ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2024 Математика и механика № 91
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 512.552 MSC: 16R99
doi: 10.17223/19988621/91/4

Кольца инцидентности и их автоморфизмы

Евгений Владимирович Кайгородов[1], Петр Андреевич Крылов[2]

[1] Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия
[2] Томский государственный университет, Томск, Россия
[1] gazetaintegral@gmail.com
[2] krylov@math.tsu.ru

Аннотация. Пусть $I(X, R)$ – кольцо инцидентности предупорядоченного множества X над кольцом R. Осуществлено исследование свойств группы автоморфизмов этого кольца. При некоторых довольно общих предположениях доказано, что всякий автоморфизм кольца $I(X, R)$ является композицией внутреннего, мультипликативного, кольцевого и порядкового автоморфизмов.
Ключевые слова: алгебра инцидентности, автоморфизм

Благодарности: Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00375, https://rscf.ru/en/project/23-21-00375/

Для цитирования: Кайгородов Е.В., Крылов П.А. Кольца инцидентности и их автоморфизмы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 41–50. doi: 10.17223/19988621/91/4

Original article

Incidence rings and their automorphisms

Evgeniy V. Kaigorodov[1], Piotr A. Krylov[2]

[1] Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russian Federation
[2] Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation
[1] krylov@math.tsu.ru
[2] nstsddts@yandex.ru

Abstract. The paper is devoted to automorphisms of incidence algebras. Let $I(X, R)$ be an incidence algebra of a preordered set X over a T-algebra R (T is a commutative ring). The algebra $I(X, R)$ is assumed to satisfy a condition of sufficiently general character. It is called condition (II). In the case when the algebra $I(X, R)$ satisfies condition (II), it is proved that any automorphism of such algebra after conjugation by an inner automorphism has a diagonalized form in a certain sense (Theorem 3.1).

The other two main results of the paper are Theorem 4.1 and Corollary 4.2. In these propositions, in addition to condition (II), the algebra $I(X, R)$ satisfies two other certain conditions. All three conditions are fulfilled if, for example, R is a local ring or a domain of principal left (right) ideals. Under these assumptions, it is proved that every automorphism of the algebra $I(X, R)$ can be written as a product of inner, multiplicative, ring, and order automorphisms. These four kinds of automorphisms can be called standard. Here we consider an automorphism to be standard, if its structure is quite clear.
Keywords: incidence algebra, automorphism

Acknowledgements: The study of the second author is supported by Russian Scientific Foundation, grant no. 23-21-00375, https://rscf.ru/en/project/23-21-00375/

For citation: Kaigorodov, E.V., Krylov, P.A. (2024) Incidence rings and their automorphisms. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 41–50. doi: 10.17223/19988621/91/4

Введение

В данной работе изучаются автоморфизмы кольца инцидентности $I(X, R)$ предупорядоченного множества X над кольцом R. Автоморфизмы колец инцидентности давно привлекают внимание специалистов. За информацией по этому поводу можно обратиться к книге [1] и статьям [2–8].

Раздел 1 настоящей работы содержит некоторые определения и вспомогательные результаты. В разделе 2 проведены предварительные рассмотрения. В частности, вводятся условия (I) и (II) на кольцо $I(X, R)$, играющие существенную роль в дальнейшем.

Основные результаты статьи изложены в разделах 3 и 4. К ним можно отнести теоремы 3.1, 3.3, 4.1 и следствие 4.2. Перечисленные утверждения раскрывают строение группы автоморфизмов кольца $I(X, R)$, удовлетворяющего определенным условиям, в частности условию (II).

Мы рассматриваем только ассоциативные кольца с ненулевой единицей. Если S – некоторое кольцо (алгебра), то $\mathrm{Aut}S$ – группа автоморфизмов алгебры S, $\mathrm{In}(\mathrm{Aut}S)$ – подгруппа ее внутренних автоморфизмов. Затем, $M(n, S)$ – кольцо всех квадратных матриц порядка n со значениями в S, $J(S)$ – радикал Джекобсона кольца S. Полупрямое произведение групп G и H обозначаем $G \leftthreetimes H$.

