

Научная статья

УДК 532.5.031

doi: 10.17223/19988621/91/9

Образование каверны с неподвижными точками отрыва при вертикальном разгоне плавающего кругового цилиндра

Михаил Викторович Норкин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия, norkinmi@mail.ru

Аннотация. Рассматривается процесс образования присоединенной каверны при вертикальном и отрывном разгоне цилиндра в идеальной, несжимаемой, тяжелой жидкости. Предполагается, что точки пересечения внутренней свободной границы жидкости с поверхностью тела (точки отрыва) остаются неподвижными в течение некоторого небольшого промежутка времени. Изучается возможность представления решения данной задачи в виде асимптотического разложения по целым степеням малого времени, члены которого удовлетворяют условию ограниченности скорости жидкости вблизи точек отрыва.

Ключевые слова: круговой цилиндр, отрывной разгон, присоединенная каверна, неподвижные точки отрыва, малые времена, степенные асимптотики, число Фруда, давление в каверне

Для цитирования: Норкин М.В. Образование каверны с неподвижными точками отрыва при вертикальном разгоне плавающего кругового цилиндра // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 99–112. doi: 10.17223/19988621/91/9

Original article

CAVITY FORMATION WITH FIXED SEPARATION POINTS DURING VERTICAL ACCELERATION OF A FLOATING CIRCULAR CYLINDER

Mikhail V. Norkin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation, norkinmi@mail.ru

Abstract. The plane problem of the initial stage of motion of a circular cylinder under the free surface of an ideal, incompressible, heavy fluid is considered. It is assumed that the cylinder moves from the rest state in the vertical direction with constant acceleration. A feature of this problem is that under certain conditions, liquid particles separate from the surface of the body, and an attached cavity is formed behind the body. This phenomenon occurs when the cylinder moves at a high acceleration rate or when the accelerated motion of the body is accompanied by artificial cavitation. Assuming additionally that the separation points are immobile, the possibility of representing the problem solution

in terms of an asymptotic power series with respect to small time intervals is considered. The desired expansion with the first two terms of the asymptotics exists only at a certain Froude number and pressure in the cavity. These values are chosen such that the Kutta-Zhukovskii condition is exactly fulfilled at the separation points.

Keywords: circular cylinder, separation acceleration, attached cavity, fixed separation points, small times, power asymptotics, Froude number, cavity pressure

For citation: Norkin, M.V. (2024) Cavity formation with fixed separation points during vertical acceleration of a floating circular cylinder. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 99–112. doi: 10.17223/19988621/91/9

Введение

Изучение различных физических ситуаций, возникающих при взаимодействии твердых тел с жидкостью, приводит к необходимости учитывать явление кавитации. В частности, это имеет место при ударе плавающего тела или его разгоне с большими ускорениями [1]. Если задача разгона решается с учетом искусственной кавитации, то ускорение цилиндра не обязательно предполагается большим. В этом случае отрыв происходит под влиянием двух факторов – ускоренного движения тела и искусственной подачи газа в предполагаемую зону отрыва непосредственно перед началом движения. В статье [2] рассматривалось ускоренное и отрывное движение кругового цилиндра в жидкости в горизонтальном направлении. Для определения главного асимптотического приближения на малых временах была предложена модель с односторонними ограничениями, обобщающая классическую модель удара с отрывом на случай конечных ускорений цилиндра. Неравенства, которые формулировались в зонах контакта и отрыва, гарантировали ограниченность первых производных потенциала скорости вблизи точек отрыва (т.е. гарантировали выполнение условия Кутты–Жуковского). В следующем приближении по времени данное физическое условие обеспечивалось за счет специального выбора положения точек отрыва. При этом, строго говоря, условие Кутты–Жуковского выполнялось не точно, а приближенно. Это было связано с необходимостью сгладить корневые особенности у производной соответствующей граничной функции в маленьких окрестностях точек отрыва. Помимо этого, использовалась специальная замена переменных, фиксирующая положение точек отрыва, которая сильно усложняла техническую работу. По этим причинам до конца не ясным оставался вопрос о возможности представления решения задачи разгона кругового цилиндра в жидкости в виде асимптотического разложения по целым степеням малого времени, члены которого строго удовлетворяют сформулированному условию в точках отрыва. Здесь имеются в виду асимптотики, в которых кроме главного приближения учитывается еще по крайней мере один член.

