

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2025

№ 95

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimatov, Aleksey M. Bubenichikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36
Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>
Контактный тел./факс: (3822) 529-740
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Гермидер О.В., Попов В.Н. О решении краевой задачи для неоднородного уравнения эллиптического типа с использованием многочленов Лежандра и Чебышева	5
Зыков А.Е., Королева А.М., Норбосамбуев Ц.Д. Сопряженные идемпотентные формальные матрицы второго порядка над кольцами вычетов	19
Кармуши М., Колесников И.А., Лобода Ю.А. Управляющая функция уравнения Левнера, генерирующая касательный разрез, выходящий из угла двугольника	28
Смоленцев Н.К., Чернова К.В. О левоинвариантных полукэлеровых структурах на шестимерных нильпотентных несимплектических группах Ли	38
Шоимкулов Б. А., Расулова М. К. Формула Вейля для матричных функций	52

МЕХАНИКА

Агафонцев М.В., Старосельцева А.А., Рейно В.В., Лобода Е.Л. Влияние электрического поля на диффузионное горение метана	59
Войтик В.В. Уравнения траектории неконсервативной натуральной системы	72
Гильманов А.Я., Касенинов Р.Ж., Кузнецов А.В., Шевелёв А.П. Математическая модель развития и стабилизации трещины автогидроразрыва пласта	81
Муртазин Н.Э., Муртазина Р.Д., Мухутдинова А.А., Низамова А.Д. Изменение области гидродинамической устойчивости в зависимости от параметра термовязкости	97
Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В., Мерзляков А.Ф., Поморцева Т.Н., Фагалов А.Р., Кондюрин А.В., Кузнецов К.Ю. Влияние нарушения стехиометрии, УФ- и γ -облучения на вязкоупругие свойства эпоксидного связующего	108
Порязов В.А., Крайнов А.Ю., Крайнов Д.А., Басалаев С.А. Методика и результаты численного расчета нестационарной скорости горения высокоэнергетического материала по известному закону изменения давления	124
Прوماхов В.В., Матвеев А.Е., Шульц Н.А., Бахмат В.Р., Туранов Т.Э. Исследование процессов лазерного выращивания, структуры и механических свойств композиционных материалов, полученных из порошковой смеси Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB ₂	137
Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Негматиллаев Б.Н., Ахмедов М.Ш. Вертикальные колебания жесткой полосы на вязкоупругой полуплоскости	152
Скрипняк В.В., Скрипняк Н.В., Загородкин О.Н., Скрипняк В.А. Вязкое разрушение магниевового сплава Mg–3Al–1Zn при динамических нагрузках	164

CONTENTS

MATHEMATICS

Germider O.V., Popov V.N. On the solution to a boundary value problem for an inhomogeneous elliptic equation by using Legendre and Chebyshev polynomials	5
Zykov A.E., Koroleva A.M., Norbosambuev T.D. Conjugate idempotent formal matrices of order 2 over residue class rings	19
Karmushi M., Kolesnikov I.A., Loboda Yu.A. The driving function of the Loewner equation generating a tangential slit emanating from the corner of a digon	28
Smolentsev N.K., Chernova K.V. On left-invariant semi-Kähler structures on six-dimensional nilpotent nonsymplectic Lie groups	38
Shoimkulov B.A., Rasulova M.K. The Weyl formula for matrix functions	52

MECHANICS

Agafontsev M.V., Starosel'tseva A.A., Reyno V.V., Loboda E.L. Effect of an electric field on methane diffusion combustion	59
Voytik V.V. Trajectory equations for a non-conservative natural system	72
Gil'manov A.Ya., Kaseinov R.Zh., Kuznetsov A.V., Shevelev A.P. A mathematical model of hydraulic fracture growth and stabilization	81
Murtazin N.E., Murtazina R.D., Mukhutdinova A.A., Nizamova A.D. Variation in the region of hydrodynamic stability depending on a thermoviscosity parameter	97
Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V., Merzlyakov A.F., Pomortseva T.N., Fagalov A.R., Kondyurin A.V., Kuznetsov K.Yu. Effect of stoichiometry violation and UV- and γ -irradiation on the viscoelastic properties of an epoxy binder	108
Poryazov V.A., Krainov A.Yu., Krainov D.A., Basalaev S.A. The methodology and numerical calculations for the non-stationary burning rate of a high-energy material according to the well-known law of pressure variation	124
Promakhov V.V., Matveev A.E., Schulz N.A., Bakhmat V.R., Turanov T.E. A study of the laser deposition, structure, and mechanical properties of composite materials based on the Inconel 625 – 5 wt. % Al–TiB ₂ powder mixture	137
Safarov I.I., Tshaev M.Kh., Negmatillaev B.N., Akhmedov M.Sh. Oscillations of a rigid strip on a viscoelastic half-plane under the vertical load	152
Skipnyak V.V., Skipnyak N.V., Zagorodkin O.N., Skipnyak V.A. Ductile fracture of Mg–3Al–1Zn alloy under dynamic loads	164

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 517.9

MSC: 35G15

doi: 10.17223/19988621/95/1

О решении краевой задачи для неоднородного уравнения эллиптического типа с использованием многочленов Лежандра и Чебышева

Оксана Владимировна Гермидер¹, Василий Николаевич Попов²

^{1,2} *Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия*

¹ *o.germider@narfu.ru*

² *v.popov@narfu.ru*

Аннотация. Выполняется построение решения неоднородного эллиптического уравнения четвертого порядка в рамках теории Кирхгофа–Лява тонких изотропных пластин с использованием полиномов Лежандра и Чебышева первого рода. Предполагается, что область интегрирования представляет собой прямоугольник. В качестве граничных условий используются такие типы граничных условий, которые соответствуют защемлению по контуру прямоугольной пластины, шарнирному опиранию и их комбинации. Функция, аппроксимирующая решение рассматриваемого уравнения, представляется в виде конечной суммы ряда этих полиномов для каждой независимой переменной. С использованием метода коллокации в сочетании с матричными преобразованиями и свойствами многочленов Лежандра и Чебышева краевая задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов при разложении искомой функции по этим полиномам. При этом в качестве точек коллокации применяются нули многочленов Лежандра и Чебышева для каждой независимой переменной. Представлены результаты расчетов с использованием предложенного метода изгиба квадратной тонкой изотропной пластины при рассматриваемых граничных условиях под действием распределенной нагрузки интенсивностью определенного вида, приводящего к аналитическому решению соответствующей краевой задачи. Как показало сравнение, построенные решения с высокой степенью точности совпадают с аналитическими решениями.

Ключевые слова: неоднородное эллиптическое уравнение высокого порядка, ортогональные многочлены, изгиб тонких изотропных пластин

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект 24-21-00381.

Для цитирования: Гермидер О.В., Попов В.Н. О решении краевой задачи для неоднородного уравнения эллиптического типа с использованием многочленов Лежандра и Чебышева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 5–18. doi: 10.17223/19988621/95/1

On the solution to a boundary value problem for an inhomogeneous elliptic equation by using Legendre and Chebyshev polynomials

Oksana V. Germider¹, Vasilii N. Popov²

^{1,2} Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russian Federation

¹ o.germider@narfu.ru

² v.popov@narfu.ru

Abstract. This paper constructs a solution to a fourth-order inhomogeneous elliptic equation within the framework of the Kirchhoff–Love theory of thin isotropic plates using the Legendre and Chebyshev polynomials of the first kind. It is assumed that the integration domain is a rectangle. The types of boundary conditions that correspond to pinching along the contour of a rectangular plate, hinged support, and their combinations are used as boundary conditions. The function that approximates the solution of the equation under consideration is represented as a finite sum of a series of these polynomials for each independent variable. Using the collocation method in combination with matrix transformations and properties of Legendre and Chebyshev polynomials, the boundary value problem is reduced to solving a system of linear algebraic equations with respect to coefficients in the expansion of the desired function in these polynomials. In this case, the zeros of the Legendre and Chebyshev polynomials for each independent variable are used as collocation points. The results of calculations using the proposed method of bending a square thin isotropic plate under the considered boundary conditions under the influence of a distributed load of a certain type of intensity leading to an analytical solution of the corresponding boundary value problem are presented. According to the comparison, the constructed solutions coincide with the analytical solutions with a high degree of accuracy.

Keywords: inhomogeneous elliptic equation of high order, orthogonal polynomials, bending of thin isotropic plates

Acknowledgments: The research was supported by the Russian Science Foundation, project 24-21-00381.

For citation: Germider, O.V., Popov, V.N. (2025) On the solution to a boundary value problem for an inhomogeneous elliptic equation by using Legendre and Chebyshev polynomials. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 5–18. doi: 10.17223/19988621/95/1

Введение

Теория краевых задач для эллиптических уравнений высокого порядка в настоящее время интенсивно развивается. Построение решения таких уравнений необходимо, в частности, для моделирования напряженно-деформированных состояний тонких изотропных пластин, которые находятся под действием заданных нагрузок. Такие пластины, обладая достаточной прочностью, используются при проектировании конструкций в авиационной и судостроительной промышленности [1]. Величины прогибов пластин определяются согласно теории Кирхгофа–Лява на ос-

новые решения бигармонического уравнения [2] с граничными условиями защемленного, шарнирно закрепленного и свободного края пластин. Бигармоническое уравнение рассматривалось в ряде работ [1–11]. Для получения решения в [3–5] использован проекционно-сеточный метод коллокации и наименьших квадратов, в [6, 7] – спектральные методы, в [8, 9] – методы конечных элементов и разностей соответственно, в [10] – метод сплайн-коллокации, в [11] решение построено в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля. Прогиб пластин при жестком защемлении всех сторон относится к сложным вычислительным задачам [1], и для его определения предлагаются новые подходы к построению решения бигармонического уравнения. В [12] произведена оценка напряженно-деформированного состояния элемента конструкции, выполненного в виде закрепленной по контуру пластины из изотропного и ортотропного материалов, при действии импульсной нагрузки с применением конечно-разностных соотношений.

Представленная работа является продолжением проводимых исследований тонких изотропных пластин в рамках теории Кирхгофа–Лява. Построение решения краевой задачи изгиба прямоугольной тонкой изотропной пластины при воздействии нормальной распределенной по ее поверхности нагрузки выполнено методом коллокации с использованием многочленов Лежандра и Чебышева первого рода. Рассмотрены такие граничные условия, как защемление по всему контуру пластины, шарнирное закрепление на краях и их комбинация. В качестве точек коллокации использованы нули многочленов Лежандра и Чебышева. Решение неоднородного эллиптического уравнения четвертого порядка представлено в виде усеченного ряда по этим многочленам для каждой независимой переменной. Коэффициенты в этом разложении искомой функции получены путем решения системы линейных алгебраических уравнений. Представлены результаты расчетов с использованием выбранных точек коллокации. Проведено сравнение полученных результатов вычислений с аналитическими решениями краевых задач и их полиномиальными интерполяциями на основе значений функций в этих точках с применением свойств многочленов Лежандра и Чебышева. Коэффициенты в этих представлениях найдены с помощью обратных матриц, которые записываются в явном виде. Показано, что построенные решения краевых задач с использованием многочленов Лежандра и Чебышева с высокой степенью точности совпадают с соответствующими аналитическими решениями.

Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу для бигармонического уравнения Софи Жермен–Лагранжа в рамках теории тонких пластин с малыми прогибами [2]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

где $w(x, y)$ – прогиб пластины, $q(x, y)$ – интенсивность внешней поперечной нагрузки, $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость пластины, h – толщина пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Рассматриваемая пластина тонкая, изотропная, прямоугольная ($0 \leq x \leq d_1$, $0 \leq y \leq d_2$, $-h/2 \leq z \leq h/2$). Прогобы пластинки, отсчитываемые от ее недеформированной срединной плоскости xu , малы в сравнении с толщиной пластинки.

В качестве граничных условий используем защемление по контуру рассматриваемой пластины [2]:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = 0, d_1, \quad (2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad y = 0, d_2, \quad (3)$$

шарнирное закрепление

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, d_1, \quad (4)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0, d_2. \quad (5)$$

и их комбинацию

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = 0, d_1, \quad (6)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0, d_2. \quad (7)$$

Предположения теории тонких пластин с малыми прогибами [2] являются удовлетворительными для расчета нагрузки на изгиб в случае, когда прогибы пластинки малы в сравнении с ее толщиной h [2] и отношение толщины к размерам плоскости пластины относительно мало ($d_i / h > 10$, $i = 1, 2$) [13]. В этом случае влиянием поперечных сдвиговых деформаций на прогибы можно пренебречь, в то время как для пластинок значительной толщины, в особенности когда последние подвергаются действию резко сосредоточенных нагрузок, это влияние становится значительным [2, 14].

Покажем принцип построения решений для краевой задачи (1)–(3) с использованием многочленов Лежандра и Чебышева.

Построение решения краевой задачи с использованием полиномов Лежандра

Полиномы Лежандра образуют на отрезке $t \in [-1; 1]$ ортогональную систему функций и определяются формулой Родрига [15]:

$$P_0(t) = 1, \quad P_j(t) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dt^j} (t^2 - 1)^j, \quad j \geq 1.$$

Рекуррентная формула для их вычисления имеет вид [15]:

$$P_1(t) = t, \quad (j+1)P_{j+1}(t) = (2j+1)tP_j(t) - jP_{j-1}(t), \quad j \geq 1.$$

Для представления функции $w(x, y)$ с $x \in [0; d_1]$ и $y \in [0; d_2]$ в виде частичной суммы ряда Фурье–Лежандра [15] введем новые переменные $x_i \in [-1; 1]$ ($i = 1, 2$):

$$x_1 = \frac{2}{d_1}x - 1, \quad x_2 = \frac{2}{d_2}y - 1.$$

Краевая задача (1)–(3) в новых переменных примет вид:

$$\kappa_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \kappa_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \kappa_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q}{D}, \quad \kappa_i = \frac{16}{d_i^4}, \quad (i = 1, 2), \quad \kappa_3 = \frac{32}{d_1^2 d_2^2}, \quad (8)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = -1, 1, \quad (9)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = -1, 1. \quad (10)$$

Представим $w(x_1, x_2)$ в виде частичной суммы ряда Фурье–Лежандра:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{\substack{k_1=0 \\ i=1,2}}^{n_i} a_{k_1 k_2} P_{k_1}(x_1) P_{k_2}(x_2) = P_1(x_1) \otimes P_2(x_2) A, \quad (11)$$

где $P_i(x_i)$ – матрица-строка размером $1 \times n'_i$ ($n'_i = n_i + 1$, $i = 1, 2$):

$$P_i(x_i) = (P_0(x_i) P_1(x_i) \dots P_{n_i-1}(x_i) P_{n_i}(x_i)),$$

A – матрица-столбец, имеющая размер $n'_1 n'_2 \times 1$, элементами которой являются коэффициенты $a_{k_1 k_2}$ в разложении (11): $A = (a_{00} a_{01} \dots a_{n_1 n_2-1} a_{n_1 n_2})^T$, знаком $\otimes$ в (11) обозначено тензорное умножение двух матриц [18].

Выберем в бигармоническом уравнении (8) в качестве точек коллокации для переменных x_1 и x_2 нули многочленов P_{n_1+1} и P_{n_2+1} соответственно. Находим их согласно [16] как собственные значения квадратных симметричных матриц L_1 и L_2 размерами $n'_1 \times n'_1$ с ненулевыми элементами $L_{i, k_i+1, k_i} = L_{i, k_i, k_i+1} = (k_i + 1) / \sqrt{4(k_i + 1)^2 - 1}$ ($k_i = \overline{0, n_i - 1}$, $i = 1, 2$) [16]. Здесь и ниже нумерацию строк и столбцов осуществляем с нуля. Выбранные точки коллокации симметричны относительно нуля. Например, в случае $n_1 = 9$ матрица L_1 имеет вид:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{15}}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{15}}{15} & 0 & \frac{3\sqrt{35}}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{35}}{35} & 0 & \frac{4\sqrt{7}}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\sqrt{7}}{21} & 0 & \frac{5\sqrt{33}}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5\sqrt{33}}{11} & 0 & \frac{6\sqrt{143}}{143} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\sqrt{143}}{143} & 0 & \frac{7\sqrt{195}}{195} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7\sqrt{195}}{195} & 0 & \frac{8\sqrt{255}}{255} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8\sqrt{255}}{255} & 0 & \frac{9\sqrt{323}}{323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9\sqrt{323}}{323} & 0 \end{pmatrix},$$

Собственные значения матрицы $\mathbf{L}_1$, вычислены точностью 10^{-4} : $x_{1,9} = -x_{1,0} = 0,9739$, $x_{1,8} = -x_{1,1} = 0,8651$, $x_{1,7} = -x_{1,2} = 0,6794$, $x_{1,6} = -x_{1,3} = 0,4334$, $x_{1,5} = -x_{1,4} = 0,1489$. При $n_1 = 10$ получаем $x_{1,10} = -x_{1,0} = 0,9782$, $x_{1,9} = -x_{1,1} = 0,8871$, $x_{1,8} = -x_{1,2} = 0,7302$, $x_{1,7} = -x_{1,3} = 0,5191$, $x_{1,6} = -x_{1,4} = 0,2695$, $x_{1,5} = 0$.

Используя равенство [16]

$$\frac{dP_{j_i}}{dx_i} = \sum_{\substack{j_i=0 \\ j_i+k_i-\text{нечет}}}^{j_i-1} (2k_i+1)P_{k_i}(x_i), \quad (12)$$

производную $\mathbf{P}_i(x_i)$ по переменной x_i запишем в виде:

$$\frac{d\mathbf{P}_i}{dx_i} = \mathbf{P}_i \mathbf{J}_i, \quad (13)$$

где $\mathbf{J}_i$ – верхнетреугольная матрица размером $n'_i \times n'_i$ с ненулевыми элементами $J_{i,k_i j_i} = 2k_i + 1$, $j_i - k_i > 0$ и $j_i + k_i$ нечетное, $j_i, k_i = \overline{0, n_i}$, $i = 1, 2$.

В случае $n_1 = 9$ матрица $\mathbf{J}_1$ имеет вид:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вторую и четвертую производные $\mathbf{P}_i(x_i)$ по каждой переменной x_i находим, соответственно, как

$$\frac{d^j \mathbf{P}_i}{dx_i^j} = \mathbf{P}_i \mathbf{J}_i^j, \quad j = 2, 4, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

Подставляя (11), (13) и (14) в уравнение (8) в точках коллокации x_{i,k_i} ($k_i = \overline{0, n_i}$, $i = 1, 2$), приходим к системе линейных $n'_1 n'_2$ уравнений, в которой согласно граничным условиям (9) и (10) осуществляем замену уравнений в точках, для которых $x_i = x_{i,0}$ или $x_i = x_{i,n_i}$, на уравнения

$$\mathbf{P}_1(-1) \otimes \mathbf{P}_2(x_{2,k_2}) \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{P}_1(1) \otimes \mathbf{P}_2(x_{2,k_2}) \mathbf{A} = 0, \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_1(x_{1,k_1}) \otimes \mathbf{P}_2(-1) \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{P}_1(x_{1,k_1}) \otimes \mathbf{P}_2(1) \mathbf{A} = 0, \quad (16)$$

а в точках $x_{i,1}$ и x_{i,n_i-1} на уравнения

$$\mathbf{P}_1(-1) \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{P}_2(x_{2,k_2}) \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{P}_1(1) \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{P}_2(x_{2,k_2}) \mathbf{A} = 0, \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_1(x_{1,k_1}) \otimes (\mathbf{P}_2(-1)\mathbf{J}_2)\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{P}_1(x_{1,k_1}) \otimes (\mathbf{P}_2(1)\mathbf{J}_2)\mathbf{A} = 0. \quad (18)$$

Полученная таким образом система линейных алгебраических уравнений в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^5 \mathbf{B}_i, \quad (19)$$

где $\mathbf{B}_i$ ($i = \overline{1, 5}$) – квадратные матрицы, имеющие размер $n'_1 n'_2 \times n'_1 n'_2$:

$$\mathbf{B}_1 = \kappa_1 \mathbf{G}_1'' \mathbf{J}_1^4 \otimes \mathbf{G}_2'', \quad \mathbf{B}_2 = \kappa_3 \mathbf{G}_1'' \mathbf{J}_1^2 \otimes (\mathbf{G}_2'' \mathbf{J}_2^2), \quad \mathbf{B}_3 = \kappa_2 \mathbf{G}_1'' \otimes (\mathbf{G}_2'' \mathbf{J}_2^4),$$

$$\mathbf{B}_4 = \mathbf{G}_3 \otimes \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_1 \otimes \mathbf{G}_4, \quad \mathbf{B}_5 = \mathbf{G}_5 \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_1 \otimes (\mathbf{G}_6 \mathbf{J}_2).$$

Здесь $\mathbf{G}_i$ ($i = 1, 2$) – квадратные матрицы размером $n'_i \times n'_i$, в которых k_i -е строки равны соответственно $\mathbf{P}_i(x_{i,k_i})$ ($k_i = \overline{0, n_i}$). Матрица $\mathbf{G}_i''$ получена из $\mathbf{G}_i$ путем замены первых и последних двух строк в $\mathbf{G}_i$ ($i = 1, 2$) на нулевые. Квадратные $n'_1 \times n'_1$ матрицы $\mathbf{G}_3$ и $\mathbf{G}_5$ содержат только две ненулевые строки с элементами:

$$G_{3,0,j_1} = P_{1,j_1}(-1) = (-1)^{j_1}, \quad G_{3,n_1,j_1} = P_{1,j_1}(1) = 1,$$

$$G_{5,1,j_1} = P_{1,j_1}(-1) = (-1)^{j_1}, \quad G_{5,n_1-1,j_1} = P_{1,j_1}(1) = 1 \quad (j_1 = \overline{0, n_1}).$$

Подобные структуры имеют и квадратные $n'_2 \times n'_2$ матрицы $\mathbf{G}_4$ и $\mathbf{G}_6$. Ненулевые элементы матрицы-столбца $\mathbf{F} = (f_{00} \ f_{01} \ \dots \ f_{n_1 n_2 - 1} \ f_{n_1 n_2})^T$ определяются как

$$f_{k_1 k_2} = q(x(x_{1,k_1}), y(x_{2,k_2})) / D,$$

где $k_i = \overline{2, n_{i-2}}$, $i = 1, 2$.

Решение уравнения (19) находим LU -методом. Восстановив элементы матрицы $\mathbf{A}$, функцию $w(x_1, x_2)$ получаем, используя (11)

Построение решения краевой задачи с использованием полиномов Чебышева

Полиномы Чебышева образуют на отрезке $t \in [-1; 1]$ ортогональную систему функций и определяются согласно [17] как

$$T_j(t) = \cos(j \arccos t), \quad j \geq 0. \quad (20)$$

Рекуррентная формула для них имеет вид [17]:

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_{j+1}(t) = 2tT_j(t) - T_{j-1}(t), \quad j \geq 0. \quad (21)$$

Представим $w(x_1, x_2)$ в виде частичной суммы ряда Фурье–Чебышева:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{\substack{k_i=0 \\ i=1,2}}^{n_i} a_{k_1 k_2} T_{k_1}(x_1) T_{k_2}(x_2) = \mathbf{T}_1(x_1) \otimes \mathbf{T}_2(x_2) \mathbf{A}, \quad (22)$$

где $\mathbf{T}_i(x_i) = (T_0(x_i) \ T_1(x_i) \ \dots \ T_{n_i-1}(x_i) \ T_{n_i}(x_i))$, ($i = 1, 2$).

