

Научная статья

УДК 536.2; 544.012

doi: 10.17223/19988621/91/6

Аналитические модели теплопроводности в двухфазных дисперсных средах. 2. Сравнение теории с экспериментами

Борис Владимирович Бошенятов¹, Анатолий Алексеевич Глазунов²,
Александр Николаевич Ищенко³, Юлия Николаевна Карнет⁴

^{1,4} *Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия*

^{2,3} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *bosbosh@mail.ru*

² *gla@niipmm.tsu.ru*

³ *ichan@niipmm.tsu.ru*

⁴ *iam@iam.ras.ru*

Аннотация. Получено экспериментальное подтверждение ранее теоретически установленного факта, что область применимости аналитических моделей теплопроводности, которые не учитывают коллективное взаимодействие дисперсных частиц, значительно шире, чем это считалось ранее. Показано, что аналитическая формула Максвелла дает погрешность менее 2.7% во всем диапазоне концентраций и параметров фаз. Новая аналитическая зависимость, инвариантная относительно преобразования инверсии фаз, наилучшим образом описывает эксперименты в бинарных металлических смесях, когда не удается выделить непрерывную фазу.

Ключевые слова: дисперсные среды, композитные материалы, взаимодействие дисперсных частиц, уравнение Лапласа, эффективный коэффициент теплопроводности

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ.

Для цитирования: Бошенятов Б.В., Глазунов А.А., Ищенко А.Н., Карнет Ю.Н. Аналитические модели теплопроводности в двухфазных дисперсных средах. 2. Сравнение теории с экспериментами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 61–74. doi: 10.17223/19988621/91/6

Original article

Analytical models of thermal conductivity in two-phase dispersion media. 2. Comparison of theoretical and experimental data

Boris V. Boshenyatov¹, Anatoliy A. Glazunov²,
Aleksandr N. Ishchenko³, Yuliya N. Karnet⁴

^{1,4} *Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

^{2,3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ bosbosh@mail.ru

² gla@niipmm.tsu.ru

³ ichan@niipmm.tsu.ru

⁴ iam@iam.ras.ru

Abstract. It is traditionally believed that theories and formulas for averaging (homogenization) the physical properties of dispersion media, which exclude the effect of the collective interaction of dispersed particles, are applicable only at low concentrations of the dispersed phase. This opinion was disapproved theoretically and then experimentally in a previous paper. It has been established that with an increase in the concentration of dispersed particles, the main effect on the change in the effective thermal conductivity coefficient of the dispersion medium is exerted by the purely geometric factor of compaction of dispersed particles. Therefore, if the experimental conditions correspond to the theoretical premises considering a two-phase medium as homogeneous and isotropic and the dispersed particles as isolated from each other, then Maxwell's analytical formula is applicable (with an error of less than 2.7%) over the entire range of variation of concentrations and phase parameters. It is shown that the proposed new analytical dependence, which is invariant with respect to the phase inversion transformation and does not take into account the interaction of particles, best describes experiments in binary metal mixtures when it is impossible to isolate a continuous dispersed phase.

Keywords: dispersion media, composite materials, interaction of dispersed particles, Laplace's equation, effective thermal conductivity coefficient

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation: Boshenyatov, B.V., Glazunov, A.A., Ishchenko, A.N., Karnet, Yu.N. (2024) Analytical models of thermal conductivity in two-phase dispersion media. 2. Comparison of theoretical and experimental data. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 61–74. doi: 10.17223/19988621/91/6

Введение

Развитие физических основ математического описания движения многофазных (гетерогенных) сред [1–3] играет важнейшую роль при решении проблем повышения эффективности [4] промышленного производства нового технологического уклада. В ряде случаев такие среды можно рассматривать как однородные, описывая их физические свойства эффективными параметрами, усредненными по некоторому объему Ω , $l^3 \ll \Omega \ll L^3$, где l – характерный размер структурных неоднородностей среды, например усредненное расстояние между центрами масс соседних дисперсных частиц, L – характерный масштаб неоднородности после усреднения.

Традиционно считается, что существующие теории и формулы усреднения (гомогенизации) физических свойств дисперсных сред, которые не учитывают влияния коллективного взаимодействия дисперсных частиц, применимы только при малых концентрациях дисперсной фазы [5, 6]. Физическую природу коллективного взаимодействия частиц легко понять на примере гидродинамических возмущений, поскольку при движении каждая дисперсная частица генерирует в окружающей ее жидкости соответствующее поле скоростей. При повышенной

концентрации движение отдельной частицы зависит не только от внешнего поля, но и от полей возмущений окружающих ее частиц. Коллективное взаимодействие частиц осуществляется и через поля возмущений иной физической природы – температурные, электромагнитные и др. Ясно, что при малых концентрациях дисперсной фазы взаимодействием частиц можно пренебречь, поскольку частицы находятся на относительно большом расстоянии друг от друга, т.е. параметр $\delta = \frac{a}{l} \ll 1$, где a – радиус дисперсной частицы. С другой стороны, из-за чрезвычайной математической сложности задачи получить количественную оценку степени влияния коллективного взаимодействия частиц на эффективные свойства даже для простейшей двухфазной дисперсной среды до недавнего времени не представлялось возможным [7–9].

