

Научная статья

УДК 532.51; 532.59

doi: 10.17223/19988621/91/13

О влиянии неосесимметричных инерционных волн на осредненную циркуляцию жидкости во вращающемся цилиндре

Мария Андреевна Ширяева¹, Станислав Валерьевич Субботин¹

^{1,2} Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь, Россия

¹ shiryaeva_ma@pspu.ru

² subbotin_sv@pspu.ru

Аннотация. Экспериментально исследуется динамика неосесимметричных инерционных волн во вращающейся цилиндрической полости. Для поддержания волнового движения скорость вращения периодически меняется по гармоническому закону (либрации). Обнаружено три различных режима: нерезонансная бегущая волна, резонанс неосесимметричной инерционной моды в виде стоячей волны и резонансный режим бегущей волны. Отражение волн от боковой границы полости приводит к генерации в динамическом пограничном слое осредненного течения, структура которого определяется режимом пульсационного течения.

Ключевые слова: вращение, либрации, инерционные волны, инерционные моды, осредненные течения

Благодарности: Работа выполнена в рамках гос. задания Минпросвещения РФ (проект KPZU-2023-0002).

Для цитирования: Ширяева М.А., Субботин С.В. О влиянии неосесимметричных инерционных волн на осредненную циркуляцию жидкости во вращающемся цилиндре // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 153–167. doi: 10.17223/19988621/91/13

Original article

Effect of non-axisymmetric inertial waves on the steady fluid circulation in a rotating cylinder

Mariya A. Shiryaeva¹, Stanislav V. Subbotin¹

^{1,2} Perm State Humanitarian Pedagogical University, Perm, Russia

¹ shiryaeva_ma@pspu.ru

² subbotin_sv@pspu.ru

Abstract. Non-axisymmetric inertial waves in a rotating cylindrical cavity are studied experimentally. To maintain the wave motion, the cavity rotation rate is periodically changed according to the harmonic law (libration). Three different regimes have been

found: non-resonant traveling wave, inertial mode resonance, and resonant traveling wave. In the first case, the pulsating flow represents a set of individual wave beams emitted from the cavity corners. The reflection of beams from the cavity sidewall induces steady circulation in the dynamic boundary layer, where the direction of the circulation is determined by the direction of wave front propagation. The second regime resembles standing waves in the axial section of the cavity. The fluid oscillations within the cavity also produce a steady flow with a structure specified by the axial wavenumber of the mode. Finally, the third regime is characterized by alternate excitation of two axisymmetric modes or one non-axisymmetric mode with an axisymmetric mode. In this case, the propagation of the wave front in the form of a traveling wave is a result of the interaction of two modes with different wave numbers. At the same time, the steady flow structure becomes more complex: the waves converging (diverging) to each other induce a system of concordantly rotating steady vortices near the sidewall.

Keywords: rotation, libration, inertial waves, inertial modes, steady flows

Acknowledgments: This research was supported by the Ministry of Education of the Russian Federation (project KPZU-2023-0002).

For citation: Shiryayeva, M.A., Subbotin, S.V. (2024) Effect of non-axisymmetric inertial waves on the steady fluid circulation in a rotating cylinder. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 153–167. doi: 10.17223/19988621/91/13

Введение

Быстровращающиеся гидродинамические системы обладают широким спектром инерционных режимов благодаря действию восстанавливающей силы Кориолиса. Так, гармоническое воздействие с малой амплитудой приводит к поддержанию инерционных волн, которые характеризуются необычным дисперсионным соотношением $\Omega_{osc} = 2\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{rot}$ [1, 2]. Здесь Ω_{osc} – частота волны, а Ω_{rot} – скорость вращения системы. В неограниченной жидкости эти волны распространяются от источника возмущений и образуют систему конусообразных сдвиговых слоев с углом $\theta = \pm \arcsin(\Omega_{osc} / 2\Omega_{rot})$ по отношению к оси вращения. В замкнутых полостях волны будут отражаться от стенок, при этом в зависимости от геометрии допускается возбуждение различных резонансных режимов. Примером являются так называемые инерционные моды – глобальные колебания жидкости, напоминающие стоячие волны [1, 3, 4]. Другим примером являются аттракторы инерционных волн, возникающие за счет постепенного сближения волновых лучей после многократного отражения от стенок. Такие режимы возможны только в полостях сложной геометрии, содержащей наклонные относительно оси вращения стенки, например, в полости с трапецидальным сечением [5–7], а также в сферическом слое [8].

Отметим серию работ, посвященных исследованию динамики жидкости в неравномерно вращающемся (либрирующем) кубе [3, 9, 10, 11]. Если ось вращения проходит через две противоположные грани, то наклонные стенки отсутствуют, а основные резонансные режимы представлены инерционными модами [3, 9]. Если ось вращения проходит через две противоположные вершины куба, то все стенки являются наклонными [10]. В данном случае источниками волн являются углы и грани, что обуславливает возникновение сложных пространственно-

волновых паттернов, допускающих фокусировку волн в аттрактор. Наконец, в [11] ось вращения проходила через среднюю точку двух противоположных ребер; отмечена важная роль нелинейных эффектов в динамике волн, которая не прогнозируется в рамках лучевой теории. Таким образом, динамика инерционных волн в неосесимметричных контейнерах представляет большой интерес в контексте изучения механизмов взаимодействия лучей с наклонными границами, а также их временной и пространственной эволюции.

С фундаментальной точки зрения не менее интересной является задача о движении жидкости в либрирующем цилиндре. В этом случае на границах возникает два типа осциллирующих пограничных слоев: на торцевых стенках – слои Экмана, а на боковой поверхности – слои Стокса. В пионерской работе Ванга [12] было показано, что либрации возбуждают осредненное ретроградное азимутальное течение. Позднее случай низкочастотных либраций был теоретически рассмотрен Буссе [13]. В обеих теориях механизм осредненного вращения ассоциировался с нелинейными эффектами в слоях Экмана, при этом слои Стокса на боковой поверхности цилиндра из рассмотрения исключались. Экспериментальное подтверждение существования среднего течения было сделано в [14, 15]. При этом в [15] было обнаружено, что инерционные волны и моды способны генерировать осредненные течения в динамических пограничных слоях Стокса. Незначительное нарушение осевой симметрии торцевых стенок приводит к возбуждению неосесимметричных мод. В этом случае источники волновой энергии неоднородно распределены вдоль азимута, что приводит к усложнению структуры волнового паттерна. Так, в низкочастотной области обнаружена мода $M(1,1,1)$, представляющая собой одновихревое течение, периодически меняющее знак завихренности в течение периода либраций [16]. В отличие от осесимметричного случая осредненное течение в пограничных слоях Стокса имеет вид струй, бьющих вдоль всей боковой стенки полости. Направление движения жидкости в струях меняется на противоположное через азимутальный угол $\sim \pi$. Настоящая работа является продолжением данных исследований, причем основное внимание уделено детальному анализу временной динамики неосесимметричных инерционных мод и возбуждаемого ими осредненного течения в широком диапазоне частот либраций.