В качестве точек коллокации для переменных x_1 и x_2 в этом случае выберем нули многочленов T_{n_1+1} и T_{n_2+1} соответственно:

$$x_{i,k_i}^* = \cos\left(\frac{\pi(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

Точки (23) расположены симметрично относительно нуля. При $n_1 = 9$, вычисляя по (23) с точностью 10^{-4} , имеем: $x_{1,9}^* = -x_{1,0}^* = 0,9877$, $x_{1,8}^* = -x_{1,1}^* = 0,8970$, $x_{1,7}^* = -x_{1,2}^* = 0,7070$, $x_{1,6}^* = -x_{1,3}^* = 0,4540$, $x_{1,5}^* = -x_{1,4}^* = 0,1564$. При $n_1 = 10$ получаем $x_{1,10}^* = -x_{1,0}^* = 0,9898$, $x_{1,9}^* = -x_{1,1}^* = 0,9095$, $x_{1,8}^* = -x_{1,2}^* = 0,7556$, $x_{1,7}^* = -x_{1,3}^* = 0,5405$, $x_{1,6}^* = -x_{1,4}^* = 0,2819$, $x_{1,5}^* = 0$.

Подставляя (23) в (20), имеем

$$T_{j_i}(x_{i,k_i}^*) = \cos\left(\frac{\pi j_i(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad j_i, k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

Используя равенство [16]

$$\frac{dT_{j_i}}{dx_i} = j_i \sum_{\substack{k_i=0 \\ j_i+k_i-\text{нечет}}}^{j_i-1} c_k T_{k_i}(x_i), \quad j \geq 0, \quad (25)$$

где $c_0 = 1$ и $c_{k_i} = 2$ ($k_i > 0$), производную $T_i(x_i)$ по переменной x_i запишем в виде произведения:

$$\frac{dT_i}{dx_i} = T_i J_i, \quad (26)$$

где J_i – верхнетреугольная матрица с ненулевыми элементами $J_{i,0j_i} = j_i$ (j_i нечетное, $j_i = \overline{1, n_i}$) и $J_{i,k_i j_i} = 2k_i$, ($j_i - k_i > 0$ и $j_i + k_i$ нечетное, $j_i, k_i = \overline{1, n_i}$, $i = 1, 2$).

При $n_1 = 9$ матрица J_1 в этом случае имеет вид:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 10 & 0 & 14 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 14 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для второй и четвертой производных $T_i(x_i)$ по x_i получаем

$$\frac{d^j T_i}{dx_i^j} = T_i J_i^j, \quad j = 2, 4, \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

Подставляя (22), (26) и (27) в уравнение (8) в точках коллокации (23), приходим к системе (19), в которой осуществлена замена уравнений в точках, для которых $x_i = x_{i,0}^*$, $x_{i,1}^*$ и $x_i = x_{i,n_i-1}^*$, x_{i,n_i}^* , на уравнения (9) и (10). Решение уравнения (19) находим LU -методом. Восстановив элементы матрицы A , функцию $w(x_1, x_2)$ в этом случае получаем, используя (22).

Результаты вычислений и их анализ

Рассмотрим изгиб прямоугольной изотропной пластины под действием поперечной нагрузки, все края которой защемлены:

$$q(x, y) = q_0 \left(\cos \left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1} \right) \cos \left(\frac{\pi(2y - d_2)}{d_2} \right) + \frac{d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D(d_1^2 + d_2^2)^2} \left(\frac{1}{d_1^2} \cos \left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1} \right) + \frac{1}{d_2^2} \cos \left(\frac{\pi(2y - d_2)}{d_2} \right) \right) \right),$$

где $q_0 = 0.1$ МПа.

В этом случае аналитическое решение краевой задачи (1)–(3) имеет вид:

$$w(x, y) = \frac{q_0 d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D(d_1^2 + d_2^2)^2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1} \right) \right) \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(2y - d_2)}{d_2} \right) \right). \quad (28)$$

При проведении вычислений использованы значения физических параметров из [3, 4]: $d_1 = d_2 = 10$ м, $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $n_{1,2} = n$. В табл. 1 представлены результаты вычислений с использованием полиномиальных аппроксимаций (11) и (22) при выборе в качестве точек коллокации в (8)–(10) нулей полиномов Лежандра и Чебышева (23) соответственно. Для расчета погрешностей построенных решений w_n с использованием (11) и (22) в сравнении с аналитическим решением (28), следуя [3, 4], применено 100 равномерно распределенных контрольных точек (x_i, y_j) :

$$\|E_n\|_\infty = \frac{\max_{i,j} |w(x_i, y_j) - w_n(x_i, y_j)|}{\max_{i,j} |w(x_i, y_j)|}. \quad (29)$$

В табл. 1 приведены значения величин погрешностей вычислений между последовательными итерациями $n - 1$ и n :

$$\|E_n\| = \frac{\max_{i,j} |w_n(x_i, y_j) - w_{n-1}(x_i, y_j)|}{\max_{i,j} |w_n(x_i, y_j)|}. \quad (30)$$

В табл. 1 приведены результаты вычислений с использованием полиномиальных интерполяций (11) и (22) функции (28) на основе ее значений в точках, которые соответствуют нулям полиномов Лежандра и Чебышева. Погрешности полученных функций обозначены $\|E_{p,n}\|_\infty$. Коэффициенты в этих представлениях найдены с помощью обратных матриц $\mathbf{G}_1^{-1}$ и $\mathbf{G}_2^{-1}$. В случае полиномиальной интерполяции Лежандра (11) получаем

$$\mathbf{G}_1 \otimes \mathbf{G}_1 \mathbf{A} = \mathbf{W}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{G}_1^{-1} \otimes \mathbf{G}_2^{-1} \mathbf{W}, \quad (31)$$

где $\mathbf{W} = (w(x_{1,0}, y_{2,0}), w(x_{1,0}, y_{2,1}), \dots, w(x_{1,n_1}, y_{2,n_2}))^T$.

Используя свойство конечных сумм для многочленов Лежандра [16, 19]

$$\sum_{k=0}^{n_1} P_{j_1}(x_{1,k}) P_{j_2}(x_{1,k}) g_P(x_{1,k}) = \gamma_{P,j_1} \delta_{j_1,j_2}, \quad \gamma_{P,j_1} = \frac{2}{2j_1 + 1},$$

где δ_{j_1,j_2} – символ Кронекера,

$$g_p(x_{1,k}) = \frac{2}{(1-x_{1,k}^2)(P'_{n+1}(x_{1,k}))^2} = \frac{2(1-x_{1,k}^2)}{(n_1+2)^2 P_{n+2}^2(x_{1,k})},$$

находим обратные матрицы $\mathbf{G}_1^{-1}$ и $\mathbf{G}_2^{-1}$: $(\mathbf{G}_i^{-1})_{j_i k_i} = G_{i,j_i k_i} w_p(x_{1,k}) / \gamma_{P,j_i}$ ($j_i, k_i = \overline{1, n_i}$, $i = 1, 2$).

В случае полиномиальной интерполяции Чебышева (22) в точках (23) с помощью равенства [16, 17]

$$\sum_{k=0}^{n_i} T_{j_1}(x_{1,k}^*) T_{j_2}(x_{1,k}^*) g_T(x_{1,k}^*) = \gamma_{T,j_1} \delta_{j_1, j_2},$$

$$\gamma_{T,0} = \pi, \quad \gamma_{T,j} = \frac{\pi}{2}, \quad j > 0, \quad g_T(x_{1,k}^*) = \frac{\pi}{n_1 + 1},$$

получаем обратную матрицу $\mathbf{G}_i^{-1}$ путем транспонирования $\mathbf{G}_i$, умножения $\mathbf{G}_i^T$ на $2/(n_i + 1)$ ($i = 1, 2$) и деления элементов первой строки этой матрицы на 2.

Во втором и пятом столбцах табл. 1 приведены погрешности вычислений $\|E_n\|_\infty$ по формуле (29) с использованием полиномиальных аппроксимаций Лежандра (11) и Чебышева (22) решения краевой задачи (8)–(10) в сравнении с аналитическим решением (28) этой задачи, в третьем и шестом столбцах табл. 1 представлены погрешности вычислений $\|E_n\|$ по формуле (30) между последовательными итерациями $n - 1$ и n при построении решения, в четвертом и седьмом столбцах указаны погрешности вычислений $\|E_{p,n}\|_\infty$ с использованием полиномиальных интерполяций функции (28) с использованием обратных матриц.

Таблица 1

Значения погрешностей для защемленной по контуру пластины

n	(11)			(22), (23)		
	$\ E_n\ _\infty$	$\ E_n\ $	$\ E_{p,n}\ _\infty$	$\ E_n\ _\infty$	$\ E_n\ $	$\ E_{p,n}\ _\infty$
9	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$
11	$9.3 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$5.9 \cdot 10^{-5}$	$7.0 \cdot 10^{-5}$	$8.0 \cdot 10^{-7}$
18	$5.9 \cdot 10^{-12}$	$3.8 \cdot 10^{-10}$	$2.4 \cdot 10^{-14}$	$3.5 \cdot 10^{-12}$	$1.9 \cdot 10^{-10}$	$9.4 \cdot 10^{-15}$

Рассмотрим изгиб срединной плоскости прямоугольной изотропной пластины, все края которой шарнирно закреплены ((4) и (5)) и которая находится под действием поперечной нагрузки

$$q(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d_1}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{d_2}\right).$$

В этом случае аналитическое решение краевой задачи (1), (4), (5) имеет вид [2]:

$$w(x, y) = \frac{q(x, y) d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + d_2^2)^2}. \quad (32)$$

В табл. 2 представлены результаты вычислений в сравнении с [3]. Приведем сравнение с результатами, полученные в [4, 5]. В работе [4] значение относительной погрешности вычислений интегральным методом коллокации и наименьших

квадратов $\|E_n\|_\infty = 7.58 \cdot 10^{-13}$ достигнуто с использованием сетки 16×16 и локальной системы линейных уравнений с $l = (K+1)(K+2)/2$ неизвестными при $K = 10$. Для достижения относительной погрешности решения методом коллокации и наименьших квадратов в пространстве полиномов Чебышева значения $\|E_n\|_\infty = 1.11 \cdot 10^{-7}$ в [5] применена сетка 16×16 , в каждой ячейке которой записана локальная система линейных алгебраических уравнений с $l = (K+1)(K+2)/2$ неизвестными, где $K = 7$ – степень старшего полинома Чебышева.

Из представленных результатов следует, что для построения решения предлагаемым в настоящей работе методом необходимо значительно меньше точек дискретного спектра по сравнению с [3–5], и ранг матрицы системы линейных алгебраических уравнений (19), к решению которой сведена краевая задача (1), (4) и (5), равен $(n+1)^2$.

Таблица 2

Значения погрешностей для шарнирного закрепления

n	(11)			(22), (23)			[3]
	$\ E_n\ _\infty$	$\ E_n\ $	$\ E_{p,n}\ _\infty$	$\ E_n\ _\infty$	$\ E_n\ $	$\ E_{p,n}\ _\infty$	
9	$8.0 \cdot 10^{-5}$	$5.8 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$6.2 \cdot 10^{-5}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$9.4 \cdot 10^{-8}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
11	$9.2 \cdot 10^{-7}$	$7.2 \cdot 10^{-7}$	$6.7 \cdot 10^{-10}$	$6.6 \cdot 10^{-7}$	$5.8 \cdot 10^{-7}$	$4.4 \cdot 10^{-10}$	–
18	$5.8 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	$2.3 \cdot 10^{-16}$	$1.3 \cdot 10^{-14}$	$7.8 \cdot 10^{-14}$	$1.1 \cdot 10^{-14}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$

Рассмотрим случай, когда на двух краях $x = 0$ и $x = d_1$ пластина закреплена (6), на других краях шарнирно опирается (7). На прямоугольную пластину действует распределенная нагрузка

$$q(x, y) = q_0 \left(\frac{d_1^4}{(d_1^2 + 4d_2^2)^2} - \cos \left(\frac{2\pi x}{d_1} \right) \right) \sin \left(\frac{\pi y}{d_2} \right).$$

Аналитическое решение задачи (1), (6) и (7) имеет вид:

$$w(x, y) = \frac{q_0 d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + 4d_2^2)^2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1} \right) \right) \sin \left(\frac{\pi y}{d_2} \right).$$

Таблица 3

Значения погрешности для граничного условия (6) и (7)

n	(11)			(22), (23)		
	$\ E_n\ _\infty$	$\ E_n\ $	$\ E_{p,n}\ _\infty$	$\ E_n\ _\infty$	$\ E_n\ $	$\ E_{p,n}\ _\infty$
9	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$
11	$8.0 \cdot 10^{-5}$	$8.7 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$5.0 \cdot 10^{-5}$	$6.1 \cdot 10^{-5}$	$4.0 \cdot 10^{-7}$
18	$6.9 \cdot 10^{-12}$	$3.2 \cdot 10^{-10}$	$2.4 \cdot 10^{-14}$	$3.0 \cdot 10^{-12}$	$1.7 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-14}$

Из табл. 1–3 видно, что решения краевых задач, полученные представленным методом с использованием нулей многочленов Лежандра и Чебышева первого рода, с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями при сравнительно небольших значениях n . Значения относительных погрешностей этих решений

приближаются к соответствующим значениям погрешностей полиномиальных интерполяций функций решений, что говорит об хороших аппроксимационных свойствах метода.

Заключение

В работе с использованием многочленов Лежандра и Чебышева построено решение краевой задачи для неоднородного эллиптического уравнения четвертого порядка в рамках теории Кирхгофа–Лява. Показано, что полученные результаты с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями краевых задач при сравнительно небольших значениях степеней этих многочленов в разложении искомой функции, определяющей решение эллиптического уравнения. За счет выбора точек коллокации и построения матрицы системы линейных алгебраических уравнений, к решению которой сведена краевая задача, наблюдается меньшая чувствительность к ошибкам округления и обеспечивается выполнение граничных условий. Выбор в качестве базиса полиномов Чебышева, обладающих дискретной ортогональностью, дает возможность записать в простом явном виде их произведения, производные, привести матрицу системы к разреженной при поиске искомых коэффициентов в разложении, обеспечивает асимптотику погрешности наилучших полиномиальных приближений.

Список источников

1. Алцыбеев Г.О., Голоскоков Д.П., Матросов А.В. Метод суперпозиции в задаче изгиба защемленной по контуру тонкой изотропной пластинки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18, № 3. С. 347–364. doi: 10.21638/11701/spbu10.2022.305
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966.
3. Голушко С.К., Идимешев С.В., Шанеев В.П. Метод коллокации и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 6. С. 31–43.
4. Шанеев В.П., Брындин Л.С., Беляев В.А. hp-Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения бигармонического уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2022. Т. 26, № 3. С. 556–572. doi: 10.14498/vsgtu1936
5. Беляев В.А., Брындин Л.С., Голушко С.К., Семисалов Б.В., Шанеев В.П. H-, P- и HP-варианты метода коллокации и наименьших квадратов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях и их приложения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 4. С. 531–552. doi: 10.31857/S0044466922040020
6. Mai-Duy N., Struin D., Karunasena W. A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation // Engineering analysis with boundary elements. 2022. V. 143. P. 687–699. doi: 10.1016/j.enganabound.2022.07.014
7. Shao W., Wu X. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations // Applied Mathematical Modelling. 2015. V. 39 (9). P. 2554–2569. doi: 10.1016/j.apm.2014.10.048
8. Ye X., Zhang Sh. A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation // Results in Applied Mathematics. 2022. V. 15. Art. 100318. doi: 10.1016/j.rinam.2022.100318
9. Моханти Р.К., Каур Д. Компактная разностная схема высокой точности для одномерной нестационарной квазилинейной бигармонической задачи второго рода: приложение

- к физическим задачам // Сибирский журнал вычислительной математики. 2018. Т. 21, № 1. С. 65–82. doi: 10.15372/SJNM20180105
10. Lytvyn O.M., Lytvyn O.O., Tomanova I.S. Solving the biharmonic plate bending problem by the Ritz method using explicit formulas for splines of degree 5 // *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. V. 54. P. 944–947. doi: 10.1007/s10559-018-0097-x
 11. Зверев Е.М., Коваленко М.Д., Аbruков Д.А., Меньшова И.В., Кержаев А.П. О разложениях по функциям Папковича–Фадля в задаче изгиба пластины. М., 2019. doi: 10.20948/prerpr-2019-38 (Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН; № 38).
 12. Щербakov И.В., Люкин Б.А. Моделирование поведения отклика ортотропной пластины при воздействии динамической нагрузки // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. Т. 61. С. 111–118. doi: 10.17223/19988621/61/10
 13. Ventsel E., Krauthammer Th. *Thin plates and shells. Theory: analysis and applications*. Boca Raton: CRC Press, 2001.
 14. Shanmugam N.E., Wang C.M. *Analysis and design of plated structures*. 2nd ed. Woodhead Publishing, 2022. doi: 10.1016/C2020-0-00441-X
 15. Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены*. М.: Наука, 1976.
 16. Shen J., Tang T., Wang L. *Spectral methods*. Heidelberg; Berlin: Springer, 2011.
 17. Mason J., Handscomb D. *Chebyshev polynomials*. Florida: CRC Press, 2003.
 18. Liu S., Trenkler G. Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products // *International Journal of Information and Systems Sciences*. 2008. V. 4 (1). P. 160–177.
 19. Hildebrand F.B. *Introduction to numerical analysis*. 2nd ed. New York: Dover Publications, 1987.

References

1. Altsybeev G.O., Goloskokov D.P., Matrosov A.V. (2022) Metod superpozitsii v zadache izgiba zashchemlennoy po konturu tonkoy izotropnoy plastinki [The superposition method in the problem of bending a thin isotropic plate clamped along the contour] *Vestnik Sankt-Petersburgskogo universiteta Seriya 10 Prikladnaya matematika Informatika Processy upravleniya – Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 93(3). pp. 347–364. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2022.305.
2. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. (1959) *Theory of Plates and Shells*. New York: McGraw-Hill Book Company.
3. Golushko S.K., Idimeshev S.V., Shapeev V.P. (2013) Metod kollokatsiy i naimen'shikh nevyazok v prilozhenii k zadacham mekhaniki izotropnykh plastin [Application of collocations and least residuals method to problems of the isotropic plates theory] *Vychislitel'nyye Tekhnologii – Computational Technologies*. 18(6). pp. 31–43.
4. Shapeyev V.P., Bryndin L.S., Belyayev V.A. (2022) hp-variant metoda kollokatsii i naimen'shikh kvadratov s integral'nymi kollokatsiyami resheniya bigarmonicheskogo uravneniya [The hp-version of the least-squares collocation method with integral collocation for solving a biharmonic equation]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskiye nauki – Journal of Samara State Technical University, Seriya Physical and Mathematical Sciences*. 26(3). pp. 556–572. DOI: 10.14498/vsgtu1936.
5. Belyaev V.A., Bryndin L.S., Golushko S.K., Semisalov B.V., Shapeev V.P. (2022) h-, p-, and hp-Versions of the Least-Squares Collocation Method for Solving Boundary Value Problems for Biharmonic Equation in Irregular Domains and Their Applications. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 62. pp. 517–537. DOI: 10.1134/S0965542522040029.
6. Mai-Duy N., Strunin D., Karunasena W. (2022) A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 143. pp. 687–699. DOI: 10.1016/j.enganabound.2022.07.014.

7. Shao W., Wu X. (2015) An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations. *Applied Mathematical Modelling*. 39(9). pp. 2554–2569. DOI: 10.1016/j.apm.2014.10.048.
8. Ye X., Zhang Sh. (2022) A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation. *Results in Applied Mathematics*. 15(100318). DOI: 10.1016/j.rinam.2022.100318.
9. Mohanty R.K., Kaur D. (2018) Compact difference scheme with high accuracy for one-dimensional unsteady quasi-linear biharmonic problem of second kind: application to physical problems. *Numerical Analysis and Applications*. 11. pp. 45–59. DOI: 10.1134/S1995423918010068.
10. Lytvyn O.M., Lytvyn O.O., Tomanova I.S. (2018) Solving the biharmonic plate bending problem by the Ritz method using explicit formulas for splines of degree 5. *Cybernetics and Systems Analysis*. 54. pp. 944-947. DOI: 10.1007/s10559-018-0097-x.
11. Zveryaev E.M., Kovalenko M.D., Abrukov D.A., Menshova I.V., Kerzhaev A.P. (2019) O razlozheniyakh po funktsiyam Papkovicha – Fadlya v zadache izgiba plastiny [On expansions in Papkovich–Fadl functions in the problem of plate bending]. *Preprinty Instituta prikladnoy matematiki imeni M.V. Keldysha RAN – Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics*. DOI: 10.20948/prepr-2019-38.
12. Scherbakov I.V. Lyukshin B.A. (2019) Modelirovaniye povedeniya otklika ortotropnoy plastiny pri vozdeystvii dinamicheskoy nagruzki [Simulation of the orthotropic plate response behavior during dynamic load]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 61 pp. 111-118. DOI: 10.17223/19988621/61/10.
13. Ventsel E., Krauthammer Th. (2001) *Thin Plates and Shells. Theory: Analysis and Applications*. Boca Raton: CRC Press.
14. Shanmugam N.E., Wang C.M. (2022) *Analysis and Design of Plated Structures (Second Edition)*. Woodhead Publishing. DOI: 10.1016/C2020-0-00441-X
15. Suetin P.K. (1976). *Klassicheskiye ortogonal'nyye mnogochleny [Classical orthogonal polynomials]*. Moscow: Nauka.
16. Shen J., Tang T., Wang L. (2011) *Spectral Methods*. Heidelberg: Springer Berlin.
17. Mason J., Handscomb D. (2003) *Chebyshev Polynomials*. Boca Raton: CRC Press.
18. Liu S., Trenkler G. (2008) Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products. *International Journal of Information and Systems Sciences*. 4(1). pp. 160–177.
19. Hildebrand F.B. (1987) *Introduction to Numerical Analysis (Second Edition)*. New York: Dover Publications.

Сведения об авторах:

Гермидер Оксана Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия). E-mail: o.germider@narfu.ru

Попов Василий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей и прикладной математики Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия). E-mail: v.popov@narfu.ru

Information about the authors:

Germider Oksana V. (Candidate of Physics and Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russian Federation). E-mail: o.germider@narfu.ru

Popov Vasilii N. (Doctor of Physics and Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russian Federation). E-mail: v.popov@narfu.ru

The article was submitted 09.06.2024; accepted for publication 09.06.2025

Статья поступила в редакцию 09.06.2024; принята к публикации 09.06.2025

Научная статья

УДК 512.552

doi: 10.17223/19988621/95/2

MSC: 16S50

Сопряженные идемпотентные формальные матрицы второго порядка над кольцами вычетов

Артем Евгеньевич Зыков¹, Анастасия Максимовна Королева²,
Цырендоржи Дашацыренович Норбосамбуев³

^{1,2,3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ tigerlroe92@gmail.com

² elfimova.nastya@bk.ru

³ nstsddts@yandex.ru

Аннотация. Показано, что всякая нетривиальная идемпотентная матрица в кольце формальных матриц второго порядка над кольцами вычетов по модулям степеней простого числа является сопряженной с одной из матричных единиц E_{11} и E_{22} . Из этого следует, что нетривиальные идемпотентные формальные матрицы разных типов никогда не могут быть сопряженными, а одного типа – будут сопряженными всегда.

Ключевые слова: кольцо формальных матриц, идемпотентная формальная матрица, сопряженные идемпотенты

Благодарности: Работа выполнена в рамках проекта «Аддитивные задачи в кольцах формальных матриц над кольцами вычетов» во время Большой математической мастерской в Томском государственном университете при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2025-1728/2).

