

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/91/10

Влияние начальных напряжений на распространение звуковых волн в гипопругих анизотропных материалах

Марина Юрьевна Соколова¹, Алексей Александрович Маркин²

^{1,2} *Тулский государственный университет, Тула, Россия*

¹ *m.u.sokolova@gmail.com*

² *markin-nikram@yandex.ru*

Аннотация. Для гипопругих изотропных и анизотропных материалов получено линеаризованное уравнение распространения акустических волн в телах с предварительными конечными деформациями и начальными напряжениями. Уравнение записано относительно поля скоростей, приводящего к возмущению начальной конфигурации среды. Для плоских монохроматических волн выписано выражение для акустического тензора. Проведен анализ влияния вида начальных напряжений на фазовые скорости распространения волн в анизотропных материалах с кубической симметрией свойств и в изотропных материалах.

Ключевые слова: гипопругость, анизотропия, конечные деформации, динамические уравнения, акустические волны, начальные напряжения, фазовые скорости

Благодарности: Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Для цитирования: Соколова М.Ю., Маркин А.А. Влияние начальных напряжений на распространение звуковых волн в гипопругих анизотропных материалах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 113–124. doi: 10.17223/19988621/91/10

Original article

The effect of initial stresses on sound wave propagation in hypoelastic anisotropic materials

Marina Yu. Sokolova¹, Aleksey A. Markin²

^{1,2} *Tula State University, Tula, Russian Federation*

¹ *m.u.sokolova@gmail.com*

² *markin-nikram@yandex.ru*

Abstract. A linearized equation for the propagation of acoustic waves in bodies with preliminary finite deformations and initial stresses is obtained for hypoelastic materials. The equation is written in terms of the velocity field, which leads to perturbations of the

initial configuration of the medium. The formula for a symmetric acoustic tensor is written for plane monochromatic waves.

It is shown that if a plane wave propagates along one of the anisotropy axes in cubic material, then the normal stresses in the plane of the wave front affect the phase propagation velocities of both longitudinal and transverse waves. The normal stresses acting perpendicular to the wave normal vector affect only the magnitude of the phase velocity of the transverse wave polarized along the stress direction. The shear stresses acting in the plane of the wave front have an effect on the propagation velocities of quasi-longitudinal and quasi-transverse waves. The shear stresses acting in the plane perpendicular to the wave front affect only the phase velocities of transverse waves. Analysis of the effect of initial stress on wave propagation in an isotropic material allowed revealing the occurrence of anisotropy in the acoustic properties of the medium and to describe shear wave splitting.

Keywords: hypoelasticity, anisotropy, finite strains, dynamic equations, acoustic waves, initial stresses, phase velocities

Acknowledgments: This research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. FEWG-2023-0002).

For citation: Sokolova, M.Yu., Markin, A.A. (2024) The effect of initial stresses on sound wave propagation in hypoelastic anisotropic materials. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 113–124. doi: 10.17223/19988621/91/10

Введение

Классической задачей эластодинамики является задача о распространении акустических (упругих) волн в безграничной среде [1]. В основном в работах о распространении волн в упругой среде с предварительными конечными деформациями и напряжениями используются гиперупругие модели материалов, как изотропных [1–3], так и анизотропных [4–6]. Значительно меньшее число работ посвящено распространению акустических волн в гипопругих материалах [7–10]. В этих работах рассматривается изотропный материал, а в качестве объективной производной тензора напряжений используется производная Яуманна. В [7–10] исследуется распространение волн в недеформированной среде с начальными напряжениями. В [7, 8] отмечается, что наличие начальных напряжений в гипопругой среде приводит к несимметрии акустического тензора. Из этого делается вывод, что при некотором распределении начальных напряжений происходит «блокировка» определенных видов акустических волн. На наш взгляд, описываемый в [8] эффект требует экспериментального подтверждения. Влияние поля начальных напряжений на фазовые скорости распространения упругих волн и появление акустической анизотропии свойств, индуцируемой внутренними напряжениями, в моделях гипопругих материалов отмечается в работах [7, 9, 10]. Проявление этих эффектов в начально изотропных средах наблюдается и в экспериментальных исследованиях [3, 11]. Эксперименты, в которых регистрируется влияние предварительных напряжений на фазовые скорости распространения упругих волн в анизотропных материалах, описаны, например, в работе [12].

Динамические уравнения распространения акустических волн в средах с предварительными напряжениями и деформациями в [1, 13] записаны относительно поля перемещений. В работах [13, 14] распространение акустических волн рас-

сма­три­ва­ет­ся как про­цесс на­ло­же­ния ма­лых воз­му­ще­ний по­ля пе­ре­ме­ще­ний на на­чаль­ные ко­неч­ные де­фор­ма­ции ма­те­ри­а­ла. В ста­тье [15] ди­на­ми­че­ские урав­не­ния за­пи­са­ны в сме­шан­ной фор­ме Ла­гран­жа–Эй­ле­ра от­но­си­тель­но по­ля ско­ро­стей, рас­смот­рен при­мер рас­про­стра­не­ния волн в ги­пер­уп­ру­гом изот­роп­ном ма­те­ри­а­ле с квад­ратич­ным от­но­си­тель­но де­фор­ма­ций уп­ру­гим по­тен­ци­алом.

