

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 531-18, 531.113.8

doi: 10.17223/19988621/91/5

**О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета.
Часть II****Софья Борисовна Богданова¹, Сергей Октябринович Гладков²**^{1,2} *Московский авиационный институт (МАИ), Москва, Россия*¹ *sonjaf@list.ru*² *sglad51@mail.ru*

Аннотация. Приведен алгоритм вывода системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение тел в неинерциальных системах отсчета, которые движутся по заданной пространственной кривой. Вывод системы основан на использовании формул Серре–Френе, являющихся основными в теории гладких кривых. Проиллюстрировано численное решение полученной системы уравнений для случая свободно падающего тела, если явно заданы три аналитических траектории: цилиндрическая, гиперболическая и коническая винтовые линии.

Ключевые слова: неинерциальная система отсчета, сопровождающий трехгранник кривой, кривизна, кручение

Для цитирования: Богданова С.Б., Гладков С.О. О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета. Часть II // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 51–60. doi: 10.17223/19988621/91/5

Original article

**On the trajectories of bodies in non-inertial reference frames.
Part II****Sof'ya B. Bogdanova¹, Sergey O. Gladkov²**^{1,2} *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation*¹ *sonjaf@list.ru*² *sglad51@mail.ru*

Abstract. This paper provides a detailed solution to the problem of determining the trajectories of body motion in non-inertial frames of reference. The problem is solved in the basis τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ moving along a given spatial curve. The orts of the basis are the vectors of the tangent τ , principal normal $\mathbf{n}$, and binormal $\mathbf{b}$ to the curve. The motion of the non-inertial frame of reference completely determines the vector of translational motion along the curve $\mathbf{R}_0(t)$ with velocity $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{R}}_0(t)\tau$ and the Darboux vector of angular rotation

$\omega = \chi\tau + K\mathbf{b}$. The curvature K and torsion χ are specified by the curve equation. Vectors τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ are bound by the Frenet–Serret formulas. A system of second-order linear differential equations describing the free fall of a body from the point of view of an observer located in the basis τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ for cylindrical, hyperbolic, and conical helical lines is numerically analyzed. The corresponding trajectories of the bodies are plotted by computer modeling methods. A significant difference is observed in the trajectories of motion of one and the same body in the inertial and non-inertial frames of reference.

Keywords: non-inertial reference frames, accompanying trihedron curve, curvature, torsion

For citation: Bogdanova, S.B., Gladkov, S.O. (2024) On the trajectories of bodies in non-inertial reference frames. Part II. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 51–60. doi: 10.17223/19988621/91/5

Введение

Настоящее сообщение является логическим продолжением работы [1], где были исследованы траектории движения тел в неинерциальных системах отсчета (НСО) в двухмерном случае. В этой работе речь пойдет о трехмерной задаче, и нашей целью здесь является описание движения тел с точки зрения наблюдателя, находящегося в центре подвижного базиса пространственной кривой $\mathbf{R}_0(t) = x_0(t)\mathbf{i} + y_0(t)\mathbf{j} + z_0(t)\mathbf{k}$, ортами которого, как хорошо известно [2], служат вектор касательной τ , вектор главной нормали $\mathbf{n}$ и вектор бинормали $\mathbf{b}$ (рис. 1). Движение базиса τ – $\mathbf{n}$ – $\mathbf{b}$ является ускоренным, а потому его можно рассматривать в качестве неинерциальной системы отсчета [3], из центра которой мы и будем наблюдать траектории тел, движущихся под действием каких-либо конкретных сил.

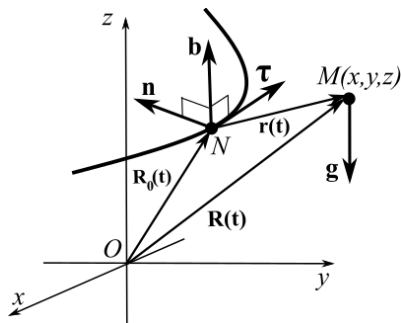


Рис. 1. Неинерциальная система отсчета τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ совершает криволинейное движение вдоль заданной кривой $\mathbf{R}_0(t) = x_0(t)\mathbf{i} + y_0(t)\mathbf{j} + z_0(t)\mathbf{k}$