В предыдущей работе [10] с учетом коллективного взаимодействия частиц получена аналитическая зависимость эффективного коэффициента теплопроводности λ^* статистически однородной и изотропной двухфазной дисперсной среды, в которой идентичные однородные сферические частицы (коэффициент теплопроводности λ_2) случайным образом расположены в однородной и непрерывной дисперсионной фазе (λ_1). При этом параметры дисперсной среды $\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2}$ (где

$\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$) и объемная концентрация дисперсной фазы f_2 изменяются в диапазонах: $-0.5 < \beta < 1$ и $0 < f_2 < 1$:

$$\beta^* = f_2 \beta \frac{1 + k(\beta) f_2}{1 + k(\beta) f_2^2}, \quad (1)$$

$$k(\beta) = 0.0486\beta + 0.0628\beta^2 + 0.0003\beta^3$$

В формулах (1) $\beta^* = \frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 2}$, $\alpha^* = \frac{\lambda^*}{\lambda_1}$. Когда взаимодействие частиц мало, т.е.

$k(\beta) \ll 1$, формула (1) при любых концентрациях f_2 совпадает с так называемой эвристической формулой Максвелла [11]:

$$\beta_M^* = \beta f_2 \text{ или } \alpha_M^* = \frac{1 + 2\beta f_2}{1 - \beta f_2}. \quad (2)$$

Следуя работе [10], будем называть формулу (2) аналитической формулой Максвелла. Сравнивая формулы (1) и (2), нетрудно убедиться, что максимальная относительная погрешность аналитической формулы Максвелла $\varepsilon = \frac{\beta^* - \beta_M^*}{\beta_M^*} 100\% \approx$

$\approx 100k(\beta) f_1 f_2 \%$, возникающая из-за пренебрежения взаимодействием дисперсных частиц, имеет место при $f_2 = 0.5$ и составляет 2.77%.

Таким образом, теоретические исследования [10] показали, что с увеличением концентрации дисперсных частиц основное влияние на эффективную теплопроводность среды оказывает чисто геометрический фактор стесненности частиц, который в полной мере учитывается формулой (2). Учет коллективного взаимодействия частиц дает лишь незначительную поправку на конечный результат.

С использованием этого замечательного свойства и свойства симметрии дисперсной среды из аналитической формулы Максвелла было получено точное решение, инвариантное относительно преобразования инверсии фаз $(\lambda_1, f_1) \leftrightarrow (\lambda_2, f_2)$, предназначенное для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности в трехмерных неупорядоченных структурно симметричных двухфазных средах, когда трудно выделить непрерывную фазу:

$$\frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 2}(\alpha + 2)f_1 + \frac{\alpha^* - \alpha}{\alpha^* + 2\alpha}(2\alpha + 1)f_2 = 0. \quad (3)$$

В частном случае, при равных объемных концентрациях фаз $f_1 = f_2 = 0.5$, формула (3) упрощается до уравнения

$$(\alpha^*)^2 + \frac{2\alpha}{\alpha + 1}\alpha^* - 2\alpha = 0 \quad (4)$$

Единственное положительное решение уравнения (4) $\alpha^* = f(\alpha)$ показано ниже, при сравнении этого решения с экспериментами по измерению эффективной электропроводности различных бинарных металлических смесей.

Отметим, что в силу математической эквивалентности задач в безразмерном виде формулы (1)–(3) пригодны для вычисления эффективного коэффициента электропроводности, электростатической диэлектрической и магнитной проницаемости и других подобных физических величин [12].

В данной работе с целью подтверждения достоверности полученных теоретических результатов [10], дается их сравнение с имеющимися в литературе экспериментами по измерениям эффективных коэффициентов теплопроводности, электропроводности и диэлектрической проницаемости в различных дисперсных средах: суспензиях, эмульсиях, пузырьковых газожидкостных средах, композитах и бинарных металлических смесях. При этом по возможности выбирались экспериментальные данные, которые соответствуют основным предположениям нашей теоретической модели: дисперсные частицы представляют собой однородные твердые (жидкие или газообразные) сферы, которые не касаются друг друга и статистически равномерно распределены в непрерывной и однородной дисперсионной фазе, находящейся в любом агрегатном состоянии.

Экспериментальная проверка области применимости аналитической формулы Максвелла

В работе [13] дано сравнение аналитических формул (1) и (2) с многочисленными экспериментами различных авторов по измерению эффективных коэффициентов электропроводности в газожидкостных дисперсных средах (от пузырьковых до пен), при $\alpha \ll 1$ и $0 < f_2 < 1$, приведенных в работе [14]. Теоретический расчет по формуле Максвелла (2) в данном случае практически совпадает (с погрешностью менее 0.5%) с расчетом по формуле (1), которая учитывает гидродинамическое взаимодействие пузырьков. Показано, что расчет по формуле Максвелла (2) дает отклонение от усредненной экспериментальной зависимости менее 5% во всем диапазоне концентраций пузырьков, в то время как разброс экспериментальных данных составляет до 10%. Линейное приближение $O(f_2^2)$ аналитической формулы Максвелла дает погрешность менее 5% лишь в диапазоне объемных концентраций $0 < f_2 < 0.22$.

На рис. 1 дано сравнение экспериментов [15] по измерению коэффициента теплопроводности в суспензиях с расчетами по формуле Максвелла (2). Суспензии состояли из шарообразных полистироловых бусинок ($\lambda_2 = 0.035$ Вт/м·К) с диаметром 2 мм (темные маркеры) и 6.5 мм, хаотично диспергированных в геле ($\lambda_1 = 0.60$ Вт/м·К). Как и в случае газожидкостных сред, параметр $\alpha = 0.058 \ll 1$. Погрешность измерения коэффициента теплопроводности не превышала 2.5%. Видно, что результаты экспериментов практически идеально совпадают с расчетами по аналитической формуле Максвелла в всем диапазоне объемных концентраций дисперсной фазы – от нуля до максимальной упаковки сфер при хаотической укладке $0 < f_2 < 0.637$.

