

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 519.635.1

MSC: 65N35, 65N50

doi: 10.17223/19988621/91/1

**Разработка и верификация метода коллокации
и наименьших квадратов с полиномами седьмой степени
для решения бигармонического уравнения**

Лука Сергеевич Брындин

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия, bryndin-1996@mail.ru*

Аннотация. Предложен и реализован новый сеточный вариант метода коллокации и наименьших квадратов с полиномами седьмой степени (C^3 -МКНК₇), обладающий непрерывностью вплоть до третьих производных кусочно-полиномиального решения в смысле наименьших квадратов. C^3 -МКНК₇ принципиально отличается от предыдущих версий МКНК отсутствием условий согласования, в которых в явном виде в нескольких точках на границах между соседними ячейками требовалась непрерывность решения и его производных. Приведены значения точности и порядка сходимости C^3 -МКНК₇ при численном решении двумерных краевых задач для бигармонического уравнения в квадратной области и области с криволинейной границей. Показаны преимущества C^3 -МКНК₇ над предыдущими вариантами МКНК.

Ключевые слова: метод коллокации и наименьших квадратов, кусочно-полиномиальный базис, автоматическая склейка решения, бигармоническое уравнение, изгиб пластины

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания ИТПМ СО РАН.

Для цитирования: Брындин Л.С. Разработка и верификация метода коллокации и наименьших квадратов с полиномами седьмой степени для решения бигармонического уравнения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 5–17. doi: 10.17223/19988621/91/1

Development and verification of the least-squares collocation method with seventh degree polynomials for the biharmonic equation

Luka S. Bryndin

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation, bryndin-1996@mail.ru

Abstract. A new version of the least-squares collocation method (C^3 -LSCM₇) with seventh degree polynomials is proposed and implemented. The method has continuity up to the third derivatives of the piecewise polynomial solution in the sense of least squares. This is achieved by using the values of the solution and its derivatives at the vertices of the grid cells as unknown terms. The C^3 -LSCM₇ is fundamentally different from previous versions of the LSCM in the absence of matching conditions. They explicitly require continuity of the solution and its derivatives at several points on the boundaries between neighboring cells. To solve the problem in a domain with a curved boundary a grid is constructed with rectangular cells. The solution of small irregular cells is continued from neighboring independent ones. Verification of the C^3 -LSCM₇ is carried out by solving two-dimensional boundary value problems for a biharmonic equation in a square and in domain with the curvilinear boundary. The condition numbers of a global matrix and transition matrices from values at nodes to coefficients of polynomial expansion are studied. The advantages of the C^3 -LSCM₇ over previous versions of the LSCM are shown.

Keywords: least-squares collocation method, piecewise polynomials, automatic solution continuity, biharmonic equation, plate bending

Acknowledgments: The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation: Bryndin, L.S. (2024) Development and verification of the least-squares collocation method with seventh degree polynomials for the biharmonic equation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 5–17. doi: 10.17223/19988621/91/1

Введение

Краевые задачи для бигармонического уравнения четвертого порядка встречаются в различных разделах механики сплошных сред, например в теории Кирхгофа–Лява изгиба пластин [1] и гидродинамике при малых числах Рейнольдса [2]. Главной особенностью и одновременно сложностью решения таких задач является наличие высоких производных, входящих как в само уравнение (четвертый порядок), так и в граничные условия (вплоть до третьего порядка) [1], что приводит к плохой обусловленности [2–4].

Известно несколько основных способов численного решения бигармонического уравнения. Первый из них связан с непосредственной дискретизацией исходной задачи в сильной постановке. Так поступают, например, в коллокационных (псевдо) спектральных методах (КМ) [3–5] и методах конечной разности (МКР) [6].

Другой подход основан на сведении бигармонического уравнения к системе, состоящей из двух уравнений с частными производными (УЧП), в которых порядок старших производных равняется двум [1, 2, 7]. Однако в этой ситуации может возникнуть дополнительная работа с краевыми условиями [2]. Наконец, в методе конечных элементов (МКЭ) ставится слабая постановка задачи, что приводит к понижению порядка старшей производной исходного решения в обновленном УЧП с возможностью использовать элементы второго или даже первого порядка [8].