Fig. 1. Non-inertial basis τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ moving along the given curve $\mathbf{R}_0(t) = x_0(t)\mathbf{i} + y_0(t)\mathbf{j} + z_0(t)\mathbf{k}$

Основные уравнения

Для любой гладкой кривой всегда можно ввести подвижный базис τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, который образует так называемый сопровождающий трехгранник. Связь между ортами τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ устанавливается формулами Серре–Френе [2, 4–5]:

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} = K\mathbf{n}, \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -K\tau - \chi\mathbf{b}, \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \chi\mathbf{n}, \end{cases} \quad (1)$$

где дифференцирование ведется по длине дуги кривой, функция $K(t) = \frac{|\dot{\mathbf{R}}_0 \times \ddot{\mathbf{R}}_0|}{|\dot{\mathbf{R}}_0|^3}$

представляет собой кривизну кривой, а функция $\chi(t) = \frac{(\dot{\mathbf{R}}_0, \ddot{\mathbf{R}}_0, \ddot{\mathbf{R}}_0)}{|\dot{\mathbf{R}}_0 \times \ddot{\mathbf{R}}_0|^2}$ характеризует

кручение траектории. Если в формулах (1) перейти к дифференцированию по времени, то получим

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dt} = v K\mathbf{n}, \\ \frac{d\mathbf{n}}{dt} = -v(K\tau + \chi\mathbf{b}), \\ \frac{d\mathbf{b}}{dt} = v\chi\mathbf{n}, \end{cases} \quad (2)$$

где скорость движения вдоль кривой определяется как $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}_0(t)$ или $\mathbf{v} = v\tau$. Из (2) также следует, что кривизна и кручение являются угловыми скоростями для векторов τ и $\mathbf{n}$ соответственно при выполнении условия $v=1$.

Как видно из рис. 1, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}$. Тогда очевидно, что

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}} - \ddot{\mathbf{R}}_0. \quad (3)$$

Также, как и в работе [1], координаты движущейся точки M в базисе τ - $\mathbf{n}$ - $\mathbf{b}$ будем обозначать прописными буквами $M(X, Y, Z)$. Задача, таким образом, сводится к получению системы дифференциальных уравнений для функций $X(t), Y(t), Z(t)$. Для этого нам предстоит выразить каждый вектор из (3) через векторы подвижного базиса τ - $\mathbf{n}$ - $\mathbf{b}$.

Нахождение вектора $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(X(t) \cdot \tau + Y(t) \cdot \mathbf{n} + Z(t) \cdot \mathbf{b})$ связано с использованием формул (2), и после довольно громоздких преобразований мы приходим к выражению

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) = & \tau \left(\ddot{X} - 2\dot{Y}vK - Xv^2K^2 - Y\dot{v}K - Yv\dot{K} + Z\chi v^2K^2 \right) + \\ & + \mathbf{n} \left(\ddot{Y} + 2\dot{X}vK - 2\dot{Z}\chi v + X\dot{v}K + Xv\dot{K} - Yv^2K^2 - Y\chi v^2 - Z\dot{\chi}v - Z\chi\dot{v} \right) + \\ & + \mathbf{b} \left(\ddot{Z} + Xv^2\chi K + \dot{Y}\chi v + Y\dot{\chi}v + Y\chi\dot{v} - Z\chi^2v^2 \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где $v = v(t)$, $X = X(t)$, $Y = Y(t)$, $Z = Z(t)$.

Рассмотрим случай, когда подвижный базис τ - $\mathbf{n}$ - $\mathbf{b}$ движется с постоянной скоростью v . В результате соотношение (4) упростится, и мы получим

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) = & \boldsymbol{\tau} \left(\ddot{X} - 2\dot{Y}vK - Xv^2K^2 - Yv\dot{K} + Z\chi v^2K^2 \right) + \\ & + \mathbf{n} \left(\ddot{Y} + 2\dot{X}vK - 2\dot{Z}\chi v + Xv\dot{K} - Yv^2K^2 - Y\chi^2v^2 - Z\dot{\chi}v \right) + \\ & + \mathbf{b} \left(\ddot{Z} + Xv^2\chi K + \dot{Y}\chi v + Y\dot{\chi}v - Z\chi^2v^2 \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Если в качестве иллюстрирующего примера взять, скажем, винтовую цилиндрическую линию (рис. 2), заданную уравнением

$$\mathbf{R}_0(t) = a \cos t \cdot \mathbf{i} + a \sin t \cdot \mathbf{j} + bt \cdot \mathbf{k}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

то для нее кривизна $K = \frac{a}{a^2 + b^2}$ и кручение $\chi = \frac{b}{a^2 + b^2}$ постоянны [6].