1. Экспериментальная установка и методика

На рис. 1 показана схема экспериментальной установки. Кювета 1 представляет собой оргстеклянный параллелепипед с полостью в виде кругового цилиндра радиуса $R = 26.0$ мм. Торцы полости образованы двумя оргстеклянными вставками в виде усеченных цилиндров с углом наклона секущей плоскости $\alpha = 8.5^\circ$. Вставки расположены параллельно друг другу таким образом, что расстояние между торцами $L = 90$ мм. Полость заполнена водным раствором глицерина, кинематическая вязкость которого во всех экспериментах составляет $\nu = 42.9$ сСт. Кювета закреплена при помощи двух металлических вертикальных опор к неподвижному горизонтальному столу. Внутри обеих опор имеются шарикоподшипники, служащие для свободного вращения кюветы. Диаметр одного из подшипников превышает диаметр полости, благодаря чему возможно изучение структуры азимутального течения.

Для вращения используется шаговый двигатель 2 (модель FL86STH118-6004A), вал которого соединен с кюветой при помощи упругой муфты 3. Управление

двигателем осуществляется драйвером 4 (SMD-9.0). Для повышения плавности вращения основной шаг двигателя 1.8° дополнительно делится драйвером до 0.45° . Питание системы осуществляется источником постоянного тока 5 (модель HY5005E) с выходным напряжением 50 В. В качестве генератора сигналов используется ЦАП 6 (модель ZET210), управляемый через USB-порт ПК 7. Специальное программное обеспечение ZETLab позволяет управлять импульсами генератора модуля ЦАП, в том числе модулировать сигнал по времени.

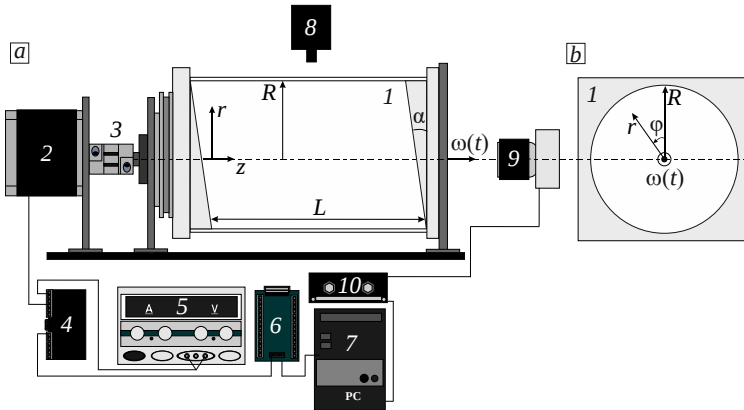


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: а – вид сбоку; б – вдоль оси вращения

Fig. 1. Scheme of an experimental setup: (a) side and (b) end views

В настоящих исследованиях для возбуждения инерционных колебаний жидкости скорость вращения полости модулируется с частотой Ω_{lib} и амплитудой ε :

$$\omega(t) = \Omega_{rot} [1 + \varepsilon \cos(\Omega_{lib} t)]. \quad (1)$$

Здесь Ω_{rot} – средняя скорость вращения, во всех экспериментах поддерживаемая равной 31.4 c^{-1} . В то же время частота либраций меняется в диапазоне $\Omega_{lib} = 9.4 - 62.8 \text{ c}^{-1}$. Амплитуда либраций принимает значение $\varepsilon = \Delta\varphi\sigma = 0.1$, где $\Delta\varphi$ – угловая амплитуда вращательных колебаний, а $\sigma = \Omega_{lib} / \Omega_{rot} = 0.3 - 2.0$ – безразмерная частота. Важный параметр задачи – число Экмана, являющееся отношением вязких сил к силе Кориолиса, $E = \nu / \Omega_{rot} R^2 = 2 \cdot 10^{-3}$. С другой стороны, этот параметр характеризует относительную толщину вязких пограничных слоев Экмана на торцевых стенках, $E \sim \delta_E^2 / R^2$. На боковой стенке цилиндра возникают динамические пограничные слои Стокса толщиной $\delta_{St} = (2\nu / \Omega_{lib})^{1/2}$. Учитывая, что в настоящих экспериментах частоты вращения и либраций одного порядка, пограничные слои $\delta_{St} \sim \delta_E \sim (\nu / \Omega_{rot})^{1/2} \sim 1 \text{ мм}$. Нелинейные эффекты в пограничных слоях играют важную роль в генерации осредненной азимутальной и меридиональной циркуляции, поэтому введем число Рейнольдса, рассчитанное как $Re = \tilde{u} \delta_E / \nu$. Принимая во внимание, что амплитуда пульсационной компоненты скорости $\tilde{u} = \Delta\varphi \Omega_{lib} R$, можно записать $Re = \Delta\varphi \Omega_{lib} R (\nu / \Omega_{rot})^{1/2} / \nu = \varepsilon E^{-1/2} = 2.2$. Оценки показывают, что это значение не превышает критического

числа Рейнольдса, при котором возникает центробежная неустойчивость на внутренней границе осциллирующего цилиндра [14].

Для исследования кинематических характеристик течений применяется PIV-метод (Particle Image Velocimetry). Для этого в жидкость добавляются полиамидные частицы диаметром ~ 60 мкм и средней плотностью ~ 1.04 г/см³. Источником освещения является лазерный нож, создаваемый непрерывным одноваттным лазером 8 (модель KLM-532/h-1000). Толщина лазерного ножа составляет 2 мм. Наблюдение за потоками происходит в лабораторной системе отсчета как со стороны боковой поверхности (см. рис. 1, а), так и со стороны торца (см. рис. 1, б). Положение лазера настраивается под цели наблюдения: так, например, при исследовании азимутального поля скорости световой нож устанавливается в поперечном сечении $z/L = 0.5$. Видеорегистрация движения частиц визуализатора осуществляется видеокамерой 9 (модель CamRecord CL600x2). Данные с камеры записываются на видеорегистратор 10 (модель DVR Express Core). Частота съемки составляет 20 кадров/с, а разрешение – 800×800 пикселей.