Целью дан­ной ра­боты яв­ля­ет­ся ис­сле­до­ва­ние вли­я­ния на­чаль­ных на­пря­же­ний на рас­про­стра­не­ние волн в ги­по­уп­ру­гих ани­зо­троп­ных ма­те­ри­а­лах. Для это­го бу­дет по­лу­че­на ли­не­а­ри­зо­ван­ная фор­ма урав­не­ний рас­про­стра­не­ния аку­сти­че­ских волн, за­пи­сан­ная от­но­си­тель­но по­ля ско­ро­стей. В от­ли­чие от ра­бот [7–10] бу­дет ис­поль­зо­ван ва­ри­ант со­от­но­ше­ний ги­по­уп­ру­го­сти, свя­зы­ва­ю­щий ско­рость из­ме­не­ния тен­зо­ра на­пря­же­ний от­но­си­тель­но по­ляр­но­го ба­зи­са и тен­зор де­фор­ма­ций ско­рости [16].

Уравнения распространения акустических волн в гипотупругой среде

Про­цесс рас­про­стра­не­ния зву­ко­вых волн в пре­дваритель­но де­фор­ми­ро­ван­ном ги­по­уп­ру­гом ма­те­ри­а­ле бу­дем рас­смот­ри­вать в ра­мках те­о­рии на­ло­же­ния на ко­неч­ные де­фор­ма­ции ма­лых воз­му­ще­ний по­ля пе­ре­ме­ще­ний [13, 14]. Обыч­но при это­м рас­смот­ри­ва­ют три кон­фи­гу­ра­ции сре­ды: от­сче­тную, со­от­вет­ст­вую­щую мо­мен­ту вре­мени $t = t_0$, на­чаль­ную ($t = t_1$) и ко­неч­ную ($t > t_1$) [14]. По­ла­га­ют, что в от­сче­тной кон­фи­гу­ра­ции ма­те­ри­а­л на­хо­дит­ся в е­сес­твен­ном со­сто­я­нии, т.е. в нем от­сут­ст­вуют на­пря­же­ния и де­фор­ма­ции. В ре­зуль­та­те дви­же­ния сре­да пе­ре­хо­дит в на­чаль­ное со­сто­я­ние, ко­то­рое ха­рак­те­ри­зу­ет­ся по­лем пе­ре­ме­ще­ний $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_0, t_1)$ и аф­фи­но­ром де­фор­ма­ций

$$\Phi_1 = \mathbf{E} + \nabla_0 \mathbf{u}_1, \quad \nabla_0(\cdot) = \mathbf{a}_i \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_0^i}, \quad (1)$$

где ∇_0 – на­бла-опе­ра­тор от­сче­тно­го со­сто­я­ния, $\mathbf{E} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3$ – еди­нич­ный тен­зор, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ – еди­нич­ные ор­то­го­наль­ные ба­зи­сные век­то­ры, ра­ди­ус-век­тор точ­ки в от­сче­тном со­сто­я­нии $\mathbf{x}_0 = x_0^i \mathbf{a}_i$.

На­пря­же­ния ха­рак­те­ри­зу­ют­ся тен­зо­ром истин­ных на­пря­же­ний Ко­ши \mathbf{S}_1 . Счи­та­ем, что в на­чаль­ном со­сто­я­нии по­ля де­фор­ма­ций и на­пря­же­ний од­но­род­ны, по­это­му вы­пол­ня­ют­ся усло­вия рав­но­ве­сия

$$\nabla_1 \cdot \mathbf{S}_1 = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_1 = \frac{d^2 \mathbf{u}_1}{dt^2} = \mathbf{0}.$$

В урав­не­ниях (2) вве­ден на­бла-опе­ра­тор на­чаль­но­го со­сто­я­ния

$$\nabla_1(\cdot) = \mathbf{a}_i \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1^i}, \quad x_1^i = x_0^i + u_1^i.$$

Пе­ре­ход из на­чаль­ной кон­фи­гу­ра­ции в ко­неч­ную свя­зан с воз­му­ще­нием по­ля пе­ре­ме­ще­ний, оп­ре­де­ля­е­мым век­то­ром \mathbf{u}_{12} . В ко­неч­ной кон­фи­гу­ра­ции по­ле пе­ре­ме­ще­ний оп­ре­де­ля­ет­ся вы­ра­же­нием

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_0, t_1) + \mathbf{u}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau), \quad \text{где } \tau = t - t_1. \quad (3)$$

Аф­фи­но­р де­фор­ма­ций (1) в ко­неч­ном со­сто­я­нии мо­жет бы­ть пред­став­лен в ви­де:

$$\Phi_2 = \Phi_1 \cdot \Phi_{12}, \quad \Phi_{12} = \mathbf{E} + \nabla_1 \mathbf{u}_{12}. \quad (4)$$

Поле напряжений в конечном состоянии характеризуется тензором

$$\mathbf{S}_2(\mathbf{x}_2, t) = \mathbf{S}_1(\mathbf{x}_1, t_1) + \mathbf{S}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau), \quad (5)$$

где $\mathbf{S}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau)$ – изменение поля напряжений, вызванное возмущением перемещений $\mathbf{u}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau)$.