В настоящей статье предлагается исследовать данный вопрос при дополнительном предположении о неподвижности точек отрыва. Поскольку в этом случае нет необходимости делать специальную замену переменных, то техническая работа сильно упрощается. Показывается, что при движении цилиндра в вертикальном направлении искомое разложение, содержащее первые два члена асимп-

тотики, существует только при определенном выборе характерных физических величин – числа Фруда и давления в каверне. Эти величины выбираются таким образом, чтобы точно выполнялось условие ограниченности скорости жидкости в точках отрыва. В общем случае (для любой физической ситуации, без сделанного предположения о неподвижности точек отрыва) структура асимптотики меняется, а точки отрыва движутся. В такой общей ситуации эффективным оказывается метод, предложенный в статье [2]. Заметим также, что при искусственной кавитации (когда давление в каверне порядка атмосферного и выше) условие положительности давления в зоне контакта обычно выполняется.

Проблема построения регулярного асимптотического разложения по целым степеням малого времени при специальном выборе физических параметров возникает также в задаче гидродинамического кавитационного удара. Для кругового цилиндра ее исследование проведено в [3].

Впервые процедура разложения по целым степеням малого времени применялась в задачах генерации волн движущимся в жидкости телом (круговым цилиндром) [4, 5]. В них использовался прямой асимптотический метод, а движение тела предполагалось безотрывным. В статьях [6, 7] такие асимптотики строились на основе интегро-дифференциального уравнения свободной границы. Подобный подход в задачах генерации волн является более обоснованным. Обзор основных результатов по близкой проблеме входа твердого тела в жидкость с учетом явления кавитации дан в [8]. В [9] представлены эксперименты по ударному воздействию жидкости на твердые стенки в условиях кавитации. В [10] исследовались задачи подводного старта ракет кавитационным способом. Многие важные результаты, полученные в области численного и экспериментального моделирования многосвязных течений сплошных сред со свободными границами, отражены в [11–13]. В монографиях [14–15] изложены общие принципы кавитационных течений при взаимодействии жидкости с твердыми телами.

Постановка задачи

Рассматривается плоская задача о вертикальном движении кругового цилиндра в жидкости из состояния покоя с постоянным ускорением. Жидкость является идеальной, несжимаемой, однородной. При определенных физических условиях сразу после начала движения возникает отрыв жидкости от тела, вследствие которого формируется присоединенная каверна. Главным моментом работы является предположение о неподвижности точек отрыва. При таком допущении изучается возможность представления решения данной задачи в виде асимптотического разложения по целым степеням малого времени. Используя подвижные координаты и безразмерные переменные, приходим к следующей связанной нелинейной системе (рис. 1–3):

$$\Delta\Phi = 0, \quad r \in \Omega(t); \quad (1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \alpha t n_y, \quad r \in S_{11}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \alpha t \frac{\partial\Phi}{\partial y} + 0.5(\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}(y + 0.5\alpha t^2 - H) - 0.5\chi = 0, \quad r \in S_{12}(t); \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \alpha t \sin \theta = \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \dot{\theta}(t) + \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad r \in S_{12}(t); \quad (4)$$

$$\dot{\theta}(t) = R^{-2} [x(\Phi_y - \alpha t) - y\Phi_x] = R^{-2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \alpha t R \cos \theta \right];$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \alpha t \frac{\partial \Phi}{\partial y} + 0.5(\nabla \Phi)^2 + Fr^{-2}\xi(x,t) = 0, \quad r \in S_2(t); \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad r \in S_2(t); \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b - 0.5\alpha t^2; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad x = \pm H_R; \quad (7)$$

$$\Phi(x, y, 0) = 0, \quad \xi(x, 0) = 0, \quad \eta(\theta, 0) = 0; \quad (8)$$

$$h(t) = 0.5\alpha t^2. \quad (9)$$

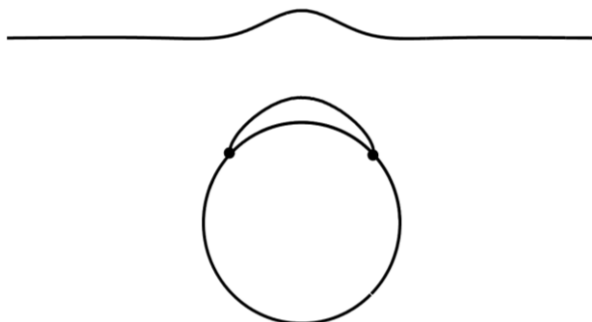


Рис. 1. Форма присоединенной каверны при $t = 0.4$

Fig. 1. The shape of the attached cavity at $t = 0.4$

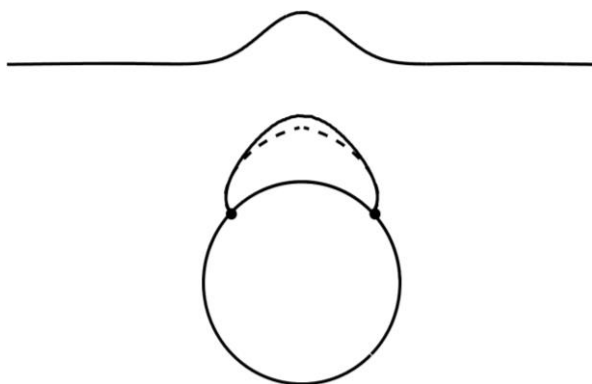


Рис. 2. Форма присоединенной каверны при $t = 0.6$.