Для цитирования: Зыков А.Е., Королева А.М., Норбосамбуев Ц.Д. Сопряженные идемпотентные формальные матрицы второго порядка над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 19–27. doi: 10.17223/19988621/95/2

Original article

Conjugate idempotent formal matrices of order 2 over residue class rings

Artem E. Zykov¹, Anastasia M. Koroleva²,
Tsyrendorzhi D. Norbosambuev³

^{1,2,3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ tigerlroe92@gmail.com

² elfimova.nastya@bk.ru

³ nstsddts@yandex.ru

Abstract. Let p be a prime, $p > 1$, m and n be integers, $m > n > 0$. In recent works [1–5] the following formal matrix rings were considered:

$$K = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{array} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\}$$

with multiplication defined so that for every $A, A' \in K$ we have

$$\begin{aligned} A \cdot A' &= \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbf{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

It is known [2–5] that the matrix $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in K$ is nilpotent (invertible) if

and only if p divides (does not divide) a and d .

In [1] it was shown that A is a nontrivial idempotent in K if and only if A has the form

$$\begin{pmatrix} 1 - \sigma + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & \sigma + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} \sigma + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & 1 - \sigma + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

where $b, c \in \mathbf{Z}$, $\sigma = \sum_{k=1}^{v+1} C_k (p^{m-n}bc)^k$, $v = \left\lfloor \frac{n-1}{m-n} \right\rfloor$ and C_i are Catalan numbers. For

every $i > 0$ we define the i th Catalan number by $C_i = \frac{1}{i} \binom{2i-2}{i-1} = \frac{(2i-2)!}{i!(i-1)!}$, so $C_1 = 1$,

$C_2 = 1$, $C_3 = 2$, $C_4 = 5$, $C_5 = 14$, etc.

Let us call a non-trivial idempotent matrix with an invertible element in the upper left corner an *idempotent matrix of type 1*. An *idempotent matrix of type 2* is a non-trivial idempotent matrix with an invertible element in the lower right corner.

Definition 2.1. Idempotent elements e_1 and e_2 of ring R are *conjugate* if there is an invertible element $u \in R$ such that $e_2 = ue_1u^{-1}$.

We have obtained the following results.

Theorem 2.3. In the formal matrix ring K every idempotent matrix of type 1 is conjugate

to the matrix $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 + p^m\mathbf{Z} & 0 + p^n\mathbf{Z} \\ 0 + p^n\mathbf{Z} & 0 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$. Likewise, every idempotent matrix of type 2 is

conjugate to the matrix $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 + p^m\mathbf{Z} & 0 + p^n\mathbf{Z} \\ 0 + p^n\mathbf{Z} & 1 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$.

Corollary 2.4. In the formal matrix ring K two idempotent matrices of different types are never conjugate.

Corollary 2.6. In the formal matrix ring K any two idempotent matrices of the same type are conjugate.

Keywords: formal matrix ring, idempotent formal matrix, conjugate idempotents

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia, agreement No. 075-02-2025-1728/2.

For citation: Zykov A.E., Koroleva A.M., Norbosambuev T.D. (2025) Conjugate idempotent formal matrices of order 2 over residue class rings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 19–27. doi: 10.17223/19988621/95/2

1. Введение

Через $U(R)$ будем обозначать группу обратимых элементов кольца R , через $\mathbf{Z}$ – кольцо (и группу) целых чисел, через $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ – кольцо (и группу) вычетов по модулю p^n , символ ■ означает окончание доказательства или его отсутствие.

В недавних работах [1–5] рассматривались кольца формальных матриц второго порядка над кольцами вычетов

$$K = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{array} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\},$$

где p – простое число, m и n – натуральные числа, $m > n > 0$. Умножение в кольце K устроено следующим образом: для любых $A, A' \in K$

$$\begin{aligned} AA' &= \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbf{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

сложение – поэлементное. Единичным элементом в K служит матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 + p^m\mathbf{Z} & 0 + p^n\mathbf{Z} \\ 0 + p^n\mathbf{Z} & 1 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \text{ Больше о произвольных формальных матрицах см.: [5–8].}$$

Следующие две теоремы дают полное описание обратимых и нильпотентных формальных матриц в K .

Теорема 1.1 [4–6]. Матрица $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in K$ обратима тогда и только тогда, когда числа a и d не кратны p . ■

Теорема 1.2 [2]. Матрица $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in K$ нильпотентна тогда и только тогда, когда числа a и d кратны p . ■

Следствие 1.3 [2]. Нильпотентные формальные матрицы образуют идеал в K . ■

Напомним, что элемент кольца называется k -ниль-чистым, если он может быть записан в виде суммы одного нильпотентного и k идемпотентных элементов кольца, где k – натуральное число. Кольцо называется k -ниль-чистым, если все его элементы k -ниль-чистые.

Предложение 1.4 [2]. Кольцо K является $(p-1)$ -ниль-чистым кольцом. ■

Числами Каталана мы называем последовательность чисел: $C_1 = 1$, $C_{k+1} = \sum_{i=1}^k C_i C_{k-i+1}$, где k – натуральное, $k > 0$. Таким образом, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 2$, $C_4 = 5$, $C_5 = 14$, $C_6 = 42$, $C_7 = 132$ и т.д. Заметим, что числа Каталана часто нумеруют начиная с 0, т.е. $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$ и т.д. Также числа Каталана можно выразить через биномиальные коэффициенты, для всякого целого $k > 0$ верно

$$C_k = \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} = \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}.$$

Эти числа названы в честь бельгийского математика Эжена Шарля Каталана (1814–1894), хотя были известны и ранее. Эйлер определял данную последовательность как число способов триангуляции выпуклого $(n + 1)$ -угольника проведением непесекающихся диагоналей. К удивлению, впервые «числа Каталана» появляются в 1730-х гг. в работах монгольского астронома и математика Мингату (ок. 1692–1763), служившего при дворе императоров династии Цин [9–12]. Один из его результатов:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{4^{n-1}} \sin^{2n+1} \alpha ,$$

где C_n – числа Каталана. Долгое время о работах Мингату (иногда на китайский манер пишут Мин Аньту) не было известно. Его книга «Быстрые методы для точных значений сегментов круга» была впервые опубликована лишь в 1839 г., а связь с числами Каталана заметил китайский математик Ло Цзяньцзинь только в 1988 г. Для более подробного ознакомления с историей открытий чисел Каталана отсылаем к работам [9–12].

В следующей теореме числа Каталана возникают в связи с идемпотентностью в кольце формальных матриц K .

Теорема 1.5 [1]. Матрица A – нетривиальный идемпотент в K тогда и только тогда, когда она имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 - \sigma_{v+1} + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & \sigma_v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \sigma_{v+1} + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & 1 - \sigma_v + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где $b, c \in \mathbf{Z}$, $v = \left\lfloor \frac{n-1}{m-n} \right\rfloor$, $\sigma_v = \sum_{k=1}^v C_k (p^{m-n} bc)^k$, C_i – числа Каталана. ■

Замечание 1.6. Индекс v в формулировке предыдущей теоремы может оказаться равным нулю, если $m \geq 2n$, тогда полагаем $\sigma_v = 0$. В таком случае общий вид нетривиальной идемпотентной матрицы A несколько упрощается:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - p^{m-n} bc + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} p^{m-n} bc + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & 1 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где $b, c \in \mathbf{Z}$.

Определение 1.7. Нетривиальную идемпотентную матрицу с обратимым элементом в верхнем левом углу будем называть идемпотентной матрицей первого типа, а идемпотентной матрицей второго типа будем называть нетривиальную идемпотентную матрицу с обратимым элементом в нижнем правом углу.

Замечание 1.8. Для любых целых b и c верно $\sigma_{v+1} \equiv \sigma_v \pmod{p^n}$. Обозначим $\sigma_{v+1} = \sigma$. Тогда нетривиальные идемпотентные матрицы в K можно записывать как

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \sigma + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & \sigma + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} \sigma + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & 1 - \sigma + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Предложение 1.9 [1]. Если $k < p - 1$, то кольцо K не будет k -ниль-чистым. ■

Формальные матрицы интересны и сами по себе, и как возможная алгебраическая платформа для создания некоммукативного протокола шифрования данных; см. литературу, упоминаемую в [3].

2. Основные результаты

Определение 2.1. Говорим, что идемпотенты e_1 и e_2 кольца R сопряженные, если существует элемент $u \in U(R)$ такой, что $e_2 = ue_1u^{-1}$.

Как и в случае колец обычных матриц, матричными единицами E_{11} и E_{22} в K называем формальные матрицы

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 1 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Предложение 2.2. Не существует обратной матрицы $U \in U(K)$ такой, что $UE_{11}U^{-1} = E_{22}$.

Доказательство. Это действительно так, поскольку матрица E_{11} как элемент аддитивной группы $(K, +)$ имеет порядок p^m , а E_{22} – порядок p^n . ■

Возникает вопрос: будут ли сопряженными две произвольные идемпотентные матрицы одного и того же типа? Положительный ответ на него был получен авторами во время работы «Большой математической мастерской 2024» в Томском государственном университете.

Теорема 2.3. Всякая идемпотентная формальная матрица первого типа является сопряженной с матричной единицей E_{11} , а всякая идемпотентная формальная матрица второго типа – с матричной единицей E_{22} .

Доказательство. Произвольная идемпотентная формальная матрица первого типа из кольца K имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 1 - \sigma + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & \sigma + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$, где $b, c \in \mathbf{Z}$. Для нее выполнено равенство $(1 - \sigma)^2 + p^{m-n}bc + p^m \mathbf{Z} = 1 - \sigma + p^m \mathbf{Z}$, из которого можем вывести

$$(1 - \sigma)\sigma + p^m \mathbf{Z} = p^{m-n}bc + p^m \mathbf{Z}. \quad (1)$$

Заметим, что $(1 - \sigma + p^n \mathbf{Z})^{-1} = 1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^v + p^n \mathbf{Z}$. Обозначим $S = 1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^v$. Рассмотрим матрицы

$$U = \begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbf{Z} & bS + p^n \mathbf{Z} \\ -c + p^n \mathbf{Z} & 1 - \sigma + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ и } \hat{U} = \begin{pmatrix} 1 - \sigma + p^m \mathbf{Z} & -bS + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & 1 + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $U\hat{U} = E$. В самом деле,

$$\begin{aligned} U\hat{U} &= \begin{pmatrix} 1 - \sigma + p^{m-n}bcS + p^m \mathbf{Z} & -bS + bS + p^n \mathbf{Z} \\ -c(1 - \sigma) + (1 - \sigma)c + p^n \mathbf{Z} & 1 - \sigma + p^{m-n}bcS + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \sigma + p^{m-n}bcS + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 1 - \sigma + p^{m-n}bcS + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Докажем равенство $\sigma - p^{m-n}bcS + p^m \mathbf{Z} = 0 + p^m \mathbf{Z}$. Используя (1), получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \sigma - p^{m-n}bcS + p^m \mathbf{Z} &= \sigma - \sigma(1 - \sigma)(1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^v) + p^m \mathbf{Z} = \\ &= \sigma(1 - (1 - \sigma)(1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^v)) + p^m \mathbf{Z} = \\ &= \sigma(1 - 1 - \sigma - \sigma^2 - \dots - \sigma^v + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^v + \sigma^{v+1}) + p^m \mathbf{Z} = \\ &= \sigma \cdot \sigma^{v+1} + p^m \mathbf{Z} = \sigma^{v+2} + p^m \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

В выражении $\sigma^{v+2} = \left(\sum_{k=1}^{v+1} C_k (p^{m-n}bc)^k \right)^{v+2}$ после раскрытия скобок все слагаемые

содержат p хотя бы в степени $(m-n)(v+2)$, а это число не меньше m . Значит, $\sigma^{v+2} + p^m\mathbf{Z} = 0 + p^m\mathbf{Z}$, что и требовалось. Из доказанного равенства также следует, что $\sigma - p^{m-n}bcS + p^n\mathbf{Z} = 0 + p^n\mathbf{Z}$. Итак, действительно

$$U\hat{U} = \begin{pmatrix} 1+p^m\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z} \\ 0+p^n\mathbf{Z} & 1+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = E.$$

Заметим, что в конечном кольце односторонний обратный элемент является также двусторонним обратным, поэтому $U^{-1} = \hat{U}$. Далее рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} UA &= \begin{pmatrix} 1+p^m\mathbf{Z} & bS+p^n\mathbf{Z} \\ -c+p^n\mathbf{Z} & 1-\sigma+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-\sigma+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & \sigma+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-\sigma+p^{m-n}bcS+p^m\mathbf{Z} & b+bS\sigma+p^n\mathbf{Z} \\ -c(1-\sigma)+(1-\sigma)c+p^n\mathbf{Z} & (1-\sigma)\sigma-p^{m-n}bc+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+p^m\mathbf{Z} & b+bS\sigma+p^n\mathbf{Z} \\ 0+p^n\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Умножим теперь получившуюся матрицу на U^{-1} справа:

$$\begin{aligned} UAU^{-1} &= \begin{pmatrix} 1+p^m\mathbf{Z} & b+bS\sigma+p^n\mathbf{Z} \\ 0+p^n\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-\sigma+p^m\mathbf{Z} & -bS+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & 1+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-\sigma+p^{m-n}bc(1+S\sigma)+p^m\mathbf{Z} & b(1+S\sigma-S)+p^n\mathbf{Z} \\ 0+p^n\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В силу равенства (1) верна цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \sigma - p^{m-n}bc(1+S\sigma) + p^m\mathbf{Z} &= \sigma - (\sigma - \sigma^2)(1+S\sigma) + p^m\mathbf{Z} = \\ &= \sigma - (\sigma - \sigma^2 + S\sigma^2 - S\sigma^3) + p^m\mathbf{Z} = \sigma^2(S\sigma - S + 1) + p^m\mathbf{Z} = \\ &= \sigma^2(\sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^v + \sigma^{v+1} - 1 - \sigma - \sigma^2 - \dots - \sigma^v + 1) + p^m\mathbf{Z} = \\ &= \sigma^2\sigma^{v+1} + p^m\mathbf{Z} = \sigma^{v+3} + p^m\mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Мы уже доказали, что $\sigma^{v+2} + p^m\mathbf{Z} = 0 + p^m\mathbf{Z}$, следовательно, $\sigma^{v+3} + p^m\mathbf{Z} = 0 + p^m\mathbf{Z}$.

Наконец, $b(1+S\sigma-S) + p^n\mathbf{Z} = bS(1-\sigma+\sigma-1) + p^n\mathbf{Z} = 0 + p^n\mathbf{Z}$. Таким образом, мы показали, что

$$UAU^{-1} = \begin{pmatrix} 1+p^m\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z} \\ 0+p^n\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = E_{11}.$$

Далее, пусть B – идемпотентная матрица второго типа, тогда $E-B$ есть идемпотентная матрица первого типа. Нами доказано, что найдется обратимая матрица U такая, что $U(E-B)U^{-1} = E_{11}$. Отсюда следует, что $UBU^{-1} = E_{22}$. ■

Следствие 2.4. Идемпотентные матрицы разных типов не могут быть сопряженными. ■

Замечание 2.5. Обратимые матрицы U и U^{-1} , полученные в предыдущей теореме, не единственные с тем свойством, что UBU^{-1} – матричная единица.

Пусть, например, $p = 3$, $m = 2$, $n = 1$ и $B = \begin{pmatrix} 3+9Z & 1+3Z \\ 1+3Z & 1+3Z \end{pmatrix}$ – идемпотентная матрица второго типа, тогда, согласно теореме 2.3,

$$UBU^{-1} = \begin{pmatrix} 1+9Z & 2+3Z \\ 1+3Z & 1+3Z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3+9Z & 1+3Z \\ 1+3Z & 1+3Z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7+9Z & 1+3Z \\ 2+3Z & 1+3Z \end{pmatrix} = E_{22}.$$

Однако, кроме того, на роль матрицы U подойдут еще следующие обратимые матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1+9Z & 2+3Z \\ 2+3Z & 2+3Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+9Z & 1+3Z \\ 1+3Z & 1+3Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+9Z & 1+3Z \\ 2+3Z & 2+3Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4+9Z & 2+3Z \\ 1+3Z & 1+3Z \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 4+9Z & 2+3Z \\ 2+3Z & 2+3Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5+9Z & 1+3Z \\ 1+3Z & 1+3Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5+9Z & 1+3Z \\ 2+3Z & 2+3Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7+9Z & 2+3Z \\ 1+3Z & 1+3Z \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 7+9Z & 2+3Z \\ 2+3Z & 2+3Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8+9Z & 1+3Z \\ 1+3Z & 1+3Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8+9Z & 1+3Z \\ 2+3Z & 2+3Z \end{pmatrix}.$$

Следствие 2.6. Для любых идемпотентных матриц одного типа $I, J \in K$ найдется матрица $W \in U(K)$ такая, что $I = WJW^{-1}$. ■

Следствие 2.7. Относительно сопряженности множество идемпотентов кольца распадается на классы: $\bar{E}_{11}$ – идемпотентные матрицы первого типа, $\bar{E}_{22}$ – идемпотентные матрицы второго типа, особняком стоят тривиальные идемпотенты E и 0 . ■

Список источников

1. Королева А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М.В. Идемпотентные и ниль-чистые формальные матрицы второго порядка над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 30–40. doi: 10.17223/19988621/93/3
2. Елфимова А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М.В. Нильпотентные, ниль-хорошие и ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 31–40. doi: 10.17223/19988621/91/3
3. Норбосамбуев Ц.Д. Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 32–42. doi: 10.17223/19988621/85/3
4. Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 30–42. doi: 10.17223/19988621/74/4
5. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. М.: МЦНМО, 2017.
6. Крылов П.А. Определители обобщенных матриц порядка 2 // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. № 5 (20). С. 95–112.
7. Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. Sect. A. 1958. V. 6. P. 83–142.
8. Lousaunau P., Shapiro J. Morita contexts // Non-Commutative Ring Theory. Springer, 1990. P. 80–92. doi: 10.1007/BFb0091253 (Lecture Notes in Mathematics; v. 1448).
9. Larcombe P.J. The 18th century Chinese discovery of the Catalan numbers // Math. Spectrum. 1999/2000. V. 32. P. 5–7.

10. Larcombe P.J., Wilson P.D.C. On the trail of the Catalan sequence // *Math. Today*. 1998. V. 4 (34). P. 114–117.
11. Stanley R.P. *Catalan Numbers*. Cambridge University Press, 2015.
12. Luo J. Ming Antu and his power series expansions // *Seki, founder of modern mathematics in Japan*. Tokyo: Springer, 2013. P. 299–310. doi: 10.1007/978-4-431-54273-5_20 (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics; v. 39).

References

1. Koroleva A.M., Norbosambuev T.D., Podkorytov M.V. (2025) Idempotentnyye i nil'-chistyye formal'nyye matritsy vtorogo poryadka nad kol'tsami vychetov [Idempotent and nil-clean formal matrices of order 2 over residue class rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 30–40. DOI: 10.17223/19988621/93/3.
2. Elfimova A.M., Norbosambuev T.D., Podkorytov M.V. (2024) Nil'-potentnyye, nil'-khoroshiye i nil'-chistyye formal'nyye matritsy nad kol'tsami vychetov [Nilpotent, nil-good, and nil-clean formal matrices over residue class rings] // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 31–40. DOI: 10.17223/19988621/91/3.
3. Norbosambuev T.D. (2023) Khoroshiye kol'tsa formal'nykh matrits nad kol'tsami vychetov [Good formal matrix rings over residue class rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 32–42. DOI: 10.17223/19988621/85/3.
4. Stepanova A.Yu., Timoshenko E.A. (2021) Matrichnoye predstavleniye endomorfizmov primarnykh grupp malykh rangov [Matrix representation of endomorphisms of primary groups of small ranks]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 30–42. DOI: 10.17223/19988621/74/4.
5. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal Matrices* (Algebra and Applications, Vol. 23). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-53907-2.
6. Krylov P.A. (2018) Determinants of generalized matrices of order 2. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 230(3). pp. 414–427. DOI: 10.1007/s10958-018-3748-6.
7. Morita K. (1958) Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*. 6. pp. 83–142.
8. Lousstaunau P., Shapiro J. (1990) Morita Contexts. *Non-Commutative Ring Theory* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1448). Springer. pp. 80–92. DOI: 10.1007/BFb0091253.
9. Larcombe P.J. (1999/2000) The 18th century Chinese discovery of the Catalan numbers. *Mathematical Spectrum*. 32(1). pp. 5–7.
10. Larcombe P.J., Wilson P.D.C. (1998) On the trail of the Catalan sequence. *Mathematics Today*. 34(4). pp. 114–117.
11. Stanley R.P. (2015) *Catalan Numbers*. Cambridge University Press.
12. Luo J. (2013) Ming Antu and his power series expansions. *Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan* (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 39). Tokyo: Springer. pp. 299–310. DOI: 10.1007/978-4-431-54273-5_20.

Сведения об авторах:

Зыков Артем Евгеньевич – студент механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tigerlroe92@gmail.com

Королева Анастасия Максимовна – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета, ассистент кафедры общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: elfimova.nastya@bk.ru

Норбосамбуев Цырендоржи Дашацыренович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, доцент кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nstsddts@yandex.ru

Information about the authors:

Zykov Artem E. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tigerlroe92@gmail.com

Koroleva Anastasia M. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: elfimova.nastya@bk.ru

Norbosambuev Tsyrendorzhi D. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nstsddts@yandex.ru

The article was submitted 16.03.2025; accepted for publication 09.06.2025

Статья поступила в редакцию 16.03.2025; принята к публикации 09.06.2025

Научная статья

УДК 517.54

MSC: 30C20, 30C30

doi: 10.17223/19988621/95/3

Управляющая функция уравнения Левнера, генерирующая касательный разрез, выходящий из угла двуугольника

Махер Кармуши¹, Иван Александрович Колесников²,
Юлия Анатольевна Лобода³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ maherkarmoushi1996@gmail.com

² ia.kolesnikov@mail.ru

³ ysenchurova@yandex.ru

Аннотация. Строится семейство отображений $f = f(z, \tau)$, $\tau \in [0, \tau_0]$. При фиксированном τ отображение f переводит полуплоскость на двуугольник с разрезом (длина разреза зависит от параметра τ) вдоль дуги окружности γ , начинающейся в вершине двуугольника и касательной к одной из его сторон. Получено разложение управляющей функции $\lambda(\tau)$ уравнения Лёвнера в точке $\tau = 0$, генерирующей такое семейство областей. Сформулирована гипотеза о поведении управляющей функции, генерирующей разрез, выходящий из угла некоторой односвязной области вдоль дуги окружности. Гипотеза проверена на одном частном случае.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Левнера, конформное отображение, интеграл Кристоффеля–Шварца, акцессорные параметры

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2025-1728/2).

Для цитирования: Кармуши М., Колесников И.А., Лобода Ю.А. Управляющая функция уравнения Левнера, генерирующая касательный разрез, выходящий из угла двуугольника // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 28–37. doi: 10.17223/19988621/95/3

Original article

The driving function of the Loewner equation generating a tangential slit emanating from the corner of a digon

Maher Karmushi¹, Ivan A. Kolesnikov², Yulia A. Loboda³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ maherkarmoushi1996@gmail.com

² ia.kolesnikov@mail.ru

³ ysenchurova@yandex.ru

Abstract. The driving function λ of the Loewner equation that generates a non-tangential slit is Hölder continuous with exponent $1/2$. For a tangential slit emanating from a corner,

the behavior of the driving function $\lambda(\tau)$ in a neighborhood of $\tau = 0$ depends on the tangency order of the slit and on the angle of the corner. In this paper we investigate a family of mappings $f = f(z, \tau)$, $\tau \in [0, T]$. For a fixed τ , the mapping f takes the half-plane onto a digon with a slit (the length of the slit depends on τ) along a circular arc emanating tangentially from a vertex of the digon with an angle $\alpha\pi$. We obtain the form of the expansion of the driving function λ at the point $\tau = 0$, which generates the slit in the digon. We construct a mapping of the half-plane onto a triangle with tangential slit emanating from a corner of the triangle, assuming that the driving function has the same form as for the digon. We propose the following conjecture: if λ generates in a simply connected domain D a slit along a circular arc emanating tangentially from a corner with an interior

angle $\alpha\pi$, then the function λ expands into the series $\lambda(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \tau^{\frac{1+k\alpha}{2+\alpha}}$, $\lambda_0 \neq 0$.