Напряжения (5) удовлетворяют уравнениям движения, Эйлера форма которых имеет вид:

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{S}_2 = \rho_2 \ddot{\mathbf{u}}_2, \quad (6)$$

где набла-оператор конечного состояния

$$\nabla_2() = \mathbf{a}_i \frac{\partial ()}{\partial x_2^i}, \quad x_2^i = x_0^i + u_2^i = x_1^i + u_{12}^i.$$

Набла-операторы конечного, начального и отсчетного состояний связаны известными соотношениями [13, 16]

$$\nabla_2() = \Phi_2^{-1} \cdot \nabla_0() = \Phi_{12}^{-1} \cdot \nabla_1(). \quad (7)$$

Плотность среды в конечном ρ_2 и начальном ρ_1 состояниях связана с плотностью среды в отсчетной конфигурации ρ_0 выражениями

$$\rho_2 = J_2^{-1} \rho_0 = J_{12}^{-1} \rho_1, \quad \rho_1 = J_1^{-1} \rho_0, \quad \text{где } J_k = \det \Phi_k. \quad (8)$$

Подставляя напряжения (5) в уравнения (6), учитывая соотношения (2)–(4), (7) и (8), после преобразований получим уравнения движения в виде:

$$J_{12} \Phi_{12}^{-1} \cdot \nabla_1 \cdot (J_1 \mathbf{S}_{12}) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{12}. \quad (9)$$

При рассмотрении акустических волн принято считать, что перемещения \mathbf{u}_{12} и их градиенты малы [13, 14]. В связи с этим предположением сохраним в уравнениях (9) только члены первого порядка относительно градиентов \mathbf{u}_{12} и получим линейризованные уравнения распространения малых возмущений поля перемещений в виде:

$$\nabla_1 \cdot (J_1 \mathbf{S}_{12}) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{12}. \quad (10)$$

Определяющие соотношения для гипотупругих материалов устанавливают связь между объективной производной обобщенного тензора истинных напряжений $\Sigma = J \mathbf{S}$ и тензором деформации скорости \mathbf{W} :

$$\Sigma^\Delta = \mathbf{N} \cdot \mathbf{W}, \quad (11)$$

где \mathbf{N} – тензор четвертого ранга, определяемый свойствами среды.

В качестве объективной производной в (11) используем полярную производную [16]

$$\Sigma^\Delta = \dot{\Sigma} + \Omega \cdot \Sigma - \Sigma \cdot \Omega, \quad \Omega = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}, \quad (12)$$

где Ω – тензор спина, \mathbf{R} – тензор поворота, входящий в полярное разложение аффинора деформаций $\Phi = \mathbf{U} \mathbf{R}$, $\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}$, $\mathbf{R}^\top = \mathbf{R}^{-1}$.

Полярная производная Σ^Δ (12) определяет скорость изменения тензора Σ относительно полярного базиса, вращающегося со скоростью Ω относительно неподвижного базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Полная производная тензора Σ определяет скорость его изменения относительно неподвижного базиса.

Пусть $\Sigma_1 = J_1 \mathbf{S}_1$ и $\Sigma_2 = J_2 \mathbf{S}_2$ – обобщенный тензор напряжений в начальном и конечном состояниях. Обозначим через Σ_{12} изменение обобщенного тензора напряжений, связанное с возмущением поля перемещений:

$$\Sigma_{12}(\mathbf{x}_1, \tau) = \Sigma_2(\mathbf{x}_2, t) - \Sigma_1(\mathbf{x}_1, t_1). \quad (13)$$

На основании представлений (5) и (13) связь между тензорами \mathbf{S}_{12} и Σ_{12} определяется соотношением

$$\mathbf{S}_{12} = J_1^{-1} \left(J_{12}^{-1} \Sigma_{12} + (J_{12}^{-1} - 1) \Sigma_1 \right),$$

которое после линеаризации принимает вид:

$$J_1 \mathbf{S}_{12} = \Sigma_{12} - (\nabla_1 \cdot \mathbf{u}_{12}) \Sigma_1. \quad (14)$$

Подставим (14) в уравнения (10) и преобразуем полученные уравнения к виду:

$$\nabla_1 \cdot \Sigma_{12} - \Sigma_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{u}_{12} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{12}. \quad (15)$$

Продифференцируем уравнения (15) по времени τ :

$$\nabla_1 \cdot \dot{\Sigma}_{12} - \Sigma_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{v} = \rho_0 \ddot{\mathbf{v}}, \quad (16)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x}_1, \tau) = \frac{\partial \mathbf{u}_{12}}{\partial \tau}$ – скорости перемещения частиц среды, конвективные производные опускаем как малые второго порядка; $\dot{\Sigma}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau) = \frac{\partial \Sigma_{12}}{\partial \tau}$ – скорость изменения напряжений относительно начальной конфигурации.