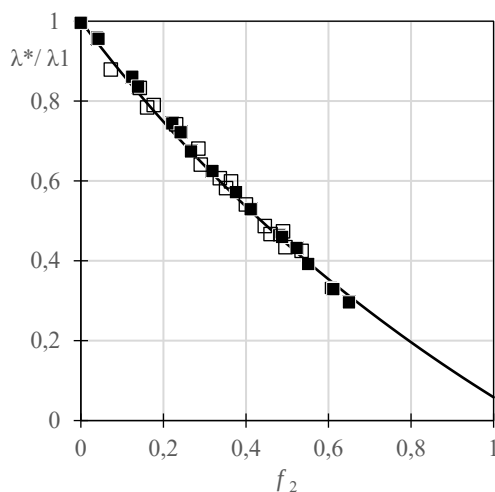


Рис. 1. Сравнение результатов измерений эффективного коэффициента теплопроводности в суспензиях [15] с теоретическим расчетом по формуле Максвелла (2) при $\alpha = 0.058 \ll 1$: линия – теория; маркеры – эксперименты

Fig. 1. Comparison of measured effective thermal conductivity in suspensions [15] with a theoretical calculation by Maxwell's formula (2) at $\alpha = 0.058 \ll 1$: theory (solid line) and experiments (markers)

В работе [16] измерялся коэффициент теплопроводности композитов на основе полипропиленовой матрицы ($\lambda_1 = 0.24$ Вт м⁻¹ К⁻¹) и диспергированных в ней медного ($\lambda_2 = 389.6$ Вт м⁻¹ К⁻¹) и алюминиевого ($\lambda_2 = 209.3$ Вт м⁻¹ К⁻¹) порошков со средним диаметром частиц 230 и 8 мкм соответственно. На рис. 2 дано сравнение этих экспериментов с расчетом по аналитической формуле Максвелла для другого предельного случая ($\alpha \gg 1$).

Видно, что вплоть до начала слипания мелких дисперсных частиц в кластеры эксперименты строго следуют теоретическому расчету. Начало слипания медных частичек соответствует объемной концентрации $f_2 = 0.1$. Алюминиевые частички, несмотря на меньший размер, начинают объединяться при $f_2 = 0.2$. Этот факт объясняется тем, что алюминиевые частицы покрываются оксидной пленкой, которая затрудняет их кластеризацию при приготовлении композита. Теоретическое объяснение увеличения коэффициента теплопроводности композита вследствие кластеризации дисперсных частиц дано в работах [17, 18].

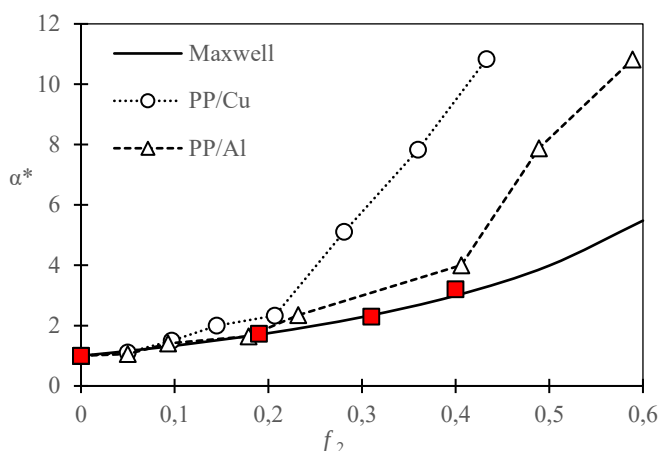


Рис. 2. Сравнение экспериментов по измерению эффективного коэффициента теплопроводности в порошковых композитах с теоретическим расчетом по формуле Максвелла (2) при $\alpha \gg 1$: линия – теория; маркеры – эксперименты

Fig. 2. Comparison of experimentally measured effective thermal conductivity in powder composites with a theoretical calculation by Maxwell's formula (2) at $\alpha \gg 1$: theory (solid line) and experiments (markers)

В работе [19] композит – кремнийорганический лак КО-916К ($\lambda_1 = 0.17$ Вт/м·К) и наночастицы из нитрида алюминия (размер 50–200 нм, $\lambda_1 = 99.9$ Вт/м·К), полученные газофазным способом, – в процессе приготовления подвергался ультразвуковой обработке, что препятствовало кластеризации частиц. На рис. 2 приведена зависимость $\alpha^* = f(f_2)$ такого композита [19, 20]. Видно, что в этом случае совпадение экспериментов с теоретическим расчетом по формуле (2) имеет место в диапазоне концентраций $0 < f_2 < 0.37$.

Таким образом, если принять специальные меры, препятствующие непосредственному контакту частиц и образованию кластеров, то результаты экспериментов при $\alpha \gg 1$ соответствуют теоретическому расчету и при достаточно высоких концентрациях дисперсной фазы. Так, в работе [21] дано сравнение аналитической формулы Максвелла (2) и экспериментов [22] по измерению электропроводности, которые проводились на 1/8 части модельной ячейки объемно-центрированной кубической периодической решетки (body-centered cubic lattice). Максимальная величина объемной концентрации такой упаковки составляет $f_2^{\max} = 0.680$, при этой концентрации сферические частицы касаются друг друга и электропроводность ячейки при $\alpha \gg 1$ стремится к бесконечности. Было показано, что эксперимент соответствует теории (1) с погрешностью менее 3% в диапазоне концентраций $0 < f_2 < 0.55$. Аналитическая формула Максвелла и теория Джеффрея [4], которая учитывает парные взаимодействия частиц в приближении $O(f_2^3)$, имеют ту же погрешность в диапазоне концентраций $0 < f_2 < 0.3$. Линейное приближение формулы Максвелла применимо лишь в диапазоне концентраций $0 < f_2 < 0.1$.