1. Кольца инцидентности

Кратко изложим некоторые первоначальные сведения о предупорядоченных множествах (более детально можно познакомиться с ними в книге [1]).

Пусть X – произвольное множество и $\leqslant$ – рефлексивное и транзитивное отношение на X. В таком случае система $\langle X, \leqslant\rangle$ называется предупорядоченным множеством, а $\leqslant$ – предпорядок на X. Если отношение $\leqslant$ еще и антисимметрично, то $\langle X, \leqslant\rangle$ – частично упорядоченное множество.

Считаем далее, что $\langle X, \leqslant \rangle$ – предупорядоченное множество. Для любых элементов $x, y \in X$ через $[x, y]$ обозначим подмножество $\{z \in X \mid x \leqslant z \leqslant y\}$. Оно называется интервалом в X. Интервал вида $[x, x]$ будем обозначать через $[x]$. Отметим два полезных свойства интервалов:

(a) для любых $y, z \in [x]$ имеем равенство $[y, z] = [x]$;

(b) если $x < y$, то для произвольных элементов $s \in [x]$ и $t \in [y]$ верно, что $s < t$.

Зададим на X бинарное отношение $\sim$, положив $x \sim y \Leftrightarrow x \leqslant y$ и $y \leqslant x$. Ясно, что $\sim$ – отношение эквивалентности на X. Соответствующие классы эквивалентности имеют вид $[x]$ для всевозможных $x \in X$. Из свойства (b) вытекает, что отношение предпорядка $\leqslant$ согласовано с отношением эквивалентности $\sim$. Следовательно, на фактормножестве $\bar{X} = X / \sim$ появляется индуцированное отношение $\leqslant$, причем $\langle \bar{X}, \leqslant \rangle$ – частично упорядоченное множество.

Договоримся, что все интервалы в X конечны. В таком случае X называют локально конечным предупорядоченным множеством. Условимся в дальнейшем обозначать через x элементы частично упорядоченного множества $\bar{X}$, т.е. классы эквивалентности вида $[x]$. Иными словами, для обозначения класса $[x]$ будем использовать какой-нибудь его представитель. Такая договоренность корректна и не приведет к путанице. В конкретной ситуации всегда ясно, об элементах какого именно множества ($\bar{X}$ или X) идет речь.

Пусть далее буква R обозначает алгебру над некоторым коммутативным кольцом T. Правда, само кольцо T почти не используется явно.

Алгебра инцидентности представляет собой некоторое кольцо функций. Пусть $\langle X, \leqslant \rangle$ – произвольное локально конечное предупорядоченное множество. Положим $I(X, R) = \{ f : X \times X \to R \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \nleqslant y\}$. Функции складываются поточечно. Произведение функций f и g из $I(X, R)$ задается формулой

$$(fg)(x, y) = \sum_{x \leqslant z \leqslant y} f(x, z) \cdot g(z, y) \qquad (1)$$

для каждых $x, y \in X$. Для любых $t \in T$ и $x, y \in X$ еще полагаем $(tf)(x, y) = tf(x, y)$. В результате получаем T-алгебру $I(X, R)$, называемую алгеброй инцидентности или кольцом инцидентности предупорядоченного множества X над кольцом R. В дальнейшем конкретную алгебру $I(X, R)$ обозначаем буквой A.

Введем некоторые специальные функции из $I(X, R)$. Для данного $x \in X$ положим $e_{[x]}(t, t) = 1$ для всех $t \in [x]$ и $e_{[x]}(z, y) = 0$ для оставшихся пар (z, y). Система $\{e_{[x]} \mid x \in X\}$ состоит из попарно ортогональных центральных в L идемпотентов (кольцо L определено в следующем абзаце). В соответствии с соглашением об обозначении класса $[x]$ некоторым его представителем будем писать e_x вместо $e_{[x]}$.

Определим подкольцо L и идеал M в A. Положим $L = \{ f \in A \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \nsim y\}$ и $M = \{ f \in A \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \sim y\}$. Имеем прямую сумму T-модулей

$A = L \oplus M$, т.е. кольцо A есть расщепляющееся расширение идеала M с помощью подкольца L. Идеал M естественным образом считаем L-L-бимодулем. Кроме того, M – неунитальная алгебра.