Скорость изменения тензора Σ_{12} определим из выражений (12):

$$\dot{\Sigma}_{12} = \Sigma_{12}^\Delta - \Omega_{12} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_1 \cdot \Omega_{12},$$

или с учетом определяющих соотношений (11):

$$\dot{\Sigma}_{12} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{W}_{12} - \Omega_{12} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_1 \cdot \Omega_{12}. \quad (17)$$

Тогда уравнения (16) принимают вид:

$$\mathbf{N} \cdot \nabla_1 \mathbf{W}_{12} - \nabla_1 \cdot \Omega_{12} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_1 \cdot \nabla_1 \Omega_{12} - \Sigma_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{v} = \rho_0 \ddot{\mathbf{v}}. \quad (18)$$

В соотношениях (17), (18) тензор деформации скорости определяется выражением

$$\mathbf{W}_{12} = \frac{1}{2} (\nabla_1 \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla_1). \quad (19)$$

Для отыскания тензора спина представим тензор поворота \mathbf{R}_2 конечного состояния в виде произведения $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{12}$ и линеаризуем тензор поворота \mathbf{R}_{12} с учетом малости градиентов перемещений \mathbf{u}_{12} :

$$\mathbf{R}_{12} \approx \mathbf{E} + \frac{1}{2} (\nabla_1 \mathbf{u}_{12} - \mathbf{u}_{12} \nabla_1),$$

тогда линеаризованное представление тензора спина после преобразований имеет вид:

$$\Omega_{12} \approx \frac{1}{2} (\nabla_1 \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla_1). \quad (20)$$

Подставляя (19) и (20) в уравнения (18), после преобразований получим уравнения распространения акустических волн, записанное в скоростях:

$$\mathbf{N} \cdot \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{v} - \frac{1}{2} \Sigma_1 \cdot (\nabla_1 \cdot \nabla_1 \mathbf{v} + \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{2} (\Sigma_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{v} - \nabla_1 \mathbf{v} \nabla_1 \cdot \Sigma_1) = \rho_0 \ddot{\mathbf{v}}. \quad (21)$$

Уравнения (21) позволяют в гипотезе упругой среде учитывать влияние однородных начальных напряжений Σ_1 на распространение акустических волн. При этом возмущение начального состояния среды определяется полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}_1, \tau)$.

Пусть возмущение начального состояния связано с прохождением плоской монохроматической звуковой волны с полем скоростей

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_1, \tau) = \mathbf{A} \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_1 + \omega\tau)). \quad (22)$$

В представлении (22) A – амплитуда, \mathbf{p} – вектор поляризации единичной длины, k – волновое число, ω – частота, \mathbf{n} – единичный вектор волновой нормали. Для поля скоростей (22) воздействие набла-оператором равносильно умножению на вектор $i\mathbf{k}\mathbf{n}$, а дифференцирование по времени приводит к умножению на $i\omega$ [13]. Вычисляя входящие в (21) дифференциальные операторы, после преобразований получим уравнения вида:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{p}, \quad (23)$$

где $c = \omega/k$ – фазовая скорость распространения волны, \mathbf{A} – акустический тензор [13].

Акустический тензор из уравнений (23) определяется выражением

$$\mathbf{A} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{nn} \mathbf{E} - \boldsymbol{\Sigma}_1) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{nn} + \mathbf{nn} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1). \quad (24)$$

Из уравнений (23) следует, что фазовые скорости определяются через собственные значения акустического тензора, а векторы поляризации являются его собственными векторами. В отличие от результатов, полученных авторами работ [8, 9], акустический тензор (24) при любых начальных напряжениях является симметричным, его собственные значения являются действительными числами, а векторы поляризации ортогональны.

Влияние начальных напряжений на фазовые скорости распространения волн в анизотропном теле

Рассмотрим анизотропное тело с симметрией свойств, присущей кристаллам кубической сингонии [16–18]. Для таких материалов тензор \mathbf{N} можно представить разложением по собственным упругим состояниям в виде [16–18]:

$$\mathbf{N} = N_1 \mathbf{I}^{00} + N_2 (\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22}) + N_3 (\mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}), \quad (25)$$

где N_1, N_2, N_3 – константы материала, $\mathbf{I}^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 5$) – тензоры, определяемые в базисе канонических (главных) осей анизотропии $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ [17] выражениями

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha), \quad (26)$$

$$\mathbf{I}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2), \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2),$$

$$\mathbf{I}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3).$$

Из представлений (25), (26) следует, что для рассматриваемого анизотропного материала с кубической симметрией свойств канонические оси равноправны. Свойства материала одинаковы в направлении каждого из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