Поскольку внешняя граница полости имеет форму параллелограмма, для исследования течения со стороны боковой поверхности выбираются только те кадры, время между которыми кратно периоду вращения $T_{rot} = 2\pi / \Omega_{rot}$. Как показывают эксперименты, скорость азимутального течения мала, при этом через один период T_{rot} частицы визуализатора остаются в плоскости светового ножа, а их положение может быть зарегистрировано камерой. Для расчета пульсационной скорости используется разность периодов вращения и либраций $\Delta\tau_p = |NT_{rot} - MT_{lib}|$, где N и M – целые числа, которые выбираются из условия $\Delta\tau_p / T_{lib} < 0.2$. Кросс-корреляционная обработка последовательности изображений осуществляется в программе PIVlab [17]. Более подробно методика изучения течения в неравномерно вращающемся цилиндре описана в работе [18]. Для описания движения жидкости выбрана цилиндрическая система координат (r, φ, z) с началом отсчета оси z от торцевой стенки.

2. Резонансные режимы пульсационного течения

В диапазоне частот либраций $\sigma \in (0; 2)$ в полости поддерживаются инерционные волны. Первоначально обсудим, как зависит полный динамический отклик жидкости от частоты σ в линейном режиме, т.е. в области малых амплитуд ε . Для этого в качестве характеристики интенсивности пульсационного течения будем использовать среднюю по пространству скорость

$$u = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{u_r^2 + u_z^2}, \quad (2)$$

где u_r и u_z – проекции мгновенной скорости на оси r и z в осевом сечении полости; количество элементов N определяется пространственным разрешением PIV-метода. Далее полученное значение скорости дополнительно осредняется по периоду либраций и нормируется на амплитуду колебаний скорости жидкости вблизи боковой границы:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{\Delta\varphi\Omega_{lib}R} \frac{1}{T_{lib}} \int_{T_{lib}} u dt, \quad (3)$$

Диаграмма отклика жидкости на либрационное воздействие показана на рис. 2. Зависимость имеет немонотонный вид и характеризуется наличием ярко выраженных экстремумов. Каждому пику соответствует резонансный режим, характеризующийся определенным пространственным распределением кинетической энергии. Вне резонансных областей структура пульсационного течения представляет собой систему отдельных волновых лучей, исходящих из мест соединения боковой и торцевых стенок (см. рис. 3, а, б). Направление групповой скорости волн (белые стрелки на рис. 3) полностью определяется безразмерной частотой либраций $\theta = \pm \arcsin(\sigma/2)$ [1].

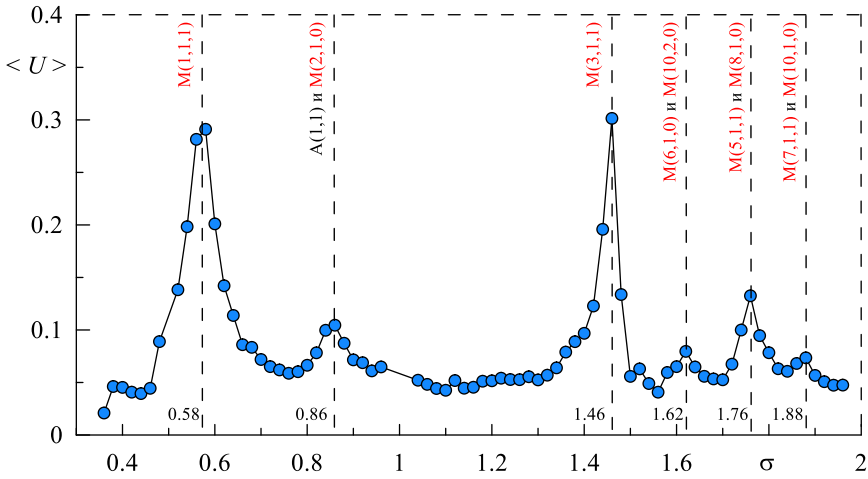


Рис. 2. Зависимость безразмерной скорости пульсационного течения в осевом сечении от частоты либраций

Fig. 2. Dimensionless velocity of a pulsating flow in the axial section as a function of libration frequency σ

Основной тип резонанса связан с возбуждением так называемых инерционных мод, отмеченных на рис. 2 как $M(n, m, k)$, где буквы в скобках соответственно означают осевое, радиальное и азимутальное волновое число. Собственные значения невязки инерционных мод могут быть получены следующим образом [1]:

$$\sigma^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{\pi^2 n^2 + \xi_{nmk}^2 / a^2}, \quad (4)$$

где ξ_{nmk} характеризует m -е положительное решение трансцендентного уравнения

$$\xi \frac{d}{d\xi} J_{|k|}(\xi) + k \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{n^2 \pi^2 a^2}} J_{|k|}(\xi) = 0. \quad (5)$$

Здесь $J_{|k|}(\xi)$ – функция Бесселя первого рода порядка $|k|$. Рассчитанные значения осесимметричных ($k=0$) и неосесимметричных ($k=1$) мод σ_{theory} для цилиндра с аспектным соотношением $a = R/L = 0.29$ представлены в таблице. Соответствующие значения резонансных пиков, наблюдаемые в эксперименте, представлены в колонке σ_{exp} .