Идеал M лежит в радикале Джекобсона алгебры A. Следовательно, элемент $1+d$ обратим в A для всякого $d \in M$ (см.: [1. Теорема 1.2.3], теорему 1.2 и следствие 1.3).

Пусть дан произвольный интервал $[x]$. Обозначим через $R_{[x]}$ множество функций $f \in A$, для которых $f(z, y) = 0$, если $z \not\sim x$ или $y \not\sim x$. Как и в случае идемпотентов e_x, пишем R_x вместо $R_{[x]}$. Справедливы равенства $R_x = e_x A e_x = e_x L e_x$. Заключаем, что R_x – кольцо с единицей e_x. Если перейти к ограничениям функций из A на $[x] \times [x]$, то фактически R_x – это алгебра всех функций $[x] \times [x] \to R$ с поточечным сложением и произведением типа свертки, как в (1). Выберем какую-либо нумерацию интервала $[x]$: $[x] = \{x_1, \ldots, x_n\}$. После этого, если функции $f \in R_x$ поставить в соответствие матрицу $(f(x_i, x_j))$, то придем к изоморфизму алгебр $R_x \cong M(n, R)$. Возьмем теперь два различных интервала $[x]$, $[y]$ и положим

$$M_{xy} = \{f \in A \mid f(s, t) = 0, \text{ если } s \not\sim x \text{ или } t \not\sim y\}.$$

Тогда $M_{xy} = e_x A e_y$, и значит M_{xy} является R_x-R_y-бимодулем.

Уточним, что $M_{xy} = 0$, если $x \not\leqslant y$. А при $x < y$ существует канонический изоморфизм $M_{xy} \cong M(n \times m, R)$, где $n = \left|[x]\right|, m = \left|[y]\right|$, относительно указанных выше изоморфизмов $R_x \cong M(n, R)$ и $R_y \cong M(m, R)$. После отождествлений всех алгебр R_x с $M(n, R)$ и бимодулей M_{xy} с $M(n \times m, R)$ становится ясно, что действия колец R_x и R_y на M_{xy} будут обычными умножениями матриц. Ясно также, что M_{xy} есть L-L-бимодуль. Действие L на M_{xy} сводится к действию R_x слева и R_y справа. Ещё раз обратим внимание, что под индексами в R_x и M_{xy} подразумеваем $[x]$ и $[x][y]$ соответственно (см. выше).

Произведение $\coprod_{x,\, y \in X} M_{xy}$ обладает структурой L-L-бимодуля. Именно, если $f \in L$, $(g_{xy}) \in \prod_{x,\, y \in X} M_{xy}$, то $f(g_{xy}) = (f_x g_{xy})$ и $(g_{xy})f = (g_{xy} f_y)$, где $f_x = e_x f e_x$ и $f_y = e_y f e_y$.

Определим теперь в бимодуле $\coprod_{x,\, y \in X} M_{xy}$ умножение посредством формулы $(g_{xy}) \cdot (h_{xy}) = (d_{xy})$, где $d_{xy} = \sum_{x \leqslant z \leqslant y} g_{xz} \cdot h_{zy}$, после чего этот бимодуль становится (неунитальной) алгеброй.

Предложение 1.1. Существуют канонические изоморфизмы алгебр $L \cong \prod_{x \in X} R_x$, а также L-L-бимодулей и алгебр $M \cong \coprod_{x, y \in X} M_{xy}$.

Доказательство. Определим отображение $\omega : L \to \prod_{x \in X} R_x$, полагая $\omega(f) = (f_x)$ для каждого $f \in L$, где $f_x = e_x f e_x$. Тогда ω – изоморфизм алгебр. Отображение

$\varepsilon : M \to \prod\limits_{x,y\in X} M_{xy}$, $\varepsilon(g) = (g_{xy})$, где $g_{xy} = e_x g e_y$, будет изоморфизмом L-L-бимодулей и алгебр. ■

В дальнейшем мы не будем различать соответствующие объекты относительно изоморфизмов ω и ε.

Будет полезна информация об обратимых элементах алгебры A (см.: [1, 6–7]).