Пунктирной линией изображены пограничные решения

Fig. 2. The shape of the attached cavity at $t = 0.6$.

The dotted line indicates the boundary layer solutions

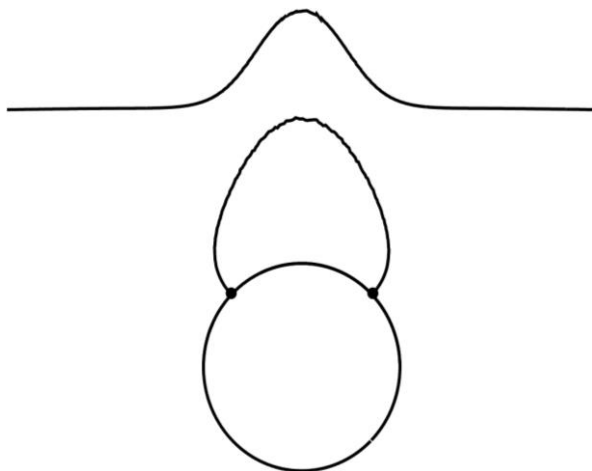


Рис. 3. Форма присоединенной каверны при $t = 0.8$

Fig. 3. The shape of the attached cavity at $t = 0.8$

Задача (1)–(9) содержит следующие характерные параметры:

$$Fr = \sqrt{\frac{|w_0|}{g}}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho |w_0| a}, \quad \alpha = \frac{w_0}{|w_0|},$$

где Fr – число Фруда, связанное с ускорением цилиндра w_0 ; χ – безразмерная разность давлений на внешней свободной поверхности и в каверне; p_a – атмосферное давление; p_c – давление в каверне; g – ускорение свободного падения; ρ – плотность жидкости; a – радиус цилиндра; α – параметр, характеризующий направление движения цилиндра ($\alpha = -1$ соответствует движению вдоль вектора силы тяжести).

Безразмерные переменные вводятся по формулам

$$t' = \sqrt{\frac{a}{|w_0|}} \cdot t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad \Phi' = a\sqrt{|w_0|} a \cdot \Phi, \quad p' = \rho |w_0| ap,$$

где штрихами помечаются размерные величины.

Неподвижные координаты X, Y связаны с подвижными x, y соотношениями $X = x, Y = y + h(t)$, где $h(t)$ – закон движения цилиндра, ось y направлена против вектора силы тяжести, начало координат находится в центре цилиндра. Картина течения жидкости является симметричной относительно оси y .

В статье также используются следующие обозначения: Φ – потенциал скоростей абсолютного движения жидкости, записанный относительно подвижной системы координат; $\Omega(t)$ – область течения жидкости; S_{11} – часть поверхности цилиндра, на которой не происходит отрыва частиц жидкости; $S_{12}(t)$ – внутренняя свободная граница (граница каверны); $S_2(t)$ – внешняя свободная поверхность жидкости ($y = H$ – ее уравнение при $t = 0$); $\theta_s, \pi - \theta_s$ – полярные углы, соответствующие точкам отрыва; $Y = -H_b$ – плоское дно; $x = \pm H_r$ – уравнения симметричных боковых стенок; через (x, y) обозначены координаты радиус-вектора r ; R, θ – цилиндрические координаты ($x = R \cos \theta, y = R \sin \theta$).

Вкратце поясним происхождение системы (1)–(9). Так как течение идеальной жидкости, начинающееся из состояния покоя, является потенциальным, то в каждый момент времени в силу условия несжимаемости потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа во всей области, занятой жидкостью (формула (1)). В зоне контакта S_{11} нормальная компонента скоростей жидких частиц, непосредственно прилегающих к границе тела, совпадает с нормальной компонентой скоростей соответствующих точек границы тела (формула (2)). На свободных границах жидкости задаются динамические и кинематические условия. Динамическое условие состоит в том, что давление на свободной поверхности задано. Предполагается, что на внешней свободной границе действует атмосферное давление, а на внутренней свободной границе давление зависит от способа искусственной подачи газа в камеру. Динамические условия (3), (5) записываются на основании интеграла Коши–Лагранжа в подвижной системе координат. Кинематическое условие заключается в том, что жидкие частицы никогда не покидают свободную границу. Формы внутренней и внешней свободных границ определяются равенствами

$$R = 1 + \eta(\theta, t); \quad y = H + \xi(x, t) - h(t)$$

Взяв производную от каждого из этих равенств по времени вдоль траектории движения жидкой частицы, приходим к уравнениям (4), (6). В точках контакта внутренней свободной границы с поверхностью цилиндра ставится условие ограниченности скорости жидкости. На дне и боковых стенках формулируются условия непротекания (формулы (7)). Так как в начальный момент времени жидкость невозмущена, то потенциал скоростей и возмущения свободных границ в этот момент равны нулю (формулы (8)). Последняя формула определяет закон движения цилиндра.