Далее для констант материала N_1, N_2, N_3 используем обозначения

$$N_1 = 3\lambda + 2G, \quad N_2 = 2G, \quad N_3 = 2G'.$$

Пусть в направлении одной из канонических осей распространяется плоская монохроматическая волна с вектором волновой нормали $\mathbf{n} = \mathbf{a}_1$. Тогда тензор Кристоффеля анизотропного материала с кубической симметрией свойств определяется выражением

$$\mathbf{M} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = (\lambda + 2G) \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + G' (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3). \quad (27)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи начальных напряжений в теле. Пусть в плоскости, параллельной фронту волны и имеющей нормаль \mathbf{n} , действуют только нормальные или только касательные напряжения. На рис. 1 показаны векторы напряжений $\mathbf{P} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1$ в этой плоскости. В первом из этих случаев тензор напряжений $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \sigma \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1$, т.е. тело подвергается одноосному растяжению или сжатию в направлении распространения волны (см. рис. 1, *a*). Акустический тензор (24) с учетом (27) в этом случае принимает вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \sigma \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + 0.5 \sigma (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3),$$

а его собственные векторы и собственные значения определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{a}_1; & \rho_0 c_1^2 &= \lambda + 2G - \sigma; \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{a}_2; & \rho_0 c_2^2 &= G' + 0.5\sigma; \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{a}_3; & \rho_0 c_3^2 &= G' + 0.5\sigma. \end{aligned} \quad (28)$$

Из (28) следует, что в этом случае в теле распространяются продольная волна с вектором поляризации \mathbf{p}_1 и фазовой скоростью c_1 и две поперечные волны с векторами поляризации \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3 и равными фазовыми скоростями $c_2 = c_3$.

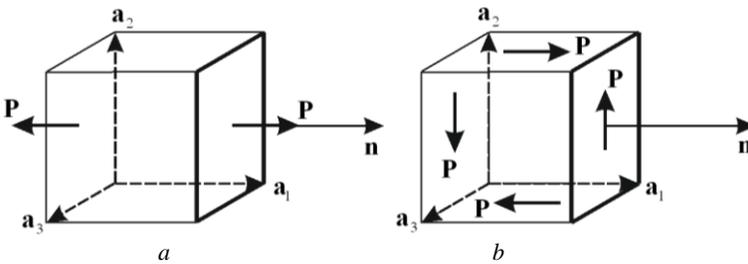


Рис. 1. Векторы начальных напряжений \mathbf{P} в плоскости с нормалью \mathbf{n} :

a – нормальные напряжения; *b* – касательные напряжения

Fig. 1. Vectors of initial stresses \mathbf{P} in the plane with normal \mathbf{n} :

(*a*) normal and (*b*) tangential stresses

Рассмотрим случай, когда в плоскости, параллельной фронту волны, действуют касательные напряжения $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \tau (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1)$ (см. рис. 1, *b*). Акустический тензор (24) имеет вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \tau (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1),$$

а решение задачи о его собственных векторах и собственных значениях дается выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_2; & \rho_0 c_1^2 &= 0.5 \left(\lambda + 2G + G' + \sqrt{(\lambda + 2G - G')^2 + 4\tau^2} \right); \\ \mathbf{p}_2 &= -\sin \varphi \mathbf{a}_1 + \cos \varphi \mathbf{a}_2; & \rho_0 c_2^2 &= 0.5 \left(\lambda + 2G + G' - \sqrt{(\lambda + 2G - G')^2 + 4\tau^2} \right); \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{a}_3; & \rho_0 c_3^2 &= G'. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражения (29) показывают, что если в плоскости фронта волны действуют касательные напряжения, то в теле распространяется квазипродольная волна с вектором поляризации \mathbf{p}_1 , отклоняющимся от вектора волновой нормали на угол φ , причем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2\tau} \left(\lambda + 2G - G' - \sqrt{(\lambda + 2G - G')^2 + 4\tau^2} \right).$$

В теле также распространяются квазипоперечная волна с вектором поляризации \mathbf{p}_2 и поперечная волна с вектором поляризации \mathbf{p}_3 и фазовой скоростью c_3 , которая не зависит от начальных напряжений.

Пусть начальные напряжения действуют в плоскости, перпендикулярной фронту волны и имеющей нормальный вектор $\mathbf{m} = \mathbf{a}_2$. На рис. 2 показаны векторы напряжений $\mathbf{P} = \mathbf{m} \cdot \Sigma_1$ в этой плоскости. Если напряжения сводятся только к нормальным с тензором $\Sigma_1 = \sigma \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2$, то это соответствует распространению плоской волны в направлении, перпендикулярном одноосному растяжению или сжатию (см. рис. 2, *a*). В этом случае акустический тензор (24) имеет вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - 0.5\sigma \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2,$$

а его собственные значения и собственные векторы определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{a}_1; & \rho_0 c_1^2 &= \lambda + 2G; \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{a}_2; & \rho_0 c_2^2 &= G' - 0.5\sigma; \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{a}_3; & \rho_0 c_3^2 &= G'. \end{aligned} \quad (30)$$

Результат (30) показывает, что начальные нормальные напряжения, действующие в рассматриваемой плоскости, не оказывают влияния на скорости распространения продольной c_1 и поперечной c_3 волн, а влияют только на скорость распространения поперечной волны с вектором поляризации $\mathbf{p}_2 = \mathbf{m}$.