Теорема 1.2. Записанные ниже утверждения о функции f из A равносильны:

1) f – обратимая функция;

2) если $f = g + h$, где $g \in L$, $h \in M$, то функция g обратима в L.

Следствие 1.3. Для любого элемента $h \in M$ элемент $1 + h$ обратим.

Каждый обратимый элемент v алгебры A дает ее автоморфизм μ_v согласно правилу $\mu_v(a) = v^{-1}av$, $a \in A$. Такой автоморфизм называется внутренним автоморфизмом, определяемым элементом v. Все внутренние автоморфизмы образуют нормальную подгруппу $\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\,A)$ группы $\mathrm{Aut}\,A$. Через $\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,A)$ (соответственно, $\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\,A)$) будем обозначать подгруппу внутренних автоморфизмов алгебры A, определяемых обратимыми элементами вида $1 + d$, $d \in M$ (соответственно, обратимыми элементами алгебры L). Первая подгруппа является нормальной в $\mathrm{Aut}\,A$. Используя полупрямое разложение $U(A) = (1 + M) \leftthreetimes U(L)$, можно убедиться в существовании разложения $\mathrm{In}(\mathrm{Aut}\,A) = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\,A) \leftthreetimes \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\,A)$ (см. также: [6. Разд. 4]).

2. Два условия на алгебру *A*

Пусть φ – произвольный автоморфизм алгебры A. Исходя из прямой суммы T-модулей $A = L \oplus M$ автоморфизму φ (как и любому T-эндоморфизму) обычным образом можно сопоставить квадратную матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ второго порядка (см.: [6. Разд. 3]). Не будем различать автоморфизм и соответствующую ему матрицу. Иногда мы пишем «треугольный автоморфизм φ», если $\gamma = 0$, и «диагональный автоморфизм φ», если $\gamma = 0$ и $\delta = 0$. В дальнейшем будем иметь дело только с матрицами этих двух видов.

Пусть $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ – треугольный автоморфизм алгебры A. Тогда отображения α, δ и β удовлетворяют равенствам (1) из [6. Разд. 3]. В частности, α – автоморфизм алгебры L, β – автоморфизм (неунитальной) алгебры M. Если ещё $\delta = 0$, т.е. φ – диагональный автоморфизм, то β является автоморфизмом L-L-бимодуля M относительно автоморфизма α.

Сформулируем два условия на алгебру A (см. также: [6. Разд. 8, 9]).

(I) Для любого $\varphi \in \mathrm{Aut}\,A$ верно равенство $\varphi M = M$, т.е. всякий автоморфизм является треугольным.

(II) Для любого $\varphi \in \mathrm{Aut}\,A$ и произвольного $x \in X$ справедливо включение $\varphi(e_x) \in e_y + M$ для некоторого $y \in X$. Данное условие позволяет контролировать характер действия автоморфизмов на кольцах R_x и бимодулях M_{xy}.

Лемма 2.1 [7]. Для алгебры A справедливы следующие утверждения:

1. Из выполнения условия (II) вытекает выполнение условия (I).
2. Для неразложимого кольца R условия (I) и (II) равносильны.

Возникает закономерный вопрос: какие условия на кольца R и $I(X, R)$ являются наиболее общими и могут служить инструментами для вычисления группы $\operatorname{Aut} A$, где $A = I(X, R)$?

Одним из таких условий можно назвать условие (II). В самом деле, если оно выполняется, то в силу леммы 2.1 выполняется и условие (I). Значит, все автоморфизмы алгебры A будут треугольными. Далее, пусть $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \in \operatorname{Aut} A.$ Условие (II) гарантирует следующее. Для любого $x \in X$ существует такой элемент $y \in X$, что $\alpha(e_x) = e_y$ и $\alpha R_x = R_y$. А это влечет существование определенного автоморфизма частично упорядоченного множества $\overline{X}$, который используется в дальнейшем (см.: [7. Разд. 5]). Пусть также $\delta = 0$, т.е. φ – диагональный автоморфизм. Тогда для каждой пары элементов x, y с условием $x \not\leq y$ имеем $\beta M_{xy} = M_{st}$, где $e_s = \alpha(e_x)$, $e_t = \alpha(e_y)$.

