

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Научная статья

УДК 517.97

doi: 10.17223/19988605/69/1

Необходимые условия оптимальности в одной негладкой задаче
управления дискретными системами типа ВольтерраРашад Огтай оглы Масталиев¹, Нигар Давид кызы Багирлы²¹ Университет «Азербайджан», Баку, Азербайджан¹ Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской Республики, Баку, Азербайджан² Азербайджанский государственный аграрный университет, Гянджа, Азербайджан¹ rashad.mastaliyev@au.edu.az² nigar.bayramova50@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления, описываемая разностным аналогом интегродифференциального уравнения типа Вольтерра с недифференцируемым критерием качества. При этом предполагается, что правая часть исходного уравнения и функционал качества по вектору состояния имеют производные по любому направлению. Сначала, применяя метод приращения и учитывая некоторые понятия негладкого анализа, установлены необходимые условия оптимальности в терминах производных по направлениям, носящие общий характер. Затем, опираясь на них, установлены необходимые условия оптимальности, непосредственно выраженные через параметры рассматриваемой негладкой задачи.

Ключевые слова: разностное уравнение типа Вольтерра; негладкий функционал качества; производная по направлению; оптимальность; задача на минимакс.

Для цитирования: Масталиев Р.О., Багирлы Н.Д. Необходимые условия оптимальности в одной негладкой задаче управления дискретными системами типа Вольтерра // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 69. С. 4–9. doi: 10.17223/19988605/69/1

Original article

doi: 10.17223/19988605/69/1

Necessary optimality conditions in a non-smooth control problem
for Volterra type discrete systemsRashad O. Mastaliyev¹, Nigar D. Bagirli²¹ Azerbaijan University, Baku, Azerbaijan¹ Institute of Control Systems, Baku, Azerbaijan² Azerbaijan State Agricultural University, Ganja, Azerbaijan¹ rashad.mastaliyev@au.edu.az² nigar.bayramova50@gmail.com

Abstract. The optimal control problem described by the difference analog of the Volterra type integro-differential equation with a non-differentiable quality criterion is considered. It is assumed that the right-hand side of the original equation and the quality functional with respect to the state vector have derivatives in any direction. First, using the increment method and taking into account some concepts of non-smooth analysis, the necessary optimality conditions are established in terms of derivatives in directions of a general nature. Then, based on them, the necessary

optimality conditions directly expressed through the parameters of the non-smooth problem under consideration are established.

Keywords: Volterra type difference equation; non-smooth quality functional; directional derivative; optimality; minimax problem.

For citation: Mastaliyev, R.O., Bagirli, N.D. (2024) Necessary optimality conditions in a non-smooth control problem for Volterra type discrete systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 69. pp. 4–9. doi: 10.17223/19988605/69/1

Введение

Как известно (см., напр.: [1, 2]), математическое моделирование разнообразных задач экономики и техники приводит к специальным задачам оптимизации с негладкими целевыми функционалами. Такие задачи оптимального управления непрерывными системами изучены в работах [3, 4], где приведена дополнительная библиография.

Наряду с этим дискретные динамические модели управляемых систем являются довольно важным в теоретическом и практическом отношении классом математических моделей, они позволяют охватить очень широкий круг реальных объектов и соответствующих им задач оптимального управления.

Различные аспекты задач оптимального управления, описываемых дискретными системами с негладкими функционалами качества, изучены в работах [5, 6] и др.

Исследованию задач оптимального управления, описываемых разностными уравнениями типа Вольтера с гладким терминальным критерием качества, посвящены работы [7–9].

В предлагаемой же работе подобная задача изучается в случае негладкого функционала качества, при этом с учетом специфики функционала качества доказаны необходимые условия оптимальности в терминах производных по направлениям [10].

1. Постановка задачи

Пусть $T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}$ – заданная конечная последовательность, причем разность $t_1 - t_0$ есть натуральное число, а $\Phi(x)$ – заданная скалярная функция, удовлетворяющая условию Липшица и имеющая производные по любому направлению.

Предположим, что управляемый дискретный процесс описывается системой обыкновенных разностных уравнений типа Вольтера

$$x(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau), u(\tau)), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

Здесь $f(t, \tau, x, u)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по (x, u) с частными производными по x при всех (t, τ) , $u(t)$ – r -мерный вектор управляющих воздействий.

Если управляющая функция $u(t)$ удовлетворяет ограничению

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T, \quad (2)$$

то такую управляющую функцию назовем допустимым управлением. Здесь U – заданное непустое, ограниченное множество.

Задача заключается в минимизации негладкого функционала

$$S(u) = \Phi(x(t_1)) \quad (3)$$

при ограничениях (1), (2).

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимальное значение функционалу (3) при ограничениях (1), (2), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t), x(t))$ – оптимальным процессом.