Асимптотический анализ задачи на малых временах

Неизвестные заранее физические величины Fr и χ должны быть определены из условия ограниченности скорости жидкости вблизи точек отрыва. При этом допускается зависимость величины χ от времени и от угловой координаты:

$$\chi = \chi_0 + t^2 \chi_1 + t^2 \chi_2 f(\theta), \quad (10)$$

где χ_0, χ_1, χ_2 являются постоянными величинами.

В формуле (10) в качестве функции, зависящей от угловой координаты, может быть взята любая четная относительно точки 0.5π функция, производная которой имеет корневые особенности в точках отрыва. Последнее условие позволяет решить тонкие вопросы, связанные с регулярностью второго асимптотического приближения. В случае $\chi_2 = 0$ получается самый простой закон искусственной кавитации, которому уделяется особое внимание. Конкретные численные примеры, рассмотренные ниже, соответствуют именно этому случаю.

Сделанное в работе весьма существенное предположение о неподвижности точек отрыва будет оправдано, если удастся построить корректное с физической точки зрения решение поставленной задачи, удовлетворяющее условиям ограниченности скорости жидкости и положительности давления.

Решение задачи (1)–(9) будем искать в виде асимптотических разложений по целым степеням малого времени:

$$\Phi = t\Phi_0 + t^3\Phi_1 + \dots, \quad (11)$$

$$\eta(\theta, t) = t^2\eta_0(\theta) + t^4\eta_1(\theta) + \dots, \quad (12)$$

$$\xi(x, t) = t^2\xi_0(x) + t^4\xi_1(x) + \dots \quad (13)$$

Для упрощения технической работы будем использовать представление (10) с конкретной функцией $f(\theta)$:

$$f(\theta) = \eta_0(\theta) \sin \theta.$$

Заметим, что функция $f(\theta)$ применяется только во втором асимптотическом приближении, а функция $\eta_0(\theta)$ определяется на основе анализа первого приближения. Также обратим внимание на то, что при таком выборе функции $f(\theta)$ условие регулярности соответствующей граничной функции в задаче для второго асимптотического приближения не будет зависеть от точки отрыва θ_s .

После подстановки выражений (11)–(13) в исходную задачу (1)–(9) выполняется стандартная процедура переноса краевых условий на невозмущенный уровень. Здесь в первую очередь следует обратить внимание на границы $S_{12}(t)$, $S_2(t)$, $y = -H_b - 0.5\alpha t^2$, которые меняются относительно подвижной системы координат с течением времени. Все функции, входящие в краевые условия на этих границах (после подстановки выражений (11)–(13)), раскладываются по целым степеням малого времени с помощью формулы Тейлора. В результате получают краевые условия на неподвижных (первоначально невозмущенных) границах. Затем приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях t . На остальных границах, которые остаются неподвижными относительно системы координат x, y , после подстановки выражений (11)–(13), сразу применяется метод неопределенных коэффициентов. В итоге приходим к следующим двум задачам для нахождения функций Φ_0 и Φ_1 (к первой задаче добавляются краевые условия типа неравенств):

$$\Delta\Phi_0 = 0, \quad r \in \Omega(0); \quad (14)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = \alpha n_y, \quad 0.5\chi_0 - \Phi_0 + Fr^{-2}(H - y) \geq 0, \quad r \in S_{11}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} \geq \alpha n_y, \quad 0.5\chi_0 - \Phi_0 + Fr^{-2}(H - y) = 0, \quad r \in S_{12}(0); \quad (16)$$

$$\Phi_0 = 0, \quad y = H; \quad (17)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b; \quad (18)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} = 0, \quad x = \pm H_R; \quad (19)$$

$$\Delta\Phi_1 = 0, \quad r \in \Omega(0); \quad (20)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0, \quad r \in S_{11}; \quad (21)$$

$$3\Phi_1 = -2\eta_0^2(\theta) - 0.5\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\right)^2 + \alpha\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\sin\theta - (\alpha Fr^{-2} + 0.5Fr^{-4})\cos^2\theta - 0.5\alpha Fr^{-2} +$$

$$+0.5\chi_1 - (\alpha + Fr^{-2} - 0.5\chi_2)\eta_0(\theta)\sin\theta, \quad r \in S_{12}(0); \quad (22)$$

$$3\Phi_1 = -\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\right)^2 - 0.5(Fr^{-2} - 3\alpha)\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}, \quad y = H; \quad (23)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = -0.5\alpha\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}, \quad y = -H_b; \quad (24)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = 0, \quad x = \pm H_R. \quad (25)$$