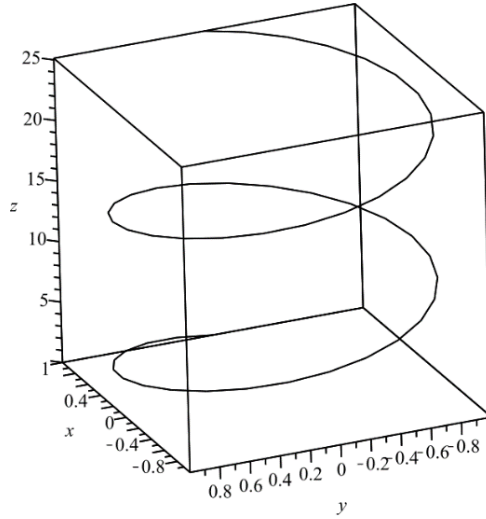


Рис. 2. Цилиндрическая винтовая линия с параметрами $a = 1, b = 2$

Fig. 2. Cylindrical helical line with parameters $a = 1$ and $b = 2$

Тогда из (5) следует, что

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) = & \boldsymbol{\tau} \left(\ddot{X} - 2\dot{Y}vK - Xv^2K^2 + Z\chi v^2K \right) + \\ & + \mathbf{n} \left(\ddot{Y} + 2\dot{X}vK - 2\dot{Z}\chi v - Yv^2K^2 - Y\chi^2v^2 \right) + \\ & + \mathbf{b} \left(\ddot{Z} + Xv^2\chi K + \dot{Y}\chi v - Z\chi^2v^2 \right), \end{aligned} \quad (6)$$

В случае же гиперболической винтовой линии (рис. 3), для которой $\mathbf{R}_0(t) = a \operatorname{ch} t \cdot \mathbf{i} + a \operatorname{sh} t \cdot \mathbf{j} + at \cdot \mathbf{k}$, кривизна и кручение будут равны, т.е. $K = \chi = \frac{1}{2a \operatorname{ch}^2 t}$ [6],

и вместо (6) получим

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) = & \boldsymbol{\tau} \left(\ddot{X} - 2\dot{Y}vK + v^2K^2(Z - X) - Yv\dot{K} \right) + \\ & + \mathbf{n} \left(\ddot{Y} + 2vK(\dot{X} - \dot{Z}) + v\dot{K}(X - Z) - 2Yv^2K^2 \right) + \\ & + \mathbf{b} \left(\ddot{Z} + v^2K^2(X - Z) + \dot{Y}Kv + Y\dot{K}v \right). \end{aligned} \quad (7)$$