Цель настоящей статьи – получение необходимых условий оптимальности первого порядка в рассматриваемой дискретной негладкой задаче (1)–(3).

2. Необходимые условия оптимальности в терминах производных по направлениям

Считая $(u(t), x(t))$ фиксированным допустимым процессом, введем множество

$$f(t, \tau, x(\tau), U) = \{ \alpha : \alpha = f(t, \tau, x(\tau), v), v \in U \}. \quad (4)$$

В дальнейшем будем предполагать, что множество (4) выпукло при всех (t, τ) .

Через $u(t; \varepsilon)$ обозначим произвольное допустимое управление такое, что соответствующее ему состояние $x(t; \varepsilon)$ процесса удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} x(t+1; \varepsilon) &= \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau; \varepsilon), u(\tau, \varepsilon)) = \\ &= \sum_{\tau=t_0}^t (1-\varepsilon) f(t, \tau, x(\tau; \varepsilon), u(\tau)) + \sum_{\tau=t_0}^t \varepsilon f(t, \tau, x(\tau; \varepsilon), v(\tau, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varepsilon \in [0, 1]$ – произвольное число, а $v(t) \in U$, $t \in T$, – произвольное допустимое управление.

Такое допустимое управление $u(t; \varepsilon)$ существует в силу выпуклости множества (4).

Пусть по определению

$$y(t) = \left. \frac{\partial x(t; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (6)$$

Используя (5) и учитывая гладкость вектор-функции $f(t, x, \tau, u)$, получим, что вектор-функция $y(t)$, определяемая формулой (6), является решением следующего разностного уравнения в вариациях типа Вольтерра:

$$y(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^t [f_x(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) y(\tau) + (f(t, \tau, x(\tau), v(\tau)) - f(t, \tau, x(\tau), u(\tau)))]. \quad (7)$$

С другой стороны, из (6) ясно, что

$$x(t; \varepsilon) = x(t) + \varepsilon y(t) + o(\varepsilon; t). \quad (8)$$

При этом специальное приращение функционала качества (3), отвечающее допустимым управлениям $u(t; \varepsilon)$ и $u(t)$, записывается в виде:

$$\begin{aligned} S(u(t; \varepsilon)) - S(u(t)) &= \Phi(x(t_1; \varepsilon)) - \Phi(x(t_1)) = \\ &= [\Phi(x(t_1) + \varepsilon y(t_1) + o(t_1; \varepsilon)) - \Phi(x(t_1) + \varepsilon y(t_1))] - \\ &\quad - [\Phi(x(t_1) + \varepsilon y(t_1)) - \Phi(x(t_1))]. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то ясно, что

$$|\Phi(x(t_1) + \varepsilon y(t_1) + o(t_1; \varepsilon)) - \Phi(x(t_1) + \varepsilon y(t_1))| \leq o_1(\varepsilon). \quad (10)$$

Отсюда, используя определение производной по направлениям, получаем

$$\Phi(x(t_1) + \varepsilon y(t_1)) - \Phi(x(t_1)) = \varepsilon \frac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial y(t_1)} + o_2(\varepsilon).$$

Теперь предположим, что допустимое управление $u(t)$ оптимальное, тогда из последнего разложения получаем

$$\frac{\varepsilon \partial \Phi(x(t_1))}{\partial y(t_1)} + o_2(\varepsilon) \geq 0. \quad (11)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если множество (4) выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче (1)–(3) необходимо, чтобы неравенство

$$\frac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial y(t_1)} \geq 0 \quad (12)$$

выполнялось для всех $v(t) \in U, t \in T$.

Неравенство (12) является неявным критерием оптимальности относительно параметрам задачи (1)–(3). Используя его, удастся получить необходимое условие оптимальности, выраженное непосредственно через параметры задачи (1)–(3).

Уравнение (7) является линейным неоднородным разностным уравнением. Поэтому, применяя результаты, например, работ [7, 11] получаем, что решение $x(t)$ уравнения в вариациях, допускает представление

$$y(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \left[\sum_{s=\tau}^{t-1} R(t, s+1) (f(s, \tau, x(\tau), v(\tau)) - f(s, \tau, x(\tau), u(\tau))) \right]. \quad (13)$$

Здесь $R(t, s)$ является резольвентой уравнения (8), при фиксированном t удовлетворяет по $s (s \leq t)$ матричному разностному уравнению Вольтерра

$$R(t+1, s) = \sum_{\tau=s}^t R(t+1, \tau+1) f_x(\tau, s, x(s)u(s)), \quad s \leq t \quad (14)$$

с начальным условием

$$R(t+1, t+1) = E,$$

где $E - (n \times n)$ -мерная единичная матрица.