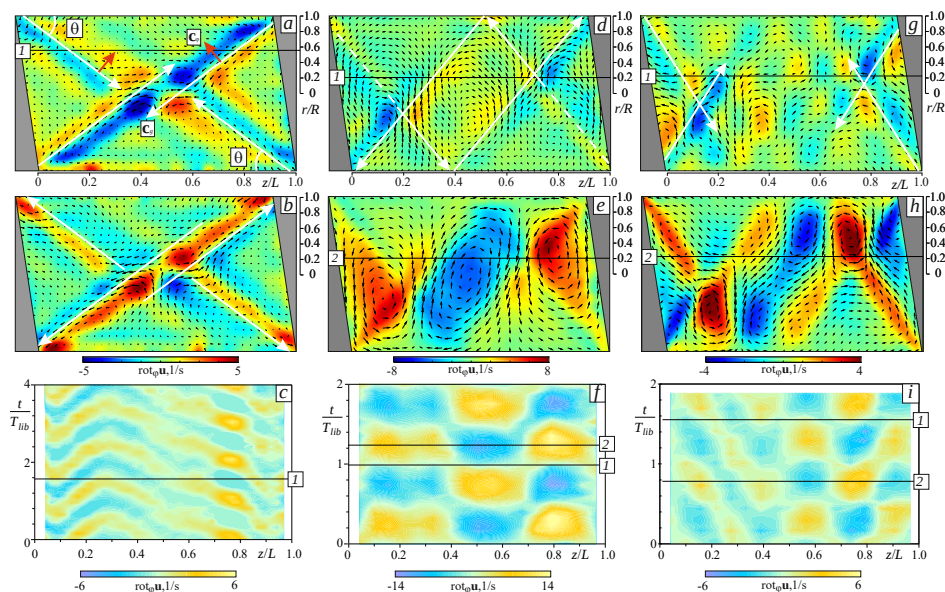


Рис. 3. Мгновенное поле завихренности в осевом сечении полости при частотах либраций $\sigma = 1.08$ (a, b), $\sigma = 1.46$ (d, e) и $\sigma = 1.62$ (g, h); белыми стрелками показано направление групповой скорости инерционных волн $\mathbf{c}_g$, красными стрелками – фазовой $\mathbf{c}_\phi$. В нижнем ряду (c, f, i) представлены соответствующие временные диаграммы завихренности вдоль направлений, обозначенных горизонтальными черными линиями на верхних фрагментах в моменты времени 1 и 2

Fig. 3. Snapshots of the vorticity field in the axial section of the cavity at a frequency $\sigma =$ (a, b) 1.08; (d, e) 1.46; and (g, h) 1.62; white arrows show the direction of the group velocity of inertial waves $\mathbf{c}_g$, red arrows show phase velocity $\mathbf{c}_\phi$; hereinafter, positive vorticity is counterclockwise. The bottom row (c, f, i) represents the corresponding vorticity time diagrams along the directions indicated by black horizontal lines on the top fragments at time instants 1 and 2

**Значения собственных частот инерционных мод
в цилиндре с аспектным соотношением $a = 0.29$**

n	m	k	σ_{theory}	σ_{exp}
1	1	1	0.575	0.58
2	1	0	0.857	0.86, A(1,1)
2	1	1	1.123	–
3	1	1	1.461	1.46
4	1	0	1.376	–
4	1	1	1.650	–
5	1	1	1.758	1.76
6	1	0	1.636	1.62
6	1	1	1.825	–
7	1	1	1.868	1.88
8	1	0	1.769	1.76
8	1	1	1.897	–
9	1	1	1.918	–
10	1	0	1.843	1.88
10	2	0	1.582	1.62

Благодаря наклону торцевых стенок в полости возбуждаются неосесимметричные моды с нечетным осевым волновым числом n . Тем не менее, поскольку либрационное воздействие симметрично, а угол наклона α достаточно мал, на близких частотах возможно появление осесимметричных мод с четными значениями n . При этом неосесимметричные моды с четными n не проявляются никогда. За счет вязкости две соседние моды могут объединяться в один комбинационный режим, в котором четные и нечетные моды проявляются попеременно. В целом результаты визуализации мгновенного поля скорости PIV-методом хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями собственных частот.

Типичные мгновенные поля скорости для мод $M(3,1,1)$ и $M(6,1,0)$ в фазе $\Omega_{lib}t = \pi/2$ показаны на рис. 3, e , h соответственно; для комбинационного режима с модами $M(5,1,1)$ и $M(8,1,0)$ при частоте $\sigma = 1.76$ и фазах $\Omega_{lib}t = \pi/2$ и 0 – на рис. 4, a , b соответственно.

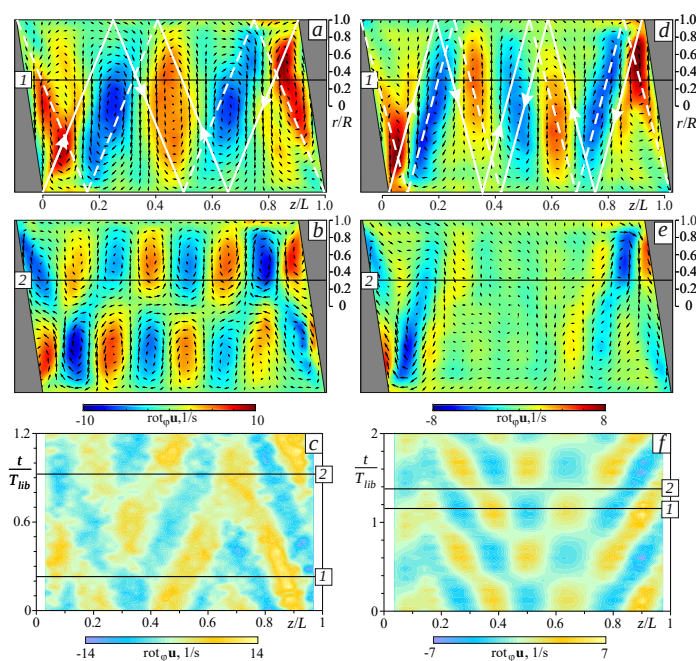


Рис. 4. Мгновенное поле завихренности при частотах либраций $\sigma = 1.76$ (a , b) и $\sigma = 1.88$ (d , e). В нижнем ряду (c , f) представлены соответствующие временные диаграммы завихренности вдоль направлений 1 и 2

Fig. 4. Snapshots of the vorticity field at a frequency $\sigma = 1$ (a , b) 1.76 and (d , e) 1.88. The bottom row (c , f) represents the corresponding vorticity time diagrams along the directions 1 and 2

Стоит отметить, что аналогичная комбинационная волновая картина наблюдается при частоте $\sigma = 0.86$, когда на одной частоте проявляются инерционная мода $M(2,1,0)$ и фокусировка волновых лучей в аттрактор $A(1,1)$ [18]. Вязкость гасит моды высокого порядка (т.е. с высоким значением n и m), поэтому инерционный отклик на либрации сильнее всего проявляется для мод низкого порядка.