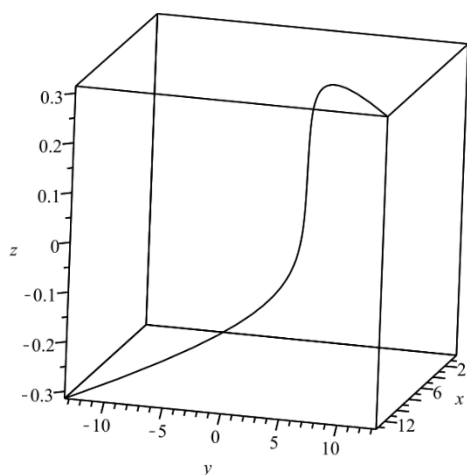


Рис. 3. Гиперболическая винтовая линия

с параметром $a = \frac{1}{20}$. Зависимость

построена для сегмента $-2\pi \leq t \leq 2\pi$

Fig. 3. Hyperbolic helical line with parameter

$a = \frac{1}{20}$. The dependence is valid

for a segment $-2\pi \leq t \leq 2\pi$

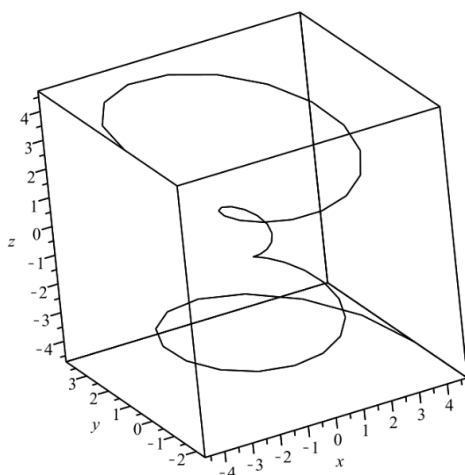


Рис. 4. Коническая винтовая линия

построена при $a = \frac{1}{2}$ и $-3\pi \leq t \leq 3\pi$

Fig. 4. A conical helical line plotted

for $a = \frac{1}{2}$ at $-3\pi \leq t \leq 3\pi$

Если рассмотреть, например, коническую винтовую линию, уравнение которой выглядит как $\mathbf{R}_0(t) = at \cos t \cdot \mathbf{i} + at \sin t \cdot \mathbf{j} + at \cdot \mathbf{k}$ (рис. 4), то для нее кривизна

$$K = \frac{\sqrt{8+5t^2+t^4}}{a(2+t^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ и кручение } \chi = \frac{6+t^2}{a(8+5t^2+t^4)} \text{ не равны, однако формула (5)}$$

при этом остается без изменений.

В уравнении (3) нас интересует вектор $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$, где $\mathbf{F}$ – векторная сумма всех действующих на тело сил [3]. Поскольку $\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -mg \cdot \mathbf{k}$ (см. рис. 1), а система векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ является ортонормированной, то мы имеем право записать следующую цепочку равенств:

$$np_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad np_{\mathbf{n}} \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}, \quad np_{\mathbf{b}} \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}, \quad (8)$$

где орты $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ подвижного трехгранника кривой $\mathbf{R}_0(t) = x_0(t) \cdot \mathbf{i} + y_0(t) \cdot \mathbf{j} + z_0(t) \cdot \mathbf{k}$ могут быть выражены через декартовы координаты. Действительно

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{v} (\dot{x}_0(t) \cdot \mathbf{i} + \dot{y}_0(t) \cdot \mathbf{j} + \dot{z}_0(t) \cdot \mathbf{k}), \quad (9)$$

где скорость $v = \sqrt{\dot{x}_0^2(t) + \dot{y}_0^2(t) + \dot{z}_0^2(t)}$, а согласно верхней формуле в системе (2) вектор главной нормали таков:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{v^2 K} (\ddot{x}_0(t) \cdot \mathbf{i} + \ddot{y}_0(t) \cdot \mathbf{j} + \ddot{z}_0(t) \cdot \mathbf{k}). \quad (10)$$

Из средней формулы системы (2) с учетом (10) и (11) получим

$$\mathbf{b} = \frac{-K\dot{\chi}_0 - \frac{\ddot{\chi}_0}{v^2 K} + \frac{\ddot{\chi}_0 \dot{K}}{v^2 K^2}}{\chi v} \cdot \mathbf{i} + \frac{-K\dot{y}_0 - \frac{\ddot{y}_0}{v^2 K} + \frac{\ddot{y}_0 \dot{K}}{v^2 K^2}}{\chi v} \cdot \mathbf{j} + \frac{-K\dot{z}_0 - \frac{\ddot{z}_0}{v^2 K} + \frac{\ddot{z}_0 \dot{K}}{v^2 K^2}}{\chi v} \cdot \mathbf{k}. \quad (11)$$

С помощью найденных соотношений находим

$$\begin{aligned} np_{\tau} \mathbf{F} &= -\frac{mg}{v} \dot{z}_0, \\ np_n \mathbf{F} &= -\frac{mg}{v^2 K} \ddot{z}_0, \\ np_b \mathbf{F} &= \frac{mg}{v\chi} \left(K\dot{z}_0 + \frac{\ddot{z}_0}{v^2 K} - \frac{\ddot{z}_0 \dot{K}}{v^2 K^2} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

т.е.