Перечислим некоторые типы колец R, для которых алгебра $I(X, R)$ удовлетворяет условию (II):

a) R – локальное кольцо;
b) R – область главных левых (правых) идеалов;
c) R – коммутативное дедекиндово кольцо;
d) X – частично упорядоченное множество, и R не имеет ненулевых идемпотентов, кроме 1;
e) такое кольцо R, что факторкольцо $R / J(R)$ неразложимо.

Соглашение. В оставшейся части статьи считаем, что алгебра A, равная $I(X, R)$, удовлетворяет условию (II).

Например, это будет так, если кольцо R относится к одному из типов, указанных в пунктах а)–е).

Определим один групповой гомоморфизм и несколько групп автоморфизмов. Пусть $f : \operatorname{Aut} A \to \operatorname{Aut} L$ – такой гомоморфизм, что $f(\varphi) = \alpha$ для каждого $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$. Затем, пусть Λ – подгруппа диагональных автоморфизмов, а $C = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \Lambda \mid \alpha R_x = R_x \text{ для каждого } x \in X \right\}$. Обозначим через $\operatorname{Mult} A$ нормальную подгруппу в $\operatorname{Aut} A$, состоящую из автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, а через $\operatorname{Mult}_0 A$ – подгруппу всех внутренних автоморфизмов, определяемых обратимыми центральными элементами кольца L. Здесь $\operatorname{Mult}_0 A$ – нормальная подгруппа в $\operatorname{Mult} A$. Автоморфизмы из $\operatorname{Mult} A$ называют мультипликативными, из $\operatorname{Mult}_0 A$ – дробными. И, наконец, пусть $\Omega = \operatorname{Im} f$ и $\Omega_1 = \left\{ \alpha \in \Omega \,\middle|\, \alpha R_x = R_x \text{ при всех } x \in X \right\}$.

3. Изоморфизмы и разложения для группы Aut A

Возьмем произвольный автоморфизм $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ алгебры A. Для каждого $x \in X$ найдется такой $y \in X$, что $\alpha(e_x) = e_y$ (об этом уже говорилось в разд. 2). Отсюда можно вывести, что α индуцирует автоморфизм τ_α частично упорядоченного множества $\bar{X}$. Соответствие $\varphi \to \tau_\alpha$ определяет групповой гомоморфизм $p : \mathrm{Aut}\, A \to \mathrm{Aut}\, \bar{X}$ (см.: [7. Разд. 6, 7]). Кроме того, автоморфизм α «переставляет» кольца R_x в соответствии с автоморфизмом τ_α. Если же $\delta = 0$, то аналогично действует на бимодулях M_{xy} и автоморфизм β.

Утверждение 1 следующей теоремы можно интерпретировать как возможность диагонализировать любой автоморфизм алгебры A.

Теорема 3.1. Пусть алгебра A удовлетворяет условию (II). Справедливы следующие равенства.

1. $\mathrm{Aut}\, A = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\, A) \leftthreetimes \Lambda$.
2. $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\, A) \leftthreetimes \mathrm{Mult}\, A$.

Доказательство.

1. Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}\, A$ и τ – автоморфизм множества $\bar{X}$, соответствующий φ (он введен перед теоремой). Образуем элемент $v = (v_{st})$ в A, где $v_{st} = \varphi(e_{\tau^{-1}(t)})(s,\ t)$ для любых $s, t \in X$. Отметим, что $ve_x = \varphi(e_{\tau^{-1}(x)})e_x$ при всяком $x \in X$. Имеем $v_{tt} = 1$, и, следовательно, элемент v обратим в A (теорема 1.2 или следствие 1.3).

Итак, для каждого $z \in X$ выполняется равенство $ve_{\tau(z)} = \varphi(e_z)e_{\tau(z)}$. С другой стороны, $\varphi(e_z)v = \varphi(e_z)e_{\tau(z)}$. Таким образом, получаем $\varphi(e_z)v = ve_{\tau(z)}$ и $v^{-1}\varphi(e_z)v = e_{\tau(z)}$. Пусть μ – внутренний автоморфизм, определяемый элементом v. Тогда $\mu \in \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\, A)$ и $\mu\varphi(e_z) = e_{\tau(z)}$ для всякого $z \in X$. Полагаем $\gamma = \mu\varphi$, откуда $\varphi = \mu^{-1}\gamma$, где $\mu^{-1} \in \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\, A)$, $\gamma \in \Lambda$.

