t=1}^{n}\tilde{k}_{mt}^+\tilde{c}_{tj}\right)\right)\right), \quad l, j = \overline{1,n}\,,$$

$$\tilde{b}_{lj} = -\frac{2}{i\eta}\sum_{p=1}^{n}\left(f_{lp}^0\left(\sum_{m=1}^{n}\tilde{k}_{pm}^-\tilde{k}_{mj}^+\right)\right), \quad l, j = \overline{1,n}\,.$$

Поступая точно так же, как и в доказательстве теоремы 1, можно показать, что выражения

$$\left(\tilde{B}_n g\right)\left(x\left(\tau_l\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{b}_{l\,j}\,g\left(x\left(\tau_j\right)\right) \tag{23}$$

и

$$\left(\tilde{A}_n\varphi\right)\left(x\left(\tau_l\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{l\,j}\,\varphi\left(x\left(\tau_j\right)\right) \tag{24}$$

в точках $x\left(\tau_l\right),\, l=\overline{1,n}$, являются квадратурными формулами для $\left(\tilde{B}g\right)(x)$ и $\left(\tilde{A}\varphi\right)(x)$ соответственно, причем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|\left(\tilde{B}g\right)\left(x\left(\tau_l\right)\right)-\left(\tilde{B}_n g\right)\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right|\le M\left(\omega\left(g,1/n\right)+\|g\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right),$$

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|\left(\tilde{A}\varphi\right)\left(x\left(\tau_l\right)\right)-\left(\tilde{A}_n\varphi\right)\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right|\le M\left(\omega\left(\varphi,1/n\right)+\|\varphi\|_\infty\,\omega\left(\lambda,1/n\right)+\|\varphi\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right).$$

Используя квадратурные формулы (23) и (24), уравнение (22) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^n – приближенных значений $\varphi\left(x\left(\tau_l\right)\right),\ l=\overline{1,n}$, которую запишем в виде:

$$\left(I^n+\tilde{A}^n\right)z^n=\tilde{B}^n g^n, \tag{25}$$

где $\tilde{A}^n=\left(\tilde{a}_{l\,j}\right)_{l,j=1}^{n}$, $\tilde{B}^n=\left(\tilde{b}_{l\,j}\right)_{l,j=1}^{n}$ и $g^n=p^n g$.

Поступая точно так же, как и в доказательстве теоремы 3, можно показать справедливость основного результата данного раздела.

Теорема 4. *Уравнения* (22) *и* (25) *имеют единственные решения* $\varphi_*\in C(L)$ *и* $z_*^n\in C^n$ *соответственно, при этом* $\left\|z_*^n-p^n\varphi_*\right\|\to 0$ *при* $n\to\infty$ *с оценкой скорости сходимости*

$$\left\|z_*^n-p^n\varphi_*\right\|\le M\left(\omega\left(g,1/n\right)+\omega\left(\lambda,1/n\right)+\frac{\ln n}{n}\right).$$

Список источников

1. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. : Мир, 1987. 311 с.
2. *Гюнтер Н.М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М. : Гос. изд-во тех.-теорет. лит., 1953. 415 с.
3. *Anand A., Ovall J., Turc C.* Well-conditioned boundary integral equations for two-dimensional sound-hard scattering problems in domains with corners // J. Int. Eq. Appl. 2012. V4. 2 (3). P. 321–358. URL: http://projecteuclid.org/euclid.jiea/1350925560
4. *Harris P.J., Chen K.* On efficient preconditioners for iterative solution of a Galerkin boundary element equation for the three–dimensional exterior Helmholtz problem // J. of Comput. Appl. Math. 2003. V. 156. P. 303–318. doi: 10.1016/S0377-0427(02)00918-4
5. *Kleinman R.E., Wendland W.* On Neumann’s method for the exterior Neumann problem for the Helmholtz equation // J. of Math. Anal. Appl. 1977. V. 57 P. 170–202. doi: 10.1016/0022-247X(77)90294-3

6. *Yaman O.I., Ozdemir G.* Numerical solution of a generalized boundary value problem for the modified Helmholtz equation in two dimensions // Math. Computers in Simulation. 2021. V. 190. P. 181–191. doi: 10.1016/j.matcom.2021.05.013
7. *Waterman P.C.* New formulation of acoustic scattering // The J. of the Acoustical Society of America. 1969. V. 45. P. 1417–1429. doi: 10.1121/1.1911619
8. *Khalilov E.H., Aliev A.R.* Justification of a quadrature method for an integral equation to the external Neumann problem for the Helmholtz equation // Math. Meth. in the Appl. Sc. 2018. V. 41 (16). P. 6921–6933. doi: 10.1002/mma.5204
9. *Халилов Э.Г.* Конструктивный метод решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 4. С. 544–555. doi: 10.1134/S0012266118040109
10. *Kress R.* On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory // J. of Comput. Appl. Math. 1995. V. 61. P. 345–360. doi: 10.1016/0377-0427(94)00073-7
11. *Мусхелешвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Физматлит, 1962. 599 с.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1976. 527 с.
13. *Бахшалыева М.Н., Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61, № 6. С. 936–950. doi: 10.31857/S0044466921030030
14. *Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений // Математические заметки. 2020. Т. 107, № 4. С. 604–622. doi: 10.4213/mzm10729
15. *Khalilov E.H.* Quadrature formulas for some classes of curvilinear integrals // Baku Math. Journal. 2022. V. 1 (1). P. 15–27. doi: 10.32010/j.bmj.2022.02
16. *Халилов Э.Г.* Исследование приближенного решения интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 39–54. doi: 10.17223/19988621/82/4
17. *Халилов Э.Г.* О приближенном решении одного класса граничных интегральных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 9. С. 1277–1283. doi: 10.1134/S0012266116090147
18. *Вайникко Г.М.* Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1979. Т. 16. С. 5–53. doi: 10.1007/BF01377042