Отметим, что, несмотря на хорошо проработанную технику решения линейных УЧП четвертого порядка МКР [2, 6] и МКЭ [8] существует не так много опубликованных результатов интегрирования бигармонического уравнения в нерегулярных областях и со сложными граничными условиями с помощью этих методов [3]. Кроме того, в КМ по сравнению с МКЭ уменьшаются временные затраты на формирование системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) за счет отсутствия процедуры интегрирования, а также в некоторых случаях количество ненулевых элементов матрицы СЛАУ у КМ меньше [9]. Таким образом, КМ обладают своими достоинствами, выраженными прежде всего простотой применения и вычислительными аспектами. Однако решение УЧП высокого порядка в сильной постановке с помощью КМ может привести к матрице СЛАУ с достаточно большим числом обусловленности [3, 4], особенно в случае использования полиномов высоких степеней. Поэтому в таких ситуациях целесообразно использовать и исследовать влияние различных предобусловливателей [10], а также решать СЛАУ численными методами линейной алгебры, которые не ухудшают число обусловленности исходной матрицы, например ортогональными.

Метод коллокации и наименьших квадратов (МКНК) [4, 5, 11, 12] является одним из представителей КМ. Его принципиальное отличие от многих других заключается в необходимости решения переопределенных СЛАУ, состоящих из уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий. При ее решении большую роль играют значения весовых множителей, на которые домножаются уравнения приближенной задачи. Они влияют на точность решения, скорость сходимости метода итераций по подобластям решения глобальной СЛАУ и ее обусловленность [11, 12]. В настоящий момент в МКНК поиск оптимальных значений весовых коэффициентов проводится экспериментальным путем. Для каждой задачи и вида используемых полиномиальных пространств это своя отдельная и непростая история. Про подобные проблемы выбора весовых множителей также указано и в других работах, например в [13, 14].

Для решения бигармонического уравнения сеточным КМ требуется склеивать производные приближенного решения вплоть до третьего порядка на границах между соседними ячейками [4, 15]. При этом в МКНК возникает четыре весовых множителя [4], а в сумме с весовыми коэффициентами уравнений коллокации и краевых их количество равняется семи. В работе [11] показана сильная чувствительность числа итераций сходимости решения глобальной СЛАУ в зависимости от значений весовых множителей условий согласования в случае, когда в МКНК применялись полиномы четвертой степени для аппроксимации бигармонического уравнения. Очевидно, что построение варианта МКНК без условий согласования заметно снизит зависимость численного решения от значений весовых множителей, которых станет еще и меньше.

Цель данной работы – построение МКНК с автоматической склейкой решения и его производных вплоть до третьего порядка, который позволит решить двумерное бигармоническое уравнение в сильной постановке. На сегодняшний день в ряде случаев уже разработаны различные варианты КМ, основанные на сплайн-аппроксимации, для УЧП, содержащих старшие производные второго порядка. Так, в работе [16] построен КМ с использованием полиномов второй степени для решения уравнений Пуассона и Гельмгольца. В [7] КМ с полиномами второй степени применялся для решения бигармонического уравнения, которое было сведено к системе, состоящей из двух УЧП второго порядка. В настоящей статье разработан новый вариант МКНК решения краевых задач для бигармонического уравнения без перехода к системе, принципиально отличающийся от предыдущих (см.: [4, 5, 11] и цитируемые там работы):

- отсутствием условий согласования;
- наличием в качестве неизвестных (степеней свободы) решения и его производных в вершинах прямоугольных ячеек, связанных прямоугольной матрицей перехода к коэффициентам полиномиального разложения.

Отметим, что в предыдущих работах по применению МКНК для решения бигармонического уравнения (см.: [4, 5, 11] и цитируемые там работы) неизвестными при решении глобальной переопределенной СЛАУ выступали как раз коэффициенты полинома, а в данной работе – отмеченные выше значения решения и его производных в вершинах ячеек сетки. Численно установлено: чтобы получить прямоугольную матрицу глобальной СЛАУ и прямоугольную матрицу перехода с конечным числом обусловленности и склейкой решения вплоть до третьих производных на сетке с прямоугольными ячейками, необходимо использовать пространства полиномов седьмой степени. Поэтому такой вариант МКНК назовем C^3 -МКНК₇. Для решения задачи в области с криволинейной границей здесь применялся сеткопостроитель из статьи [5].

Постановка задачи и описание численного метода

Рассмотрим бигармоническое уравнение на примере его приложения к теории Кирхгова–Лява изгиба пластин [1] в двумерной области Ω , имеющее следующий вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

где $w(x, y)$ – прогиб изотропной пластины при изгибе поперечной нагрузкой $q(x, y)$, $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ – жесткость пластины при изгибе, $t = \text{const}$ – толщина,

$E = \text{const}$ и $\nu = \text{const}$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала соответственно.