Keywords: the Loewner differential equation, conformal mapping, the Schwarz–Christoffel integral, accessory parameters

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2025-1728/2).

For citation: Karmushi, M., Kolesnikov, I.A., Loboda, Yu.A. (2025) The driving function of the Loewner equation generating a tangential slit emanating from the corner of a digon. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 28–37. doi: 10.17223/19988621/95/3

Введение

Пусть $\gamma = \gamma(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_0]$, – простая кривая. Кривая $\gamma(\tau)$ при $\tau \in (0, \tau_0]$ находится в верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im } w > 0\}$, $\gamma(0) \in \mathbb{R}$. Согласно теореме Римана, для фиксированного τ существует конформное отображение $w = f(z, \tau)$, переводящее верхнюю полуплоскость Π^+ на область $\Pi^+ \setminus \gamma[0, \tau_0]$. Можно потребовать, чтобы отображение f имело на бесконечности разложение

$$f(z, \tau) = z - \frac{c(\tau)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (1)$$

Здесь $c(\tau)$ – возрастающая функция. Можно выбрать такую параметризацию кривой γ , при которой $c(\tau) = \tau$. Такую параметризацию называют стандартной.

Отображение $f = f(z, \tau)$, удовлетворяющее условию (1) с $c(\tau) = \tau$, удовлетворяет уравнению Левнера

$$\frac{\partial f(z, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{z - \lambda(\tau)} \frac{\partial f(z, \tau)}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

с начальным условием $f(z, 0) = z$. Здесь $\lambda(\tau)$ – прообраз точки $\gamma(\tau)$ при отображении f . Функция $\lambda(\tau)$ непрерывная и вещественнозначная. Уравнение (2) имеет место, если вместо $\Pi^+ \setminus \gamma[0, \tau_0]$ взять односвязную область D с исключенной кривой γ , начинающейся на границе, и отображения семейства f нормировать

таким образом, что композиция $\omega(z, \tau) = f^{-1}(f(z, \tau), 0)$ раскладывается на бесконечности в ряд $\omega(z, \tau) = z - \frac{\tau}{z} + \frac{c_2(\tau)}{z^2} + \dots$

С другой стороны, уравнение Левнера (2) имеет решение f для всякой непрерывной вещественнозначной функции $\lambda(\tau)$. Функцию $\lambda(\tau)$ называют управляющей функцией уравнения Левнера. Это решение $f = f(z, \tau)$ порождает семейство вложенных областей $\Delta(\tau)$. Известно, что для непрерывной функции $\lambda(\tau)$ семейство $\Delta(\tau)$ не всегда представляет собой плоскость с разрезом.

К. Левнер разработал параметрический метод, изучая семейство конформных отображений единичного круга на плоскость с разрезом [1]. Он исследовал знаменитую гипотезу Бибербаха об оценке коэффициентов конформных в единичном круге отображений. Позднее эту гипотезу удалось доказать с помощью параметрического метода Л. де Бранжу. В последнее время область применений параметрического метода расширилась. Возрос интерес к исследованию взаимосвязи между геометрией разреза γ и поведением управляющей функции $\lambda(\tau)$.

В работах [2, 3] показано, что если γ – разрез, не касательный к границе, то управляющая функция $\lambda(\tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера $|\lambda(\tau) - \lambda(\sigma)| \leq C|\tau - \sigma|^{\frac{1}{2}}$, $\forall \tau, \sigma \in [0, \tau_0]$. Напротив, если управляющая функция $\lambda(\tau)$ непрерывна по Гёльдеру с показателем $1/2$ и $C < 4$, то γ является разрезом (не касательным к границе).

Для касательного разреза поведение управляющей функции отличается. В работе [4] показано, что разрез вдоль дуги окружности

$$\Gamma(\tau) = \left\{ w \in \mathbb{C} : w = i + e^{is(\tau)} : -\frac{\pi}{2} \leq s(\tau) \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \quad s(0) = -\frac{\pi}{2}, \quad (3)$$

генерируется управляющей функцией $\lambda(\tau)$, непрерывной по Гёльдеру с показателем $1/3$: $\lambda(\tau) = C\tau^{\frac{1}{3}} + o\left(\tau^{\frac{1}{3}}\right)$, $C > 0$, $\tau > 0$. В случае касательного разреза на

поведение управляющей функции влияет порядок касания. Так, кривая $\Gamma^p(\tau) = \left\{ \xi \in \mathbb{C} : \xi = w^p, w = i + e^{is(\tau)} : -\frac{\pi}{2} \leq s(\tau) \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, $s(0) = -\frac{\pi}{2}$, имеющая касание порядка $(p+1)/p$ к вещественной оси, генерируется [5] управляющей функцией, имеющей разложение

$$\lambda(\tau) = C\tau^{\frac{p}{2p+1}} + o\left(\tau^{\frac{p}{2p+1}}\right), \quad C > 0. \quad (4)$$

В работах [4, 5] рассматривается касательный разрез в верхней полуплоскости, т.е. разрез образует углы 0 и π (сопряженный угол) к вещественной оси. Покажем, что сопряженный угол также влияет на поведение управляющей функции.

Теорема 1 [6]. Пусть $D_\alpha(\tau) = \{w : 0 < \arg w < \alpha\pi\} \setminus \Gamma(\tau)$, $\alpha \in (0, 2\pi]$, – семейство двуугольников с разрезом переменной длины вдоль дуги окружности $\Gamma(\tau)$, определенной формулой (3). Кривая $\Gamma(\tau)$ генерируется в секторе $\{w : 0 < \arg w < \alpha\pi\}$ управляющей функцией $\lambda(\tau)$, имеющей разложение

$$\lambda(\tau) = C\tau^{\frac{1}{2+\alpha}} + o\left(\tau^{\frac{1}{2+\alpha}}\right), \quad \tau > 0. \quad (5)$$

Доказательство. Композиция $\omega : \Pi^+ \rightarrow \Pi^+ \setminus \Gamma^{\frac{1}{\alpha}}$, $\omega(f(z, \tau)) := (f(z, \tau))^{\frac{1}{\alpha}}$, удовлетворяет уравнению Левнера (2) с начальным условием $\omega(z, 0) = z$. Согласно [5] управляющая функция $\lambda(\tau)$, генерирующая $\omega(z, \tau)$, для малых τ имеет вид (4) с $p = 1/\alpha$, но $\lambda(\tau)$ также является управляющей функцией для отображения f .

Заметим, что исследование управляющей функции $\lambda(\tau)$, генерирующей семейство областей $D_\alpha(\tau)$, эквивалентно исследованию управляющей функции $\lambda(\tau)$, соответствующей семейству областей

$$\Delta_\alpha(\tau) = \{w : (1-\alpha)\pi < \arg w < \pi\} \setminus \{w : \operatorname{Im} w = h, \operatorname{Re} w \leq \tau\},$$

так как семейство $D_\alpha(\tau)$ можно отобразить на $\Delta_\alpha(\tau)$ с помощью дробно-линейного отображения.

В данной статье строится семейство отображений $f : \Pi^+ \rightarrow \Delta_\alpha(\tau)$ верхней полуплоскости на двуугольник с разрезом, выходящим по касательной из угла двуугольника раствором $\alpha\pi \neq 0$. Для такого семейства областей найдены управляющая функция $\lambda(\tau)$ и ее разложение для $\tau > 0$:

$$\lambda(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \tau^{\frac{1+\alpha k}{2+\alpha}}, \quad \lambda_0 \neq 0. \quad (6)$$

Этот результат уточняет теорему 1. В разделе «численный эксперимент» строится семейство отображений полуплоскости на треугольник с разрезом, выходящим по касательной из одного из углов треугольника, в предположении, что управляющая функция имеет вид (6). Случай, когда разрез выпускается из нулевого угла, рассмотрен в работе [7].

Семейство отображений

Рассмотрим семейство областей

$$\Delta_\alpha(t) = \{w : (1-\alpha)\pi < \arg w < \pi\} \setminus \{w : \operatorname{Im} w = h, \operatorname{Re} w \leq t\}, \quad h > 0, \quad -\infty \leq t \leq T,$$

где $T < -h \operatorname{ctg} \alpha\pi$, если $0 < \alpha < 1$, и $T < +\infty$, если $-1 \leq \alpha \leq 0$. Концевую точку разреза $t + ih$ обозначим через $\Lambda(t)$.

Найдем семейство отображений $f = f(z, t)$, $f : \Pi^+ \times [-\infty, T] \rightarrow \Delta_\alpha(t)$. Обозначим прообразы вершин многоугольника $\Delta_\alpha(t)$ через $b(t)$, $\lambda(t)$, $a(t)$ и $c(t)$, где

$f(\lambda(t), t) = \Lambda(t)$, $b(t) < \lambda(t) < a(t) < c(t)$, $-\infty < t \leq T$. Пусть $c(t) = \infty$, $a(-\infty) = b(-\infty) = \lambda(-\infty) = 0$.

Отображение $f = f(z, t)$ при фиксированном t переводит верхнюю полуплоскость Π^+ на многоугольник $\Delta_\alpha(t)$ и может быть записано с помощью интеграла Кристоффеля–Шварца в виде:

$$f(z, t) = c_1(t) \int_{\infty}^z \frac{\zeta - \lambda(t)}{(\zeta - a(t))(\zeta - b(t))^{\alpha+1}} d\zeta. \quad (7)$$

Раскладывая отображение f' на бесконечности, получим

$$f'(z, t) = \frac{c_1(t)}{z^{\alpha+1}} \left(1 + \frac{a(t) + (1+\alpha)b(t) - \lambda(t)}{z} + \frac{\gamma_2(t)}{z^2} + \dots \right).$$

Заметим, что для достаточно больших положительных значений z $f(z, t) < 0$, поэтому $c_1(t) > 0$.

Можно нормировать отображения семейства f , потребовав, чтобы

$$c_1(t) = A, \quad A > 0, \quad \dot{A} = 0, \quad (8)$$

$$a(t) + (1+\alpha)b(t) - \lambda(t) = 0. \quad (9)$$

Действительно, всякое отображение $\tilde{f}$ верхней полуплоскости Π^+ на многоугольник $\Delta_\alpha(t)$ такое, что $\tilde{f}(\infty, t) = 0$, можно записать как композицию $\tilde{f}(z, t) = f(qz + p, t)$, $q > 0$, $p \in \mathbb{R}$. В окрестности бесконечности отображение $\tilde{f}'$ раскладывается в ряд

$$\tilde{f}'(z, t) = \frac{c_1(t)}{q^\alpha z^{\alpha+1}} \left(1 + \frac{a(t) + (1+\alpha)(b(t) - p) - \lambda(t)}{qz} + \frac{\gamma_2(t)}{z^2} + \dots \right).$$

Видим, что можно выбрать q и p так, чтобы коэффициент при $z^{-\alpha-1}$ равнялся A и коэффициент при $z^{-\alpha-2}$ равнялся нулю.

Запишем (7) в виде:

$$f(z, t) = A \int_{\infty}^z \frac{1}{(\zeta - b(t))^{\alpha+1}} d\zeta + A(a(t) - \lambda(t)) \int_{\infty}^z \frac{1}{(\zeta - a(t))(\zeta - b(t))^{\alpha+1}} d\zeta.$$

Во втором интеграле выполним замену $\xi = \frac{\zeta - z}{z - a(t)}$, получим

$$f(z, t) = A \int_{\infty}^z \frac{1}{(\zeta - b(t))^{\alpha+1}} d\zeta + A \frac{a(t) - \lambda(t)}{(z - b(t))^{\alpha+1}} \int_{\infty}^0 (\xi + 1)^{-1} \left(1 + \xi \frac{z - a(t)}{z - b(t)} \right) d\xi.$$

Проинтегрируем, используя [8. С. 72], получим

$$f(z, t) = -\frac{A}{\alpha} \frac{1}{(z - b(t))^\alpha} - \frac{A}{\alpha + 1} \frac{a(t) - \lambda(t)}{(z - b(t))^{\alpha+1}} {}_2F_1 \left(1, 1 + \alpha; 2 + \alpha; \frac{a(t) - b(t)}{z - b(t)} \right). \quad (10)$$

Заметим, что $\operatorname{Im}(f(a+r) - f(a-r)) = h$ и не зависит от r при $0 < r < a - \lambda$.

Можно записать $f(a+r) - f(a-r) = A \int_{\gamma} \frac{\zeta - \lambda(t)}{(\zeta - a(t))(\zeta - b(t))^{\alpha+1}} d\zeta$, где γ – верхняя половина окружности, $\gamma(\varphi) = a + re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$. Подставим сюда (9), перейдем к переменной φ , получим

$$f(a+r) - f(a-r) = iA \int_0^{\pi} g(r, \varphi) d\varphi,$$

где $g(r, \varphi) = \frac{re^{i\varphi} - (1+\alpha)b(t)}{(re^{i\varphi} + a(t) - b(t))^{\alpha+1}}$ – непрерывная на $[0, r] \times [0, \varphi]$ функция. Перейдем к пределу при $r \rightarrow 0$, получим

$$a(t) = b(t) + c(-b(t))^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad b(t) < 0 \quad \text{при } t \in (-\infty, T), \quad c = \left((1+\alpha)A \frac{\pi}{h} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (11)$$

Из условия $\operatorname{Re} f(\lambda(t), t) = t$, используя (10), найдем уравнение для параметра b :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(-b)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(c - (1+\alpha)(-b)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \right)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\left(c - (1+\alpha)(-b)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \right)^{1+\alpha}} \times \\ & \times \operatorname{Re} \left({}_2F_1 \left(1, 1+\alpha; 2+\alpha; \frac{c}{c - (1+\alpha)(-b)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \right) \right) = -\frac{\alpha}{A} t. \end{aligned} \quad (12)$$

Перейдем к стандартной параметризации. Семейство $\tilde{f} = \tilde{f}(z, \tau) = f(z, t(\tau))$, $\tau = \tau(t)$, $\tau \in [0, \tau_0]$, удовлетворяет уравнению (2), $\tau(-\infty) = 0$, и параметр $\tilde{b}(\tau) = b(t(\tau))$ удовлетворяет уравнению $\frac{d\tilde{b}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\tilde{b}(\tau) - \tilde{\lambda}(\tau)}$ [9]. Подставляя сюда (9) и (11), получим $\left((\alpha+1)\tilde{b}(\tau) + c(-\tilde{b}(\tau))^{\frac{1}{1+\alpha}} \right) \frac{d\tilde{b}(\tau)}{d\tau} = -1$. Интегрируя это уравнение с начальным условием $\tilde{b}(0) = 0$, получим

$$c \frac{1+\alpha}{2+\alpha} (-\tilde{b}(\tau))^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}} - \frac{1+\alpha}{2} (\tilde{b}(\tau))^2 = \tau. \quad (13)$$

Перепишем это равенство в виде $(-\tilde{b}(\tau))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha} c - \frac{1+\alpha}{2} (-\tilde{b}(\tau))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} = \tau^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}$.

Введем обозначения $\tau^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} = s$, $(-\tilde{b})^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} = x$ и разложим левую часть этого равенства

в окрестности точки $x = 0$, получим $\gamma x - \frac{\alpha\gamma}{2c} x^2 - \frac{\alpha\gamma}{4c^2} x^3 - \dots = s$, $\gamma = \left(c \frac{1+\alpha}{2+\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}$.

Обращая этот ряд, получим $\frac{1}{\gamma}s + \frac{\alpha}{2c\gamma^2}s^2 + \frac{\alpha(2\alpha+1)}{4c^2\gamma^3}s^3 + \dots = x$. Возвращаясь к параметру $\tilde{b}$, $\tilde{b} = -x^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}$, используя (9) и (11), получим

$$\tilde{\lambda}(s) = (2+\alpha)s^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha}{2c\gamma^2}s + \frac{\alpha(2\alpha+1)}{4c^2\gamma^3}s^2 + \dots \right) \times \left(\frac{c}{2+\alpha} - \frac{1}{\gamma}s - \frac{\alpha}{2c\gamma^2}s^2 - \frac{\alpha(2\alpha+1)}{4c^2\gamma^3}s^3 - \dots \right).$$

Раскладывая правую часть в точке $s=0$ и возвращаясь к параметру τ , получим

$$\tilde{\lambda}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \tau^{\frac{1+k\alpha}{2+\alpha}}, \text{ где } \lambda_0 = \left(A(2+\alpha) \frac{\pi}{h} \right)^{\frac{1}{2+\alpha}}. \quad (14)$$

Зависимость $t(\tau)$ можно найти из условия $\operatorname{Re} \tilde{f}(\tilde{\lambda}(\tau), \tau) = t$. Используя (10) и (11), получим

$$\frac{1+\alpha}{\theta(c-\theta)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{(c-\theta)^{1+\alpha}} \operatorname{Re} \left({}_2F_1 \left(1, 1+\alpha; 2+\alpha; \frac{c}{c-\theta} \right) \right) = -\frac{\alpha}{A}t, \quad (15)$$

где $\theta = (1+\alpha)(-\tilde{b}(\tau))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, $c = \left((1+\alpha)A \frac{\pi}{h} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$.

Подытожим результаты в следующей теореме.

Теорема. Семейство отображений $\tilde{f} = \tilde{f}(z, \tau) = f(z, t(\tau))$, $\tau \in [0, \tau_0]$, переводящее при фиксированном τ верхнюю полуплоскость на область $\Delta_{\alpha}(t) = \{w : (1-\alpha)\pi < \arg w < \pi\} \setminus \{w : \operatorname{Im} w = h, \operatorname{Re} w \leq t(\tau)\}$, имеющее на бесконечности разложение $\tilde{f}(z, \tau) = -\frac{A}{\alpha z^{\alpha}} \left(1 + \frac{\gamma_2(\tau)}{z^2} + \dots \right)$, имеет вид:

$$\tilde{f}(z, \tau) = A \frac{\tilde{b}}{(z-\tilde{b})^{\alpha+1}} {}_2F_1 \left(1, 1+\alpha; 2+\alpha; \frac{c(-\tilde{b})^{\frac{1}{1+\alpha}}}{z-\tilde{b}} \right) - \frac{A}{\alpha} \frac{1}{(z-\tilde{b})^{\alpha}},$$

где $c = \left((1+\alpha)A \frac{\pi}{h} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$, $\tilde{b}$ определяются из (13), и $\tau = \tau(t)$ определяется из (15).

Кроме того, семейство $\tilde{f}$ удовлетворяет уравнению Левнера

$$\frac{\partial \tilde{f}(z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\tilde{\lambda}(\tau) - z} \frac{\partial \tilde{f}(z, \tau)}{\partial z}, \quad \tilde{f}(z, 0) = -\frac{A}{\alpha z^{\alpha}},$$

где управляющая функция $\tilde{\lambda}(\tau) = (2+\alpha)\tilde{b}(\tau) + c(-\tilde{b}(\tau))^{\frac{1}{1+\alpha}}$, имеет разложение (14).

Замечание. Разложение (14) управляющей функции $\tilde{\lambda}$ согласуется с (5).

Численный эксперимент

Рассмотрим семейство областей

$$\Delta(\tau) = \{w \in \mathbb{C} : w = u + iv, u > 0, v > 0, v > 1 - u\} \setminus \{w \in \mathbb{C} : w = u + iv, u \geq t(\tau), v = 2\}, \\ \tau \in [0, \tau_0].$$

Концевую точку разреза обозначим через $\Lambda = \Lambda(\tau)$.

Рассмотрим семейство отображений $f = f(z, \tau)$, $f : \Pi^+ \times [0, \tau_0] \rightarrow \Delta(\tau)$. Преобразы вершин B , $\Lambda(\tau)$, A , D , C многоугольника $\Delta(\tau)$ со внутренними углами соответственно 0 , 2π , $-\alpha\pi$, $\gamma\pi$, $\gamma\pi$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{3}{4}$, обозначим через $b(\tau)$, $\lambda(\tau)$, $a(\tau)$, $d(\tau)$ и $c(\tau)$, где $f(\lambda(\tau), \tau) = \Lambda(\tau)$, $b(\tau) < \lambda(\tau) < a(\tau) < d(\tau) < c(\tau)$, $0 < \tau \leq \tau_0$. Пусть $c(\tau) = \infty$, т.е. $f(\infty, \tau) = 1$, и $a(0) = b(0) = \lambda(0) = 0$, $d(0) = d_0 = 1$.

Отображение $f = f(z, \tau)$, $\tau \in [0, \tau_0]$, можно записать с помощью формулы Кристоффеля–Шварца

$$f(z, \tau) = c_1(\tau) \int_{\infty}^z \frac{(\lambda(\tau) - \zeta)(d(\tau) - \zeta)^{\gamma-1}}{(b(\tau) - \zeta)(a(\tau) - \zeta)^{\alpha+1}} d\zeta. \quad (16)$$

Отображение $f = f(z, 0)$ имеет вид:

$$f(z, 0) = ic_1(0) \int_{\infty}^z \frac{(d_0 - \zeta)^{\gamma-1}}{\zeta^{1+\alpha}} d\zeta = 2c_1(0)iz {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; z\right).$$

Из условия $f(1, 0) = i$ найдем $c_1(0) = \frac{\Gamma(1/4)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(3/4)} =: A$, где Γ – гамма-функция.

Функция $f'(z, 0)$ раскладывается на бесконечности в ряд

$$f'(z, 0) = Ae^{-i\frac{\pi}{4}} \left(z^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{4} z^{-\frac{7}{4}} + \dots \right).$$

Функция $f'(z, \tau)$ раскладывается на бесконечности в ряд

$$f'(z, \tau) = c_1(\tau) e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(z^{-\frac{3}{4}} + \left(\frac{3}{2} a(\tau) + b(\tau) + \frac{1}{4} d(\tau) - \lambda(\tau) \right) z^{-\frac{7}{4}} + \dots \right).$$

Нормируем отображения семейства f , полагая $c_1(\tau) = A$ и

$$\frac{3}{2} a(\tau) + b(\tau) + \frac{1}{4} d(\tau) - \lambda(\tau) = \frac{1}{4}. \quad (17)$$

Запишем $f(b+r) - f(b-r) = A \int_{\gamma} \frac{(\lambda(\tau) - \zeta)(d(\tau) - \zeta)^{\gamma-1}}{(b(\tau) - \zeta)(a(\tau) - \zeta)^{\alpha+1}} d\zeta$, где γ – верхняя поло-

вина окружности $\gamma(\varphi) = b + re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$. Заметим, что $\text{Im}(f(b+r) - f(b-r)) = -h$ и не зависит от r при $0 < r < \lambda - b$. Перейдем к переменной φ и устремим r к нулю, получим

$$\lambda(\tau) - b(\tau) = \frac{h}{\pi A} (d(\tau) - b(\tau))^{\frac{1}{4}} (a(\tau) - b(\tau))^{\frac{3}{2}}. \quad (18)$$

Параметры a , b и d удовлетворяют [9] системе дифференциальных уравнений

$$\dot{a}(\tau) = \frac{1}{a(\tau) - \lambda(\tau)}, \quad \dot{b}(\tau) = \frac{1}{b(\tau) - \lambda(\tau)}, \quad \dot{d}(\tau) = \frac{1}{d(\tau) - \lambda(\tau)}. \quad (19)$$

Положим, что параметры a , b , d и λ раскладываются в ряды

$$\begin{aligned} \lambda(\tau(x)) &= x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x^k, & a(\tau(x)) &= x^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \\ b(\tau(x)) &= x^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k, & d(\tau(x)) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k x^k, \end{aligned}$$

где $x = \tau^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}$. Подставляя эти ряды в систему (17), (19), получим единственное решение, удовлетворяющее условиям $b(\tau(x)) < \lambda(\tau(x)) < a(\tau(x)) < d(\tau(x))$.