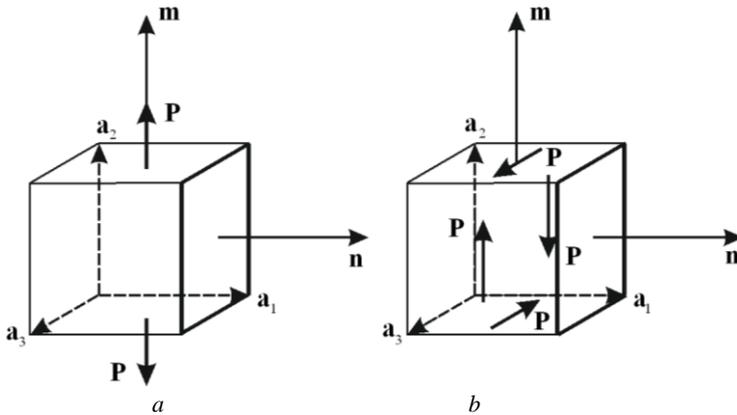


Рис. 2. Векторы начальных напряжений \mathbf{P} в плоскости с нормалью \mathbf{m} :
a – нормальные напряжения; *b* – касательные напряжения

Fig. 2. Vectors of initial stresses \mathbf{P} in the plane with normal \mathbf{m} :
 (a) normal and (b) tangential stresses

Если в плоскости, перпендикулярной фронту волны, действуют только касательные напряжения, а в плоскости фронта волны напряжения отсутствуют (см. рис. 2, *b*), то $\Sigma_1 = \tau (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2)$, акустический тензор

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \tau (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2),$$

его собственные векторы и собственные значения определяются выражениями

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_1 &= \mathbf{a}_1; & \rho_0 c_1^2 &= \lambda + 2G; \\
 \mathbf{p}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3); & \rho_0 c_2^2 &= G' - 0.5\tau; \\
 \mathbf{p}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3); & \rho_0 c_3^2 &= G' + 0.5\tau.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Из (31) следует, что в кубическом материале касательные напряжения, действующие в плоскостях, перпендикулярных фронту волны, не влияют на скорость распространения продольной волны c_1 , а влияют только на фазовые скорости поперечных волн c_2 и c_3 .

Влияние начальных напряжений на фазовые скорости распространения волн в изотропном теле

Рассмотренные выше примеры распространения волн в анизотропных телах с кубической симметрией свойств легко сводятся к случаю распространения волн в изотропном теле, поскольку кубические материалы по своим упругим свойствам близки к изотропным материалам. Для изотропного материала разложение тензора \mathbf{N} по собственным упругим состояниям имеет вид [16, 18]:

$$\mathbf{N} = N_1 \mathbf{I}^{00} + N_2 (\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}), \tag{32}$$

где базисные тензоры $\mathbf{I}^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 5$) определяются выражениями (26), в которых в качестве базисных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ может быть взята любая тройка взаимно ортогональных единичных векторов.

Собственные значения тензора упругости для изотропного материала выражаются через константы Ламе [13, 16]:

$$N_1 = 3\lambda + 2G, \quad N_2 = 2G.$$

Пусть в изотропном теле распространяется плоская волна с вектором волновой нормали $\mathbf{n} = \mathbf{a}_1$, а начальные напряжения Σ_1 соответствуют схемам, приведенным на рис. 1 и 2. Сравнение представлений (32) и (25) позволяет использовать результаты (27)–(31) по определению скоростей распространения акустических волн в кубическом материале для изотропного материала, положив в них $G' = G$.

Влияние начальных напряжений на распространение акустических волн в изотропных гипопругих телах рассматривалось в работах [9, 10]. В работе [10] подробно рассмотрен эффект расщепления сдвиговых (поперечных) волн в изотропном материале при действии начальных напряжений. Этот эффект заключается в том, что при действии определенных начальных напряжений в изотропном материале распространяются две сдвиговые волны с разными фазовыми скоростями. Это подтверждается и расчетами по соотношениям (28)–(31) при $G' = G$, причем выражения для фазовых скоростей поперечных волн совпадают с приведенными в [10]. В отличие от работы [10] соотношения (27) и (28) применительно к изотропному материалу прогнозируют изменение фазовой скорости продольной волны, которое наблюдается в экспериментах [11]. Показано, что если начальные напряжения сводятся к нормальным напряжениям в плоскости, параллельной фронту волны, то в изотропном материале это не приводит к расщеплению сдвиговых волн.