Дополним (1) краевыми условиями защемления [1]

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (2)$$

или шарнирного закрепления

$$w = 0, \quad M_n = M_x n_1^2 + M_y n_2^2 + 2M_{xy} n_1 n_2 = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (3)$$

где $\mathbf{n}=(n_1, n_2)$ – внешняя единичная нормаль к границе области $\partial\Omega$,

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_{xy} = -D(1 + \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Задача данного исследования заключается в разработке нового сеточного варианта МКНК без условий согласования, позволяющего численно решить краевые задачи (2) и (3) для (1) в квадратной области и области с криволинейной границей областей.

Для построения расчетной сетки в случае областей с криволинейной границей используется подход из [5]. Кратко приведем основные его моменты. Поместим область Ω в прямоугольник и покроем его сеткой, состоящей из $N \times N$ прямоугольных ячеек. Граничными нерегулярными ячейками будем называть ячейки, имеющие непустое пересечение с $\partial\Omega$ и не совпадающие с исходными материнскими прямоугольными ячейками, которые содержат их внутри себя. Если центр материнской ячейки находится внутри Ω , то такие ячейки считаются самостоятельными, иначе – несамостоятельными (см. ячейки с номерами 1–5 на рис. 1). В качестве решения в каждой фиксированной точке несамостоятельных ячеек принимается решение, продолженное из самостоятельной ячейки, центр которой находится ближе всего к рассматриваемой точке. Так, например, на рис. 1 решение из ячейки с номером 6 продолжается в светло-серую область несамостоятельной ячейки 4, из ячейки номер 7 – в темно-серую ее область.

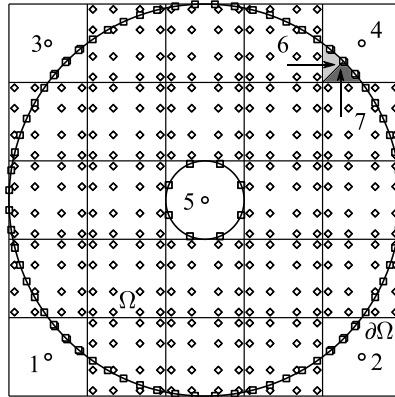


Рис. 1. Пример расчетной сетки в кольце в МКНК при $N \times N = 4 \times 4$, где символ « $\diamond$ » означает точки коллокации, « $\square$ » – точки записи краевых условий, « $\circ$ » – центры материнских ячеек, включающих нерегулярные несамостоятельные ячейки

Fig. 1. Example of a calculation grid in a ring in the LSCM at $N \times N = 4 \times 4$ where the symbol $\square$ means collocation points, $\square$ are points of boundary condition records, and $\circ$ are centers of mother cells including irregular nonautonomous cells

В каждой j -й самостоятельной ячейке, $j=1, \dots, N_{\text{cells}}$, где N_{cells} – их количество, введем локальную систему координат

$$\xi_1 = \frac{x - x_c}{h_1}, \quad \xi_2 = \frac{y - y_c}{h_2}, \quad (4)$$

где (x_c, y_c) – центр j -й прямоугольной ячейки, $2h_1, 2h_2$ – ее размеры.

В каждой j -й ячейке приближенное решение представляется в виде:

$$w^h(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i_1=0}^7 \sum_{i_2=0}^{7-i_1} c_{i_1 i_2, j} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} = (\mathbf{c}_j, \mathbf{v}_j(\xi_1, \xi_2)), \quad (5)$$

где $c_{i_1 i_2, j}$ – 36 неизвестных коэффициентов, $\mathbf{c}_j = (c_{00, j}, c_{01, j}, \dots, c_{i_1 i_2, j}, \dots, c_{70, j})^T$, $\mathbf{v}_j(\xi_1, \xi_2) = (1, \xi_2, \dots, \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2}, \dots, \xi_1^7)^T$.

Будем искать приближенное решение в виде совокупности его значений и значений всех его производных вплоть до третьего порядка в каждом узле (вершине) самостоятельных прямоугольных ячеек. Прямоугольная матрица перехода $\mathbf{A}_t$ размера 40×36 позволяет перейти от коэффициентов разложения $c_{i_1 i_2, j}$ в (5) к необходимым значениям в узлах посредством решения следующей переопределенной СЛАУ:

$$\mathbf{A}_t \mathbf{c}_j = \mathbf{w}_j = (w_j^{h,1}, w_{x,j}^{h,1}, w_{y,j}^{h,1}, \dots, w_{yyy,j}^{h,1}, w_j^{h,2}, \dots, w_{yyy,j}^{h,2}, \dots, w_j^{h,4}, \dots, w_{yyy,j}^{h,4})^T, \quad (6)$$

где цифра в верхнем индексе после h обозначает значение в одном из четырех узлов, буквенный нижний индекс – частную производную, например

$$w_{xy,j}^{h,1} = \frac{\partial^3 w^h}{\partial x^2 \partial y}(\xi_1^1, \xi_2^1), \quad (\xi_1^1, \xi_2^1) \text{ – локальные координаты первого из четырех узлов}$$

ячейки. Вектор $\mathbf{c}_j$ из (6) определяется в смысле наименьших квадратов и равен $\mathbf{c}_j = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{w}_j$, где $\mathbf{QR}$ – QR-разложение матрицы $\mathbf{A}_t$: $\mathbf{A}_t = \mathbf{QR}$, $\mathbf{Q}$ – матрица с ортогональными столбцами размера 40×36 , $\mathbf{R}$ – верхнетреугольная матрица размера 36×36 .