Найдем $\lambda_k = \lambda_k(\lambda_1)$, $k = 2, 3, \dots$, $a_k = a_k(\lambda_1)$, $b_k = b_k(\lambda_1)$, $d_k = d_k(\lambda_1)$, $k = 1, 2, \dots$

Таким образом, из системы (17), (19) можно найти все коэффициенты рядов, кроме λ_1 . Коэффициент λ_1 можно найти, подставив эти ряды в (18). Пусть $t = 5$, т.е. разрез в полуплоскости $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0, 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$ проходит по лучу $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \geq 5, \operatorname{Im} w = 2\}$. Найдем приближенное значение параметра

$x = \tau^{\frac{1}{2}} \approx 0.305414$ по формуле (15). Вычисляя первые десять коэффициентов рядов при $x = 0.305414$, получаем

$$b(x) = -0.132452\dots, \quad \lambda(x) = -0.078114\dots, \quad a(x) = 0.035809\dots, \quad d(x) = 1.0025\dots$$

Значение отображения (16) в точке $\lambda(x)$ с найденными параметрами $b(x)$, $\lambda(x)$, $a(x)$, $d(x)$ отличается от $\Lambda(\tau(x)) = 5 + 2i$ на 10^{-4} .

На основании рассмотренных примеров можно сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза. В односвязной области D разрез вдоль дуги окружности, выходящей из угла области D раствора $\alpha\pi \neq 0$, генерируется функцией λ , имеющей разложение (6).

Список источников

1. Löwner K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. 1923. V. 89. P. 103–121. doi: 10.1007/BF01448091
2. Marshall D.E., Rohde S. The Loewner differential equation and slit mappings // J. Amer. Math. Soc. 2005. V. 18 (4). P. 763–778. doi: 10.1090/S0894-0347-05-00492-3
3. Lind J. A sharp condition for the Loewner equation to generate slits // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2005. V. 30 (1). P. 143–158.
4. Prokhorov D., Vasil'ev A. Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation // Anal. Math. Phys. 2009. P. 455–463. doi: 10.1007/978-3-7643-9906-1_23
5. Lau K.S., Wu H.H. On tangential slit solution of the Loewner equation // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2016. V. 41. P. 681–691. doi: 10.5186/aasfm.2016.4142
6. Колесников И.А. Конформное отображение полуплоскости на круговой многоугольник с нулевыми углами // Известия вузов. Математика. 2021. № 6. С. 11–24. doi: 10.26907/0021-3446-2021-6-11-24

7. Кармуши М., Колесников И.А., Лобода Ю.А. Управляющая функция в уравнении Левнера, генерирующая разрез, выходящий из нулевого угла // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 24–32. doi: 10.17223/19988621/94/2
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965.
9. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.

References

1. Löwner K. (1923) Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. *Mathematische Annalen*. 89. pp. 103–121. DOI: 10.1007/BF01448091.
2. Marshall D.E., Rohde S. (2005) The Loewner differential equation and slit mappings. *Journal of the American Mathematical Society*. 18(4). pp. 763–778. DOI: 10.1090/S0894-0347-05-00492-3.
3. Lind J. (2005) A sharp condition for the Loewner equation to generate slits. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*. 30(1). pp. 143–158.
4. Prokhorov D., Vasil'ev A. (2009) Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation. *Analysis and Mathematical Physics*. pp. 455–463. DOI: 10.1007/978-3-7643-9906-1_23.
5. Lau K.S., Wu H.H. (2016) On tangential slit solution of the Loewner equation. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*. 41. pp. 681–691. DOI: 10.5186/aasfm.2016.4142.
6. Kolesnikov I.A. (2021) Conformal mapping from the half-plane onto a circular polygon with cusps. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*. 65(6). pp. 8–20. DOI: 10.3103/S1066369X21060025.
7. Karmushi M., Kolesnikov I.A., Loboda Yu.A. (2025) *Upravlyayushchaya funktsiya v uravnenii Levnera, generiruyushchaya razrez, vykhodyashchiy iz nulevogo ugla* [The driving function of the Loewner equation generating slit emanating from a zero corner]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 24–32. DOI: 10.17223/19988621/94/2.
8. Bateman H., Erdelyi A. (1953) *Higher Transcendental Functions*. Vol. 1. New York: McGraw-Hill.
9. Aleksandrov I.A. (1976) *Parametricheskiye prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsii* [Parametric continuations in the theory of univalent functions]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторах:

Кармуши Махер – аспирант Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: maherkarmoushi1996@gmail.com

Колесников Иван Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, доцент кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

Лобода Юлия Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ysenchurova@yandex.ru

Information about the authors:

Karmushi Maher (Phd Student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: maherkarmoushi1996@gmail.com

Kolesnikov Ivan A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

Loboda Yulia A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ysenchurova@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 07.04.2025; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 07.04.2025; accepted for publication 09.06.2025

Научная статья

УДК 514.76

MSC: 53C15, 53C30, 53C25, 22E25

doi: 10.17223/19988621/95/4

О левоинвариантных полукэлеровых структурах на шестимерных нильпотентных несимплектических группах Ли

Николай Константинович Смоленцев¹,
Карина Владиславовна Чернова²

^{1,2} Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия

¹ smolennk@mail.ru

² karina.chernova.2002@mail.ru

Аннотация. Известно, что существует 34 класса шестимерных нильпотентных групп Ли, многие из которых допускают левоинвариантные симплектические и комплексные структуры. Среди них имеется три класса групп, на которых не существует левоинвариантных симплектических структур, но есть комплексные структуры. В данной работе на таких группах Ли естественным образом определены полукэлеровы и почти пара-полукэлеровы структуры и найдены их геометрические свойства.

Ключевые слова: шестимерные нильпотентные алгебры Ли, левоинвариантные полукэлеровы структуры, почти пара-полукэлеровы структуры, паракомплексные структуры

Для цитирования: Смоленцев Н.К., Чернова К.В. О левоинвариантных полукэлеровых структурах на шестимерных нильпотентных несимплектических группах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 38–51. doi: 10.17223/19988621/95/4

Original article

On left-invariant semi-Kähler structures on six-dimensional nilpotent nonsymplectic Lie groups

Nikolay K. Smolentsev¹, Karina V. Chernova²

^{1,2} Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation

¹ smolennk@mail.ru

² karina.chernova.2002@mail.ru

Abstract. It is known that there exist 34 classes of six-dimensional nilpotent Lie groups many of which admit left-invariant symplectic and complex structures. Among them, there are three classes of groups on which there are no left-invariant symplectic structures but there exist complex structures. The aim of the work is to determine new left-invariant geometric structures on these three six-dimensional Lie groups, compensating in a sense

for the absence of symplectic structures, as well as to study their geometric properties. We study Lie groups G_i that have the following Lie algebras with nonzero Lie brackets:

$\mathfrak{g}_1: [e_1, e_2] = e_4, [e_2, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_3, e_5] = -e_6,$

$\mathfrak{g}_2: [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_2, e_4] = e_6,$

$\mathfrak{g}_3: [e_1, e_2] = e_6, [e_3, e_4] = e_6.$

It is shown that on these Lie algebras there exist non-degenerate 2-forms ω for which the property $\omega \wedge d\omega = 0$ holds. Such forms ω are called semi-Kähler. For each group G_i , families of semi-Kähler 2-forms ω , compatible complex and para-complex structures, and corresponding pseudo-Riemannian metrics are obtained.

Keywords: six-dimensional nilpotent Lie algebras, left-invariant semi-Kähler structures, almost para-semi-Kähler structures, para-complex structures

For citation: Smolentsev, N.K., Chernova, K.V. (2025) On left-invariant semi-Kähler structures on six-dimensional nilpotent nonsymplectic Lie groups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 38–51. doi: 10.17223/19988621/95/4

Введение

В работе [1] показано, что 26 из 34 классов шестимерных нильпотентных групп Ли допускают левоинвариантные симплектические структуры. Из оставшихся восьми классов несимплектических групп Ли пять групп Ли не допускают также и комплексных структур и три несимплектических группы Ли допускают комплексные структуры [2]. Первые пять групп исследованы в работе Н.К. Смоленцева [3], геометрия последних трех несимплектических групп Ли в настоящее время изучена недостаточно. Цель работы – определение на указанных трех шестимерных группах Ли новых левоинвариантных геометрических структур, компенсирующих в некотором смысле отсутствие симплектических структур, а также исследование их геометрических свойств.

Вместо свойства симплектичности за основу взято свойство полукэлеровости [4] 2-формы ω : $\omega \wedge d\omega = 0$. Кроме того, исследуется свойство невырожденности 3-формы $d\omega$ в смысле Хитчина [5].

В данной работе показано, что в случае одной из рассматриваемых групп Ли с каждой невырожденной 2-формой ω с невырожденным внешним дифференциалом $d\omega$ инвариантно связана паркомплексная структура. Для каждой группы найдены семейства полукэлеровых 2-форм ω , согласованных комплексных структур и соответствующих псевдоримановых метрик. Определены и исследованы свойства левоинвариантных 2-форм ω , имеющих невырожденный внешний дифференциал $d\omega$ в смысле Хитчина. Исследованы геометрические свойства параклукэлеровых и полукэлеровых структур на указанных группах Ли. Определены ассоциированные метрики и вычислены их свойства кривизны.

Напомним основные понятия, используемые в данной работе.

Пусть G – вещественная группа Ли размерности n и $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Группа Ли называется нильпотентной, если ее алгебра Ли нильпотентна, т.е. является конечной следующая убывающая последовательность идеалов $\mathfrak{g}^k$: $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k]$, определенная индуктивно.

Левоинвариантная симплектическая структура на группе Ли G – это левоинвариантная замкнутая невырожденная 2-форма ω . Она задается замкнутой 2-формой ω максимального ранга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Левоинвариантная почти комплексная структура на группе Ли G – это левоинвариантное поле эндоморфизмов $J: TG \rightarrow TG$ касательного расслоения, обладающее свойством $J^2 = -Id$. Поскольку J определяется линейным оператором J на алгебре Ли $\mathfrak{g} = T_e G$, то для простоты мы будем говорить, что J – это почти комплексная структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Почти комплексная структура J определяет комплексную структуру на группе Ли G в случае, когда обращается в нуль тензор Нейенхейса:

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY] = 0, \text{ для любых } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Левоинвариантная (псевдо)кэлера структура на группе Ли G – это тройка (ω, J, g) состоящая из левоинвариантной симплектической формы ω , левоинвариантной комплексной структуры J , согласованной с формой ω , $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$, и (псевдо)римановой метрики g , определенной формулой $g(X, Y) = \omega(X, JY)$.

Определим возрастающую последовательность J -инвариантных идеалов: $\mathfrak{a}_0(J) = 0$,

$$\mathfrak{a}_s(J) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}_{s-1}(J) \text{ и } [JX, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}_{s-1}(J)\}, s \geq 1.$$

В частности, идеал $\mathfrak{a}_1(J)$ лежит в центре и имеет размерность не менее двух.

Определение. Левоинвариантная почти комплексная структура J на группе Ли G называется нильпотентной, если для ряда идеалов $\mathfrak{a}_s(J)$, определенных выше, существует номер p такой, что $\mathfrak{a}_p(J) = \mathfrak{g}$.

В работе [6] показано, что псевдокэлеровы структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли имеют нильпотентные комплексные структуры.

Почти паракомплексной структурой на $2n$ -мерном многообразии M называется поле P эндоморфизмов касательного расслоения TM таких, что $P^2 = Id$, причем ранги собственных распределений $T^\pm M := \ker(Id \mp P)$ равны. Почти паракомплексная структура P называется интегрируемой, если распределения $T^\pm M$ инволютивны. В этом случае P называется паракомплексной структурой. В случае левоинвариантной паракомплексной структуры P на группе Ли G инвариантные подпространства $T_e^\pm G$ являются подалгебрами. Обзор теории паракомплексных структур представлен в работе [7].

Левоинвариантная паракэлера структура на группе Ли G – это тройка (ω, P, g) , состоящая из левоинвариантной симплектической формы ω , левоинвариантной паракомплексной структуры P , согласованной с формой ω , $\omega(PX, PY) = -\omega(X, Y)$, и (псевдо)римановой метрики g , определенной формулой $g(X, Y) = \omega(X, PY)$.

Отметим, что термин «паракэлерово» многообразие употребляется также в другом смысле. А именно, почти эрмитовы многообразия, удовлетворяющие тождеству Кэлера $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)JZ, JW)$, где R – тензор кривизны, и J – почти комплексная структура, согласованная с римановой метрикой g , также называются паракэлеровыми многообразиями. В данной работе паракэлеровы многообразия рассматриваются с точки зрения паракомплексной геометрии, которая была введена П. Либерманом в 1952 г. по аналогии с комплексной геометрией. Отметим для сравнения, что такие паракэлеровы многообразия удовлетворяют следующему тождеству: $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)PZ, PW)$, где P – тензор почти паракомплексной структуры, согласованный с псевдоримановой метрикой g .

Для рассматриваемых несимплектических групп Ли условие замкнутости 2-формы ω приводит к ее вырожденности. Можно ослабить требование замкнутости формы ω . Известно, что в случае левоинвариантной почти эрмитовой структуры

на группе Ли размерности $2n$ свойство $d(\omega^{n-1}) = 0$ фундаментальной формы ω определяет класс полукэлеровых многообразий по классификации Грея–Харвеллы [4]. В нашем шестимерном случае это условие полукэлеровости принимает вид: $\omega \wedge d\omega = 0$.

Если невырожденная 2-форма ω незамкнута, то можно рассматривать 3-форму $d\omega$. В работе [5] Хитчин определил понятие невырожденности (стабильности) для 3-форм Ω и построил линейный оператор K_Ω , квадрат которого пропорционален тождественному оператору Id . Напомним конструкцию Хитчина.

Пусть V – 6-мерное вещественное векторное пространство, и μ – форма объема на V . Пусть $\Omega \in \Lambda^3 V^*$ и $X \in V$, тогда $i_X \Omega \in \Lambda^2 V^*$ и $i_X \Omega \wedge \Omega \in \Lambda^5 V^*$. Естественное спаривание внешним произведением $V^* \otimes \Lambda^5 V^* \rightarrow \Lambda^6 V^* \cong \mathbf{R}\mu$ определяет изоморфизм $A: \Lambda^5 V^* \cong V$. Используя это, Хитчин определил линейное преобразование $K_\Omega: V \rightarrow V$ следующей формулой:

$$K_\Omega(X) = A(i_X \Omega \wedge \Omega).$$

Другими словами, $i_{K_\Omega(X)} \mu = i_X \Omega \wedge \Omega$. Оператор K_Ω обладает свойствами $\text{trace}(K_\Omega) = 0$ и $K_\Omega^2 = \lambda(\Omega)I$. Поэтому в случае $\lambda(\Omega) < 0$ получается структура J_Ω комплексного векторного пространства на пространстве V :

$$J_\Omega = \frac{1}{\sqrt{-\lambda(\Omega)}} K_\Omega,$$

а если $\lambda(\Omega) > 0$, то получаем паракомплексную структуру P_Ω , т.е., $P_\Omega^2 = Id$, $P_\Omega \neq 1$ по аналогичной формуле:

$$P_\Omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda(\Omega)}} K_\Omega.$$

Таким образом, оператор $K_{d\omega}$ может определять либо почти комплексную, либо почти паракомплексную структуру на группе Ли, когда $d\omega$ является невырожденной.

Пусть ∇ – связность Леви-Чивиты, соответствующая (псевдо)римановой метрике g . Она определяется из шестичленной формулы, которая для левоинвариантных векторных полей X, Y, Z на группе Ли принимает вид:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]).$$

Тензор кривизны определяется формулой $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$. Тензор Риччи $Ric(X, Y)$ находится как свертка тензора кривизны по первому и по четвертому (верхнему) индексам. Оператор Риччи определяется формулой $Ric(X, Y) = g(RIC(X), Y)$. Для вычислений геометрических характеристик левоинвариантных структур на группах Ли использовалась система Maple.

Несимплектические группы Ли

В данной работе изучаются нильпотентные группы Ли G_i , которые не допускают левоинвариантных симплектических структур, но могут иметь комплексные структуры. В соответствии с классификацией [2] они имеют алгебры Ли со следующими ненулевыми скобками Ли базисных векторов $e_k \in \mathfrak{g}_i$:

$$\mathfrak{g}_1: [e_1, e_2] = e_4, [e_2, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_3, e_5] = -e_6.$$

$$\mathfrak{g}_2: [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_2, e_4] = e_6.$$

$$\mathfrak{g}_3: [e_1, e_2] = e_6, [e_3, e_4] = e_6.$$

1. Группа Ли G_1 . Рассмотрим первую группу Ли, которая не допускает левинвариантных симплектических структур, но имеет комплексные. Комплексные структуры на этой группе Ли были исследованы в работе Магнина [8]. Мы будем использовать следующие коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$, соответствующие работе [8] (которые получаются заменой: $e_2 \leftrightarrow e_3$, $e_5 = -e_5$):

$$[e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_5] = e_6.$$

Полу-паракэлеровы структуры. Пусть $\omega = w_{ij}e^i \wedge e^j$ — произвольная 2-форма в дуальном базисе $\{e^i\}$. Рассмотрим вопрос о паракэлеровости и невырожденности в смысле Хитчина ее внешнего дифференциала $d\omega$ и исследуем паракомплексные структуры, соответствующие невырожденным $d\omega$. Свойство $\omega \wedge d\omega = 0$ выполняется при следующих условиях:

$$\begin{aligned} -w_{24}w_{56} + w_{25}w_{46} - w_{26}w_{45} &= 0, \quad -w_{14}w_{56} + w_{15}w_{46} - w_{16}w_{45} = 0, \\ w_{13}w_{46} - w_{14}w_{36} + w_{16}w_{34} + w_{23}w_{56} - w_{25}w_{36} + w_{26}w_{35} &= 0. \end{aligned}$$

Существует два решения ω_1 и ω_2 этой системы уравнений, когда 3-форма $d\omega$ является невырожденной:

$$\begin{aligned} \omega_1 = e^1 \wedge \left(w_{12}e^2 + w_{13}e^3 + \frac{w_{15}w_{46} - w_{16}w_{45}}{w_{56}}e^4 + w_{15}e^5 + w_{16}e^6 \right) + \\ + e^2 \wedge \left(\Omega_{23}e^3 + \frac{w_{25}w_{46} - w_{26}w_{45}}{w_{56}}e^4 + w_{25}e^5 + w_{26}e^6 \right) + \\ + e^3 \wedge (w_{34}e^4 + w_{35}e^5 + w_{36}e^6) + e^4 \wedge (w_{45}e^5 + w_{46}e^6) + w_{56}e^5 \wedge e^6, \end{aligned}$$

где

$$\Omega_{23} = -\frac{w_{13}w_{46}w_{56} - w_{15}w_{36}w_{46} + w_{16}w_{34}w_{56} + w_{16}w_{36}w_{45} - w_{25}w_{36}w_{56} + w_{26}w_{35}w_{56}}{w_{56}^2},$$

и

$$\begin{aligned} \omega_2 = e^1 \wedge \left(w_{12}e^2 + \Omega_{13}e^3 + w_{14}e^4 + \frac{w_{16}w_{45}}{w_{46}}e^5 + w_{16}e^6 \right) + \\ + e^2 \wedge \left(w_{23}e^3 + w_{24}e^4 + \frac{w_{26}w_{45}}{w_{46}}e^5 + w_{26}e^6 \right) + \\ + e^3 \wedge (w_{34}e^4 + w_{35}e^5 + w_{36}e^6) + e^4 \wedge (w_{45}e^5 + w_{46}e^6), \end{aligned}$$

где

$$\Omega_{13} = \frac{w_{14}w_{36}w_{46} - w_{16}w_{34}w_{46} - w_{26}w_{35}w_{46} + w_{26}w_{36}w_{45}}{w_{46}^2}$$

Представим подробнее второе решение. Вычисления показывают, что для данной 2-формы ω_2 внешний дифференциал $d\omega_2$ является невырожденным в смысле Хитчина [5]. При этом $\lambda(d\omega) = w_{46}^4 > 0$. Поэтому 3-форма $d\omega_2$ определяет почти паракомплексную структуру $P_{d\omega_2}$ на вещественном векторном пространстве $\mathfrak{g}_1$ следующим образом:

$$P_{d\omega_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda(d\omega)}} K_{d\omega_2}.$$

Матричное выражение $P_{d\omega_2}$:

$$P_{d\omega_2} = \frac{1}{w_{46}^2} \begin{bmatrix} w_{46}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w_{46}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{46}^2 & 0 & 0 & 0 \\ -2w_{16}w_{46} & 0 & -2w_{36}w_{46} & -w_{46}^2 & 0 & 0 \\ -2w_{26}w_{46} & 0 & -2w_{45}w_{46} & 0 & -w_{46}^2 & 0 \\ 2w_{16}w_{36} + 2w_{26}w_{45} & -2w_{24}w_{46} + 2w_{26}w_{36} & 2w_{36}^2 + 2w_{45}^2 & 2w_{36}w_{46} & 2w_{45}w_{46} & w_{46}^2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Почти паракомплексная структура $P_{d\omega_2}$ не является интегрируемой, тензор Нейенхейса не обращается в нуль.

Для оператора почти паракомплексной структуры $P_{d\omega_2}$ выполняется свойство согласованности с формой ω_2 :

$$\omega_2(P_{d\omega_2} X, P_{d\omega_2} Y) = -\omega_2(X, Y).$$

Определим ассоциированную метрику $g_{d\omega_2}(X, Y) = \omega_2(X, P_{d\omega_2} Y)$. Мы получаем семейство полу-паракэлеровых структур $(\omega_2, P_{d\omega_2}, g_{d\omega_2})$, зависящее от 11 параметров w_{ij} . Вычисления показывают, что ассоциированная метрика $g_{d\omega_2}$ имеет ненулевую скалярную кривизну:

$$S(\omega_2) = -\frac{w_{46}^2}{(w_{35}w_{46} - w_{36}w_{45})(w_{12}w_{46} - w_{14}w_{26} + w_{16}w_{24})}.$$

При вычислении геометрических характеристик псевдоримановой метрики $g_{d\omega_2}$ получаются очень сложные выражения. Поэтому рассмотрим частный случай обращения в нуль ряда параметров w_{ij} . Во-первых, заметим, что тензор $P_{d\omega_2}$ и скалярная кривизна $R(\omega_2)$ не зависят от параметров w_{23} и w_{34} . Будем считать их нулевыми. Кроме того, из требования равенства нулю максимального числа компонент тензора Нейенхейса получаем: $w_{46} \neq 0$, $w_{26} = 0$, $w_{36} = 0$, $w_{45} = 0$. В этом случае имеем более простое выражение для ω_2 и $P_{d\omega_2}$:

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & w_{12} & 0 & w_{14} & 0 & w_{16} \\ -w_{12} & 0 & 0 & w_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{35} & 0 \\ -w_{14} & -w_{24} & 0 & 0 & 0 & w_{46} \\ 0 & 0 & -w_{35} & 0 & 0 & 0 \\ -w_{16} & 0 & 0 & -w_{46} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{d\omega_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2w_{16}}{w_{46}} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{2w_{24}}{w_{46}} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда метрический тензор $g_{d\omega_2}$ имеет следующий тензор Риччи и скалярную кривизну:

$$Ric = \frac{w_{46}^2}{2w_{35}(w_{12}w_{46} + w_{16}w_{24})} \begin{bmatrix} -\frac{2w_{14}w_{16}}{w_{46}} & w_{12} & 0 & -w_{14} & 0 & w_{16} \\ w_{12} & 0 & 0 & -w_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{35} & 0 \\ -w_{14} & -w_{24} & 0 & 0 & 0 & w_{46} \\ 0 & 0 & w_{35} & 0 & 0 & 0 \\ w_{16} & 0 & 0 & w_{46} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S = \frac{w_{46}^2}{w_{35}(w_{12}w_{46} + w_{16}w_{24})}.$$

Полукэлэровы структуры. В этом разделе рассмотрим комплексную структуру на $\mathfrak{g}_1$, найденную в работе Маггина [8]:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{36} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $\xi_{36} = \pm 1$. Остальные комплексные структуры на $\mathfrak{g}_1$ получаются действием группы автоморфизмов. Возьмем для определенности $\xi_{36} = 1$.