Результаты проведенного анализа показывают, что при действии начальных напряжений изотропный материал приобретает анизотропию акустических свойств.

Это проявляется не только в эффекте расщепления сдвиговых волн, но и в том, что при действии в плоскости фронта волны касательных напряжений вектор поляризации продольной волны отклоняется от вектора волновой нормали, т.е. в материале распространяются квазипродольная, квазипоперечная и поперечная волны, что присуще анизотропным материалам.

Заключение

В статье получено линеаризованное уравнение распространения акустических волн в гипопругих средах, записанное относительно поля скоростей, приводящего к возмущению начальной конфигурации среды. Начальное состояние среды характеризуется однородными конечными деформациями и начальными напряжениями. Учет геометрической нелинейности в уравнениях динамики позволил получить симметричный акустический тензор (24). Проведен анализ влияния начальных напряжений на фазовые скорости распространения волн в анизотропных материалах с кубической симметрией свойств и в изотропных материалах.

Показано, что если в кубическом материале плоская волна распространяется вдоль одной из осей анизотропии, то нормальные напряжения в плоскости фронта волны оказывают влияние на фазовые скорости распространения как продольных, так и поперечных волн. Нормальные напряжения, действующие перпендикулярно вектору волновой нормали, влияют только на величину фазовой скорости поперечной волны, поляризованной вдоль направления действия напряжений. Касательные напряжения, действующие в плоскости фронта волны, влияют на скорости распространения квазипродольной и квазипоперечной волн. Касательные напряжения, действующие в плоскости, перпендикулярной фронту волны, влияют только на фазовые скорости поперечных волн. Учет влияния начальных напряжений на распространение волн в изотропном гипопругом материале позволил выявить появление анизотропии акустических свойств среды и описать эффект расщепления поперечных волн.

Список источников

1. *Truesdell C.* General and exact theory of waves in finite elastic strain // Arch. Ratio. Mech. Anal. 1961. V. 8, № 1. P. 263–296. doi: 10.1007/978-3-642-88691-1_5
2. *Pau A., Vestroni F.* The role of material and geometric nonlinearities in acoustoelasticity // Wave Motion. 2019. V. 86. P. 79–90. doi: 10.1016/j.wavemoti.2018.12.005
3. *Yang H., Fu L.-Y., Fu B.-Y., Müller T.M.* Acoustoelastic FD simulation of elastic wave propagation in prestressed media // Front. Earth Sci. 2022. V. 10. Art. 886920. doi: 10.3389/feart.2022.886920
4. *Kolpakov A.G., Andrianov I.V., Rakin S.I.* On the influence of initial stresses on the velocity of elastic waves in composites // Computation. 2023. V. 11, № 15. P. 1–19. doi: 10.3390/computation11020015
5. *Kube C.M.* Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion // J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 141, № 6. P. 4756–4767. doi: 10.1121/1.4986747
6. *Domański W., Jemioło S., Franus A.* Propagation and interaction of weakly nonlinear plane waves in transversely isotropic elastic materials // J. Eng. Math. 2021. V. 127, № 8. P. 1–15. doi: 10.1007/s10665-021-10093-8
7. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear plane waves in hypoelastic materials // Nonlinear elastic waves in materials. Foundations of Engineering Mechanics. Cham : Springer, 2014. doi: 10.1007/978-3-319-00464-8_8

8. *Rushchitsky J.J.* On the types and number of plane waves in hypoelastic materials // *International Applied Mechanics*. 2005. V. 41, № 11. P. 1288–1298. doi: 10.1007/s10778-006-0035-x
9. *Demidov V.N.* Acoustic properties of isotropic hypoelastic materials with residual technological stresses // *Key Engineering Materials*. 2016. V. 712. P. 384–389. doi: 10.4028/www.scientific.net/kem.712.384
10. *Демидов В.Н.* О расщеплении волн сдвига в изотропных гипопругих материалах // *Физическая мезомеханика*. 2000. Т. 3, № 2. С. 15–36.
11. *Коробов А.И., Кокшайский А.И., Михалев Е.С., Одина Н.И., Шургина Н.В.* Исследования упругих свойств полимера PLA статическими и ультразвуковыми методами // *Акустический журнал*. 2021. Т. 67, № 4. С. 387–394. doi: 10.31857/S0320791921040067
12. *Telichko A.V., Erohin S.V., Kvashnin G.M., Sorokin P.B., Sorokin B.P., Blank V.D.* Diamond's third-order elastic constants: ab initio calculations and experimental investigation // *J. Mater. Sci*. 2017. V. 52. P. 3447–3456. doi: 10.1007/s10853-016-0633-x
13. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 512 с.
14. *Haupt P., Pao Y-H., Hutter K.* Theory of incremental motion in a body with initial elastoplastic deformation // *J. Elasticity*. 1992. V. 28. P. 93–221. doi: 10.1007/BF00132211
15. *Роменский Е.И., Лысь Е.В., Чеверда В.А., Энов М.И.* Динамика деформирования упругой среды с начальными напряжениями // *Прикладная механика и техническая физика*. 2017. Т. 58, № 5. С. 178–189. doi: 10.15372/PMTF20170518
16. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. М. : Физматлит, 2013. 320 с.
17. *Соколова М.Ю., Христич Д.В.* Конечные деформации нелинейно упругих анизотропных материалов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 70. С. 103–116. doi: 10.17223/19988621/70/9
18. *Соколова М.Ю., Христич Д.В.* Об обращении нелинейных определяющих соотношений для гиперупругих анизотропных материалов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2023. № 85. С. 157–167. doi: 10.17223/19988621/85/12