Отметим, что наличие локальной системы координат (4) влечет за собой одинаковые координаты узлов каждой ячейки и одинаковый вид матриц перехода $\mathbf{A}_t$. При попытке использовать для аппроксимации (5) полиномы более низкой степени оказывается, что итоговая СЛАУ имеет неполный ранг, а в случае применения полиномов более высокой степени матрица $\mathbf{A}_t$ становится недоопределенной. В обоих этих вариантах решение адекватно не удавалось найти.

Для определения $\mathbf{w}_j$ в узлах сетки в каждой ячейке выписываются уравнения коллокации и краевые условия, если ячейка является граничной. Пусть точка коллокации в j -й самостоятельной ячейке имеет координаты (ξ_{1c}, ξ_{2c}) . Тогда подстановка приближенного решения (5) в уравнение (1), умноженное на весовой множитель p_c , в этой точке дает следующее выражение:

$$p_c \left(\frac{1}{h_1^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4} + 2 \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} + \frac{1}{h_2^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4} \right) \sum_{i_1=0}^7 \sum_{i_2=0}^{7-i_1} c_{i_1 i_2, j} \xi_{1c}^{i_1} \xi_{2c}^{i_2} = p_c \frac{q}{D}. \quad (7)$$

Обозначим вектор размера 36, элементами которого являются $\xi_{1c}^{i_1} \xi_{2c}^{i_2}$, через $\mathbf{v}$, а векторы, составленные из четвертых производных $\xi_{1c}^{i_1} \xi_{2c}^{i_2}$ в точке (ξ_{1c}, ξ_{2c}) по ξ_1 четырежды, по ξ_1 и по ξ_2 дважды, по ξ_2 четырежды, через $\frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4} \mathbf{v}$, $\frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} \mathbf{v}$ и $\frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4} \mathbf{v}$ соответственно. Тогда уравнение (7) с учетом $\mathbf{c}_j = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{w}_j$ можно переписать в виде:

$$p_c \left(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{w}_j, \frac{1}{h_1^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4} \mathbf{v} + 2 \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} \mathbf{v} + \frac{1}{h_2^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4} \mathbf{v} \right) = p_c \frac{q}{D}. \quad (8)$$

Преобразуем левую часть уравнения (8), перенося операцию умножения на матрицу $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T$ во второй аргумент скалярного произведения, в результате чего получим следующее уравнение на неизвестные значения решения и его производных в узлах j -й ячейки:

$$p_c \left(\mathbf{w}_j, \mathbf{Q}(\mathbf{R}^{-1})^T \left(\frac{1}{h_1^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4} \mathbf{v} + 2 \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} \mathbf{v} + \frac{1}{h_2^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4} \mathbf{v} \right) \right) = p_c \frac{q}{D}. \quad (9)$$

В каждой самостоятельной ячейке выписываются уравнения коллокации (9) в точках, которые являются прямым произведением множеств, состоящих из корней полиномов Лежандра четвертой степени (см. рис. 1).

Аналогичным образом выписываются уравнения в граничных ячейках. Так, например, если точка границы области $\partial\Omega$ имеет локальные координаты (ξ_{1b}, ξ_{2b}) , вектор $\mathbf{v}$ состоит из элементов $\xi_{1b}^i \xi_{2b}^i$, то краевое условие для первого уравнения (2) будет иметь вид:

$$p_{b_0} (\mathbf{w}_j, \mathbf{Q}(\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{v}) = 0, \quad (10)$$

где p_{b_0} – весовой множитель первого уравнения (2) или (3).

Для записи краевых условий в граничной ячейке по алгоритму из [5] выбирается часть границы области, на которой в зависимости от количества соседних самостоятельных ячеек N_{neigh} равномерно расставляется $4(4 - N_{neigh})$ точек.

Объединяя уравнения коллокации и краевые условия в каждой ячейке, получим глобальную переопределенную СЛАУ, для решения которой используется диагональный предобусловливатель [10] и прямой ортогональный метод, реализованный в библиотеке SuiteSparse [17] с возможностью распараллеливания на графических процессорах с помощью технологии CUDA.