В работе [23] приведены результаты экспериментов при $\alpha \gg 1$, которые показывают, что и для хаотического расположения дисперсных частиц в различных суспензиях аналитическая формула Максвелла применима вплоть до концентраций, лишь немного отличающихся от плотной упаковки $0 < f_2 < 0.58$.

На рис. 3 дано сравнение расчетов по аналитическим формулам (1) и (2) с экспериментами [24] по измерению коэффициентов электростатической диэлектрической проницаемости $\alpha^* = \epsilon^* / \epsilon_1$ в водно-масляных эмульсиях при промежуточном значении параметра $\alpha = 35.5$.

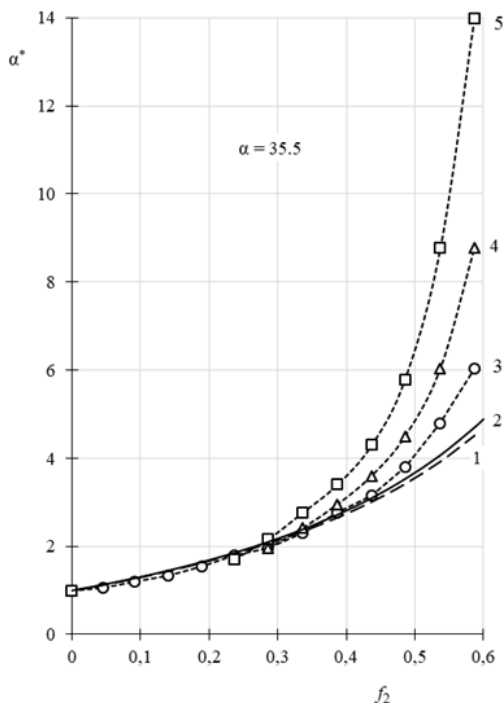


Рис. 3. Сравнение теории с экспериментами по измерению эффективных значений диэлектрической проницаемости в полидисперсных водно-масляных эмульсиях при $\alpha = 35.5$: 1 – расчет по формуле Максвелла (2); 2 – расчет по аналитической формуле (1), которая учитывает взаимодействие частиц; маркеры – эксперименты [24] при температурах: 3 – $T = 10^\circ\text{C}$, 4 – $T = 15^\circ\text{C}$, 5 – $T = 20^\circ\text{C}$

Fig. 3. Validation of effective permittivity in polydisperse water-oil emulsions at $\alpha = 35.5$: (1) calculation by Maxwell's formula (2); (2) calculation by analytical formula (1) accounting for the interaction of particles; markers indicate experiments [24] at temperatures $T =$ (3) 10, (4) 15, and (5) 20°C

Известно, что водно-масляные эмульсии, стабилизированные добавкой небольшого количества поверхностно-активных веществ (ПАВ), агрегативно устойчивы и представляют собой полидисперсный состав мелких (размером до 10 нм) сферических капель воды, окруженных монослоем молекул ПАВ, диспергированных в непрерывной масляной среде. На рис. 3 представлены результаты экспериментов при трех различных температурах среды. Видно, что с увеличением температуры отклонение экспериментальных точек от расчетных зависимостей начинается при меньших значениях объемной концентрации капель. Так, например, при температуре 10°C , расчетные зависимости (1) и (2) практически совпадают с экспериментами в диапазоне объемных концентраций капель $0 < f_2 < 0.45$, далее эксперименты дают более высокие значения коэффициента α^* . При температуре 20°C экспери-

ментальная зависимость начинает уходить вверх уже при значениях $f_2 \geq 0.3$. Наблюдаемая зависимость α^* от температуры объясняется тем, что начиная с некоторой концентрации $f_2 \geq f_2^{cl}$ мелкие капли начинают объединяться в кластеры (как и на рис. 2), что и является причиной увеличения коэффициента α^* , а кинетика процесса кластеризации капель и критическая величина f_2^{cl} зависят от температуры эмульсии.

Экспериментальная проверка новой аналитической формулы усреднения, инвариантной относительно преобразования инверсии фаз

В работе [10] было получено неизвестное ранее точное решение (3), инвариантное относительно преобразования инверсии фаз. Формула (3) пригодна для описания различных дисперсных систем, в которых нельзя четко выделить непрерывную компоненту (матрицу). Одним из примеров таких систем являются бинарные металлические смеси.