Проверим, что $\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\, A) \cap \Lambda = \langle 1 \rangle$. Пусть $v \in \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut}\, A) \cap \Lambda$, и v определяется элементом $1 + d$, где $d \in M$. Тогда $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ для некоторого γ. Для произвольного элемента $a \in L$ имеем $v(a) = (1 + d')a(1 + d) = a + d'a + ad + d'ad$, где $1 + d'$ – обратный к $1 + d$ элемент. Значит, $d'a + ad + d'ad = 0$. В частности, $d'e_x + e_xd + d'e_xd = 0$, $e_xd'e_x + e_xd + e_xd'e_xd = e_xd = 0$ для всякого $x \in X$. Поэтому $d = 0$, откуда $v = 1$. Можно утверждать, что полупрямое разложение из 1 действительно имеет место.

2. Равенство в 2 получается из 1 и включения $\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut} A) \subseteq \mathrm{Ker}\, f$. ■

Соберем вместе несколько интересных и полезных равенств и изоморфизмов.

Предложение 3.2 [7. Предложение 6.3]. Имеют место записанные ниже равенства и изоморфизмы.

1. $\mathrm{Mult}\, A \cap \mathrm{In}(\mathrm{Aut}\, A) = \mathrm{Mult}\, A \cap \mathrm{In}_0(\mathrm{Aut}\, A) = \mathrm{Mult}_0\, A$.

2. $\Lambda / (\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut} A) \cdot \mathrm{Mult} A) \cong \Omega / \mathrm{In}(\mathrm{Aut} L)$, $C / (\mathrm{In}_0(\mathrm{Aut} A) \cdot \mathrm{Mult} A) \cong \Omega_1 / \mathrm{In}(\mathrm{Aut} L)$.
3. $\Lambda / C \cong \Omega / \Omega_1$.

Запишем теперь основной результат раздела.

Теорема 3.3. Пусть алгебра A удовлетворяет условию (II). Справедливы следующие изоморфизмы: $\mathrm{Aut} A / \mathrm{Ker}\, f \cong \Omega \cong \Lambda / \mathrm{Mult} A$ и $C / \mathrm{Mult} A \cong \Omega_1$.

Доказательство. Указанные изоморфизмы непосредственно выводятся из теоремы 3.1 и предложения 3.2. ■

4. Строение группы Aut *A*

Приведем некоторую информацию об автоморфизмах предупорядоченного множества X (см.: [7. Разд. 7]). Автоморфизм τ этого множества называется внутренним, если он оставляет на месте каждый интервал вида $[x]$, $x \in X$. Все внутренние автоморфизмы образуют нормальную подгруппу $\mathrm{In}(\mathrm{Aut} X)$ в группе $\mathrm{Aut} X$. Факторгруппа $\mathrm{Aut} X / \mathrm{In}(\mathrm{Aut} X)$ называется группой внешних автоморфизмов множества X и обозначается $\mathrm{Out} X$. Имеет место (неканоническое) прямое разложение $\mathrm{Aut} X = \mathrm{In}(\mathrm{Aut} X) \leftthreetimes G$, где G – некоторая подгруппа в $\mathrm{Aut} X$, изоморфная $\mathrm{Out} X$. Удобно отождествить ее с $\mathrm{Out} X$. Существует вложение $t : \mathrm{Aut} X \to \mathrm{Aut} A$, $\tau \to \xi_\tau$, где $\xi_\tau(f)(x, y) = f(\tau(x), \tau(y))$, $f \in A$, $x, y \in X$. Отождествим τ с ξ_τ, а $\mathrm{Aut} X$ с $\mathrm{Im}\, t$.

Сформулируем условие, которое позволит уточнить строение группы $\mathrm{Aut} X$. Назовем его (n, m)-условием.

Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ из $M(n, R) \cong M(m, R)$ следует $n = m$.