3. Временная динамика волн

Рассмотрим временную динамику инерционных волн в различных режимах. Поскольку инерционные волны являются поперечными, частицы жидкости совершают антициклоническое круговое движение с частотой σ в плоскостях, лежащих под углами $\pm\theta$ относительно оси вращения. При этом завихренность $\text{rot}_{\phi}\mathbf{u}$, касательная к волновым лучам, определяет фазу волны. За пределами области пространственного резонанса фаза волны распространяется перпендикулярно волновым лучам со скоростью c_{ϕ} и направлена к боковой стенке полости (см. рис. 3, *a-c*). Временная диаграмма фазы (см. рис. 3, *c*) получена вдоль среза 1 (см. рис. 3, *a*) и является асимметричной по отношению к торцевым стенкам. Это означает, что волновые лучи со стороны двух противоположных тупых углов полости работают синфазно, а создаваемые ими завихренности складываются. Поэтому при перемещении фазы к боковой стенке полости завихренность со стороны острых углов гасится быстрее. Динамика распространения фазы сильно зависит от значения угла θ , а следовательно, и от частоты либраций. Здесь следует заметить, что движение жидкости относительно правого и левого торца является симметричным, поэтому для обработки данных можно рассматривать как верхнюю, так и нижнюю часть кюветы относительно оси вращения.

Резонансный режим с одной пространственной структурой $M(3,1,1)$ напоминает стоячую волну (см. рис. 3, *d-f*). Если в фазе либраций $\Omega_{lib}t = 0$ хорошо различимы отдельные волновые лучи, исходящие из углов полости, то при $\Omega_{lib}t = \pi$ возбуждается инерционная мода с осевым волновым числом $n = 3$ (см. рис. 3, *e*). В течение периода либраций закрутка жидкости в вихрях меняется на противоположную, при этом максимумы завихренностей сохраняют свое положение (см. рис. 3, *f*). Стоит отметить, что контуры вихревых структур могут быть описаны волновыми лучами, испущенными из любых двух противоположных углов полости. Похожие режимы стоячих волн, но с четными значениями n , наблюдались в либрирующем цилиндре с прямыми торцами [19], а также либрирующем кубе [3].

Более сложная волновая динамика наблюдается в комбинационных режимах, когда на одной частоте в разные моменты времени возбуждаются инерционные моды с различными волновыми числами. Так, при частоте $\sigma = 1.62$ (см. рис. 3, *g-i*) попеременно возникают две симметричные моды $M(6,1,0)$ и $M(10,2,0)$. Первая, доминантная мода, наиболее ярко проявляется в фазах либраций $\Omega_{lib}t = \pi/2$ и $3\pi/2$. При этом асимметрия кюветы способствует деформации пространственной структуры моды вблизи торцов полости: величина завихренности около тупых углов существенно выше, чем вблизи острых (см. рис. 3, *h*). Это указывает на то, что тупые углы закачивают в систему больше энергии по сравнению с острыми. Вторая мода, более высокого порядка, проявляется слабее и хорошо различима в фазах $\Omega_{lib}t = 0$ и π . Фазовая диаграмма волнового движения показывает, что вблизи тупого угла сохраняется режим стоячих волн, при котором происходит периодическое изменение знака завихренности (см. рис. 3, *i*). Вблизи острого угла, где пространственный резонанс проявляется слабее, преобладает режим бегущих волн.

Случаи попеременного возбуждения осесимметричной и неосесимметричной моды представлены на рис. 4. При частоте $\sigma = 1.76$ наблюдаются моды $M(5,1,1)$ и $M(8,1,0)$, переключение между которыми происходит в режиме бегущих

волн (см. рис. 4, *a–c*). В отличие от предыдущего случая завихренность $\text{rot}_\varphi \mathbf{u}$ более равномерно распределена вдоль координаты z/L . В целом пространственно-волновую картину можно представить как две пары волн, одна из которых сходится вблизи точки $z/L = 0.7$, а вторая расходится из точки $z/L = 0.35$. Наконец, при частоте $\sigma = 1.88$ возбуждаются моды $M(7,1,1)$ и $M(10,1,0)$. В данном случае наибольшей кинетической энергией обладает неосесимметричная мода, в то время как осесимметричная проявляется только вблизи торцов полости и быстро диссипирует с расстоянием вдоль осевой координаты (см. рис. 4, *d–f*). В центральной части полости колебательный режим больше напоминает стоячую волну. Аналогичная волновая динамика характерна для случая $M(3,1,1)$, когда при отсутствии дополнительного возмущения со стороны другой моды положение центров завихренности не менялось со временем (см. рис. 3, *d–f*). В то же время вблизи торцов полости, где обе моды взаимодействуют между собой, наблюдается режим бегущих волн.

4. Осредненная циркуляция, возбуждаемая волнами

Первоначально рассмотрим структуру осредненного течения, когда инерционные волны отсутствуют ($\sigma \geq 2$). В этом случае динамика жидкости определяется осредненными сдвиговыми напряжениями в пограничных слоях, индуцированными периодической экмановской подкачкой [13, 14]. Для удобства осреднения поля скорости в расчетах из всей последовательности кадров выбираются только кратные периоду либраций T_{lib} . При таком подходе частицы визуализатора участвуют только в медленном стационарном движении, а пульсационная компонента скорости не проявляется. Осредненные поля скорости в осевом и поперечном сечении полости при частоте $\sigma = 2$ представлены на рис. 5.

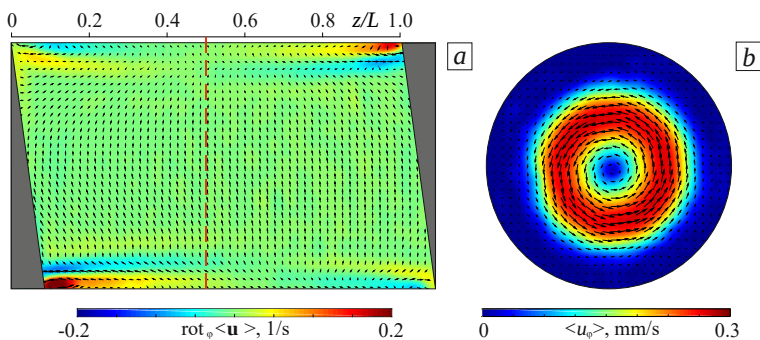


Рис. 5. Осредненные поля скорости в продольном (*a*) и поперечном (*b*) сечении при отсутствии инерционных волн при частоте $\sigma = 2.0$; направление вращения полости на фрагменте (*b*) по часовой стрелке; вертикальной штриховой линией показано положение сечения z/L , в котором получено азимутальное поле скорости

Fig. 5. Steady velocity fields in the (*a*) axial and (*b*) radial cross-sections in the absence of inertial waves at a frequency $\sigma = 2.0$; the cavity rotation is clockwise on the fragment (*b*); the vertical dashed line shows z/L position with the obtained azimuthal velocity field

Вблизи углов полости возникает медленное стационарное вихревое движение, интенсивность которого максимальна вблизи тупых углов и минимальна вблизи

острых. Направление циркуляции в вихрях таково, что жидкость движется от углов вдоль боковой стенки. Подобная структура была впервые обнаружена в либрирующем цилиндре с прямыми торцами [15]. Причем было показано, что осредненное угловое течение существует во всем диапазоне частот либраций, а его скорость квадратично зависит от амплитуды либраций $\sim \varepsilon^2$. Помимо меридиональной циркуляции в объеме полости возникает осредненная ретроградная азимутальная циркуляция, скорость которой также определяется квадратом амплитуды либраций [13, 15, 20].