Рассмотрим 2-формы $\omega = w_{ij}e^i \wedge e^j$, согласованные с оператором J , $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ и обладающие свойством полукэлэровости $\omega \wedge d\omega = 0$. Существует четыре типа таких 2-форм:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= e^1 \wedge \left(w_{12}e^2 + w_{13}e^3 - \frac{w_{13}w_{45}}{w_{34}}e^5 + \frac{w_{13}w_{35}}{w_{34}}e^6 \right) + e^2 \wedge \left(\frac{w_{13}w_{35}}{w_{34}}e^3 + \frac{w_{13}w_{45}}{w_{34}}e^4 - w_{13}e^6 \right) + \\ &\quad + e^3 \wedge (w_{34}e^4 + w_{35}e^5 + w_{36}e^6) + e^4 \wedge (w_{45}e^5 - w_{35}e^6) + w_{34}e^5 \wedge e^6, \\ \omega_2 &= e^1 \wedge \left(w_{12}e^2 - \frac{w_{23}w_{45}}{w_{35}}e^5 + w_{23}e^6 \right) + e^2 \wedge \left(w_{23}e^3 + \frac{w_{23}w_{45}}{w_{35}}e^4 \right) + \\ &\quad + e^3 \wedge (w_{35}e^5 + w_{36}e^6) + e^4 \wedge (w_{45}e^5 - w_{35}e^6), \\ \omega_3 &= e^1 \wedge \left(w_{12}e^2 - \frac{w_{15}w_{34}}{w_{45}}e^3 + w_{15}e^5 \right) + e^2 \wedge \left(-w_{15}e^4 + \frac{w_{15}w_{34}}{w_{45}}e^6 \right) + \\ &\quad + e^3 \wedge (w_{34}e^4 + w_{36}e^6) + w_{45}e^4 \wedge e^5 + w_{34}e^5 \wedge e^6, \\ \omega_4 &= e^1 \wedge (w_{12}e^2 + w_{13}e^3) - w_{13}e^2 \wedge e^6 + e^3 \wedge (w_{34}e^4 + w_{36}e^6) + w_{34}e^5 \wedge e^6, \end{aligned}$$

В результате получаем четыре семейства полукэлэровых структур $(J, \omega_k, g_{\omega_k})$, где $g_{\omega_k}(X, Y) = \omega_k(X, JY)$. Для каждого из них легко вычисляются геометрические характеристики ассоциированной метрики g_{ω_k} .

Рассмотрим более подробно последнее решение ω_4 . Ассоциированная псевдо-риманова метрика $g_{\omega_4}(X, Y) = \omega_4(X, JY)$ имеет следующий тензор Риччи:

$$Ric = \frac{1}{2w_{34}^2 w_{12}} \begin{bmatrix} Ric_{11} & -w_{34}^2 w_{12} & 0 & -3w_{13} w_{36} w_{34} & 0 & -2w_{36}^2 w_{13} \\ -w_{34}^2 w_{12} & Ric_{22} & 0 & 0 & -w_{13} w_{36} w_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -w_{36} w_{34}^2 \\ -3w_{13} w_{36} w_{34} & 0 & 0 & 3w_{36} w_{34}^2 & 0 & 2w_{36}^2 w_{34} \\ 0 & -w_{13} w_{36} w_{34} & 0 & 0 & w_{36} w_{34}^2 & 0 \\ -2w_{36}^2 w_{13} & 0 & -w_{36} w_{34}^2 & 2w_{36}^2 w_{34} & 0 & 2w_{36}^3 \end{bmatrix},$$

где $Ric_{11} = w_{36}(w_{12}w_{36} + 3w_{13}^2)$, $Ric_{22} = (w_{12}w_{36} + w_{13}^2)w_{36}$, и скалярную кривизну

$$S = \frac{w_{36}^2}{w_{34}^2 w_{12}}.$$

Полученные результаты для группы G_1 сформулируем в следующем виде.

Теорема 1. *Группа G_1 , не допускающая левоинвариантных симплектических структур, имеет многопараметрические семейства левоинвариантных полукэлеровых 2-форм ω с невырожденным дифференциалом $d\omega$. 3-форме $d\omega$ инвариантно соответствует почти паракэлера структура (1), которая вместе с ω образует полу-паракэлерову структуру $(\omega, P_{d\omega}, g_\omega)$, где $g_\omega(X, Y) = \omega(X, P_{d\omega}Y)$. Группа G_1 имеет также четыре многопараметрические семейства полу-кэлеровых структур (ω, J, g) , где J – комплексная структура (2) и $g(X, Y) = \omega(X, JY)$.*

2. Группа Ли G_2 . Это вторая особая группа, которая не допускает симплектических структур. Алгебра Ли определяется следующими коммутационными соотношениями: $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_2, e_4] = e_6$. Эта алгебра Ли разложимая: $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}e_3$, где $\mathfrak{h}$ – подалгебра, порожденная векторами e_1, e_2, e_4, e_5, e_6 . Имеет смысл переобозначить векторы базиса так, чтобы $\mathfrak{h}$ была образована первыми векторами:

$$e_1 \mapsto e_1, e_2 \mapsto e_2, e_4 \mapsto e_3, e_5 \mapsto e_4, e_6 \mapsto e_5, e_3 \mapsto e_6.$$

Тогда коммутационные соотношения будут выглядеть так:

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_2, e_3] = e_5.$$

Центр алгебры Ли: $Z = \mathbb{R}\{e_4, e_5, e_6\}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ является полупрямым произведением трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{h}_3$ и коммутативной подалгебры $\mathbb{R}^3$:

$$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h}_3 \ltimes \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\{e_1, e_3, e_4\} \ltimes \mathbb{R}\{e_2, e_5, e_6\}.$$

Поэтому на $\mathfrak{g}_2$ существует интегрируемая паракомплексная структура

$$P = \text{diag}\{+1, -1, +1, +1, -1, -1\}.$$

Выбор невырожденной полукэлеровой 2-формы ω . Для общей формы $\omega = w_{ij} e^i \wedge e^j$ квадрат оператора Хитчина формы $d\omega$ равен нулю при всех значениях параметров. Свойство полукэлеровости $\omega \wedge d\omega = 0$ выполняется при следующих условиях:

$$\begin{aligned} -w_{14}w_{56} + w_{15}w_{46} - w_{16}w_{45} &= 0, & -w_{24}w_{56} + w_{25}w_{46} - w_{26}w_{45} &= 0, \\ -w_{34}w_{56} + w_{35}w_{46} - w_{36}w_{45} &= 0. \end{aligned}$$

Существует только одно решение этой системы уравнений для невырожденной 2-формы ω . Тогда форма ω имеет вид:

$$\begin{aligned} \omega &= e^1 \wedge (w_{12} e^2 + w_{13} e^3 + w_{14} e^4 + w_{15} e^5 + w_{16} e^6) + \\ &+ e^2 \wedge (w_{23} e^3 + w_{24} e^4 + w_{25} e^5 + w_{26} e^6) + e^3 \wedge (w_{34} e^4 + w_{35} e^5 + w_{36} e^6). \end{aligned} \quad (3)$$

Напомним, что на $\mathfrak{g}_2$ существует естественная паракомплексная структура $P = \text{diag}\{+1, -1, +1, +1, -1, -1\}$. Условие согласованности $\omega(PX, PY) = -\omega(X, Y)$ формы ω и P выполняется при следующих значениях параметров:

$$w_{13} = 0, w_{14} = 0, w_{25} = 0, w_{26} = 0, w_{34} = 0.$$

Тогда полукэлерава форма ω принимает вид:

$$\omega = e^1 \wedge (w_{12} e^2 + w_{15} e^5 + w_{16} e^6) + e^2 \wedge (w_{23} e^3 + w_{24} e^4) + e^3 \wedge (w_{35} e^5 + w_{36} e^6). \quad (4)$$

В этом случае можно определить ассоциированную метрику $g(X, Y) = \omega(X, PY)$. В результате получается полу-паракэлерава структура (ω, P, g) с Риччи-плоской псевдоримановой метрикой g .

Выбор согласованной комплексной структуры. Практически невозможно найти комплексную структуру, согласованную с общей полукэлеровой 2-формой (3) и даже с (4). Поэтому выберем из семейства 2-форм (4) невырожденную и наиболее близкую к замкнутой форме. Мы видим, что такая форма обращается в нуль на центре $Z = \mathbf{R}\{e_4, e_5, e_6\}$ алгебры Ли. В нашем случае мы имеем

$$de^1 = 0, de^2 = 0, de^6 = 0, de^3 = -e^1 \wedge e^2, de^4 = -e^1 \wedge e^3, de^5 = -e^2 \wedge e^3.$$

Из этих равенств легко видеть, что слагаемые $w_{12}e^1 \wedge e^2$, $w_{13}e^1 \wedge e^3$, $w_{23}e^2 \wedge e^3$, $w_{16}e^1 \wedge e^6$ не влияют на выражение внешнего дифференциала $d\omega$. Поэтому будем считать нулевыми w_{12} , w_{13} , w_{23} и w_{16} . Тогда форма ω принимает вид:

$$\omega = w_{15} e^1 \wedge e^5 + w_{24} e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge (w_{35} e^5 + w_{36} e^6).$$

Такая форма является невырожденной при $w_{15}w_{24}w_{36} \neq 0$. Это условие не содержит w_{35} . Поэтому будем также считать, что $w_{35} = 0$. Получаем следующую невырожденную полукэлерову 2-форму:

$$\omega = w_{15} e^1 \wedge e^5 + w_{24} e^2 \wedge e^4 + w_{36} e^3 \wedge e^6.$$

Перенормировкой векторов базиса алгебры Ли эту форму можно привести к виду:

$$\omega = e^1 \wedge e^5 - e^2 \wedge e^4 - e^3 \wedge e^6. \quad (5)$$

Теперь будем искать нильпотентную комплексную структуру $J = (\psi_{ij})$, согласованную с полученной полукэлеровой формой (5).

Условие согласованности $\omega(X, JY) + \omega(JX, Y) = 0$ выполняется при следующих условиях на параметры:

$$\begin{aligned} \psi_{52} = -\psi_{41}, \psi_{61} = -\psi_{53}, \psi_{54} = \psi_{21}, \psi_{55} = -\psi_{11}, \psi_{56} = \psi_{31}, \psi_{62} = \psi_{43}, \psi_{44} = -\psi_{22}, \psi_{45} = \psi_{12}, \\ \psi_{46} = -\psi_{32}, \psi_{64} = -\psi_{23}, \psi_{65} = \psi_{13}, \psi_{66} = -\psi_{33}, \psi_{25} = -\psi_{14}, \psi_{26} = \psi_{34}, \psi_{16} = -\psi_{35}. \end{aligned}$$

Рассмотрим возрастающую последовательность J -инвариантных идеалов: $\mathfrak{a}_0(J) = 0$,

$$\mathfrak{a}_s(J) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}_{s-1}(J) \text{ и } [JX, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}_{s-1}(J)\}, s \geq 1.$$

В частности, идеал $\mathfrak{a}_1(J)$ лежит в центре и имеет размерность не менее двух. В нашем случае мы имеем $\mathfrak{a}_1(J) \subset Z = \mathbf{R}\{e_4, e_5, e_6\}$ размерности 2. Из коммутационных соотношений $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_5$ следует, что $\mathfrak{a}_2(J) = \mathbf{R}\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$ и $\mathfrak{a}_3(J) = \mathfrak{g}_2$. С учетом свойства согласованности получаем следующий вид матрицы нильпотентной почти комплексной структуры J :

$$J = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & 0 & 0 & \psi_{36} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & -\psi_{22} & \psi_{12} & -\psi_{32} \\ \psi_{51} & -\psi_{41} & \psi_{53} & \psi_{21} & -\psi_{11} & \psi_{31} \\ -\psi_{53} & \psi_{43} & \psi_{63} & 0 & 0 & -\psi_{33} \end{bmatrix}$$

при значениях параметров

$$\psi_{13} = 0, \psi_{14} = 0, \psi_{15} = 0, \psi_{35} = 0, \psi_{23} = 0, \psi_{24} = 0, \psi_{34} = 0.$$

Решаем две системы уравнений: $J^2 = -Id$ и $N_J = 0$. В результате получаем следующую левоинвариантную комплексную структуру:

$$J = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{12}} & -\psi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_1^3 & \psi_{32} & \psi_{33} & 0 & 0 & -\frac{\psi_{33}^2+1}{\psi_{63}} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{11} & \psi_{12} & -\psi_{32} \\ J_1^5 & -\psi_{41} & J_3^5 & -\frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{12}} & -\psi_{11} & J_6^5 \\ J_1^6 & \psi_{43} & \psi_{63} & 0 & 0 & -\psi_{33} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где J_n^k – рациональные функции параметров ψ_{ij} :

$$J_1^3 = J_6^5 = \frac{\psi_{11}\psi_{32}\psi_{63} - \psi_{32}\psi_{33}\psi_{63} + \psi_{33}^2\psi_{43} + \psi_{43}}{\psi_{12}\psi_{63}},$$

$$J_1^5 = \frac{\psi_{11}^2\psi_{42}\psi_{63} - 2\psi_{11}\psi_{12}\psi_{41}\psi_{63} - \psi_{32}^2\psi_{63}^2 + 2\psi_{32}\psi_{33}\psi_{43}\psi_{63} - \psi_{33}^2\psi_{43}^2 + \psi_{42}\psi_{63} - \psi_{43}^2}{\psi_{12}^2\psi_{63}},$$

$$J_1^6 = -J_3^5 = \frac{\psi_{11}\psi_{43} - \psi_{32}\psi_{63} + \psi_{33}\psi_{43}}{\psi_{12}}.$$

Пусть $g_J(X, Y) = \omega(X, JY)$ – ассоциированная метрика. Получаем семейство полукэлеровых структур (ω, J, g_J) с Риччи-плоской псевдоримановой метрикой g_J .

Теорема 2. *Группа G_2 , не допускающая левоинвариантных симплектических структур, допускает многопараметрическое семейство левоинвариантных полупаракэлеровых структур (ω, P, g) с интегрируемой паракомплексной структурой $P = \text{diag}\{+1, -1, +1, +1, -1, -1\}$ и псевдоримановой Риччи-плоской метрикой $g(X, Y) = \omega(X, PY)$. Группа G_2 допускает также многопараметрическое семейство полукэлеровых структур (ω, J, g_J) с фундаментальной формой (5), нильпотентной комплексной структурой (6) и ассоциированной псевдоримановой Риччи-плоской метрикой g_J .*

3. Группа Ли G_3 . Это третья особая группа, которая не допускает симплектических структур, но имеет комплексные. Коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathfrak{g}_3$ по классификации [2]: $[e_1, e_2] = e_6$, $[e_3, e_4] = e_6$. Переобозначим e_6 на e_5 , тогда

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_3, e_4] = e_5.$$

Алгебра Ли разложима: $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{h} \oplus \mathbf{R}e_6$. Здесь алгебра $\mathfrak{h}$ – это центральное расширение $\mathbf{R}^4$ со стандартной симплектической формой $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ и $\mathbf{R}e_5$.

Напомним, что если имеется симплектическая алгебра Ли $(\mathfrak{n}, \omega)$, то центральное расширение $\mathfrak{h} = \mathfrak{n} \times {}_\omega \mathbf{R}$ есть алгебра Ли, в которой скобки Ли задаются следующим образом:

$$[X, \xi]_{\mathfrak{h}} = 0, [X, Y]_{\mathfrak{h}} = [X, Y]_{\mathfrak{n}} + \omega(X, Y)\xi$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{n}$, где $\xi = d/dt$ – единичный вектор из $\mathbf{R}$.

В нашем случае $\mathfrak{h} = \mathbf{R}^4 \times {}_{\omega}\mathbf{Re}_5$, $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ и $\xi = e_5$. Поскольку форма ω невырожденная, то $\mathfrak{h}$ является контактной алгеброй Ли [9] с контактной формой $\eta = e^5$ и полем Рибба $\xi = e_5$. Определим аффином φ на $\mathfrak{h}$ следующим естественным образом:

$$\varphi(e_1) = e_2, \varphi(e_2) = -e_1, \varphi(e_3) = e_4, \varphi(e_4) = -e_3, \varphi(e_5) = 0.$$

Ассоциированная метрика для контактной структуры η полностью определяется аффином φ по формуле:

$$g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Напомним, что контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на многообразии M называется структурой Сасаки, если интегрируема почти комплексная структура J на $M \times \mathbf{R}$, определенная формулой

$$J(X, \hat{f}\partial t) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\partial t).$$

Здесь касательный вектор к $M \times \mathbf{R}$ представлен в виде пары $(X, \hat{f}\partial t)$, где X – касательный вектор к M и $\hat{f}\partial t$ – касательный вектор к $\mathbf{R}$, ∂t – базисный вектор на $\mathbf{R}$. В нашем случае $M = G_3$, $\xi = e_5$, $M \times \mathbf{R} = G_3 \times \mathbf{Re}_6$. Тогда почти комплексную структуру на $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{h} \oplus \mathbf{Re}_6$ определим формулой

$$J(X, fe_6) = (\varphi X - fe_5, \eta(X)e_6).$$

В этом случае

$$J(e_i) = J(e_i, 0e_6) = (\varphi e_i, \eta(e_i)e_6) = (\varphi e_i, 0) = \varphi(e_i), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$J(e_5) = J(e_5, 0e_6) = (\varphi e_5, \eta(e_5)e_6) = (0, e_6) = e_6, \quad J(e_6) = J(0 - e_5, \eta(0)e_6) = (-e_5, 0) = -e_5.$$

Вычисления показывают, что данная почти комплексная структура J интегрируема. Поэтому (η, ξ, φ, g) – структура Сасаки на $\mathfrak{h}$.

Определим 2-форму на $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{h} \oplus \mathbf{Re}_6$

$$\omega_c = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 + e^5 \wedge e^6 \quad (7)$$

и ассоциированную метрику $g(X, Y) = \omega_c(X, JY)$. Получаем эрмитову структуру (ω_c, J, g) скалярной кривизны $S = -1$ и с тензором Риччи вида:

$$Ric = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полукэлеровы структуры. К сожалению, 2-форма (7) не обладает свойством полукэлеровости: $\omega \wedge d\omega = 0$. Однако следующая 2-форма

$$\omega = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4 + e^5 \wedge e^6 \quad (8)$$

является полукэлеровой.

Найдем согласованную с формой (8) нильпотентную комплексную структуру. Берем общую почти комплексную структуру $J = (\psi_{ij})$ и потребуем условия согласования $\omega(X, JY) + \omega(JX, Y) = 0$, инвариантности центра, свойства $J^2 = -Id$ и выполнения условия интегрируемости $N_J = 0$.

Инвариантность центра $Z = \mathbf{R}\{e_5, e_6\}$ имеет место при следующих значениях параметров:

$$\psi_{15} = 0, \psi_{16} = 0, \psi_{25} = 0, \psi_{26} = 0, \psi_{35} = 0, \psi_{36} = 0, \psi_{45} = 0, \psi_{46} = 0.$$

Согласованность выполняется при следующих условиях на параметры:

$$\psi_{22} = -\psi_{11}, \psi_{41} = -\psi_{23}, \psi_{24} = \psi_{31}, \psi_{61} = 0, \psi_{51} = 0, \psi_{42} = \psi_{13}, \psi_{14} = -\psi_{32}, \psi_{62} = 0, \psi_{52} = 0, \\ \psi_{44} = -\psi_{33}, \psi_{66} = -\psi_{55}, \psi_{63} = 0, \psi_{64} = 0, \psi_{53} = 0, \psi_{54} = 0.$$

В результате получаем следующий вид матрицы почти комплексной структуры J :

$$J = \begin{bmatrix} -\psi_{22} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} & 0 & 0 \\ -\psi_{24} & \psi_{14} & -\psi_{44} & \psi_{34} & 0 & 0 \\ \psi_{23} & -\psi_{13} & \psi_{43} & \psi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\psi_{66} & \psi_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{65} & \psi_{66} \end{bmatrix}.$$

Потребуем выполнения условия $J^2 = -Id$ и равенства нулю тензора Нейенхейса. Получаем

$$J = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\psi_{11}^2 + 1}{\psi_{12}} & -\psi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} & \psi_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\psi_{33}^2 + 1}{\psi_{34}} & -\psi_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{55} & \psi_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\psi_{55}^2 + 1}{\psi_{56}} & -\psi_{55} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Пусть $g_J(X, Y) = \omega(X, JY)$ – ассоциированная метрика. Получаем семейство полукэлеровых структур (ω, J, g_J) с оператором Риччи

$$Ric = \frac{\psi_{55}^2 + 1}{2\psi_{56}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\psi_{56}\psi_{55}}{\psi_{55}^2 + 1} & 0 \end{bmatrix}$$

и скалярной кривизны $S = \frac{\psi_{55}^2 + 1}{\psi_{56}}$.

Полу-паракэлеровы структуры. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_3$ является полупрямым произведением двух коммутативных подалгебр, порожденных векторами e_1, e_3, e_5 и e_2, e_4, e_6 , соответственно. Поэтому на $\mathfrak{g}_3$ существует интегрируемая паракомплексная структура

$$P = \text{diag}\{+1, -1, +1, -1, +1, -1\}.$$

Условие согласования $\omega(PX, PY) = -\omega(X, Y)$ с 2-формой (8), очевидно, выполняется. Пусть $g(X, Y) = \omega(X, PY)$ – ассоциированная метрика. Получаем семейство полу-паракэлеровых структур (ω, P, g) с Риччи-плоской псевдоримановой метрикой g .

Полученные результаты для группы G_3 сформулируем в следующем виде.