(n, m)-условию удовлетворяют коммутативные кольца, локальные кольца, области главных левых (правых) идеалов. Выполнение (n, m)-условия после некоторого соглашения гарантирует наличие включения $\mathrm{Im}\, p \subseteq G$ (гомоморфизм p введен в начале разд. 3). Так что, учитывая факт отождествления групп G и $\mathrm{Out} X$, о чем написано выше, фактически имеем гомоморфизм $p : \mathrm{Aut} A \to \mathrm{Out} X$ (см.: [7. Разд. 6, 7, 9]). Композиция pt действует тождественно на $\mathrm{Out} X$. Следовательно, p расщепляется, и мы имеем полупрямое произведение $\mathrm{Aut} A = \mathrm{Ker}\, p \leftthreetimes \mathrm{Out} X$, где

$$\mathrm{Ker}\, p = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut} A \,\middle|\, \alpha R_x = R_x \text{ для всех } x \in X \right\}.$$

Также существуют гомоморфизмы $ft : \mathrm{Out} X \to \Omega$, $r : \Omega \to \mathrm{Out} X$ и полупрямое разложение $\Omega = \Omega_1 \leftthreetimes \mathrm{Out} X$. Теперь можем записать такую теорему.

Теорема 4.1. Пусть алгебра A удовлетворяет условию (II) и (n, m)-условию. Тогда имеют место полупрямые разложения: $\Omega = \Omega_1 \leftthreetimes \mathrm{Out} X$, $\Lambda = C \leftthreetimes \mathrm{Out} X$, $\mathrm{Aut} A = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut} A) \leftthreetimes C \leftthreetimes \mathrm{Out} X$.

Доказательство. Выше установлено, что $\mathrm{Aut} A = \mathrm{Ker}\, p \leftthreetimes \mathrm{Out} X$. Ввиду теоремы 3.1 имеем равенство $\mathrm{Aut} A = \mathrm{In}_1(\mathrm{Aut} A) \leftthreetimes \Lambda$. Равенства в теореме вытекают теперь из включения $\mathrm{In}_1(\mathrm{Aut} A) \subseteq \mathrm{Ker}\, p$. ■

В разд. 9 работы [7] при одном дополнительном предположении относительно колец R_x, записанном ниже, находится точное строение группы C из теоремы 4.1 и, как следствие, группы A. Кратко изложим соответствующий материал.

Договоримся, что символ n_x обозначает порядок матриц из кольца R_x. Пусть натуральное число k таково, что всякое n_x кратно k. Обозначим через P кольцо матриц $M(k, R)$. Любой автоморфизм кольца P влечет кольцевой (говорят также «индуцированный») автоморфизм (блочный) кольца R_x. Он, в свою очередь, влечет автоморфизм кольца L и затем алгебры A. Подобные автоморфизмы тоже назовем кольцевыми. Обозначим через D подгруппу всех кольцевых автоморфизмов алгебры A. Она канонически изоморфна группе $\operatorname{Aut}P$. Запишем следующее условие (∗) для алгебры A.

Для всякого $\alpha = (\alpha_x) \in \Omega_1$ любой автоморфизм α_x является произведением в $\operatorname{Aut} R_x$ внутреннего и кольцевого (блочного) автоморфизмов.

Условие (∗) выполняется, если R – локальное кольцо или область главных левых (правых) идеалов [8. Следствие 4.5].

Следствие 4.2. Предположим, что алгебра A удовлетворяет условиям (II), (∗) и (n, m)-условию, а множество X связное. Тогда верны следующие равенства и изоморфизм: $\operatorname{Aut} A = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} A) \leftthreetimes (\operatorname{In}_0(\operatorname{Aut} A)\cdot(\operatorname{Mult} A)\cdot D) \leftthreetimes \operatorname{Out} X$, где $D \cong \operatorname{Aut} P$, или, более кратко, $\operatorname{Aut} A = \operatorname{In}(\operatorname{Aut} A) \leftthreetimes ((\operatorname{Mult} A)\cdot D) \leftthreetimes \operatorname{Out} X$.

Следствие 4.3. Пусть R – коммутативное неразложимое кольцо и рассматриваются только автоморфизмы R-алгебр.