В диапазоне частот $\sigma \in (0; 2)$ инерционные волны при отражении от боковой стенки цилиндра возбуждают пульсационное движение жидкости в пограничном слое Стокса. На этом фоне возникает стационарная меридиональная циркуляция, структура которой сильно зависит от режима пульсационного течения. На рис. 6 представлены осредненное поле скорости вблизи боковой стенки полости, распределение завихренности и фазовая диаграмма пульсационного течения в трех различных режимах: нерезонансный режим бегущей волны (a–c), резонансный режим стоячей волны (d–f), резонансный режим бегущей волны (g–i).

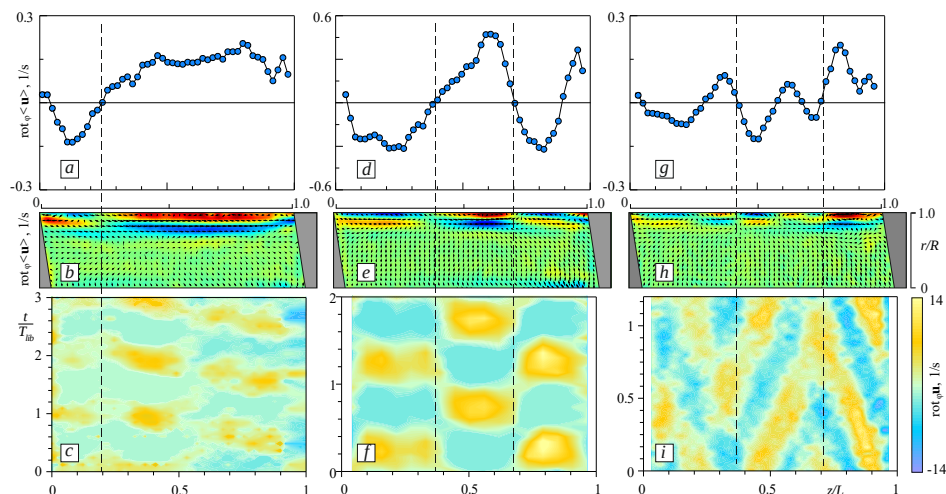


Рис. 6. Распределение осредненной по времени завихренности $\text{rot}_\varphi \langle \mathbf{u} \rangle$ вдоль боковой стенки полости, осредненное по времени поле скорости и временная диаграмма мгновенной завихренности $\text{rot}_\varphi \mathbf{u}$ вдоль направления 1 (см. рис. 4, a, b) при частотах $\sigma = 0.72$ (a–c), $\sigma = 1.46$ (d–f) и $\sigma = 1.76$ (g–i)

Fig. 6. Distribution of steady vorticity $\text{rot}_\varphi \langle \mathbf{u} \rangle$ along the sidewall of the cavity, steady velocity field, and time dependency of instantaneous vorticity $\text{rot}_\varphi \mathbf{u}$ along line 1 (Fig. 4a, b) at a frequency $\sigma =$ (a–c) 0.72, (d–f) 1.46, and (g–i) 1.76

При частоте $\sigma = 0.72$, в нерезонансном режиме, фаза инерционной волны широким фронтом распространяется со стороны тупого угла к острому (см. рис. 6, c). Как видно, это приводит к возникновению осредненного вихревого течения вблизи боковой границы полости, локализованного в пределах $z/L = 0.2 - 1.0$. Направление циркуляции жидкости в вихре является циклоническим, т.е. в непосредственной близости к твердой границе жидкость движется от тупого угла к острому. Важно отметить, что это совпадает с направлением распространения фазы волны.

Продольный размер вихря также совпадает с шириной фронта бегущей волны. При этом его поперечный размер ограничивается несколькими толщинами пограничного слоя Стокса $\delta_{st} = \sqrt{2\nu / \Omega_{lib}}$. Бегущая волна со стороны острого угла возбуждает антициклоническое вихревое течение, локализованное в пределах $z/L = 0.2 - 1.0$. Можно отметить, что в рассматриваемом случае направления осредненной циркуляции, возбуждаемой инерционными волнами и угловыми колебаниями полости (см. рис. 5, *a*) совпадают и усиливают друг друга. В нижней половине полости, которая не показана на рис. 6, *b*, осредненное движение жидкости относительно тупого и острого углов аналогичное. Это означает, что осредненное течение не является осесимметричным.

В резонансном режиме стоячей волны при частоте $\sigma = 1.45$ структура осредненного течения имеет вид системы вихрей, количество и продольный размер которых согласуются с пространственными характеристиками инерционной моды $M(3,1,1)$ (см. рис. 6, *d-f*). В диапазоне $z/L = 0.4 - 0.7$ осредненная завихренность циклоническая, в то время как при $z/L = 0 - 0.4$ и $z/L = 0.7 - 0.9$ антициклоническая. Вблизи мест соединения боковой и торцевых стенок структура осредненного течения, возбуждаемого инерционной модой, осложняется присутствием угловых вихрей. Если вблизи острого угла циркуляция жидкости, возбуждаемая обоими эффектами, согласуется и усиливается, то вблизи тупого угла ситуация противоположная. Судя по тому, что угловой циклонический вихрь деформирован и прижат к торцевой стенке, интенсивность антициклонического вихря от инерционной моды существенно выше. Подобная структура осредненного течения возникает в либрирующем цилиндре с прямыми торцами [19]. В отличие от рассматриваемого случая вихри имели осесимметричную тороидальную форму, а их количество определялось соотношением $n + 2$.