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{g}{v} \dot{z}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{g}{v^2 K} \ddot{z}_0 \cdot \mathbf{n} + \frac{g}{v\chi} \left(K\dot{z}_0 + \frac{\ddot{z}_0}{v^2 K} - \frac{\ddot{z}_0 \dot{K}}{v^2 K^2} \right) \cdot \mathbf{b}. \quad (13)$$

Возвращаясь к формуле (3) с учетом (5), (13) и соотношения $\ddot{\mathbf{R}}_0(t) = v^2 \cdot K \cdot \mathbf{n}$ приходим к искомой системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{X} = 2\dot{Y}vK + Xv^2K^2 + Yv\dot{K} - Z\chi v^2K - \frac{g}{v} \dot{z}_0, \\ \ddot{Y} = Yv^2K^2 + Y\chi^2v^2 + Z\chi v + 2\dot{Z}\chi v - Xv\dot{K} - 2v\dot{X}K - \frac{g}{v^2K} \ddot{z}_0 - v^2K, \\ \ddot{Z} = Z\chi^2v^2 - Y\dot{\chi}v - \dot{Y}\chi v - Xv^2\chi K + \frac{g}{v\chi} \left(K\dot{z}_0 + \frac{\ddot{z}_0}{v^2K} - \frac{\ddot{z}_0 \dot{K}}{v^2K^2} \right), \end{cases} \quad (14)$$

моделирующей траекторию свободно падающего тела в НСО для произвольного вида пространственной кривой

$$\mathbf{R}_0(t) = x_0(t) \cdot \mathbf{i} + y_0(t) \cdot \mathbf{j} + z_0(t) \cdot \mathbf{k}.$$

Анализ основных уравнений (14) в частных случаях

1. Цилиндрическая винтовая линия. В этом случае $\dot{z}_0 = b$, $\ddot{z}_0 = \ddot{z}_0 = 0$, а кривизна и кручение постоянны. В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{X} = 2\dot{Y}vK + Xv^2K^2 - Z\chi v^2K - \frac{gb}{v}, \\ \ddot{Y} = Yv^2 \cdot (K^2 + \chi^2) + 2\dot{Z}\chi v - 2\dot{X}vK - v^2K, \\ \ddot{Z} = Z\chi^2v^2 - \dot{Y}\chi v - Xv^2\chi K + \frac{gKb}{v\chi}. \end{cases} \quad (15)$$

2. Гиперболическая винтовая линия. Тогда $K = \chi$ и $\dot{z}_0 = a$, $\ddot{z}_0 = \ddot{z}_0 = 0$. Для этого случая система (14) приводится к виду:

$$\begin{cases} \ddot{X} = 2\dot{Y}vK + v^2K^2 \cdot (X - Z) + Yv\dot{K} - \frac{ga}{v}, \\ \ddot{Y} = 2Yv^2K^2 + \dot{K}v \cdot (Z - X) + 2Kv \cdot (\dot{Z} - \dot{X}) - v^2K, \\ \ddot{Z} = K^2v^2 \cdot (Z - X) - v \cdot (Y\dot{K} + \dot{Y}K) + \frac{ga}{v}. \end{cases} \quad (16)$$

3. Коническая винтовая линия. Для нее $\dot{z}_0 = a$, $\ddot{z}_0 = \ddot{z}_0 = 0$ и уравнения (14) сводятся к следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{X} = 2\dot{Y}vK + Xv^2K^2 + Yv\dot{K} - Z\chi v^2K - \frac{ag}{v}, \\ \ddot{Y} = Yv^2K^2 + Y\chi^2v^2 + Z\dot{\chi}v + 2\dot{Z}\chi v - Xv\dot{K} - 2\dot{X}vK - v^2K, \\ \ddot{Z} = Z\chi^2v^2 - Y\dot{\chi}v - \dot{Y}\chi v - Xv^2\chi K + \frac{agK}{v\chi}. \end{cases} \quad (17)$$

Результаты численного моделирования систем (15)–(17) показаны на рис. 5–7.

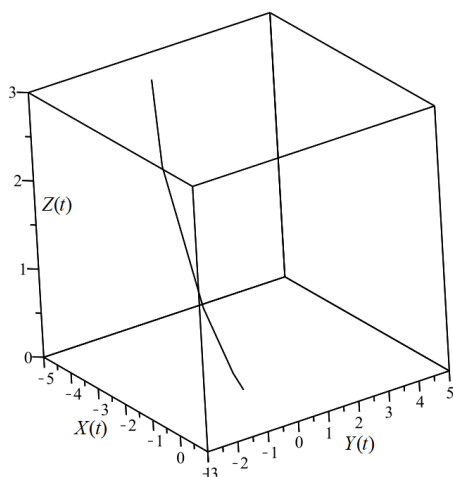


Рис. 5. Траектория свободно падающего тела в базисе $\tau, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, который движется по цилиндрической винтовой линии

$$\mathbf{R}_0(t) = \cos t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cdot \mathbf{j} + 2t \cdot \mathbf{k}.$$