1. Справедливо равенство $\operatorname{Aut} A = (\operatorname{In}(\operatorname{Aut} A)\cdot(\operatorname{Mult} A)) \leftthreetimes \operatorname{Out} X$.

2 [1]. Если X – частично упорядоченное множество, то имеем равенство $\operatorname{Aut} A = \operatorname{In}_1(\operatorname{Aut} A) \leftthreetimes \operatorname{Mult} A \leftthreetimes \operatorname{Aut} X$.

Список источников

1. *Spiegel E., O'Donnell C.J.* Incidence Algebras. New York : Marcel Dekker, 1997. 334 p.
2. *Brusamarello R., Fornaroli É.Z., Santulo E.A. jun.* Multiplicative automorphisms of incidence algebras // Comm. Algebra. 2015. V. 43 (2). P. 726–736. doi: 10.1080/00927872.2013.847951
3. *Brusamarello R., Lewis D.W.* Automorphisms and involutions on incidence algebras // Linear Multilinear Algebra. 2011. V. 59 (11). P. 1247–1267. doi: 10.1080/03081087.2010.496113
4. *Drozd Y., Kolesnik P.* Automorphisms of incidence algebras // Comm. Algebra. 2007. V. 35 (12). P. 3851–3854. doi: 10.1080/00927870701511756
5. *Khrypchenko M.* Automorphisms of finitary incidence rings // Algebra Discrete Math. 2010. V. 9 (2). P. 78–97.
6. *Krylov P.A., Tuganbaev A.A.* Automorphism groups of formal matrix rings // J. Math. Sci. 2021. V. 258 (2). P. 222–249. doi: 10.1007/s10958-021-05543-8
7. *Krylov P., Tuganbaev A.* Incidence rings: automorphisms and derivations // arXiv:2305.02984v1 [math.RA], 2023. doi: 10.48550/arXiv.2305.02984
8. *Krylov P., Tuganbaev A.* Formal matrix rings: Automorphisms // Int. Journ. of Algebra and Comp. 2023. V. 33 (4). P. 687–698. doi: 10.1142/S0218196723500303

References

1. Spiegel E., O’Donnell C.J. (1997) *Incidence Algebras.* New York: Marcel Dekker.

2. Brusamarello R., Fornaroli É.Z., Santulo E.A. jun (2015) Multiplicative automorphisms of incidence algebras. *Communications in Algebra*. 43(2). pp. 726–736. DOI: 10.1080/00927872.2013.847951.
3. Brusamarello R., Lewis D.W. (2011) Automorphisms and involutions on incidence algebras. *Linear Multilinear Algebra.* 59(11). pp. 1247–1267. DOI: 10.1080/03081087.2010.496113.
4. Drozd Y., Kolesnik P. (2007) Automorphisms of incidence algebras. *Communications in Algebra.* 35(12). pp. 3851–3854. DOI: 10.1080/00927870701511756.
5. Khrypchenko M. (2010) Automorphisms of finitary incidence rings. *Algebra and Discrete Mathematics*. 9(2). pp. 78–97.
6. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2021) Automorphism groups of formal matrix rings. *Journal of Mathematical Sciences*. 258(2). pp. 222–249. DOI: 10.1007/s10958-021-05543-8.
7. Krylov P., Tuganbaev A. (2023) Incidence rings: automorphisms and derivations. *arXiv:2305.02984v1 [math.RA]*. DOI: 10.48550/arXiv.2305.02984.
8. Krylov P., Tuganbaev A. (2023) Formal matrix rings: Automorphisms. *International Journal of Algebra and Computation*. 33(4). pp. 687–698. DOI: 10.1142/S0218196723500303.

***Сведения об авторах*:**
Кайгородов Евгений Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики, заведующий лабораторией алгебры и математических методов в естественных науках Горно-Алтайского государственного университета (Горно-Алтайск, Россия). E-mail: gazetaintegral@gmail.com
Крылов Петр Андреевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: krylov@math.tsu.ru

***Information about the authors*:**
Kaigorodov Evgeniy V. (Candidate of Physics and Mathematics, Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russian Federation). E-mail: gazetaintegral@gmail.com
Krylov Piotr A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: krylov@math.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 01.02.2024; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 01.02.2024; accepted for publication 03.10.2024