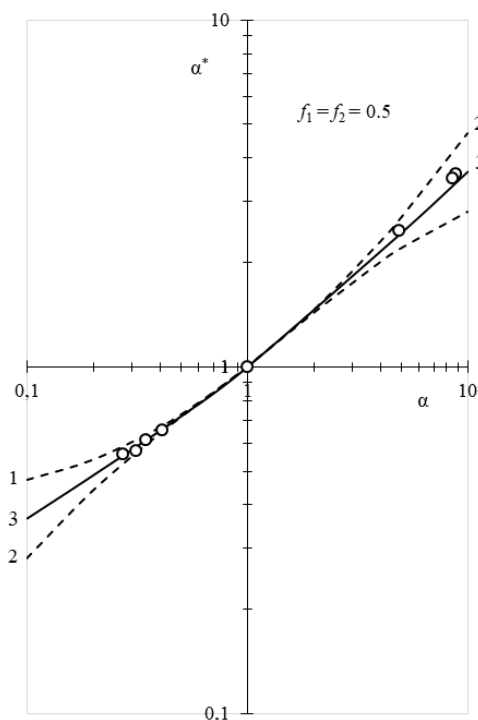


Рис. 4. Сравнение новой теоретической зависимости (3) с экспериментами при $f_1 = f_2 = 0.5$: пунктирные линии 1 и 2 – границы Хашина–Штрикмана; 1 – аналитическая формула Максвелла; 3 – аналитическая зависимость (4); Маркеры – эксперименты по измерению электропроводности бинарных металлических смесей [25], слева направо: Cu₂Sb–Sb, Cu–Fe, Cd–Pb, Pb–Sb, Bi–Bi₂Pb, Mg₂Pb–Pb, Bi–Sn

Fig. 4. Comparison of new theoretical dependence (3) with experiments at $f_1 = f_2 = 0.5$: dashed lines 1 and 2 indicate Hashin-Shtrikman bounds; (1) Maxwell's analytical formula and (3) analytical dependence (4); Circles indicate experimentally measured electrical conductivity of the following binary metal mixtures [25] (from left to right): Cu₂Sb–Sb, Cu–Fe, Cd–Pb, Pb–Sb, Bi–Bi₂Pb, Mg₂Pb–Pb, Bi–Sn

На рис. 4 дано сравнение единственного положительного решения (линия 3) уравнения (4) с экспериментами по измерению электропроводности семи различных бинарных металлических смесей при равных объемных концентрациях компонент $f_1 = f_2 = 0.5$. Эти данные, полученные из экспериментов [25], приведены в таблице.

Результаты измерений [25] эффективного коэффициента электропроводности α^* бинарных металлических смесей при объемных концентрациях компонент $f_1 = f_2 = 0.5$

Химическая формула смеси	Cu ₂ Sb–Sb	Cu–Fe	Cd–Pb	Pb–Sb	Bi–Bi ₂ Pb	Mg ₂ Pb–Pb	Bi–Sn
№ смеси	1	2	3	4	5	6	7
α	0.27	0.31	0.346	0.407	4.845	8.5	8.79
α^*	0.56	0.574	0.6154	0.66	2.479	3.5	3.6

Для сравнения на рис. 4 показаны расчетные зависимости (штриховые линии 1 и 2) границ изменения коэффициентов переноса любых однородных и изотропных дисперсных сред, известные как границы Хашина–Штрикмана (Х–Ш).

Как и следовало ожидать, эксперименты находятся внутри границ Х–Ш. Видно, что и при повышенной объемной концентрации компонент ($f_1 = f_2 = 0.5$) эксперименты достаточно хорошо согласуются с полученной теоретической зависимостью (4) и существенно отличаются от расчета по формуле Максвелла (см. линию 1 и смеси 5, 6 и 7 из таблицы).

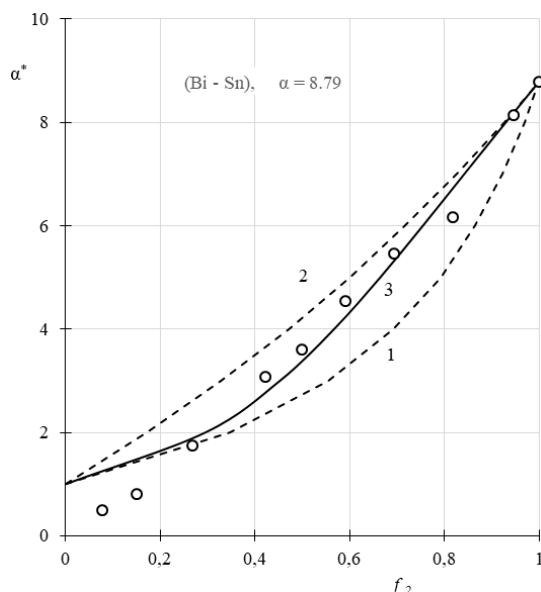


Рис. 5. Сравнение теоретической зависимости (3) с экспериментами [25] по измерению электропроводности бинарной металлической смеси висмута с оловом ($\alpha = 8.79$) в зависимости от объемной концентрации олова (обозначения те же, что и на рис. 4)

Fig. 5. Comparison of theoretical dependence (3) with experiments [25] on measuring the electrical conductivity of a binary metal mixture of bismuth with tin ($\alpha = 8.79$) as a function of the volume concentration of tin (designations are the same as in Figure 4)

На рис. 5 и 6 в безразмерных координатах представлено сравнение теоретической зависимости (3) и экспериментов по измерению относительной электропроводности бинарных металлических смесей: висмута с оловом (Bi–Sn, $\alpha = 8.79$) и кристаллов сурьмянистой меди с сурьмой ($\text{Cu}_2\text{Sb–Sb}$, $\alpha = 0.27$) соответственно, в зависимости от объемной доли олова и сурьмы.