Результаты численных экспериментов

В представленных ниже результатах численных экспериментов погрешность вычислялась по следующим формулам:

$$\|E_r^w\|_\infty = \frac{\max_{j=1, \dots, N^2} \max_{i=1, \dots, 100} |w^h(x_i, y_i) - w^{ex}(x_i, y_i)|}{\max_{j=1, \dots, N^2} \max_{i=1, \dots, 100} |w^{ex}(x_i, y_i)|}, \quad (11)$$

где w^h, w^{ex} – приближенное и точное решение задачи соответственно, (x_i, y_i) – равномерно распределенные в j -й ячейке точки. В точках, не принадлежащих области Ω , погрешность не вычислялась.

Порядок сходимости определялся по формуле

$$R = \frac{\log_2 \frac{\|E_2\|_\infty}{\|E_1\|_\infty}}{\log_2 \sqrt{\frac{N_1}{N_2}}}, \quad (12)$$

где $\|E_1\|_\infty, \|E_2\|_\infty$ – погрешности (11) на сетках с общим количеством неизвестных N_1 и N_2 соответственно.

Пример 1

Рассмотрим квадратную шарнирно закрепленную (3) пластину $\Omega = (0,1)^2$, на которую действует нагрузка $q(x, y) = 0.1 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. В таком случае прогиб пластины определяется следующим выражением [1]:

$$w(x, y) = \frac{q(x, y)}{4\pi^4 D}. \quad (13)$$

На рис. 2 приведены результаты сходимости C^3 -МКНК₇ и hp -варианта (hp -МКНК) из работы [5], в котором также использовались полиномы седьмой степени (5) для аппроксимации бигармонического уравнения (1), где $n = \sqrt{DOF}$, DOF – общее количество степеней свободы, т.е. неизвестных, используемых в вариантах МКНК для определения решения, $C_1, C_2 = const$. В работе [4] были продемонстрированы достоинства h -, p - и hp -МКНК по сравнению с МКР [2], МКЭ [8] и спектральными методами [3, 15, 19] на примерах решения различных краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях. Параметры C^3 -МКНК₇ были взяты следующими: $p_c = h_1^2 h_2^2$, весовые множители перед первым и вторым уравнениями (3) равнялись $p_{b_0} = 1, p_{b_2} = \frac{h_1 h_2}{D}$. В hp -МКНК [5]

$p_c = h_1^2 h_2^2, p_{b_0} = 1, p_{b_2} = \frac{h_1 h_2}{D}$, весовые коэффициенты условий согласования перед решением, первой, второй и третьей производными по нормали между соседними ячейками полагались равными $p_{m_0} = 1, p_{m_1} = 0.12, p_{m_2} = h_1 h_2, p_{m_3} = 0.125 h_1 h_2$ соответственно. Глобальная СЛАН в hp -МКНК решалась с помощью метода итераций по подобластям [11].

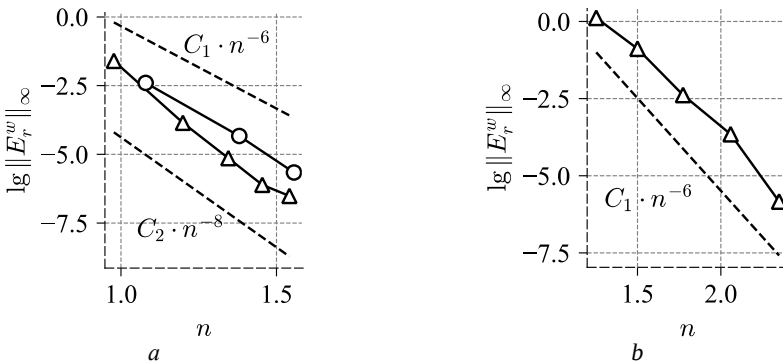


Рис. 2. Сходимость C^3 -МКНК₇ (Δ) и hp -МКНК [5] ($\circ$) в примере 1 (a) и C^3 -МКНК₇ (Δ) в примере 2 (b)
Fig. 2. Convergence of the (a) C^3 -LSCM₇ (Δ) and hp -LSCM [5] ($\circ$) in example 1 and (b) C^3 -LSCM₇ (Δ) in example 2

Из рисунка видно, что в C^3 -МКНК₇ достигаются лучшие значения погрешности $\|E_r\|_\infty$ по сравнению с hp -МКНК, а также порядок сходимости C^3 -МКНК₇ здесь выше и равен приблизительно 8. Отношения количества уравнений к количеству неизвестных в СЛАУ в двух методах отличаются совсем немного: степень перепределения СЛАУ в C^3 -МКНК₇ равнялась приблизительно 1.6, а в hp -МКНК – 1.8.