Теорема 3. *Группа G_3 , не допускающая левоинвариантных симплектических структур имеет многопараметрическое семейство (9) левоинвариантных нильпотентных комплексных структур J , согласованных с полукэлеровой 2-формой (8). В этом случае тройка (ω, J, g) , где $g(X, Y) = \omega(X, JY)$, определяет полукэлерову структуру ненулевой кривизны Риччи. Группа G_3 допускает также левоинвариантную полу-паракэлерову Риччи-плоскую структуру.*

Список источников

1. Goze M., Khakimdjano Y., Medina A. Symplectic or contact structures on Lie groups // *Differential Geometry and its Applications*. 2004. V. 21 (1). P. 41–54. doi: 10.1016/j.difgeo.2003.12.006
2. Salamon S. Complex structures on nilpotent Lie algebras // *J. Pure Appl. Algebra*. 2001. V. 157. P. 311–333. doi: 10.1016/S0022-4049(00)00033-5
3. Смоленцев Н.К. Левоинвариантные почти пара-эрмитовы структуры на некоторых шестимерных нильпотентных группах Ли // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 58. С. 41–55. doi: 10.17223/19988621/58/4
4. Gray A., Harvella L.M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear Invariants // *Ann. Math. Pura Appl.* 1980. V. 123. P. 35–58. doi: 10.1007/BF01796539
5. Hitchin N.J. The geometry of three-forms in six dimensions // *J. Diff. Geom.* 2000. V. 55. P. 547–576. doi: 10.4310/jdg/1090341263
6. Cordero L.A., Fernández M., Ugarte L. Pseudo-Kähler metrics on six-dimensional nilpotent Lie algebras // *J. of Geom. and Phys.* 2004. V. 50. P. 115–137. doi: 10.1016/J.GEOMPHYS.2003.12.003
7. Алексеевский Д.В., Медори К., Томассини А. Однородные пара-кэлеровы многообразия Эйнштейна // *Успехи математических наук*. 2009. Т. 64, вып. 1 (385). С. 3–50. doi: 10.1070/RM2009v064n01ABEH004591
8. Magnin L. Complex structures on indecomposable 6-dimensional nilpotent real Lie algebras // *Intern. J. of Algebra and Computation*. 2007. V. 17 (1). P. 77–113. doi: 10.1142/S0218196707003500
9. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups // *Diff. Geom. and its Appl.* 2008. V. 26 (5). P. 544–552. doi: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001

References

1. Goze M., Khakimdjano Y., Medina A. (2004) Symplectic or contact structures on Lie groups. *Differential Geometry and its Applications*. 21(1). pp. 41–54. DOI: 10.1016/j.difgeo.2003.12.006.
2. Salamon S. (2001) Complex structures on nilpotent Lie algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*. 157. pp. 311–333. DOI: 10.1016/S0022-4049(00)00033-5.
3. Smolentsev N.K. (2019) Left-invariant almost para-hermitian structures on some six-dimensional nilpotent lie groups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 58. pp. 41–55. DOI: 10.17223/19988621/58/4.
4. Gray A., Harvella L.M. (1980) The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 123. pp. 35–58. DOI: 10.1007/BF01796539.
5. Hitchin N.J. (2000) The geometry of three-forms in six dimensions. *Journal of Differential Geometry*. 55. pp. 547–576. DOI: 10.4310/jdg/1090341263.
6. Cordero L.A., Fernández M., Ugarte L. (2004) Pseudo-Kähler metrics on six-dimensional nilpotent Lie algebras. *Journal of Geometry and Physics*. 50. pp. 115–137. DOI: 10.1016/J.GEOMPHYS.2003.12.003.

7. Alekseevsky D.V., Medori C., Tomassini A. (2009) Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds. *Russian Mathematical Surveys*. 64(1). pp. 1–43. DOI: 10.1070/RM2009v064n01ABEH004591.
8. Magnin L. (2007) Complex structures on indecomposable 6-dimensional nilpotent real Lie algebras. *International Journal of Algebra and Computation*. 17(1). pp. 77–113. DOI: 10.1142/S0218196707003500.
9. Diatta A. (2008) Left invariant contact structures on Lie groups. *Differential Geometry and its Applications*. 26(5). pp. 544–552. DOI: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001.

Сведения об авторах:

Смоленцев Николай Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики Кемеровского государственного университета (Кемерово, Россия). E-mail: smolennk@mail.ru

Чернова Карина Владиславовна – студент Института фундаментальных наук Кемеровского государственного университета (Кемерово, Россия). E-mail: karina.chernova.2002@mail.ru

Information about the authors:

Smolentsev Nikolay K. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Department of Fundamental Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: smolennk@mail.ru

Chernova Karina V. (Student of Institute of Fundamental Sciences, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: karina.chernova.2002@mail.ru

Статья поступила в редакцию 16.05.2024; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 16.05.2024; accepted for publication 09.06.2025

Научная статья

УДК 517.55

MSC: 32A10, 32A20, 32A26, 32A27

doi: 10.17223/19988621/95/5

Формула Вейля для матричных функций**Баходир Аллабердиевич Шаимкулов¹,
Мафтуна Комилжоновна Расулова²**¹ *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*² *Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
Ташкент, Узбекистан*¹ *shoimkba@rambler.ru*² *maftunakomiljonovnaa@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается локальный вычет в пространстве матриц порядка $m \times m$, и определен матричный полиэдр в этом пространстве. С помощью локального вычета получены формула Вейля и ее модификация для голоморфной функции в матричном полиэдре.

Ключевые слова: матричный поликруг, матричный полиэдр, формула Вейля, локальный вычет

Для цитирования: Шоимкулов Б.А., Расулова М.К. Формула Вейля для матричных функций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 52–58. doi: 10.17223/19988621/95/5

Original article

The Weyl formula for matrix functions**Bakhodir A. Shoimkulov¹, Maftuna K. Rasulova²**¹ *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*² *V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan,
Tashkent, Uzbekistan*¹ *shoimkba@rambler.ru*² *maftunakomiljonovnaa@gmail.com*

Abstract. Let $C[m \times m]$ be the space of square $[m \times m]$ matrices, and let $\mathbb{C}^n[m \times m]$ be the direct product of n copies of the space $C[m \times m]$. In this work, a new integral representation for the local residue in the space $\mathbb{C}^n[m \times m]$ is given, based on the Bochner–Hua–Loken integral formula for the matrix polydisk. Moreover, a matrix polyhedron in this space is defined. It is worth noting that the classical Weyl integral representation in the space $\mathbb{C}^n$ is related to transformation formula for Grothendieck’s local residue and can be derived using this formula from the multiple Cauchy integral representation for the polydisk. We apply the same approach to the local residue in the space $\mathbb{C}^n[m \times m]$ and

obtain a generalization of the Bochner–Hua–Loken integral representation for the matrix polydisk, which shares the same nature as the well-known Weyl integral representations in polyhedra. In the obtained Weyl integral representation, the integral is taken over the skeleton of the polyhedron, and it is reduced to the classical Weyl formula for the polyhedron in $C[m \times m]$ when $n = 1$. Furthermore, a modification of the Weyl integral formula is derived, in which the integral is taken over the face of the polyhedron in the space $C^n[m \times m]$.

Keywords: matrix polydisk, matrix polyhedron, Weyl formula, local residue

For citation: Shoimkulov, B.A., Rasulova, M.K. (2025) The Weyl formula for matrix functions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 52–58. doi: 10.17223/19988621/95/5

Введение

Пусть $\mathbb{C}[m \times m]$ – пространство $[m \times m]$ -матриц, $T_r = \{z \in \mathbb{C}[m \times m] : r^2 I - zz^* > 0\}$ – матричный круг радиуса r , $r > 0$, $S(T_r) = \{z \in \mathbb{C}[m \times m] : zz^* = r^2 I\}$ – его остов, где I – единичная матрица порядка m , $z^* = \bar{z}'$ – матрица, комплексно сопряженная к транспонированной матрице z . Неравенство $H > 0$ для эрмитовой матрицы означает, как обычно, что данная матрица положительно определена.

Матричным поликругом радиуса r в пространстве $\mathbb{C}^n[m \times m]$ называется прямое произведение матричных кругов

$$T_{n,r} = \left\{ z = (z^1, z^2, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n[m \times m] : r^2 I - z^j (z^j)^* > 0, j = \overline{1, n} \right\},$$

множество $S_{n,r} = \left\{ z = (z^1, z^2, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n[m \times m] : r^2 I - z^j (z^j)^* = 0, j = \overline{1, n} \right\}$ называется остовом матричного поликруга $T_{n,r}$.

Известно [1. С. 37], что если функция $F(z^1, \dots, z^n)$ голоморфна в замыкании матричного поликруга $T_{n,r}$, то для любой $z \in T_{n,r}$ верна интегральная формула

$$F(z) = \int_{S_{n,r}} \frac{F(\xi) d\mu(\xi)}{\prod_{j=1}^n \det^m(\xi^j - z^j)}, \quad (1)$$

где, $d\mu(\xi)$ – мера Хаара на остове $S_{n,r}$.

Формула (1) обобщает интегральную Бохнера–Хуа Локена для матричного круга ([2. Гл. 4]) и превращается в нее, если $n = 1$.

Пусть U_a – некоторая окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n[m \times m]$, $f = (f^1, \dots, f^n) : \mathbb{C}^n[m \times m] \rightarrow \mathbb{C}^n[m \times m]$ – голоморфное отображение в U_a , и f имеет в точке a изолированный нуль.

Обозначим через $\Gamma_{f,\varepsilon} = \{z \in U_a : f^j(z) (f^j(z))^* = \varepsilon^2 I, j = \overline{1, n}, \varepsilon - \text{достаточно малое}\}$ цикл, содержащий нули отображения f и лежащий в U_a .

Для ростка $h: U_a \rightarrow \mathbb{C}$ и отображения f действие локального вычета в точке a определяется по формуле [3]

$$res_a^f(h) = \int_{\Gamma_{f,a}} \frac{hd\mu(\xi)}{\prod_{j=1}^n \det^m f^j(\xi)}. \quad (2)$$

Из теоремы Сарда следует, что циклы $\Gamma_{f,\varepsilon}$ для почти всех достаточно малых ε являются гладкими многообразиями, поэтому в этом определении можно считать, что $\Gamma_{f,\varepsilon}$ – гладкий цикл.

В данной работе мы получим обобщение интегрального представления (1), которое имеет такую же природу, как и известные интегральные представления Вейля в полиэдрах (см.: [4. С. 205; 5; 6]).

Введем определение специального аналитического полиэдра в пространстве $\mathbb{C}^n[m \times m]$.

Пусть $G \subset \mathbb{C}^n[m \times m]$ – некоторая область, и на G задано голоморфное отображение

$$f: G \rightarrow \mathbb{C}^n[m \times m].$$

Обозначим через $f^{-1}(T_{n,r}) = \{z \in G: r^2 I - f^j(z)(f^j(z))^* > 0, j = \overline{1, n}\}$ прообраз матричного поликруга $T_{n,r}$. Если множество $f^{-1}(T_{n,r})$ компактно в G , то оно называется матричным полиэдрическим множеством, ассоциированным с отображением f .

Связная компонента матричного полиэдрического множества $f^{-1}(T_{n,r})$ называется специальным аналитическим матричным полиэдром, обозначим его $\Pi_{f,r}$. Остовом специального аналитического матричного полиэдра $\Pi_{f,r}$ называется множество

$$\Gamma_{f,r} = \{\xi \in G: f^j(z)(f^j(z))^* = r^2 I, j = \overline{1, n}\}.$$

По теореме Хефера [3] для некоторой окрестности U матричного полиэдра $\Pi_{f,r}$ существуют такие функции $P_{s,l,t}^{i,j,k}(\xi, z) \in Hol(U \times U)$, что при всех $(\xi, z) \in (U \times U)$ справедливы равенства

$$f_{ij}^k(\xi) - f_{ij}^k(z) = \sum_{s,l=1}^m \sum_{t=1}^n (\xi_{s,l}^t - z_{s,l}^t) P_{slt}^{ijk}(\xi, z) \quad i, j = \overline{1, m}; k = \overline{1, n}.$$

Обозначим через $H(\xi, z)$ определитель матрицы $\|P_{slt}^{ijk}(\xi, z)\|$ порядка $nm^2 \times nm^2$, строки которой нумеруются тройками i, j, k , а столбцы – тройками s, l, t .

Основные результаты

Теорема 1. Пусть функция h голоморфна в $\overline{\Pi_{f,r}}$. Тогда для любой $z \in \Pi_{f,r}$ верна формула

$$h(z) = \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(\xi)H(\xi, z)d\mu(\xi)}{\det^m(f(\xi) - f(z))}, \quad (3)$$

где $\Gamma_{f,r} = \{z \in G : f(z)f^*(z) = r^2 I\}$ – остов матричного полиэдра $\Pi_{f,r}$;

$$\det^m(f(\xi) - f(z)) = \prod_{k=1}^n \det^m(f^k(\xi) - f^k(z)).$$

В случае $f(z) \equiv z$ формула (3) превращается в формулу Бохнера–Хуа Локена (1) для матричного поликруга, а при $n = 1$ – в формулу Вейля? полученную в работе [5]. Отметим, что аналогичная формула с несколько другим ядром получена в [6] для полиэдра из $\mathbb{C}^n$.

Доказательство теоремы 1. Пусть z – фиксированная точка полиэдра $\Pi_{f,r}$.

Тогда $r^2 I - f^j(z)(f^j(z))^*$, и цикл $\Gamma_{f,r}$ гомологичен в области регулярности подынтегральной формы в (3) циклу

$$\Gamma_{f(\xi)-f(z),\delta} = \left\{ \xi \in \Gamma_{f,r} : (f^j(\xi) - f^j(z))(f^j(\xi) - f^j(z))^* = \delta^2 I, j = \overline{1, n} \right\},$$

где δ – любое достаточно малое положительное число [1. Гл. 6]. В свою очередь, цикл $\Gamma_{f(\xi)-f(z),\delta}$ распадается при малых δ на сумму циклов $\sum \Gamma_v$, где $\Gamma_v = \left\{ \xi \in U_{\xi^{(v)}(z)} : (f^j(\xi) - f^j(z))(f^j(\xi) - f^j(z))^* = \delta^2 I, j = \overline{1, n} \right\}$ – цикл в окрестности нуля $\xi^{(v)}(z)$ отображения $f(\xi) - f(z)$. Заметим, что среди этих нулей есть и $\xi = z$. Известно [4], что определитель $H(\xi, z)$ принадлежит идеалу $I_{\xi^{(v)}(z)}(f(\xi) - f(z))$ для всех $\xi^{(v)}(z) \neq z$. Следовательно, по формулам (1), (2) и формуле преобразования локального вычета [7. С. 31] имеем

$$h(z) = \int_{\Gamma_{f \rightarrow z, \delta}} \frac{h(\xi) d\mu(\xi)}{\prod_{j=1}^n \det^m(\xi^j - z^j)} = \operatorname{res}_{z \in f(\xi)-f(z)} (h(\xi) H(\xi, z)) = \sum_v \operatorname{res}_{\xi^{(v)}(z) \in f(\xi)-f(z)} (h(\xi) H(\xi, z)).$$

Вычеты в последней сумме – это интегралы по циклам Γ_v , сумма которых гомологична циклу $\Gamma_{f,r}$ в области регулярности подынтегральной формы. По теореме Стокса указанная сумма вычетов совпадает с интегралом в (3). Теорема 1 доказана.

Пусть $\Pi_{f,r}$ – матричный полиэдр в области $G \subset \mathbb{C}^n [m \times m]$, соответствующий отображению $f = (f^1, \dots, f^n) : G \rightarrow \mathbb{C}^n [m \times m]$. Зафиксируем натуральное число $0 \leq p \leq n$ и представим f в виде $f = (f', f'')$, где $f' = (f^1, \dots, f^p)$, $f'' = (f^{p+1}, \dots, f^n)$.

Рассмотрим матричный полиэдр

$$\begin{aligned} & \Pi_{f,r+\varepsilon}^{(p)} = \\ & = \left\{ z \in G : r^2 I - f^j(z)(f^j(z))^* > 0, j = \overline{1, p}, (r+\varepsilon)^2 I - f^k(z)(f^k(z))^* > 0, k = \overline{p+1, n} \right\}, \end{aligned}$$

компактно лежащий в G . Указанный полиэдр назовем ε -продолжением матричного полиэдра $\Pi_{f,r}$ вдоль f'' .

Теорема 2. Пусть $\Pi_{f,r}$ – специальный аналитический матричный полиэдр в области $G \subset \mathbb{C}^n [m \times m]$, $\Pi_{f,r+\varepsilon}^{(p)}$ – его ε -продолжение вдоль f'' . Тогда существует

гладкая $\bar{\partial}$ -замкнутая форма $\psi_z^{(p)}$, коэффициенты которой голоморфно зависят от $z \in \Pi_{f,r}$, причем для всякой функции h , голоморфной в замыкании $\Pi_{f,r+\varepsilon}^{(p)}$, и для $z \in \Pi_{f,r}$ верна формула

$$h(z) = \int \frac{\psi_z^{(p)}(\xi)}{\prod_{j=1}^p \det^m(f^j(\xi) - f^j(z))}, \quad (4)$$

где $\Gamma_{f,r}^{(p)} = \left\{ \xi \in \Pi_{f,r}^{(p)} : f^j(\xi)(f^j(\xi))^* = r^2 I, j = \overline{1, p} \right\}$ – грань матричного полиэдра $\Pi_{f,r+\varepsilon}^{(p)}$.

Доказательство теоремы 2. Для каждого $j = \{p+1, \dots, n\}$ построим гладкую в области G функцию $\varphi_j(\xi)$, обладающую свойствами

$$\varphi_j \Big|_{\left\{ (f^j)(f^j)^* \leq r^2 I \right\}} \equiv 0, \quad \varphi_j \Big|_{\left\{ (f^j)(f^j)^* \geq (r+\varepsilon)^2 I \right\}} \equiv 1,$$

и определим форму

$$\psi_z^{(p)}(\xi) = \frac{\bar{\partial} \varphi_{p+1} \wedge \dots \wedge \bar{\partial} \varphi_n \wedge H(\xi, z) d\mu(\xi)}{\prod_{k=p+1}^n \det^m(f^k(\xi) - f^k(z))}, \quad (5)$$

где $H(\xi, z)$ – определитель матрицы, составленный из коэффициентов P_{sl}^{ijk} разложений Хефера для функции f_{ij}^k . В случае $p = n$ считаем $\psi_z^{(p)}(\xi) = H(\xi, z) d\mu(\xi)$.

Если z фиксировано и лежит в $\Pi_{f,r}$, то знаменатель в (5) может обращаться в нуль лишь в тех точках ξ , в которых $r^2 I - f^j(\xi)(f^j(\xi))^* > 0$ хотя бы для одного j от $p+1$ до n . Однако в окрестностях таких точек ξ числитель тождественно равен нулю. Значит, для $z \in \Pi_{f,r}$ форма $\psi_z^{(p)}(\xi)$ гладкая в G . Очевидно, она $\bar{\partial}$ -замкнутая и голоморфно зависит от $z \in \Pi_{f,r}$.

Формулу (4) докажем по индукции по $k = n - p$. Для $k = 0$ формула (4) совпадает с формулой (3). Предположим, что формула (4) верна для $k = n - (p+1)$. Из определения формы $\psi_z^{(p)}$ следует, что такая формула верна и в

$$\Pi_{f,r+\varepsilon} = \left\{ z \in G : r^2 I - f^j(z)(f^j(z))^* > 0, j \neq p+1; (r+\varepsilon)^2 I - f^{p+1}(z)(f^{p+1}(z))^* > 0, \varepsilon > 0 \right\},$$

т.е.

$$h(z) = \int \frac{h(\xi) \psi_z^{(p)}(\xi)}{\prod_{j=1}^{p+1} \det^m(f^j(\xi) - f^j(z))}, \quad z \in \Pi_{f,r+\varepsilon}, \quad (6)$$

с интегрированием по грани

$$\Gamma_{f,r+\varepsilon}^{(p+1)} = \left\{ \xi \in \overline{\Pi_{f,r+\varepsilon}^{(p+1)}} : r^2 I = f^j(\xi)(f^j(\xi))^*, j = \overline{1, p}, (r+\varepsilon)^2 I = f^{(p+1)}(\xi)(f^{(p+1)}(\xi))^* \right\}$$

полиэдра $\Pi_{f,r+\varepsilon}^{(p+1)}$, являющегося ε -продолжением полиэдра $\Pi_{f,r+\varepsilon}$, вдоль $f^n = (f^{p+2}, \dots, f^n)$, или, что то же самое, ε -продолжением полиэдра $\Pi_{f,r}$ вдоль f^n .

Обозначим через Γ^j – j -ю грань полиэдра $\Pi_{f,r+\varepsilon}^{(p)}$ размерности $2m^2n-1$, а через $\Gamma_{j_1, \dots, j_k}$ – грань, равную пересечению $\Gamma^1 \cap \Gamma^2 \cap \dots \cap \Gamma^k$. В этих обозначениях грань $\Gamma_{f,r}^{(p)}$ в (4) совпадает с $\Gamma_{1, \dots, p}$, а грань $\Gamma_{f,r+\varepsilon}^{(p+1)}$ в (6) – с $\Gamma_{1, \dots, p+1}$. Граница $\Gamma_{f,r}^{(p)} = \partial \Gamma_{1, \dots, p}$ равна $\partial \Gamma_{f,r}^{(p)} = \partial \Gamma_{f,r+\varepsilon}^{(p+1)} - \Gamma_{1, \dots, p, p+2} + \dots + \Gamma_{1, \dots, p, n}$.

Заметим, что форма $\psi_z^{(p+1)}(\xi)$ равна нулю на гранях $\Gamma_{1, \dots, p, j}$, $j = p+2, \dots, n$. Далее, функция φ_{p+1} равна единице на $\Gamma_{f,r+\varepsilon}^{(p+1)}$, поэтому в (6) перед формой $\psi_z^{(p+1)}$ можно поставить множитель φ_{p+1} , а $\Gamma_{f,r+\varepsilon}^{(p+1)}$ заменить на $\partial \Gamma_{f,r}^{(p)}$.

После умножения на φ_{p+1} подынтегральная форма в (6) станет гладкой на γ при всех $z \in \Pi_{f,r}$. Применяя формулу Стокса, получаем

$$h(z) = \int_{\Gamma_{f,r}^{(p)}} h(\xi) \frac{\bar{\partial} \varphi_{p+1} \wedge \psi_z^{(p+1)}(\xi)}{\prod_{j=1}^{p+1} \det^m(f^j(\xi) - f^j(z))}, z \in \Pi_{f,r}$$

т.е., с учетом определения $\psi_z^{(p)}$, формулу (4).

Список источников

1. Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шоимкулов Б.А. Анализ в матричных областях. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2017.
2. Хуа Локен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Цих А.К., Шоимкулов Б.А. Интегральные реализации вычета Гротендика и его преобразование при композициях // Вестник Красноярского государственного университета. Сер. Физико-математические науки. 2005. Вып. 1. С. 151–155.
4. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976. Т. 2.
5. Шоимкулов Б.А. Интегральное представление Коши-Вейля для матричных функций // Известия высших учебных заведений. Математика. 2003. № 2. С. 68–71.
6. Шоимкулов Б.А., Махкамов Э.М. Об одном аналоге интегральной формулы Вейля для полиэдров с не кусочно гладкой границей // Сибирский математический журнал. 2011. Т. 52, № 2. С. 476–479.
7. Цих А.К. Многомерные вычеты и их применения. Новосибирск: Наука, 1988.

References

1. Khudayberganov G., Kytmanov A., Shoimkulov B. (2011) Analiz v matrichnykh oblastiakh [Analysis in matrix domains]. Krasnoyarsk: Siberian Federal University.
2. Hua L.K. (1963) *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in Classical Domains*, American Mathematical Society.
3. Tsikh A.K. Shoimkulov B.A. (2005) Integral realization of the Grothendieck residue and its transformation under composition. *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskiye nauki*. 1. pp. 140–144.

4. Shabat B.V. (1992) *Introduction to complex analysis. Part II*. American Mathematical Society.
5. Shaimkulov B.A. (2003) The integral Cauchy–Weil representation for matrix functions. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*. 47(2), pp. 68–71
6. Shaimkulov B.A., Makhkamov E.M. (2011) On an analog of the Weyl integral formula for the polyhedra having not piecewise smooth boundaries *Siberian Mathematical Journal*. 52(2). pp. 377–380.
7. Tsikh A.K. (1992) *Multidimensional Residues and Their Applications*. American Mathematical Society.