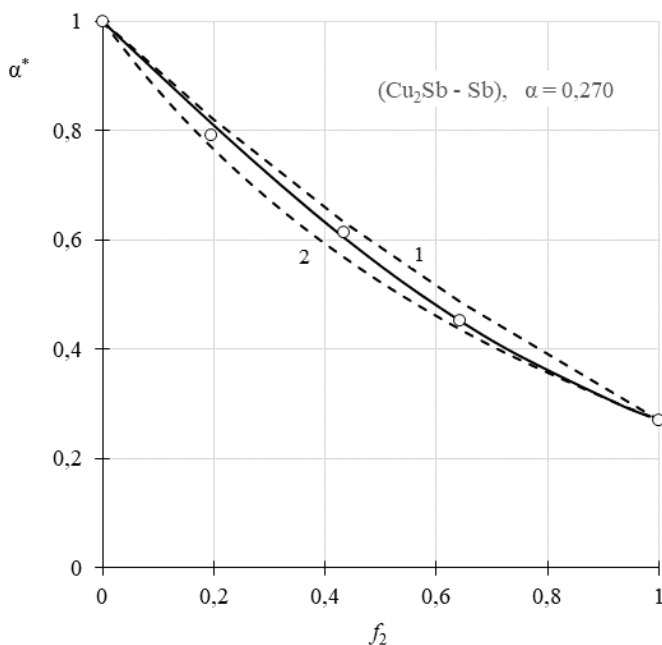


Рис. 6. Сравнение теоретической зависимости (3) с экспериментами [25] по измерению электропроводности бинарной металлической смеси сурьмянистая медь с сурьмой ($\text{Cu}_2\text{Sb–Sb}$, $\alpha = 0.27$) в зависимости от объемной концентрации сурьмы (обозначения те же, что и на рис. 4)

Fig. 6. Comparison of theoretical dependence (3) with experiments [25] on measuring the electrical conductivity of a binary metal mixture of antimony copper with antimony ($\text{Cu}_2\text{Sb–Sb}$, $\alpha = 0.27$) as a function of the volume concentration of antimony (designations are the same as in Figure 4)

Там же приведены (пунктирными линиями) границы X–III; при $\alpha > 0$ нижняя граница X–III совпадает с расчетом по формуле Максвелла (2).

Из рис. 4–6 видно, что предложенная аналитическая зависимость (3) описывает экспериментальные данные наилучшим образом.

Заключение

Сравнение полученных в предыдущей работе аналитических решений с соответствующими экспериментами полностью подтвердило основной теоретический вывод о том, что основное влияние на изменение эффективного коэффициента теплопроводности дисперсной среды с увеличением концентрации дисперсных частиц оказывает чисто геометрический фактор стесненности частиц. Относительное влияние коллективного взаимодействия частиц не превышает нескольких

процентов при предельно неблагоприятных параметрах дисперсной среды: $f_2 \geq 0.5$ и $\alpha \gg 1$. В частности показано, что:

– если объемная концентрация дисперсных частиц не изменяется (нет кластеризации частиц) и соответствует расчетной, то экспериментальные данные отличаются от теоретических расчетов с учетом взаимодействия частиц не более погрешности соответствующих экспериментов;

– если в двухфазных средах нельзя четко выделить непрерывную фазу, например в бинарных металлических смесях, и особенно когда параметры коэффициентов переноса компонент (коэффициенты теплопроводности, электропроводности и др.) отличаются в 10 и более раз, то аналитическая формула Максвелла дает лишь грубую оценку эффективных параметров смеси. В этих случаях наилучшее совпадение с экспериментом дает полученная в предыдущей работе аналитическая зависимость, инвариантная относительно преобразования инверсии фаз, которая также не учитывает коллективное взаимодействие частиц.

Список источников

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М. : Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.; Ч. 2. 360 с.
2. Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С., Шрагер Г.Р. Динамическое взаимодействие частиц дисперсной фазы в гетерогенных потоках. Томск : Изд. Дом Том. гос. ун-та, 2019. 328 с.
3. Псахье С.Г., Обьедков А.Ю., Лернер М.И., Ищенко А.Н., Ивонин И.В., Бирюков Ю.А., Бузник В.М., Дунаевский Г.Е. Ультрадисперсные и наноразмерные порошки: создание, строение, производство и применение / под ред. В.М. Бузника. Томск : Изд-во НТЛ, 2009. 192 с.
4. Бошенятов Б.В. Микропузырьковые газожидкостные среды и перспективы их использования. Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 170 p.
5. Jeffrey D.J. Conduction through a random suspension of spheres // Proc. Roy. Soc. London. 1973. V. A335. P. 355–367. doi: 10.1098/rspa.1973.0130
6. Samantray P.K., Karthikeyan P., Reddy K.S. Estimating effective thermal conductivity of two-phase materials // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2006. V. 49 (21-22). P. 4209–4219. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.03.015
7. Струминский В.В., Гусков О.Б., Корольков Г.А. Гидродинамическое взаимодействие частиц в потенциальных потоках идеальной жидкости // Доклады АН СССР. 1986. Т. 290, № 4. С. 820–824.
8. Felderhof B.U. Virtual mass and drag in two-phase flow // J. Fluid Mech. 1991. V. 225. P. 177–196. doi: 10.1017/S002211209100201X
9. Kristensson G. Homogenization of spherical inclusions // Progress In Electromagnetics Research, PIER. 2003. V. 42. P. 1–25. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.05.001
10. Бошенятов Б.В., Глазунов А.А., Ищенко А.Н., Карнет Ю.Н. Аналитические модели теплопроводности в двухфазных дисперсных средах. 1. Теоретические исследования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 35–54. doi: 10.17223/19988621/86/3
11. Maxwell J.C. Electricity and magnetism. 1st ed. Clarendon Press, 1873.
12. Дульнев Г.Н., Новиков В.В. Процессы переноса в неоднородных средах. Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1991. 248 с.
13. Бошенятов Б.В. Теплопроводность пузырьковых газожидкостных сред повышенной концентрации // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 45. С. 69–79. doi: 10.17223/19988621/45/6
14. Feitosa K., Marze S., Saint-Jalmes A., Durian D.J. Electrical conductivity of dispersions: from dry foams to dilute suspensions // Journal of Physics: Condensed Matter. 2005. V. 17, № 41. P. 6301–6305. doi: 10.1088/0953-8984/17/41/001