В резонансном режиме бегущей волны структура течения более сложная ($\sigma = 1.76$; см. рис. 6, *g-i*). Две сходящиеся в точку с координатой $z/L = 0.7$ волны индуцируют пару согласованно вращающихся осредненных вихрей. Как и в нерезонансном режиме, направление циркуляции жидкости определяется направлением распространения фазы волны. В точке с координатой $z/L = 0.35$ расходящиеся волны также генерируют пару вихрей, но уже с противоположной закруткой. Важно отметить, что течение вблизи тупого угла усиливается бегущей волной. В то же время интенсивность антициклонического вихревого движения вблизи острого угла ослабляется волной. При частоте $\sigma = 1.88$, когда попеременно возбуждаются моды $M(7,1,1)$ и $M(10,1,0)$, эффект менее выражен из-за вязкой диссипации волнового движения в пограничном слое Стокса. Таким образом, инерционные волны оказывают сильное влияние на структуру осредненного течения. При этом направление осредненной циркуляции в значительной мере зависит от направления распространения фазы волны.

Заключение

Экспериментально исследовано влияние неосесимметричных инерционных волн на осредненную циркуляцию жидкости в неравномерно вращающемся (либрирующем) цилиндре. Для нарушения азимутальной симметрии течения торцы полости наклонены параллельно друг другу на угол $\alpha = 8.5^\circ$ относительно плоскости поперечного сечения. Обнаружено, что в зависимости от частоты либраций $\sigma = \Omega_{lib} / \Omega_{rot}$

в полости поддерживаются различные инерционные режимы: нерезонансный режим бегущей волны, резонанс неосесимметричной инерционной моды, резонансный режим бегущей инерционной волны. Вне области резонанса пульсационное течение представляет собой совокупность волновых лучей, распространяющихся из углов полости вдоль характеристических поверхностей в виде конусов. Детальные исследования временной динамики поля скорости показывают, что мгновенное поле завихренности может быть представлено в виде совокупности бегущих волн. Если частота либраций совпадает с собственной частотой инерционных колебаний жидкости, на долю периода возбуждаются неосесимметричные моды – крупномасштабные осциллирующие структуры. Значения собственных частот в экспериментах хорошо согласуются с предсказаниями для невязких инерционных мод. Поскольку положение вихрей со временем не меняется, режим напоминает стоячие волны, пучностями которых являются центры завихренностей. В области высоких частот либраций $\sigma > 1.5$ возбуждаются комбинационные режимы, для которых характерно попеременное возбуждение инерционных мод (как осесимметричных, так и неосесимметричных) с различными волновыми числами. При возбуждении двух осесимметричных волн вблизи тупого угла полости сохраняется режим стоячих волн, в то время как вблизи острого угла – режим бегущей волны. В случае попеременного возбуждения осесимметричной и неосесимметричной моды пространственно-волновой паттерн можно представить в виде нескольких пар сходящихся и расходящихся бегущих волн.

Обнаружено, что колебания жидкости в объеме полости индуцируют осредненное течение в пограничном слое Стокса. В случае отсутствия волн вблизи мест соединения боковой и торцевых стенок возникает так называемое угловое течение в виде тороидального вихря. При возбуждении неосесимметричной инерционной моды вблизи боковой стенки дополнительно формируется система осредненных вихревых структур, количество которых совпадает с осевым волновым числом моды n . В режиме бегущей волны (нерезонансный случай) осредненное течение представляет собой пару вихревых ячеек, генерируемых двумя волнами, распространяющимися от торцов полости в центр. Причем продольный размер вихрей определяется шириной волнового фронта. В резонансном режиме бегущей волны структура осредненного течения более сложная: взаимодействие мод с различными осевыми волновыми числами приводит к появлению нескольких пар согласованно вращающихся вихрей. Вдоль боковой стенки жидкость движется по направлению к точке схождения волн и, наоборот, жидкость движется по направлению от точки расхождения волн.

Список источников

1. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеониздат, 1975. 304 с.
2. Messio L., Morize C., Rabaud M., Moisy F. Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid // *Experiment. Fluids*. 2008. V. 44. P. 519–528. doi: 10.1007/s00348-007-0410-3
3. Boisson J., Lamriben C., Maas L.R.M., Cortet P.P., Moisy F. Inertial waves and modes excited by the libration of a rotating cube // *Phys. Fluids*. 2012. V. 24 (7). Art. 076602. doi: 10.1063/1.4731802
4. Borgia I.D., Abouzar G.V., Harlander U. Inertial wave mode excitation in a rotating annulus with partially librating boundaries // *Fluid Dyn. Res.* 2014. V. 46. Art. 041423. doi: 10.1088/0169-5983/46/4/041423

5. Maas L.R.M., Benielli D., Sommeria J., Lam F.P.A. Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid // *Nature*. 1997. V. 388. P. 557–561. doi: 10.1038/41509
6. Manders A.M.M., Maas L.R.M. Observations of inertial waves in a rectangular basin with one sloping boundary // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 493. P. 59–88. doi: 10.1017/S0022112003005998
7. Сибгатуллин И.Н., Ерманык Е.В. Аттракторы внутренних и инерционных волн (обзор) // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 2. С. 113–136. doi: 10.15372/PMTF20190210
8. Rieutord M., Georgeot B., Valdettaro L. Inertial waves in a rotating spherical shell: attractors and asymptotic spectrum // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 435. P. 103–144. doi: 10.1017/S0022112001003718
9. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. Librational forcing of a rapidly rotating fluid-filled cube // *J. Fluid Mech.* 2018. V. 842. P. 469–494. doi: 10.1017/jfm.2018.157
10. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. Reflections and focusing of inertial waves in a librating cube with the rotation axis oblique to its faces // *J. Fluid Mech.* 2020. V. 896. Art. A5. doi: 10.1017/jfm.2020.328
11. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. Reflections and focusing of inertial waves in a tilted librating cube // *J. Fluid Mech.* 2022. V. 947. Art. A10. doi: 10.1017/jfm.2022.639
12. Wang C.Y. Cylindrical tank of fluid oscillating about a steady rotation // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 41. P. 581–592. doi: 10.1017/S0022112070000769
13. Busse F.H. Zonal flow induced by longitudinal librations of a rotating cylindrical cavity // *Physica D*. 2011. V. 240 (2). P. 208–211. doi: 10.1016/j.physd.2010.09.010
14. Noir J., Calkins M.A., Lasbleis M., Cantwell J., Aurnou J.M. Experimental study of libration-driven zonal flows in a straight cylinder // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2010. V. 1-2. P. 98–106. doi: 10.1016/j.pepi.2010.06.012
15. Subbotin S.V., Dyakova V.V. Inertial waves and steady flows in a liquid filled librating cylinder // *Microgravity Sci. Technol.* 2018. V. 30 (4). P. 383–392. doi: 10.1007/s12217-018-9621-x
16. Subbotin S. Non-axisymmetric flow excited by fluid oscillations in a rotating cylinder with sloping ends // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. V. 1809. Art. 012015. doi: 10.1088/1742-6596/1809/1/012015
17. Thielicke W., Stamhuis E.J. PIVlab – Time-Resolved Digital Particle Image Velocimetry Tool for MATLAB (version: 2.50).
18. Subbotin S., Shiryayeva M. Steady vortex flow induced by inertial wave attractor in a librating cylinder with sloping ends // *Microgravity Sci. Technol.* 2022. V. 34 (5). Art. 89. doi: 10.1007/s12217-022-10008-x
19. Subbotin S. Steady circulation induced by inertial modes in a librating cylinder // *Phys. Rev. Fluids*. 2020. V. 5 (1). Art. 014804. doi: 10.1103/PhysRevFluids.5.014804
20. Sauret A., Cébron D., Le Bars M., Le Dizès S. Fluid flows in a librating cylinder // *Phys. Fluids*. 2012. V. 24. Art. 026603. doi: 10.1063/1.3680874