References

1. Truesdell C. (1961) General and exact theory of waves in finite elastic strain. In: *Wave Propagation in Dissipative Materials*. Berlin – Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-88691-1_5
2. Pau A., Vestroni F. (2019) The role of material and geometric nonlinearities in acoustoelasticity. *Wave Motion*. 86. pp. 79–90. doi: 10.1016/j.wavemoti.2018.12.005
3. Yang H., Fu L-Y., Fu B-Y., Müller T.M. (2022) Acoustoelastic FD simulation of elastic wave propagation in prestressed media. *Frontiers Earth Science*. 10. Article 886920. doi: 10.3389/feart.2022.886920
4. Kolpakov A.G., Andrianov I.V., Rakin S.I. (2023) On the influence of initial stresses on the velocity of elastic waves in composites. *Computation*. 11(15). doi: 10.3390/computation11020015
5. Kube C.M. (2017) Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion. *Journal of the Acoustical Society of America*. 141(6). pp. 4756–4767. doi: 10.1121/1.4986747
6. Domański W., Jemiolo S., Franus A. (2021) Propagation and interaction of weakly nonlinear plane waves in transversely isotropic elastic materials. *Journal of Engineering Mathematics*. 127(8). doi: 10.1007/s10665-021-10093-8
7. Rushchitsky J.J. (2014) Nonlinear plane waves in hypoelastic materials. In: *Nonlinear Elastic Waves in Materials. Foundations of Engineering Mechanics*. Cham: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-00464-8_8
8. Rushchitsky J.J. (2005) On the types and number of plane waves in hypoelastic materials. *International Applied Mechanics*. 41. pp. 1288–1298. doi: 10.1007/s10778-006-0035-x
9. Demidov V.N. (2016) Acoustic properties of isotropic hypoelastic materials with residual technological stresses. *Key Engineering Materials*. 712. pp. 384–389. doi: 10.4028/www.scientific.net/kem.712.384

10. Demidov V.N. (2000) O rasshcheplenii voln sdviga v izotropnykh gipouprugikh materialakh [On the splitting of shear waves in isotropic hypoelastic materials]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 3(2). pp. 15–36.
11. Korobov A.I., Kokshaiskii A.I., Mikhalev E.S., Odina N.I., Shirgina N.V. (2021) A study of the elastic properties of the polymer PLA by static and ultrasonic methods. *Acoustical Physics*. 67(4). pp. 375–380. doi: 10.1134/S1063771021040060
12. Telichko A.V., Erohin S.V., Kvashnin G.M., Sorokin P.B., Sorokin B.P., Blank V.D. (2017) Diamond's third-order elastic constants: ab initio calculations and experimental investigation. *Journal of Materials Science*. 52. pp. 3447–3456. doi: 10.1007/s10853-016-0633-x
14. Haupt P., Pao Y.-H., Hutter K. (1992) Theory of incremental motion in a body with initial elasto-plastic deformation. *Journal of Elasticity*. 28. pp. 93–221. doi: 10.1007/BF00132211
15. Romenskii E.I., Lys' E.B., Cheverda V.A., Epov M.I. (2017) Dynamics of deformation of an elastic medium with initial stresses. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 58(5). pp. 914–923. doi: 10.1134/S0021894417050182
16. Markin A.A., Sokolova M.Yu. (2015) *Thermomechanics of Elastoplastic Deformation*. Cambridge: Cambridge International Science Publishing.
17. Sokolova M.Yu., Khristich D.V. (2021) Konechnye deformatsii nelineyno uprugikh anizotropnykh materialov [Finite strains of nonlinear elastic anisotropic materials]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 70. pp. 103–116. doi: 10.17223/19988621/70/9
18. Sokolova M.Yu., Khristich D.V. (2023) Ob obrashchenii nelineynykh opredelyayushchikh sootnoshenii dlya giperuprugikh anizotropnykh materialov [On inversion of nonlinear constitutive relations for hyperelastic anisotropic materials]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 157–167. doi: 10.17223/19988621/85/12

Сведения об авторах:

Соколова Марина Юрьевна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (Тула, Россия). E-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Маркин Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (Тула, Россия). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

Information about the authors:

Sokolova Marina Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Markin Aleksey A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 19.03.2024; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 19.03.2024; accepted for publication 03.10.2024