15. Carson J.K., Lovatt S.J., Tanner D.J., Cleland A.C. Experimental measurements of the effective thermal conductivity of a pseudo-porous food analogue over a range of porosities and mean pore sizes // *Journal of Food Engineering*. 2004. V. 63. P. 87–95. doi: 10.1016/S0260-8774(03)00286-3
16. Boudenne A., Ibos L., Géhin E., Fois M., Majesté J.C. Anomalous behavior of thermal conductivity and diffusivity in polymeric materials filled with metallic particles // *Journal of Materials Science*. 2005. V. 40. P. 4163–4167. doi: 10.1007/S10853-005-3818-2
17. Бошенятов Б.В. Роль взаимодействия частиц в кластерной модели теплопроводности наножидкостей // *Письма в ЖТФ*. 2018. Т. 44 (3). С. 17–24.
18. Bedeaux D., Wind M.M., van Dijk M.A. The Effective Dielectric Constant of a Dispersion of Clustering Spheres // *Z. Phys. B – Condensed Matter*. 1987. V. 68. P. 343–354. doi: 10.1007/BF01304251
19. Ягунов А.И., Елагин А.А., Лыткин В.В., Бекетов А.Р., Баранов М.В., Денисенко В.И., Стоянов О.В. Применение композиционного материала «Нитрид алюминия–кремний-органический лак КО-916к» в качестве пазовой изоляции обмоток статора асинхронных электродвигателей малой и средней мощности // *Вестник Казанского технологического университета*. 2013. Т. 16 (5). С. 161–166.
20. Ягунов А.И., Аскольд Р.Б., Баранов М.В., Стоянов О.В. Применимость современных моделей для оценки теплофизических характеристик кремнийорганического лака, наполненного тонкодисперсным нитридом алюминия // *Вестник Казанского технологического университета*. 2013. Т. 16 (13). С. 129–132.
21. Бошенятов Б.В. К расчету эффективных коэффициентов переноса в монодисперсных суспензиях сферических частиц // *Письма в ЖТФ*. 2015. Т. 41 (3). С. 67–73.
22. McKenzie D.R., McPhedran R.C., Derrick G.H. The conductivity of lattices of spheres. II. The body centered and face centered cubic lattices // *Proceedings of the Royal Society of London Ser. A. Mathematical and Physical Sciences*. 1978. V. 362. P. 211–232. doi: 10.1098/rspa.1978.0129
23. Кашевский Б.Э., Кордонский В.И., Прохоров И.В., Хутская Н.Г. К вопросу о теплопроводности концентрированных суспензий // *Прикладная механика и техническая физика*. 1990. № 6. С. 95–96.
24. Van Dijk M.A., Broekman E., Joosten J.G.H., Bedeaux D. Dielectric study of temperature dependent aerosol of water/isooctane microemulsion structure // *Journal de Physique*. 1986. V. 47 (5). P. 727–731. doi: 10.1051/jphys:01986004705072700
25. Landauer R. The electrical resistance of binary metallic mixtures // *Journal of Applied Physics*. 1952. V. 23, № 7. P. 779–784. doi: 10.1063/1.1702301

References

1. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka.
2. Arhipov V.A., Vasenin V.A., Usanina A.S., Shrager G.R. (2019) *Dinamicheskoe vzaimodeystvie chastits dispersnoy fazy v geterogennykh potokakh* [Dynamic interaction of dispersed phase particles in heterogeneous flows]. Tomsk: Izdatel'skiy Dom Tomskogo gosudarstvennogo universiteta.
3. Psakh'e S.G., Ob'edkov A.Yu., Lerner M.I., Ishchenko A.N., Ivonin I.V., Biryukov Yu.A., Dunaevskiy G.E. (2009) *Ul'tradispersnye i nanorazmernye poroshki: sozdanie, stroenie, proizvodstvo i primeneniye* [Ultrafine and nanosized powders: formation, structure, production and application]. Tomsk: Izdatel'stvo NTL.
4. Boshenyatov B.V. (2016) *Mikropuzyr'kovye gazozhidkostnye sredy i perspektivy ikh ispol'zovaniya* [Microbubble gas-liquid media and their prospects of applying]. LAMBERT Academic Publishing.