References

1. Greenspan H.P. (1968) *The Theory of Rotating Fluids*. London: Cambridge University Press.
2. Messio L., Morize C., Rabaud M., Moisy F. (2008) Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid. *Experiments in Fluids*. 44. pp. 519–528. doi: 10.1007/s00348-007-0410-3
3. Boisson J., Lamriben C., Maas L.R.M., Cortet P.P., Moisy F. (2012) Inertial waves and modes excited by the libration of a rotating cube. *Physics of Fluids*. 24(7). Article 076602. doi: 10.1063/1.4731802
4. Borgia I.D., Abouzar G.V., Harlander U. (2014) Inertial wave mode excitation in a rotating annulus with partially librating boundaries. *Fluid Dynamics Research*. 46. Article 041423. doi: 10.1088/0169-5983/46/4/041423
5. Maas L.R.M., Benielli D., Sommeria J., Lam F.P.A. (1997) Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid. *Nature*. 388. pp. 557–561. doi: 10.1038/41509

6. Manders A.M.M., Maas L.R.M. (2003) Observations of inertial waves in a rectangular basin with one sloping boundary. *Journal of Fluid Mechanics*. 493. pp. 59–88. doi: 10.1017/S0022112003005998
7. Sibgatullin I.N., Ermanyuk E.V. (2019) Internal and inertial wave attractors: A review. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 60(2). pp. 284–302. doi: 10.1134/S002189441902010X
8. Rieutord M., Georgeot B., Valdettaro L. (2001) Inertial waves in a rotating spherical shell: attractors and asymptotic spectrum. *Journal of Fluid Mechanics*. 435. pp. 103–144. doi: 10.1017/S0022112001003718
9. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. (2018) Librational forcing of a rapidly rotating fluid-filled cube. *Journal of Fluid Mechanics*. 842. pp. 469–494. doi: 10.1017/jfm.2018.157
10. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. (2020) Reflections and focusing of inertial waves in a librating cube with the rotation axis oblique to its faces. *Journal of Fluid Mechanics*. 896(A5). doi: 10.1017/jfm.2020.328
11. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. (2022) Reflections and focusing of inertial waves in a tilted librating cube. *Journal of Fluid Mechanics*. 947(A10). doi: 10.1017/jfm.2022.639
12. Wang C.Y. (1970) Cylindrical tank of fluid oscillating about a steady rotation. *Journal of Fluid Mechanics*. 41. pp. 581–592. doi: 10.1017/S0022112070000769
13. Busse F.H. (2011) Zonal flow induced by longitudinal librations of a rotating cylindrical cavity. *Physica D*. 240(2). pp. 208–211. doi: 10.1016/j.physd.2010.09.010
14. Noir J., Calkins M.A., Lasbleis M., Cantwell J., Aurnou J.M. (2010) Experimental study of libration-driven zonal flows in a straight cylinder. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 1–2. pp. 98–106. doi: 10.1016/j.pepi.2010.06.012
15. Subbotin S.V., Dyakova V.V. (2018) Inertial waves and steady flows in a liquid filled librating cylinder. *Microgravity Science and Technology*. 30(4). pp. 383–392. doi: 10.1007/s12217-018-9621-x
16. Subbotin S. (2021) Non-axisymmetric flow excited by fluid oscillations in a rotating cylinder with sloping ends. *Journal of Physics: Conference Series*. 1809. Article 012015. doi: 10.1088/1742-6596/1809/1/012015
17. Thielicke W., Stamhuis E.J. (2014) *PIVlab – Time-Resolved Digital Particle Image Velocimetry Tool for MATLAB*. Version 2.50.
18. Subbotin S., Shiryayeva M. (2022) Steady vortex flow induced by inertial wave attractor in a librating cylinder with sloping ends. *Microgravity Science and Technology*. 34(5). Article 89. doi: 10.1007/s12217-022-10008-x
19. Subbotin S. (2022) Steady circulation induced by inertial modes in a librating cylinder. *Physical Review Fluids*. 5(1). Article 014804. doi: 10.1103/PhysRevFluids.5.014804
20. Sauret A., Cébron D., Le Bars M., Le Dizès S. (2012) Fluid flows in a librating cylinder. *Physics of Fluids*. 24. Article 026603. doi: 10.1063/1.3680874

Сведения об авторах:

Ширяева Мария Андреевна – аспирант кафедры физики и технологии физического факультета Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета (Пермь, Россия). E-mail: shiryayeva_ma@pspu.ru

Субботин Станислав Валерьевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории вибрационной гидромеханики Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета, Пермь, Россия. E-mail: subbotin_sv@pspu.ru

Information about the authors:

Shiryayeva Mariya A. (Perm State Humanitarian Pedagogical University, Perm, Russian Federation). E-mail: shiryayeva_ma@pspu.ru

Subbotin Stanislav V. (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State Humanitarian Pedagogical University, Perm, Russian Federation). E-mail: subbotin_sv@pspu.ru

Статья поступила в редакцию 14.08.2023; принята к публикации 03.10.2024

The article was submitted 14.08.2023; accepted for publication 03.10.2024