Начальные условия: $X(0) = X'(0) = Y(0) = Y'(0) = Z(0) = Z'(0) = 0$, $0 \leq t \leq 4\pi$

Fig. 5. Trajectory of a free-falling body in the basis $\tau, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ moving along the cylindrical helical line $\mathbf{R}_0(t) = \cos t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cdot \mathbf{j} + 2t \cdot \mathbf{k}$

with initial conditions: $X(0) = X'(0) = Y(0) = Y'(0) = Z(0) = Z'(0) = 0$, $0 \leq t \leq 4\pi$

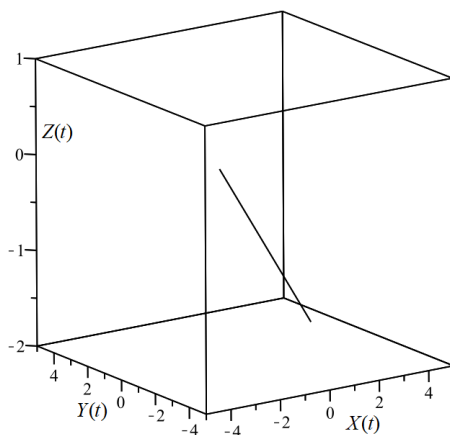


Рис. 6. Траектория свободно падающего тела в базисе $\tau, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ для случая гиперболической винтовой линии

$$\mathbf{R}_0(t) = \frac{1}{20} \operatorname{ch} t \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{20} \operatorname{sh} t \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{20} t \cdot \mathbf{k}.$$

Начальные условия: $X(0) = X'(0) = Y(0) = Y'(0) = Z(0) = Z'(0) = 0$, $0 \leq t \leq 3\pi$

Fig. 6. Trajectory of a free-falling body in the basis $\tau, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ moving along the hyperbolic helical line $\mathbf{R}_0(t) = \frac{1}{20} \operatorname{ch} t \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{20} \operatorname{sh} t \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{20} t \cdot \mathbf{k}$

with initial conditions: $X(0) = X'(0) = Y(0) = Y'(0) = Z(0) = Z'(0) = 0$, $0 \leq t \leq 3\pi$

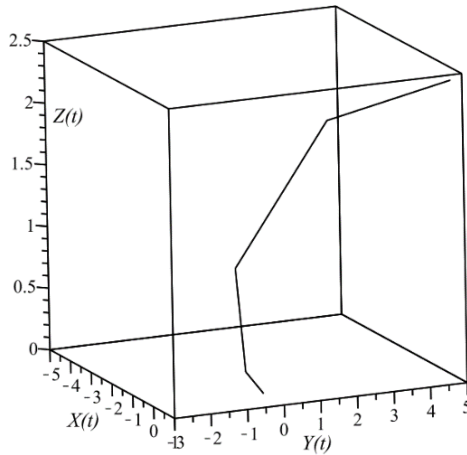


Рис. 7. Траектория свободно падающего тела в подвижном базисе τ, n, b ,двигающегося по конической винтовой линии $\mathbf{R}_0(t) = \frac{1}{2}t \cos t \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{2}t \sin t \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{2}t \cdot \mathbf{k}$. Начальные условия:

$$X(0) = X'(0) = Y(0) = Y'(0) = Z(0) = Z'(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 3\pi$$

Fig. 7. Trajectory of a free-falling body in the basis τ, n, b moving along the conical helical line

$$\mathbf{R}_0(t) = \frac{1}{2}t \cos t \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{2}t \sin t \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{2}t \cdot \mathbf{k} \text{ with initial conditions}$$

$$X(0) = X'(0) = Y(0) = Y'(0) = Z(0) = Z'(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 3\pi$$

Базис τ, n, b , как мы это видели выше, совершает два вида движения: поступательное вдоль пространственной траектории со скоростью $|\dot{\mathbf{R}}_0(t)| = v(t)$ и вращательное с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = v(\chi\boldsymbol{\tau} + K\mathbf{b})$ [7] (так называемый вектор Дарбу). В общем случае такое сложное перемещение тела вдоль криволинейной траектории, тем не менее, позволяет наметить общий алгоритм решения задачи о выяснении конкретного вида кривых в неинерциальных системах отсчета, что, с нашей точки зрения, представляется довольно важным обстоятельством в плане практического приложения полученных выше результатов. Отметим также, что подобной тематикой занимались и другие авторы, о чем свидетельствуют, например, работы [8–10].