Так как неравенства в формулах (15) и (16) не являются прямым следствием описанного подхода, то необходимо пояснить их смысл. Соотношение в (15) означает, что в главном приближении давление в зоне контакта не может быть ниже давления в каверне. Неравенство в (16) показывает, что жидкие частицы могут перемещаться только в сторону жидкости. Задача (14)–(19) имеет такую же структуру, как и классическая модель удара с отрывом, для которой справедлива теорема существования и единственности решения [16]. Вследствие этого однозначно определяются точки раздела краевых условий (точки отрыва), в которых решение задачи (14)–(19) имеет непрерывные первые производные. Таким образом, в главном приближении по времени условие Кутты–Жуковского выполняется автоматически.

Далее определим условия, при которых второе приближение для потенциала скорости будет непрерывно дифференцируемым в точках смены краевых условий. На основании свойств решения задачи (14)–(19) можно сделать вывод, что в общем случае функция, стоящая в правой части равенства (22), будет непрерывной в указанных точках, а ее первая производная будет иметь в них особенность типа квадратного корня. Эта особенность содержится только в последнем члене формулы (22) (производные по угловой координате от первого слагаемого, а также от суммы второго и третьего слагаемых не имеют особенности). Таким образом, регулярность данной граничной функции будет обеспечена только при специальном выборе физических параметров задачи, которые должны быть связаны соотношением

$$\alpha + Fr^{-2} - 0.5\chi_2 = 0 \quad (26)$$

(зануляется коэффициент при корневой особенности у производной граничной функции).

В дальнейшем соотношение (26) предполагается выполненным. В этом случае производная от решения задачи (20)–(25) по угловой координате θ при $\theta \rightarrow \theta_s - 0$ ($r = 1$) имеет корневую особенность. Таким образом, остается подобрать постоянную χ_1 так, чтобы коэффициент при этой особенности обратился в ноль. Заметим, что при невыполнении условия (26) особенность у названной производной со стороны зоны контакта будет не чисто корневой (появляется еще логарифмический множитель). Это приводит к нарушению условия Кутты–Жуковского со стороны зоны отрыва и делает неправильными дальнейшие рассуждения по нахождению коэффициента χ_1 . При выполнении условия (26) логарифмический множитель появляется только в младших членах, что никак не влияет на дальнейшие рассуждения. Отметим, что в частном случае $\chi_2 = 0$, $\alpha = -1$ число Фруда будет равно единице. Таким образом, если давление в каверне имеет квад-

ратичную зависимость от времени с постоянными коэффициентами (сохраняются первые два члена в формуле (10)) и цилиндр движется вдоль вектора силы тяжести, то регулярность граничного условия (22) обеспечивается только при данном конкретном числе Фруда, которое равно единице (ускорение цилиндра совпадает с ускорением силы тяжести). Интересно отметить, что при $\chi_2 = 0$, $\alpha = 1$ число Фруда не удастся подобрать из условия регулярности данной граничной функции.

Решение задачи (20)–(25) представимо в виде:

$$\Phi_1 = 6^{-1} \chi_1 u + v,$$

где функции u , v определяются решениями линейных краевых задач.

Проводя аналогию с работой [2], в которой регулярность потенциала скорости обеспечивалась за счет выбора положения точек отрыва (при фиксированных физических параметрах задачи), приходим к следующему выражению для коэффициента χ_1 :

$$\chi_1 = -\frac{6a_2}{a_1}, \quad a_1 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sqrt{\theta_s - \theta}, \quad a_2 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial v}{\partial \theta} \sqrt{\theta_s - \theta}, \quad (27)$$

Таким образом, для построения регулярного асимптотического разложения потенциала скорости (с учетом первых двух членов асимптотики) нужно подобрать параметры Fr , χ_2 так, чтобы выполнялось соотношение (26), а после этого найти коэффициент χ_1 по формулам (27). Кроме этого нужно еще гарантировать существование самого отрыва жидкости от тела. Например, при небольших ускорениях цилиндра и очень маленьком давлении в каверне (естественная ситуация) движение цилиндра будет безотрывным. При выполнении условия (26) отрыв будет происходить при соответствующем выборе параметра χ_0 . Отметим, что если в (10) – (13) ограничиться только главным асимптотическим приближением, то величину χ_0 можно интерпретировать как число кавитации. При небольших ускорениях цилиндра отрыв будет происходить при отрицательных числах кавитации.