References

1. Colton D.L., Kress R. (1983) *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. New York: Wiley.
2. Gunter N.M. (1967) *Potential Theory and Its Applications to Basic Problems of Mathematical Physics*. New York: Frederick Ungar Publishing Company.
3. Anand A., Ovall J., Turc C. (2012) Well-conditioned boundary integral equations for two-dimensional sound-hard scattering problems in domains with corners. *Journal of Integral Equations and Applications.* 24(3). pp. 321–358. DOI: 10.1216/JIE-2012-24-3-321.
4. Harris P.J., Chen K. (2003) On efficient preconditioners for iterative solution of a Galerkin boundary element equation for the three-dimensional exterior Helmholtz problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 156. pp. 303–318. DOI: 10.1016/S0377-0427(02)00918-4.
5. Kleinman R.E., Wendland W. (1977) On Neumann's method for the exterior Neumann problem for the Helmholtz equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 57. pp. 170–202. DOI: 10.1016/0022-247X(77)90294-3.

6. Yaman O.I., Ozdemir G. (2021) Numerical solution of a generalized boundary value problem for the modified Helmholtz equation in two dimensions. *Mathematics and Computers in Simulation*. 190. pp. 181–191. DOI: 10.1016/j.matcom.2021.05.013.
7. Waterman P.C. (1969) New formulation of acoustic scattering. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 45. pp. 1417–1429. DOI: 10.1121/1.1911619.
8. Khalilov E.H., Aliev A.R. (2018) Justification of a quadrature method for an integral equation to the external Neumann problem for the Helmholtz equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 41(16). pp. 6921–6933. DOI: 10.1002/mma.5204.
9. Khalilov E.H. (2018) Constructive method for solving a boundary value problem with impedance boundary condition for the Helmholtz equation. *Differential Equations*. 54(4). pp. 539–550. DOI: 10.1134/S0012266118040109.
10. Kress R. (1995) On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 61. pp. 345–360. DOI: 10.1016/0377-0427(94)00073-7.
11. Muskhelishvili N.I. (1962) *Singular Integral Equations*. Groningen: Noordhoff.
12. Vladimirov V.S. (1984) *Equations of Mathematical Physics*. Moscow: Mir Publishers.
13. Bakhshaliyeva M.N., Khalilov E.H. (2021) Justification of the collocation method for an integral equation of the exterior Dirichlet problem for the Laplace equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 61(6). pp. 923–937. DOI: 10.1134/S0965542521030039.
14. Khalilov E.H. (2020) Justification of the collocation method for a class of surface integral equations. *Mathematical Notes*. 107(4). pp. 663–678. DOI: 10.1134/S0001434620030335.
15. Khalilov E.H. (2022) Quadrature formulas for some classes of curvilinear integrals. *Baku Mathematical Journal*. 1(1). pp. 15–27. DOI: 10.32010/j.bmj.2022.02.
16. Khalilov E.H. (2023) Issledovaniye priblizhennogo resheniya integral’nogo uravneniya vneshney krayevoy zadachi Dirikhle dlya uravneniya Gel’mgol’tsa v dvumernom prostranstve [Investigation of an approximate solution of the integral equation of the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in the two-dimensional space]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 39–54. DOI: 10.17223/19988621/82/4.
17. Khalilov E.H. (2016) On an approximate solution of a class of boundary integral equations of the first kind. *Differential Equations*. 52(9). pp. 1234–1240. DOI: 10.1134/S001226611609 0147.
18. Vainikko G. M. (1981) Regular convergence of operators and approximate solution of equations. *Journal of Soviet Mathematics*. 15. pp. 675–705. DOI: 10.1007/BF01377042.

***Сведения об авторе*:**
Халилов Эльнур Гасан оглы – доктор математических наук, профессор кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности (Баку, Азербайджан); профессор научного и инновационного центра Западно-Каспийского Университета (Баку, Азербайджан). E-mail: elnurkhalil@mail.ru

***Information about the author*:**
Khalilov Elnur H. (Doctor of Mathematical Sciences, Professor of the General and Applied Mathematics Department of Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan; Professor of the Scientific and Innovation Center of the Western Caspian University, Baku, Azerbaijan) E-mail: elnurkhalil@mail.ru

Статья поступила в редакцию 10.04.2024; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 10.04.2024; accepted for publication 09.12.2024