Исследуем число обусловленности матриц $\mathbf{A}$ глобальных СЛАУ в C^3 -МКНК₇ и влияние диагонального предобусловливателя [10]. В этом примере на сетке 10×10 ($DOF = 1\,210$) число обусловленности в спектральной норме $cond_2(\mathbf{A}) = 9.97e+8$, а с применением предобусловливания $cond_2(\mathbf{A}) = 9.54e+8$. Аналогичная картина с точки зрения отсутствия разницы между значениями $cond_2(\mathbf{A})$ также наблюдалась в примере 2. Числа обусловленности матриц перехода $cond_2(\mathbf{A}_i)$ варьировали от 10^4 до 10^6 .

Для оценки погрешности склейки проведены расчеты значений приближенного решения и его частных производных вплоть до третьего порядка во всех узлах области. В каждом узле указанные значения рассчитывались во всех ячейках, содержащих рассматриваемый узел, и находилась максимальная относительная разница между ними. Установлено, что все отклонения находятся на уровне погрешности приближенного решения. Например, на сетке размера 10×10 погрешность $\|E_r^w\|_\infty = 3.07e-7$, а отклонения рассматриваемых величин находятся в пределах от $1.42e-10$ до $6.97e-7$.

Пример 2

Рассмотрим круглую защемленную по краям пластину с центральным отверстием $\Omega = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 5^2\}$, на которую действует постоянная нагрузка q . В этом случае решение задачи имеет вид [18]:

$$w(x, y) = \frac{qr^4}{64D} + C_3 r^2 (\log_2 r - 1) + \frac{C_4 r^2}{4} + C_5 \log r + C_6, \quad (14)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Константы C_3 – C_6 определяются из решения СЛАУ размера 4×4 , которая получается подстановкой (14) в краевые условия на внешнем и внутреннем контурах пластины. В силу громоздкости выражения для них здесь не приводятся.

В таблице и на рис. 2, b приведены результаты сходимости C^3 -МКНК₇. В таблице число N_{ind} означает количество самостоятельных ячеек. В данном случае порядок сходимости метода колебался от 4 до 7.

Результаты сходимости C^3 -МКНК₇ в примере 2

$N \times N$	N_{ind}	DOF	$\ E_r^w\ _\infty$	R
5×5	20	320	1.30e+0	–
10×10	76	1 000	1.30e–1	4.04
20×20	304	3 520	4.11e–3	5.49
40×40	1 212	13 080	2.21e–4	4.45
80×80	4 816	50 080	1.46e–6	7.48

Несмотря на то, что второй пример может быть решен в одномерной постановке, здесь было важно, во-первых, показать возможность удобного применения сеткопостроителя [5] для областей с криволинейной границей при использовании прямоугольных ячеек в C^3 -МКНК₇, а во-вторых, провести верификацию метода на задаче с известным точным решением. Более того, такую задачу не удастся решить p -вариантом различных КМ [3, 4, 19], в которых используются глобальные аппроксимации во всем прямоугольнике, включающем исходную область, без перехода, например, в полярную систему координат, поскольку решение (14) содержит слагаемые $\log r$, для которых $(0, 0)$ является точкой ветвления, где решения обращаются в бесконечность. Отметим также, что в более сложных областях перейти в какую-то специальную удобную систему координат далеко не всегда возможно. Таким образом, это подчеркивает актуальность развития сеточных численных методов.

Заключение

Впервые разработан и исследован вариант МКНК без условий согласования, позволяющий решать краевые задачи для бигармонического уравнения в сильной постановке. Его верификация проведена на решении задач изгиба пластин в рамках теории Кирхгофа–Лява. Сравнение реализованного здесь C^3 -МКНК₇ с hp -МКНК из работы [5] при одинаковых степенях полиномов и DOF показало преимущества нового варианта. На тестовом бесконечно гладком решении в квадратной области показан высокий порядок сходимости, в среднем равный восьми. Продемонстрирована возможность применения C^3 -МКНК₇ для решения бигармонического уравнения в области с криволинейной границей. Однако вопрос уменьшения числа обусловленности $cond_2(\mathbf{A})$ в МКНК с применением полиномов высоких степеней остается важным и открытым.