Учитывая (13), положим

$$L_1(v) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \left[\sum_{s=\tau}^{t_1-1} R(t_1, s+1) (f(s, \tau, x(\tau), v(\tau)) - f(s, \tau, x(\tau), u(\tau))) \right].$$

Следовательно, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если множество (4) выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (1)–(3) необходимо, чтобы неравенство

$$\frac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial L_1(v)} \geq 0$$

выполнялось для всех $v(t) \in U, t \in T$.

3. Линеаризованное необходимое условие оптимальности

В этом разделе дополнительно предположим, что в задаче (1)–(3) вектор-функция $f(t, \tau, x, u)$ непрерывно дифференцируема по (x, u) , а множество U выпукло. Эти дополнительные условия позволяют нам записать «возмущенную» систему вида:

$$x(t+1; \mu) = \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau, \mu), u(\tau, \mu)) \equiv \sum_{\tau=t_0}^t (1-\varepsilon) f(t, \tau, x(\tau, \mu), \mu v(\tau) + (1-\mu)u(\tau)), \quad (15)$$

где $\mu \in [0, 1]$ – произвольное число, а $v(t)$ произвольное допустимое управление.

Пусть

$$z(t, v) = \frac{\partial x(t; \mu)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}. \quad (16)$$

Тогда из (15) следует, что $z(t, v)$, определяемое формулой (16), является решением следующего уравнения в вариациях:

$$z(t+1, v) = \sum_{\tau=t_0}^t [f_x(t, \tau, x(\tau), v(\tau))z(\tau, v) + f_u(t, \tau, x(\tau), u(\tau))(v(\tau) - u(\tau))]. \quad (17)$$

При этом специальное приращение критерия качества (3), отвечающее допустимым управлениям $u(t; \mu)$ и $u(t)$ представляется в виде:

$$S(u(t; \mu)) - S(u(t)) = [\Phi(x(t_1) + \mu z(t_1, v) + o(\mu)) - \Phi(x(t_1) + \mu z(t_1, v))] = \mu \frac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial z(t_1, v)} + o(\mu). \quad (18)$$

Из полученного разложения следует теорема.

Теорема 3. Если множество U выпукло, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче (1)–(3) при дополнительном предположении, что функция $f(t, \tau, x, u)$ непрерывно дифференцируема по (x, u) , необходимо, чтобы неравенство

$$\frac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial z(t_1, v)} \geq 0 \quad (19)$$

выполнялось для всех $v(t) \in U$, $t \in T$.

Как и раньше, конкретизируем полученное необходимое условие оптимальности, другими словами, выразим непосредственно через параметры задачи (1)–(3).

Благодаря результатам работ [7, 11] решение $z(t, v)$ линеаризованного уравнения в вариациях (17) представимо в виде:

$$z(t, v) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=\tau}^{t-1} [R(t, s) f_u(s, \tau, x(\tau), u(\tau))](v(\tau) - u(\tau)), \quad (20)$$

где $R(\tau, t)$ – решение уравнения (14).

Введя обозначение

$$Q(t, \tau) = \sum_{s=\tau}^t [R(t, s) f_u(s, \tau, x(\tau), u(\tau))],$$

из тождества (20) имеем

$$z(t, v) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} Q(t, \tau)(v(\tau) - u(\tau)).$$

Отсюда следует

$$z(t_1, v) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} Q(t_1, \tau)(v(\tau) - u(\tau)).$$

Полагая

$$L_2(v) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} Q(t_1, \tau)(v(\tau) - u(\tau)),$$

из неравенства (19) получаем следующий результат.

Теорема 4. Если множество U выпукло, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче (1)–(3) необходимо, чтобы неравенство

$$\frac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial L_2(v)} \geq 0$$

выполнялось для всех $v(t) \in U$, $t \in T$.

Заключение

В предлагаемой работе рассматривается негладкая задача оптимального управления дискретными системами Вольтерра и при помощи метода явной линеаризации установлено необходимое условие оптимальности первого порядка в терминах производных по направлениям.

Список источников

1. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. СПб. : Питер, 2020. 208 с.
2. Черноморов Г.А. Теория принятия решений. Новочеркасск, 2002. 276 с.
3. Отакулов С., Хайдаров Т.Т. Условия оптимальности в негладкой задаче управления для динамической системы с параметрами // J. Physics and Math. 2020. V. 13 (65). С. 7–11. doi: 10.24411.2520-6990-2020-11847