5. Jeffrey D.J. (1973) Conduction through a random suspension of spheres. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 335. pp. 355–367. doi: 10.1098/rspa.1973.0130
6. Samantray P.K., Karthikeyan P., Reddy K.S. (2006) Estimating effective thermal conductivity of two-phase materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 49(21-22). pp. 4209–4219. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.03.015
7. Struminskii V.V., Gus'kov O.B., Korol'kov G.A. (1986) Hydrodynamic interaction of particles in potential flow of an ideal fluid. *Soviet Physics. Doklady*. 31(10). pp. 787–789.
8. Felderhof B.U. (1991) Virtual mass and drag in two-phase flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 225. pp. 177–196. doi: 10.1017/S002211209100201X
9. Kristensson G. (2003) Homogenization of spherical inclusions. *Progress In Electromagnetics Research*. 42. pp. 1–25. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.05.001
10. Boshenyatov B.V., Glazunov A.A., Ishchenko A.N., Karnet Yu.N. (2023) Analiticheskie modeli teploprovodnosti v dvukhfaznykh sredakh. Teoreticheskie issledovaniya [Analytical models of thermal conductivity in two-phase dispersive media. 1. Theoretical investigation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 35–54. doi: 10.17223/19988621/86/3
11. Maxwell J.C. (1873) *Electricity and Magnetism*. Clarendon Press.
12. Dul'nev G.N., Novikov V.V. (1991) *Protsessy perenosa v neodnorodnykh sredakh* [Transfer processes in inhomogeneous media]. Leningrad: Energoatomizdat.
13. Boshenyatov B.V. (2017) Teploprovodnost' puzyr'kovoy gazozhidkostnoy sredy vysokoy kontsentratsii [Thermal conductivity of the bubble gas-liquid media with a high concentration]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(45). pp. 69–79. doi: 10.17223/19988621/45/6
14. Feitosa K., Marze S., Saint-Jalmes A., Durian D.J. (2005) Electrical conductivity of dispersions: from dry foams to dilute suspensions. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 17(41). pp. 6301–6305. doi: 10.1088/0953-8984/17/41/001
15. Carson J.K., Lovatt S.J., Tanner D.J., Cleland A.C. (2004) Experimental measurements of the effective thermal conductivity of a pseudo-porous food analogue over a range of porosities and mean pore sizes. *Journal of Food Engineering*. 63. pp. 87–95. doi: 10.1016/S0260-8774(03)00286-3
16. Boudenne A., Ibos L., Géhin E., Fois M., Majesté J.C. (2005) Anomalous behavior of thermal conductivity and diffusivity in polymeric materials filled with metallic particles. *Journal of Materials Science*. 40. pp. 4163–4167. doi: 10.1007/S10853-005-3818-2
17. Boshenyatov B.V. (2018) The role of particle interaction in the cluster model of heat conductivity of nanofluids. *Technical Physics Letters*. 44(2). pp. 94–97. doi: 10.1134/S1063785018020049
18. Bedeaux D., Wind M.M., van Dijk M.A. (1987) The effective dielectric constant of a dispersion of clustering spheres. *Zeitschrift für Physik B. Condensed Matter*. 68. pp. 343–354. doi: 10.1007/BF01304251
19. Yakupov A.I., Elagin A.A., Lytkin V.V., Beketov A.P., Baranov M.V., Denisenko V.I., Stoyanov O.V. (2013) Primenenie kompozitsionnogo materiala «Nitrid alyuminiya – kremniyorganicheskiy lak KO-916k» v kachestve fazovoy izolyatsii obmotok statora asinkhronnykh elektrodvigatelyay maloy i sredney moshchnosti [Application of the composite material “Aluminum nitride–organosilicon varnish KO-916k” as slot insulation of the stator windings of low and medium power asynchronous electric motors]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta – Herald of Technological University*. 16(5). pp. 161–166.
20. Yakupov A.I., Askol'd R.B., Baranov M.V., Stoyanov O.V. (2013) Primenimost' sovremennykh modeley dlya otsenki teplofizicheskikh kharakteristik kremniyorganicheskogo laka, napolnen-nogo tonkodispersnym nitridom alyuminiya [Applicability of modern models for assessing the thermophysical characteristics of silicone varnish filled with finely dispersed aluminum

- nitride]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta – Herald of Technological University*. 16(13). pp. 129–132.
21. Boshenyatov B.V. (2015) On calculation of effective transport coefficients in monodisperse suspension of spherical particles. *Technical Physics Letters*. 41(2). pp. 136–138. doi: 10.1134/S1063785015020054D
 22. McKenzie D.R., McPhedran R.C., Derrick G.H. (1978) The conductivity of lattices of spheres. II. The body centered and face centered cubic lattices. *Proceedings of the Royal Society of London Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 362. pp. 211–232. doi: 10.1098/rspa.1978.0129
 23. Kashevskiy B.E., Kordonskiy V.I., Prokhorov I.V., Khutskaia N.G. (1990) K voprosu o teploprovodnosti kontsentririrovannykh suspenziy [On the issue of thermal conductivity of concentrated suspensions]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 6. pp. 95–96.
 24. Van Dijk M.A., Broekman E., Joosten J.G.H., Bedeaux D. (1986) Dielectric study of temperature dependent aerosol of water/isooctane microemulsion structure. *Journal de Physique*. 47(5). pp. 727–731. doi: 10.1051/jphys:01986004705072700
 25. Landauer R. (1952) The electrical resistance of binary metallic mixtures. *Journal of Applied Physics*. 23(7). pp. 779–784. doi: 10.1063/1.1702301

Сведения об авторах:

Бошенятков Борис Владимирович – доктор технических наук, главный научный сотрудник Института прикладной механики РАН (Москва, Россия). E-mail: bosbosh@mail.ru

Глазунов Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Ищенко Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Карнет Юлия Николаевна – кандидат физико-математических наук, ученый секретарь Института прикладной механики Российской академии наук (Москва, Россия). E-mail: iam@iam.ras.ru

Information about the authors:

Boshenyatov Boris V. (Doctor of Technical Sciences, Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: bosbosh@mail.ru

Glazunov Anatoliy A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Ishchenko Aleksandr N. (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Karnet Yuliya N. (Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: iam@iam.ras.ru

Статья поступила в редакцию 19.09.2023; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 19.09.2023; accepted for publication 03.10.2024