Список источников

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М. : Физматгиз, 1996. 625 с.
2. Chen G., Li Z., Lin P. A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow // *Advances in Computational Mathematics*. 2007. V. 29, № 2. P. 113–133. doi: 10.1007/s10444-007-9043-6.
3. Shao W., Wu X., Chen S. Chebyshev tau meshless method based on the integration-differentiation for biharmonic-type equations on irregular domain // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2012. V. 36, № 12. P. 1787–1798. doi: 10.1016/j.enganabound.2012.06.005
4. Беляев В.А., Брындин Л.С., Голушко С.К., Семисалов Б.В., Шанеев В.П. H -, p - и hp -варианты метода коллокации и наименьших квадратов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях и их приложения // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2022. Т. 62, № 4. С. 531–552. doi: 10.31857/S0044466922040020
5. Брындин Л.С., Беляев В.А., Шанеев В.П. Разработка и верификация упрощенного hp -варианта метода коллокации и наименьших квадратов для нерегулярных областей // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование*. 2023. Т. 16, № 3. С. 35–50. doi: 10.14529/mmp230303
6. Ben-Artzi M., Croisille J.P., Fishelov D. An Embedded Compact Scheme for Biharmonic Problems in Irregular Domains // *Advanced Computing in Industrial Mathematics: 11th Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM*. Cham : Springer, 2018. V. 728. P. 11–23. doi: 10.1007/978-3-319-65530-7_2

7. Bialecki B., Fairweather G., Karageorghis A., Maack J. A quadratic spline collocation method for the Dirichlet biharmonic problem // Numerical Algorithms. 2019. V. 83. P. 165–199. doi: 10.1007/s11075-019-00676-z
8. Guo H., Zhang Z., Zou Q. A C^0 Linear Finite Element Method for Biharmonic Problems // Journal of Scientific Computing. 2018. V. 74, № 3. P. 1397–1422. doi: 10.1007/s10915-017-0501-0
9. Schillinger D., Evans J.A., Reali A., Scott M.A., Hughes T.J.R. Isogeometric collocation: Cost comparison with Galerkin methods and extension to adaptive hierarchical NURBS discretizations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2013. V. 267. P. 170–232. doi: 10.1016/j.cma.2013.07.017
10. Ramsak M., Skerget L. A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function-vorticity formulation // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2004. V. 46, № 8. P. 815–847. doi: 10.1002/fld.776
11. Голушко С.К., Идимешев С.В., Шанеев В.П. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 6. С. 31–43.
12. Исаев В.И., Шанеев В.П., Еремин С.А. Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье-Стокса // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, № 3. С. 53–70.
13. Ильин В.П., Кныш Д.В. Параллельные методы декомпозиции в пространствах следов // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12, № 1. С. 110–119.
14. Алексидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М. : Наука, 1978. 352 с.
15. Shao W., Wu X. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration–differentiation for solving fourth order equations // Applied Mathematical Modelling. 2015. V. 39, № 9. P. 2554–2569. doi: 10.1016/j.apm.2014.10.048
16. Fairweather G., Karageorghis A., Maack J. Compact optimal quadratic spline collocation methods for Poisson and Helmholtz problems: formulation and numerical verification // Journal of Computational Physics. 2010. V. 230, № 8. P. 2880–2895. doi: 10.1016/j.jcp.2010.12.041
17. Davis T.A. Algorithm 915, SuiteSparseQR: Multifrontal multithreaded rank-revealing sparse QR factorization // ACM Transactions on Mathematical Software. 2011. V. 38, № 1. P. 8:1–8:22. doi: 10.1145/2049662.2049670
18. Ike C.C. Mathematical solutions for the flexural analysis of Mindlin's first order shear deformable circular plate // Mathematical Models in Engineering. 2018. V. 4, № 2. P. 50–72. doi: 10.21595/mme.2018.19825
19. Mai-Duy N., See H., Tran-Cong T. A spectral collocation technique based on integrated Chebyshev polynomials for biharmonic problems in irregular domains // Applied Mathematical Modelling. 2009. V. 33, № 1. P. 284–299. doi: 10.1016/j.apm.2007.11.002

References

1. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. (1959) *Theory of Plates and Shells*. New York, St. Louis: McGraw-Hill Book Comp.
2. Chen G., Li Z., Lin P. (2007) A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow. *Advances in Computational Mathematics*. 29(2). pp. 113–133. DOI: 10.1007/s10444-007-9043-6.
3. Shao W., Wu X., Chen S. (2012) Chebyshev tau meshless method based on the integration–differentiation for biharmonic-type equations on irregular domain. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 36(12). pp. 1787–1798. DOI: 10.1016/j.enganabound.2012.06.005.
4. Belyaev V.A., Bryndin L.S., Golushko S.K., Semisalov B.V., Shapeev V.P. (2022) H-, p-, and hp-versions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 62(4). pp. 517–537. DOI: 10.1134/S0965542522040029.