4. Отакулов С., Жуманов К.С. Негладкая задача оптимального управления для линейных модели динамических систем // J. Science and Innovation. 2022. № 3. С. 252–259. doi: 10.5281/zenodo.6809643
5. Гараева Э.А., Мансимов К.Б. Необходимое условие оптимальности в задаче управления с дискретным временем при недифференцируемом критерии качества // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 38. С. 4–10. doi: 10.17223/19988605/38/1
6. Shvartsman I. Necessary optimality conditions in discrete non-smooth optimal control // J. Optimization Theory and Applications. 2011. V. 153. P. 578–586.
7. Мансимов К.Б., Масталиев Р.О. Оптимизация процессов, описываемых разностными уравнениями Вольтерра. Saarbrücken : Lambert Academic Publishing, 2017. 263 с.
8. Масталиев Р.О. Особые управления в дискретных системах Вольтерра // Вестник Бакинского университета. Сер. физ.-мат. наук. 2008. № 1, С. 44–49.
9. Mansimov K.B., Mastaliyev R.O. Necessary first and second order optimality conditions in problems of control described by a system of Volterra difference equations // J. Automatic Control and Computer Sciences, 2008. V. 42. P. 71–76.
10. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М. : Наука, 1990. 432 с.
11. Колмановский В.Б. Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2000. № 4. С. 4–12.

References

1. Konyukhovskiy, P.V. (2020) *Matematicheskie metody issledovaniya operatsiy v ekonomike* [Mathematical methods of operations research in economics]. St. Petersburg: Piter.
2. Chernomorov, G.A. (2002) *Teoriya prinyatiya resheniy* [Theory of decision making]. Novocherkassk: [s.n.].
3. Otakulov, S. & Khaidarov, T.T. (2020) Optimality conditions in a nonsmooth control problem for a dynamic system with parameters. *Journal of Physics and Mathematics*. 13(65). pp. 7–11. DOI: 10.24411.2520-6990-2020-11847
4. Otakulov, S. & Zhumanov, K.S. (2022) Nonsmooth optimal control problem for linear models of dynamic systems *Journal of Science and Innovation*. 3. pp. 252–259. (In Russian). DOI: 10.5281/zenodo.6809643
5. Garaeva, E.A. & Mansimov, K.B. (2017) Necessary condition for optimality in a discrete-time control problem with a non-differentiable quality criterion. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 38. pp. 4–10. DOI: 10.17223/19988605/38/1
6. Shvartsman, I. (2011) Necessary optimality conditions in discrete nonsmooth optimal control. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 153. pp. 578–586.
7. Mansimov, K.B. & Mastaliyev, R.O. (2017) *Optimizatsiya protsessov, opisivaemykh raznostnymi uravneniyami Vol'terra* [Optimization of processes described by Volterra difference equations]. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing.
8. Mastaliyev, R.O. (2008) Osobyie upravleniya v diskretnykh sistemakh Vol'terra [Singular controls in discrete Volterra systems]. *Vestnik Bakinskogo universiteta. Ser. fiz.-mat. Nauk*. 1. pp. 44–49.
9. Mansimov, K.B. & Mastaliyev, R.O. (2008) Necessary first and second order optimality conditions in problems of control described by a system of Volterra difference equations. *Journal of Automatic Control and Computer Sciences*. 42. pp. 71–76.
10. Demyanov, V.F. & Rubinov, A.M. (1990) *Osnovy negladkogo analiza i kvazidifferentsial'noe ischislenie* [Fundamentals of Nonsmooth Analysis and Quasidifferential Calculus]. Moscow: Nauka.
11. Kolmanovskiy, V.B. (2000) Ob asimptoticheskikh svoystvakh resheniy nekotorykh nelineynykh sistem Vol'terra [On asymptotic properties of solutions of some Volterra nonlinear systems]. *Avtomatika i telemekhanika–Automation and Remote Control*. 4(4). pp. 25–33.

Информация об авторах:

Масталиев Рашад Огтай оглы – доктор философии по математике (кандидат физико-математических наук), доцент, заведующий кафедрой математики и информатики университета «Азербайджан»; ведущий научный сотрудник Института систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской Республики (Баку, Азербайджан). E-mail: rashad.mastaliyev@au.edu.az

Багирлы Нигар Давид кызы – ассистент кафедры математики и физики Азербайджанского государственного аграрного университета (Гянджа, Азербайджан). E-mail: nigar.bayramova50@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Mastaliyev Rashad O. (Doctor of Philosophy in Mathematics (Candidate of Physical and Mathematical Sciences), Associate Professor, Head of the Department of Mathematics and Informatics of the Azerbaijan University, Leading Researcher, Institute of Control Systems Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan). E-mail: rashad.mastaliyev@au.edu.az

Bagirly Nigar D. (Assistant of the Department of Mathematics and Physics, Azerbaijan State Agricultural University Ganja, Azerbaijan). E-mail: nigar.bayramova50@gmail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 28.07.2024; принята к публикации 02.12.2024

Received 28.07.2024; accepted for publication 02.12.2024