Заключение

В заключение еще раз обратим внимание на три основных результата:

1. В неинерциальной системе координат получена общая система дифференциальных уравнений, описывающая траекторию движения тела, подверженного воздействию любых внешних сил.
2. В условиях воздействия одной только силы тяжести приведено подробное исследование найденных систем уравнений, когда движение осуществляется по цилиндрической, гиперболической и конической винтовым линиям.
3. Приведена графическая иллюстрация численного решения полученных уравнений в НСО.

Список источников

1. Богданова С.Б., Гладков С.О. О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 68–80. doi: 10.17223/19988621/84/6
2. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. М. : Просвещение, 1975. Т. 2: Проективное пространство и методы изображений основания геометрии. Элементы топологии. Линии и поверхности в евклидовом пространстве. 366 с.
3. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Курс теоретической физики. Механика. М. : Наука, 1988. 215 с.
4. Фиктенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. : Физматлит, 1962. Т. 1. 607 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М. : Физматлит, 1967. Т. 2. 628 с.
6. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М. : Физматгиз, 1958. 244 с.
7. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия. М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1949. 512 с.
8. Подобная Е.Д., Попова О.П., Глазачев Д.О. Оценка траектории метеороидов по марсианским кластерам // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 97–107. doi: 10.17223/19988621/80/9
9. Voytik V.V. On a special transformation to a non-inertial, radially rigid reference frame // Gravitation and Cosmology. 2013. V. 19, № 3. P. 193–200. doi: 10.1134/S0202289313030110
10. Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G. The task of the relativistic oscillator in a non-inertial frame of reference // European Journal of Physics. 2016. V. 37, № 5. Art. 055604. doi: 10.1088/0143-0807/37/5/055604

References

1. Bogdanova S.B., Gladkov S.O. (2023) O traektoriyakh tel v neinertsial'nykh sistemakh otscheta [On the trajectories of bodies in non-inertial reference frames]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 68–80. doi: 10.17223/19988621/84/6
2. Bazylev V.T., Dunichev K.I. (1975) *Geometriya* [Geometry]. Moscow: Prosveshchenie.
3. Landau L., Lifshitz E. (1976) *Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann.
4. Fikhtengol'ts G.M. (1962) *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Moscow: Fizmatlit.
5. Smirnov V.I. (1967) *Kurs vysshey matematiki* [Course of higher mathematics]. Moscow: Fizmatlit.
6. Norden A.P. (1958) *Kratkiy kurs differentsial'noy geometrii* [Short course in differential geometry]. Moscow: Fizmatlit.
7. Vygodskiy M.Ya. (1949) *Differentsial'naya geometriya* [Differential geometry]. Moscow: Fizmatlit.
8. Podobnaya E.D., Popova O.P., Glazachev D.O. (2022) Otsenka traektorii meteoroidov po marsianskim klasteram [Estimation of the trajectory of meteoroids from Martian clusters]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 97–107. doi: 10.17223/19988621/80/9
9. Voytik V.V. (2013) On a special transformation to a non-inertial, radially rigid reference frame. *Gravitation and Cosmology*. 19(3). pp. 193–200. doi: 10.1134/S0202289313030110
10. Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G. (2016) The task of the relativistic oscillator in a non-inertial frame of reference. *European Journal of Physics*. 37(5). Article 055604. doi: 10.1088/0143-0807/37/5/055604

Сведения об авторах:

Богданова Софья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (МАИ) (Москва, Россия). E-mail: sonjaf@list.ru

Гладков Сергей Октябрьнович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (МАИ) (Москва, Россия). E-mail: sglad51@mail.ru

Information about the authors:

Bogdanova Sof'ya B. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

Gladkov Sergey O. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru

Статья поступила в редакцию 08.10.2023; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 08.10.2023; accepted for publication 03.10.2024