5. Bryndin L.S., Belyaev V.A., Shapeev V.P. (2023) Razrabotka i verifikatsiya uproschennogo hp-varianta metoda kollokatsii i naimen'shikh kvadratov dlya neregulyarnykh oblastey [Development and verification of a simplified hp-version of the least-squares collocation method for irregular domains]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye – Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 16(3). pp. 35–50. DOI: 10.14529/mmp230303.
6. Ben-Artzi M., Croisille J.P., Fishelov D. (2018) An Embedded Compact Scheme for Biharmonic Problems in Irregular Domains. *Advanced Computing in Industrial Mathematics: 11th Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM*. Cham: Springer. 728. pp. 11–23. DOI: 10.1007/978-3-319-65530-7_2.
7. Bialecki B., Fairweather G., Karageorghis A., Maack J. (2019) A quadratic spline collocation method for the Dirichlet biharmonic problem. *Numerical Algorithms*. 83. pp. 165–199. DOI: 10.1007/s11075-019-00676-z.
8. Guo H., Zhang Z., Zou Q. (2018) A C^0 Linear Finite Element Method for Biharmonic Problems. *Journal of Scientific Computing*. 74(3). pp. 1397–1422. DOI: 10.1007/s10915-017-0501-0.
9. Schillinger D., Evans J.A., Reali A., Scott M.A., Hughes T.J.R. (2013) Isogeometric collocation: Cost comparison with Galerkin methods and extension to adaptive hierarchical NURBS discretizations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 267. pp. 170–232. DOI: 10.1016/j.cma.2013.07.017.
10. Ramsak M., Skerget L. (2004) A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function-vorticity formulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 46(8). pp. 815–847. DOI: 10.1002/flid.776.
11. Golushko S.K., Idimeshev S.V., Shapeev V.P. (2013) Metod kollokatsiy i naimen'shikh nevyazok v prilozhenii k zadacham mekhaniki izotropnykh plastin [Application of collocations and least residuals method to problems of the isotropic plates theory]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 18(6). pp. 31–43.
12. Isaev V.I., Shapeev V.P., Eremin S.A. (2007) Issledovaniye svoystv metoda kollokatsii i naimen'shikh kvadratov resheniya krayevykh zadach dlya uravneniya Puassona i uravneniy Nav'ye-Stoksa [An investigation of properties of the least squares collocation method for solution of boundary value problems for the Navier–Stokes and Poisson equations]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 12(3). pp. 53–70.
13. Il'in V. P., Knysh D. V. (2011) Parallel'nyye metody dekompozitsii v prostranstvakh sledov [Parallel decomposition methods in the trace spaces]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye – Numerical Methods and Programming*. 12(1). pp. 110–119.
14. Aleksidze M. A. (1978) *Resheniye granichnykh zadach metodom razlozheniya po neortogonal'nym funktsiyam* [Solution of boundary value problems by the method of decomposition by non-orthogonal functions]. Moscow: Nauka.
15. Shao W., Wu X. (2015) An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration–differentiation for solving fourth order equations. *Applied Mathematical Modelling*. 39(9). pp. 2554–2569. DOI: 10.1016/j.apm.2014.10.048.
16. Fairweather G., Karageorghis A., Maack J. (2010) Compact optimal quadratic spline collocation methods for Poisson and Helmholtz problems: formulation and numerical verification. *Journal of Computational Physics*. 230(8). pp. 2880–2895. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.12.041.
17. Davis T.A. (2011) Algorithm 915, SuiteSparseQR: Multifrontal multithreaded rank-revealing sparse QR factorization. *ACM Transactions on Mathematical Software*. 38(1). pp. 8:1–8:22. DOI: 10.1145/2049662.2049670.
18. Ike C.C. (2018) Mathematical solutions for the flexural analysis of Mindlin's first order shear deformable circular plate. *Mathematical Models in Engineering*. 4(2). pp. 50–72. DOI: 10.21595/mme.2018.19825.
19. Mai-Duy N., See H., Tran-Cong T. (2009) A spectral collocation technique based on integrated Chebyshev polynomials for biharmonic problems in irregular domains. *Applied Mathematical Modelling*. 33(1). pp. 284–299. DOI: 10.1016/j.apm.2007.11.002.

Сведения об авторе:

Брындин Лука Сергеевич – младший научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения РАН (Новосибирск, Россия). E-mail: bryndin-1996@mail.ru

Information about the author:

Bryndin Luka S. (Junior Researcher, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: bryndin-1996@mail.ru

The article was submitted 29.02.2024; accepted for publication 03.10.2024

Статья поступила в редакцию 29.02.2024; принята к публикации 03.10.2024