После решения краевых задач (14)–(25) по формулам (12) и (13) определяются возмущения свободных границ жидкости. Для коэффициентов асимптотических разложений (12) и (13) приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} 2\eta_0(\theta) &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} - \alpha \sin \theta; \\ 4\eta_1(\theta) &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - 2\eta_0^2(\theta) + (Fr^{-2} + \alpha)(\eta_0(\theta) \cos \theta)'; \\ 2\xi_0(x) &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \quad 4\xi_1(x) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \end{aligned}$$

Интересно отметить, что в случае $\chi_2 = 0$, $\alpha = -1$ ($Fr = 1$) вторая из этих формул сильно упрощается. При этом функция $\eta_1(\theta)$ оказывается непрерывной в точках отрыва (в общем случае она имеет там корневые особенности).

Решения типа пограничного слоя

Учитывая свойства задачи (14)–(19), можно утверждать, что производная функции $\eta_0(\theta)$ имеет в точках отрыва особенности типа квадратного корня.

Функция $\eta_1(\theta)$ в общем случае уже сама имеет такие особенности. Следовательно, актуальными являются построение решений типа пограничного слоя и согласование их с внешним разложением (12). В силу симметрии задачи рассуждения проведем только для правой точки отрыва. Помимо этого, ограничимся случаем $\alpha = -1$ (соотношение (26) предполагается выполненным). Учитывая, что при $r = 1$, $\theta \rightarrow \theta_s + 0$ справедливы асимптотические формулы

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \sin \theta \sim \beta \sqrt{\theta - \theta_s}, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \sim -Fr^{-2} \cos \theta_s, \quad (28)$$

придем к следующему представлению уравнения (4) в маленькой окрестности точки отрыва:

$$t\beta\sqrt{\theta - \theta_s} = t[1 - Fr^{-2}] \cos \theta_s \frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

где коэффициент β определяется численно на основе первого из равенств (28). Решение последнего уравнения будем искать в виде:

$$\eta(\theta, t) = \beta t^3 F(\tau) + \dots, \quad \tau = \frac{\theta - \theta_s}{t^2}.$$

После подстановки этого проекта решения в дифференциальное уравнение приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t^2 . В результате для определения функции $F(\tau)$ придем к следующей задаче:

$$(\tau - \beta_1)F'(\tau) - 1.5F(\tau) = -0.5\sqrt{\tau}, \quad \beta_1 = 0.5(1 - Fr^{-2}) \cos \theta_s, \\ F(0) = 0, \quad F(\tau) \sim \frac{1}{2} \left[\sqrt{\tau} - \frac{\beta_1}{4\sqrt{\tau}} \right], \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Условие сращивания получается путем перехода в (12) к погранслошной переменной τ и использования приведенной выше асимптотической формулы (28). Решение последней задачи при $\beta_1 > 0$ ($Fr > 1$) имеет вид (аналогия с [2]):

$$F(\tau) = \frac{1}{3\beta_1} \tau^{3/2}, \quad 0 \leq \tau \leq \beta_1; \\ F(\tau) = \frac{1}{3\beta_1} \left[\tau^{3/2} - (\tau - \beta_1)^{3/2} \right], \quad \beta_1 \leq \tau \leq \infty \quad (29)$$

Теперь, чтобы получить погранслошное решение, соответствующее случаю $\chi_2 = 0$, $\alpha = -1$ ($Fr = 1$), нужно β_1 устремить к нулю. При этом первая формула (29) в пределе исчезает вместе с промежутком изменения τ . Вторая формула (29) в пределе принимает вид (например, можно воспользоваться правилом Лопиталья):

$$F(\tau) = 0.5\sqrt{\tau}, \quad 0 \leq \tau \leq \infty.$$

В рассматриваемом частном случае возмущение внутренней свободной границы в маленькой окрестности точки отрыва имеет вид:

$$\eta(\theta, \tau) \sim 0.5\beta t^2 \sqrt{\theta - \theta_s}, \quad \theta \rightarrow \theta_s + 0.$$

Обратим внимание на то, что последняя формула может быть получена из (12) заменой первого слагаемого его асимптотикой вблизи точки отрыва (при этом второе слагаемое не учитывается). Проведенные рассуждения показывают, что

при $Fr = 1$ внутренняя свободная граница составляет прямой угол с границей тела в точке отрыва, а при $Fr > 1$ этот угол сглаживается.

Численная реализация и анализ результатов

Задача (14)–(19) решается с помощью итерационного метода, в котором поэтапно уточняются неизвестные заранее точки контакта внутренней свободной границы жидкости с поверхностью тела [2]. На каждом шаге метода возникают линейные краевые задачи (с фиксированными точками смены краевых условий), для решения которых применяется пакет конечных элементов FreeFem++ [17]. Линейные краевые задачи для функций u и v также решаются с помощью данного пакета.

При рассмотрении конкретных численных примеров задаются следующие безразмерные параметры задачи: $\chi_0 = -1$; $\chi_2 = 0$; $\alpha = -1$; $H = 1.2$; $H_b = 5$; $H_R = 5$. Угловая координата точки отрыва и коэффициенты χ_1 и β находятся численно и имеют следующие приближенные значения:

$$\theta_s = 0.766, \quad \chi_1 = -5.28, \quad \beta = 3.09.$$

На рис. 1–3 показана динамика каверны в моменты времени $t = 0.4, 0.6, 0.8$. Рисунок 2 демонстрирует хорошее согласование решений типа пограничного слоя с разложением (12) в широком временном диапазоне и практически во всем диапазоне изменения угловой координаты θ (при уменьшении времени эти кривые сливаются).

Заметим, что коэффициент χ_1 можно определить другим способом – из условия непрерывности нормальной производной функции Φ_1 при $r = 1, \theta = \theta_s$:

$$\chi_1 = -\frac{6d_2}{d_1}, \quad d_1 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_s + 0} \frac{\partial u}{\partial r} \sqrt{\theta - \theta_s}, \quad d_2 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_s + 0} \frac{\partial v}{\partial r} \sqrt{\theta - \theta_s}, \quad r = 1.$$

Численные расчеты показали хорошее согласование двух разных подходов.

Заключение

Рассмотрена задача об отрывном и вертикальном движении цилиндра в жидкости из состояния покоя с постоянным ускорением. При дополнительном предположении о неподвижности точек отрыва изучена возможность представления решения данной задачи в виде асимптотического разложения по целым степеням малого времени. Показано, что искомые асимптотики, содержащие первые два члена разложения, существуют только при определенном выборе числа Фруда и давления в каверне. Указанные физические величины выбираются таким образом, чтобы в точках отрыва выполнялось условие ограниченности скорости жидкости (условие Кутты–Жуковского). Рассмотрены конкретные примеры с численными решениями.

Список источников

1. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
2. Норкин М.В. Образование каверны на начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с постоянным ускорением // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 4. С. 74–82. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/pmtf1384>

3. Норкин М.В. Образование присоединенной каверны с неподвижными точками отрыва при ударе плавающего кругового цилиндра // Журнал технической физики. 2023. Т. 93, № 10. С. 1403–1409. doi: 10.21883/JTF.2023.10.56277.33-23
4. Tyvand P.A., Miloh T.V. Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged circular cylinder // Journal of Fluid Mechanics. 1995. V. 286, № 10. P. 67–101. doi: 10.1017/S0022112095000656
5. Tyvand P.A., Landrini M. Free-surface flow of a fluid body with an inner circular cylinder in impulsive motion // Journal of Engineering Mathematics. 2001. V. 40, № 2. P. 109–140. doi: 10.1023/A:1017527310600
6. Макаренко Н.И., Костиков В.К. Неустановившееся движение эллиптического цилиндра под свободной поверхностью // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 3. С. 30–41. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/pmtf1174>
7. Голиков А.Е., Макаренко Н.И. Гидродинамические нагрузки при разгоне цилиндра под свободной поверхностью // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т. 63, № 5. С. 89–99. doi: 10.15372/PMTF20220509
8. Reinhard M., Korobkin A.A., Cooker M.J. Cavity Formation on the Surface of a Body Entering Water with Deceleration // Journal of Engineering Mathematics. 2016. V. 96, № 1. P. 155–174. doi: 10.1007/s10665-015-9788-8
9. Аганин А.А., Ильгамов М.А., Мустафин И.Н. Ударная кавитация жидкости в цилиндрической емкости // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. 2020. Т. 162, кн. 1. С. 27–37. doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.27-37
10. Пегов В.И., Мошкин И.Ю. Расчет гидродинамики кавитационного способа старта ракет // Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, № 4. С. 476–485. doi: 10.24411/2500-0101-2018-13408
11. Коробицын В.А. Моделирование кавитационного обтекания тел // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20, № 5. С. 85–96.
12. Иценко А.Н., Афанасьева С.А., Бондарчук С.С., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Хабибуллин М.В., Чупашев А.В. Моделирование движения суперкавитирующих ударников при групповом пушечном старте // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93, № 4. С. 890–900. doi: 10.1007/s10891-020-02188-3
13. Иценко А.Н., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Чупашев А.В. Подводный старт суперкавитирующего ударника из лабораторной баллистической установки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 97–107. doi: 10.17223/19988621/82/8
14. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М. : Наука, 1979. 536 с.
15. Иванов А.Н. Гидродинамика развитых кавитационных течений. Л. : Судостроение, 1980. 240 с.
16. Юдович В.И. Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость // Владикавказский математический журнал. 2005. Т. 7, № 3. С. 79–91. URL: <http://mi.mathnet.ru/vmj168>
17. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2008. 256 с.

References

1. Sedov L.I. (1966) *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Plane problems in hydrodynamics and aerodynamics]. Moscow: Nauka.
2. Norkin M.V. (2012) Formation of a cavity in the initial stage of motion of a circular cylinder in a fluid with a constant acceleration. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 53(4). pp. 532–539. doi: 10.1134/S0021894412040074

3. Norkin M.V. (2023) Formation of an attached cavity with fixed separation points upon impact of a floating circular cylinder. *Technical Physics*. 93(10). pp. 1403–1409. doi: 10.21883/JTF.2023.10.56277.33-23
4. Tyvand P.A., Miloh T.V. (1995) Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*. 286(10). pp. 67–101. doi: 10.1017/S0022112095000656
5. Tyvand P.A., Landrini M. (2001) Free-surface flow of a fluid body with an inner circular cylinder in impulsive motion. *Journal of Engineering Mathematics*. 40(2). pp. 109–140. doi: 10.1023/A:1017527310600
6. Makarenko N.I., Kostikov V.K. (2013) Unsteady motion of an elliptic cylinder under a free surface. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 54(3). pp. 367–376. doi: 10.1134/S0021894413030048
7. Golikov A.E., Makarenko N.I. (2022) Hydrodynamic loads during acceleration of a cylinder under a free surface. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 63(5). pp. 806–815. doi: 10.1134/S0021894422050091
8. Reinhard M., Korobkin A.A., Cooker M.J. (2016) Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration. *Journal of Engineering Mathematics*. 96(1). pp. 155–174. doi: 10.1007/s10665-015-9788-8
9. Aganin A.A., Il'gamov M.A., Mustafin I.N. (2020) Udamnaya kavitatsiya zhidkosti v tsilindricheskoy yomkosti [Impact-induced cavitation in a cylindrical container with liquid]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki – Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*. 162(1). pp. 27–37. doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.27-37
10. Pegov V.I., Moshkin I.Yu. (2018) Raschet gidrodinamiki kavitatsionnogo sposoba starta raket [Analysis of fluid dynamics of cavitation launch technique]. *Chelyabinskii fiziko-matematicheskii zhurnal – Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*. 3(4). pp. 476–485. doi: 10.24411/2500-0101-2018-13408
11. Korobitsyn V.A. (2015) Modelirovanie kavitatsionnogo obtekaniya tel [Simulation of cavitation flow over bodies]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 20(5). pp. 85–96.
12. Ishchenko, A.N., Afanas'eva, S.A., Bondarchuk, S.S., Burkin V.V., D'yachkovskii A.S., Khabibullin M.V., Chupashev A.V. (2020) Modeling the motion of supercavitating strikers in a group gun-start. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 93. pp. 858–867. doi: 10.1007/s10891-020-02188-3
13. Ishchenko, A.N., Burkin, V.V., D'yachkovskiy, A.S., Chupashev A.V. (2023) Podvodnyy start superkavitiruyushchego udarnika iz laboratornoy ballisticheskoy ustanovki [Underwater launching of a supercavitating projectile out of a ballistic test setup]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 97–107. doi: 10.17223/19988621/82/8
14. Gurevich M.I. (1979) *Teoriya struy ideal'noy zhidkosti* [Theory of jets in ideal fluids]. Moscow: Nauka.
15. Ivanov A.N. (1980) *Gidrodinamika razvitykh kavitatsionnykh techeniy* [Hydrodynamics of developed cavitation flows]. Leningrad: Sudostroenie.
16. Yudovich V.I. (2005) Odnosnachnaya razreshimost' zadachi ob udare s otryvom tverdogo tela o neodnorodnuyu zhidkost' [Unique solvability of the problem of impact with detachment of a rigid body against an inhomogeneous fluid]. *Vladikavkazskiy matematicheskii zhurnal – Vladikavkaz Mathematical Journal*. 7(3). pp. 79–91.
17. Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. (2008) *Ispol'zovanie paketa konechnykh elementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii* [Using the FreeFem++ finite element package for problems of hydrodynamics, electrophoresis and biology]. Rostov-on-Don: Southern Federal University Publishing House.

Сведения об авторе:

Норкин Михаил Викторович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры вычислительной математики и математической физики Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (Ростов-на-Дону, Россия). E-mail: norkinmi@mail.ru

Information about the author:

Norkin Mikhail V. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation). E-mail: norkinmi@mail.ru

Статья поступила в редакцию 19.10.2023; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 19.10.2023; accepted for publication 03.10.2024