Сведения об авторах:

Шаймкулов Баходир Аллабердиевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Национального университета Узбекистана (Ташкент, Узбекистан). E-mail: shoimkba@rambler.ru

Расулова Мафтуна Комилжоновна – стажер Института математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Узбекистан) E-mail: maftunakomiljonovnaa@gmail.com

Information about the authors:

Shoimkulov Bakhodir A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Analysis at the National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: shoimkba@rambler.ru

Rasulova Maftuna K. (Junior Researcher at the V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: maftunakomiljonovnaa@gmail.com

Статья поступила в редакцию 16.11.2024; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 16.11.2024; accepted for publication 09.06.2025

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 533, 536.46

doi: 10.17223/19988621/95/6

**Влияние электрического поля
на диффузионное горение метана****Михаил Владимирович Агафонцев¹, Ася Алексеевна Старосельцева²,
Владимир Владимирович Рейно³, Егор Леонидович Лобода⁴**^{1, 2, 4} *Томский государственный университет, Томск, Россия*^{1, 3, 4} *Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева Сибирского отделения
Российской Академии наук, Томск, Россия*¹ *amv@mail.tsu.ru*² *222-pro@mail.ru*³ *reyno@iao.ru*⁴ *loboda@mail.tsu.ru*

Аннотация. Рассмотрено влияние электрического поля на факел пламени метана. Подготовлен экспериментальный стенд, позволяющий проводить физическое моделирование диффузионного горения метана при наличии внешних источников возмущений в виде электрического поля различной интенсивности. Проведен анализ полей температуры в факеле пламени метана с применением метода инфракрасной термографии. Получено, что при внешнем воздействии электрического поля до 4 кВ происходит уменьшение максимальной амплитуды пульсации температуры, а последующее увеличение напряжения приводит к резкому падению максимальной амплитуды до 4 К. Пульсации температуры связаны со структурой течения в факеле и с пульсациями гидродинамических параметров.

Ключевые слова: термография, пульсации температуры, структура пламени, метан, спектр изменения температуры

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 24-71-10029.

Для цитирования: Агафонцев М.В., Старосельцева А.А., Рейно В.В., Лобода Е.Л. Влияние электрического поля на диффузионное горение метана // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 59–71. doi: 10.17223/19988621/95/6

Effect of an electric field on methane diffusion combustion

Mikhail V. Agafontsev¹, Asya A. Starosel'tseva²,
Vladimir V. Reyno³, Egor L. Loboda⁴

^{1, 2, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation
^{1, 3, 4} V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics of Siberian Branch
of the Russian Academy of Science, Tomsk, Russian Federation

¹ amv@mail.tsu.ru

² 222-pro@mail.ru

³ reyno@iao.ru

⁴ loboda@mail.tsu.ru

Abstract. This paper considers the effect of an electric field on the methane flame plume. The main purpose of this study is to determine the characteristic regimes of the effect of an external electric field on the methane combustion, which are characterized by significant changes in the temperature pulsation spectrum. The temperature distribution in the methane flame plume was analyzed by infrared thermography. When the flame was exposed to an electric field up to a voltage of 4.0 kV, the maximum amplitude of temperature pulsation decreased from 20 K to 12 K. At a voltage of 4.5 kV, a significant reduction in temperature pulsation amplitude was observed up to 4 K. In the voltage range of 5.0 – 8.0 kV, the temperature pulsations in the flame plume were minimal, and there were no characteristic frequency maxima in the spectrum. Further increase of voltage up to 10 kV again led to the appearance of frequency maxima, but they were shifted toward lower frequencies by 3 Hz. The maximum amplitude of the temperature pulsations became equal to 10 Hz, as well as three subsequent harmonics (20, 30, and 40 Hz). The temperature change in the flame plume is related to the flow structure and chemical reactions. This is caused by changes in the main hydrodynamic parameters (velocity, pressure, density, etc.), which in turn affect the transfer coefficients. This fact has an impact on the oxidizer entry into the combustion zone and the chemical reactions occurring in the flame. Thus, the presence of an external electric field has a significant effect on the variation of all the above parameters and leads to changes in the shape and height of the flame, as well as in the characteristic temperatures.

Keywords: thermography, temperature pulsations, flame structure, methane, temperature pulsation spectrum

Acknowledgments: This study was supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-71-10029).

For citation: Agafontsev, M.V., Starosel'tseva, A.A., Reyno V.V., Loboda E.L. (2025) Effect of an electric field on methane diffusion combustion. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 59–71. doi: 10.17223/19988621/95/6

Введение

Проведено множество исследований, посвященных процессам, происходящим при горении метановоздушных смесей. Эффективное сжигание метана и разработка соответствующих методик представляют собой сложную научно-техническую задачу.

Одной из актуальных тем для изучения остается проведение расчетных и экспериментальных работ по поиску различных методов воздействия на факел пламени, которые способствуют интенсификации процессов горения метана и диффузии с окружающим воздухом. Введение в основной горючий газ различных добавок является одним из таких методов. Например, некоторые исследования показали, что добавление водорода к метану увеличивает коэффициент полноты его сгорания [1–11]. Также отмечается, что использование различных порошков [12, 13], таких как субмикронные частицы алюминия и микронные частицы хлорида натрия (NaCl) [12], влияет на скорость горения.

В отдельный класс можно выделить различные внешние воздействия на процесс горения. К ним можно отнести звуковые колебания и электрическое поле. Авторы исследований [14–17] утверждают, что использование акустических волн может быть эффективным методом контроля и управления режимами горения. Они подчеркивают потенциал таких исследований для тушения пожаров, однако точное объяснение механизма тушения в настоящее время затруднено из-за недостатка теоретических и экспериментальных данных. Некоторые исследователи отмечают, что акустические колебания оказывают влияние на диффузионное горение пропана в микроструях [18], что приводит к разделению пламени на две части (бифуркация) и его расширению в определенной плоскости под воздействием поперечного акустического поля. При высокочастотном акустическом воздействии на факел пламени пропановоздушной смеси отмечается эффект бифуркации, который помогает снизить концентрацию NO_x, температуру пламени и улучшить перемешивание топлива с воздухом. Акустические волны, действуя на поверхность горючего, увеличивают скорость его испарения, что позволяет снизить температуру горения и прекратить процесс горения. В работах [19–22] исследованы некоторые режимы инфразвукового воздействия на факел пламени углеводородов. При воздействии на пламя инфразвуковых пульсаций наблюдается характерный отклик в спектре изменения температуры в виде максимумов амплитуд, частота которых соответствует частоте внешнего воздействия.

Относительно влияния электромагнитного поля на факел пламени авторы отмечают, что, помимо изменения геометрии факела, данное воздействие приводит к увеличению скорости горения топлива и расширению диапазона устойчивых режимов горения без срывов потока. В работе [23] рассматривается влияние электрического поля на плазму оптического разряда в сверхзвуковом воздушном потоке. Авторы показали, что плазма, генерируемая сфокусированным лазерным излучением, обладает высокой чувствительностью к электрическому полю, и при приложении напряжения 22 кВ было зафиксировано тушение оптического разряда. Ф.Ш. Хафизовым, А.В. Пермяковым и соавт. [24] отмечена перспективность использования электромагнитного воздействия на факел пламени как средства, позволяющего подавить процесс горения. Ими отмечено, что пламя, помещенное в электромагнитное поле напряженности свыше 1 кВ, гаснет, а перед этим факел отклоняется в сторону отрицательного электрода из-за большего количества положительно заряженных ионов. В работах [25, 26] проведено исследование влияния электрического поля на процесс горения метановоздушного диффузионного пламени. Результаты исследования показали, что электрическое поле значительно влияет на поведение пламени, в основном за счет эффектов ионного ветра. В [27] авторы исследуют влияние электрических полей на образование конденсированной фазы

в ламинарном, диффузионном пламени метана. Они делают вывод, что электрические поля могут значительно изменять структуру пламени, уменьшая образование сажи и улучшая стабильность горения. Авторы отмечают, что ионный ветер, возникающий в результате действия электрического поля, способствует изменению распределения температуры и концентрации веществ, участвующих в реакции горения, в пламени.

В настоящей работе представлено исследование изменения мгновенных полей температуры в факеле пламени метана при воздействии на него электрического поля. С использованием метода ИК-термографии были получены наборы термограмм, дальнейшая обработка которых осуществлялась и использованием программного обеспечения Altair и FFT (Fast Fourier Transform – быстрое преобразование Фурье). Цель работы – определение характерных режимов внешнего воздействия электрическим полем на процесс горения метана, при котором происходят значительные изменения в спектре пульсации температуры.

Описание физического эксперимента

Проведено экспериментальное исследование влияния электрического поля на факел пламени метана. Для этого был подготовлен экспериментальный стенд, который включал в себя: горелочное устройство ГСП-3, закрепленное на столешнице таким образом, чтобы сопловая ее часть располагалась вертикально; державку с закрепленными на ней электродами; двухполярный источник высоковольтного напряжения ВИДН-30. Electroды были выполнены из латуни и имели форму диска диаметром 39 мм. Напряжение между электродами менялось с шагом 0.5 кВ. С обратной стороны электрода была припаяна латунная шпилька с резьбой для возможности крепления на державку и установки контактного соединения с высоковольтным источником. Поверхность электрода, обращенная к пламени, была отполирована. Позиционирование электродов осуществлялось таким образом, чтобы нижняя кромка электрода находилась на 2 мм выше сопла горелки (рис. 1).

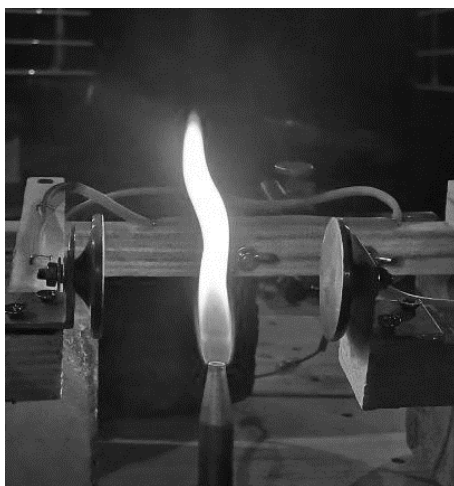


Рис. 1. Факел пламени, образующийся при горении метана
Fig. 1. Methane flame plume

В качестве горючего газа использовался метан, скорость истечения которого из сопловой части горелки контролировалась с использованием термоанемометра KURZ 444 М. Состав рабочего газа приведен в табл. 1. Анализ газовой смеси проводился на газохроматографическом комплексе «Кристалл 5000.2». Относительная погрешность анализа не превышала 2%.

Таблица 1

Химический состав горючего газа

Название компонента	Объемная доля компонента, %
Кислород	0.002
Азот	0.13
Водяные пары	0.001
Углеводороды состава C_3-C_6	0.0002
Серосодержащие соединения	Отсутствуют
Монооксид углерода CO	0.00002
Диоксид углерода CO ₂	Отсутствует
Метан CH ₄	Остальное

Для регистрации температуры в факеле пламени применялся метод ИК-термографии. В качестве регистрирующей аппаратуры была использована инфракрасная камера JADE J530SB с узкополосным оптическим фильтром с полосой пропускания от 2.5 до 2.7 мкм [28]. Частота регистрации составляла 150 кадров в секунду, а длительность 60 с. Поскольку ИК-камеры калибруются заводом-изготовителем по эталонному излучателю – модели абсолютно черного тела, для корректного определения температуры в факеле пламени необходимо знать коэффициент излучения. Для этого было проведено дополнительное измерение температуры пламени термопарным способом. Использовалась термопара типа К (хромель-алюмель) с диаметром спая 200 мкм. Термопара располагалась над соплом горелки на расстоянии 15 мм. Одновременно измеряя температуру в пламени контактным и бесконтактным способами, было получено значение эффективного коэффициента излучения в пламени $\varepsilon = 0.225$, а усредненная температура в пламени составила 930°C. В табл. 2 приведены параметры, которые менялись в ходе проведения эксперимента.

Таблица 2

Описание режимов работы экспериментальной установки

d , мм	v , м/с	L , мм	V , кВ	Номер режима работы
4.0	0.5	55	0 ÷ 5.5	1
	0.5	70	0 ÷ 10	2

Примечание. d – диаметр сопла горелки; v – скорость истечения газа из сопла горелки; L – расстояние между электродами, V – диапазон изменения напряжения

Результаты

В ходе регистрации процесса горения метана с использованием внешнего источника возмущений были получены термограммы (рис. 2, 3). Обработка данных проводилась в программной среде Altair следующим образом: в центре факела на одной вертикальной оси было установлено 20 контрольных точек с фиксированным шагом 5 пикселей. Для каждой точки была составлена таблица изменения

температуры во времени. Для получения спектров изменения температуры использовалась программа, разработанная в среде MatLab, которая реализует алгоритм быстрого преобразования Фурье. С ее помощью для каждой контрольной точки был получен спектр изменения температуры. Путем усреднения был сформирован спектр изменения температуры для всего факела пламени.

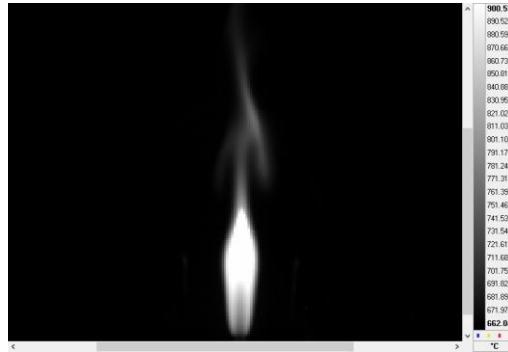


Рис. 2. Термограмма факела пламени (режим 1)
Fig. 2. Thermogram of the flame plume (regime 1)

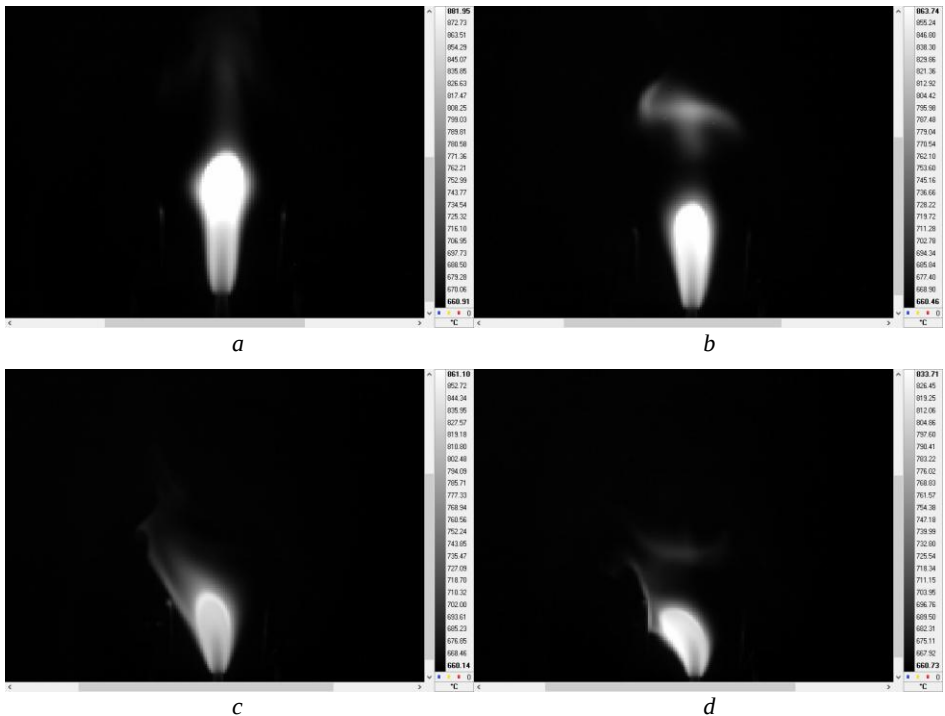


Рис. 3. Термограмма факела пламени метана (режим 1), полученная при заданном значении напряжения между электродами (*a* – 1.5 кВ, *b* – 2.5 кВ, *c* – 4.5 кВ, *d* – 5.5 кВ)
Fig. 3. Thermogram of the methane flame plume (regime 1) obtained at a given voltage between electrodes: (*a*) 1.5, (*b*) 2.5, (*c*) 4.5, and (*d*) 5.5 kV

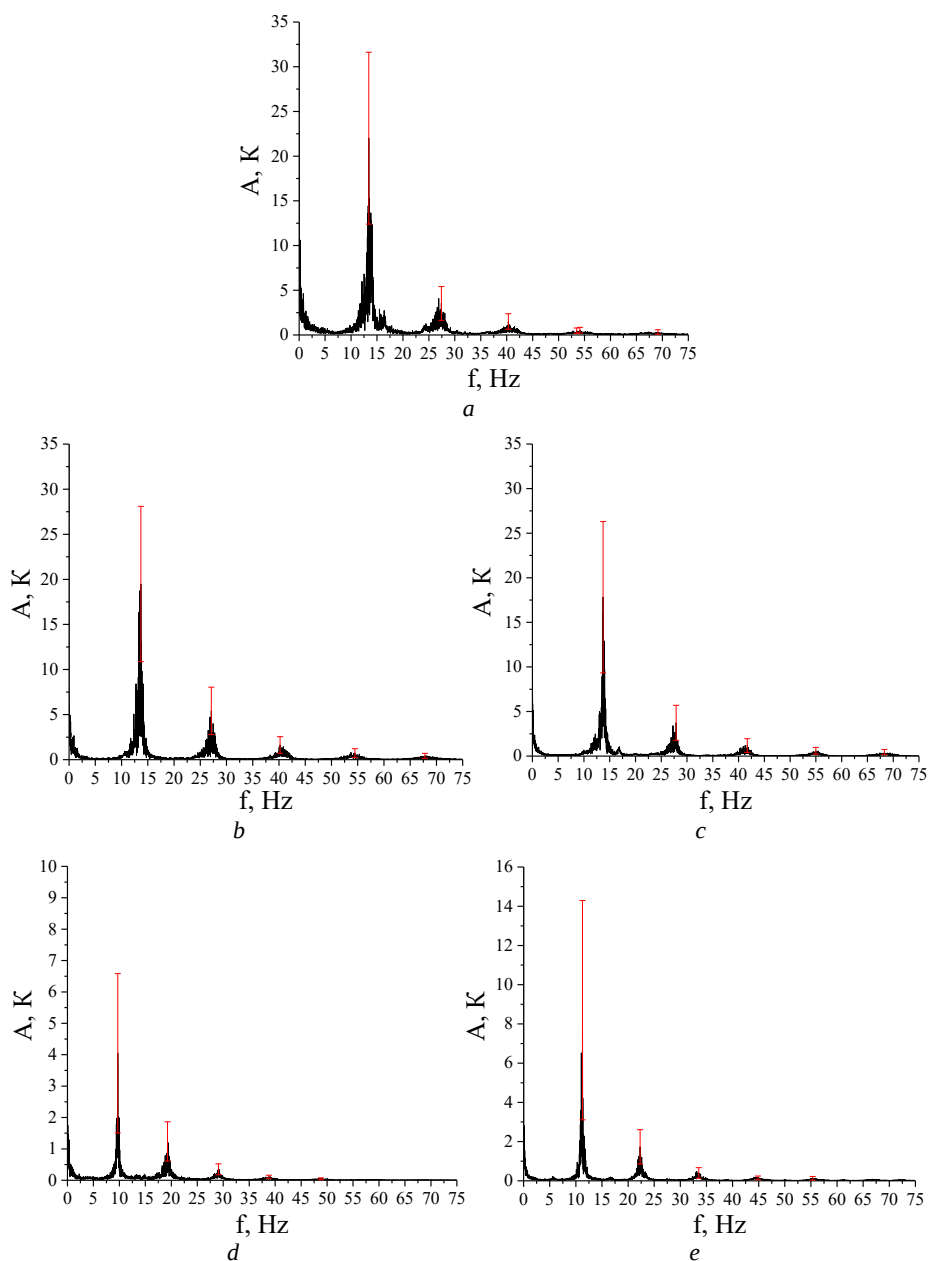


Рис. 4. Спектр пульсации температуры в факеле пламени метана при наличии электрического поля с различным напряжением между электродами (a – без внешнего воздействия; b – 1.5 кВ, c – 2.5 кВ; d – 4.5 кВ; e – 5.5 кВ).

Красным цветом выделен доверительный интервал
Fig. 4. Spectrum of temperature variation in the methane flame plume in the presence of an electric field with different voltage between electrodes: (a) without external action, (b) 1.5, (c) 2.5, (d) 4.5, and (e) 5.5 kV. The confidence interval is indicated in red

Стоит отметить, что после усреднения максимальная амплитуда пульсации температуры по своей величине оказывается несколько ниже по сравнению со спектрами, полученными для отдельных точек. Это объясняется тем, что анализ пульсации температуры в пламени проводился на различных участках факела, включая область около сопловой части горелочного устройства, где преимущественно наблюдается ламинарный режим течения продуктов горения.

Воздействие на пламя электрическим полем (режим 1) до напряжения 3.0 кВ проявляется в снижении максимальной амплитуды пульсации температуры (рис. 4) от 23 до 18 К. Последующее увеличение напряжения приводит к резкому уменьшению максимальной амплитуды пульсации температуры до 3 К. При этом основная частота колебаний температуры составляет 13 Гц, и три гармоники (26, 39, 52 Гц) остаются постоянными.

При воздействии на пламя электрическим полем (режим 2) до напряжения 4.0 кВ происходит снижение максимальной амплитуды пульсации температуры (см. рис. 4) от 20 до 12 К. При напряжении 4.5 кВ происходит значительное уменьшение амплитуды пульсации температуры до 4 К. В диапазоне напряжений 5.0–8.0 кВ пульсации температуры в факеле пламени минимальны и в спектре отсутствуют какие-либо характерные частотные максимумы. Это свидетельствует о том, что течение продуктов горения при таком режиме стабилизируется. Дальнейшее увеличение напряжения до 10 кВ снова приводит к появлению частотных максимумов, однако они смещены сторону меньших частот на 3 Гц. Таким образом амплитудный максимум пульсации температуры становится равным 10 Гц, как и три последующие гармоники (20, 30, 40 Гц).

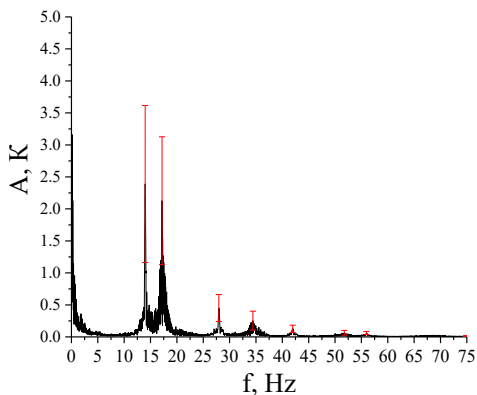


Рис. 5. Спектр пульсации температуры в факеле пламени метана при наличии электрического поля (режим 2) с напряжением между электродами 5.5 кВ
Fig. 5. Spectrum of temperature variation in the methane flame plume in the presence of an electric field (regime 2) with a voltage between electrodes of 5.5 kV

Следует отметить, что при напряжении выше 3 кВ наблюдается отклонение факела пламени в сторону электрода с отрицательным потенциалом, что, согласно [19], связано с образованием в процессе горения положительных ионов, которое, в свою очередь, приводит к наклону факела. При изменении напряжения внешнего воздействия в диапазоне от 3.5 до 6 кВ на соответствующих спектрах пульсации температуры выделяется характерная пульсация с частотой 17 Гц (рис. 5).

Выводы

Проведено экспериментальное исследование процесса горения метана при воздействии электрического поля. Показано, что при напряжении до 4 кВ происходит уменьшение максимальной амплитуды пульсации температуры. Дальнейшее увеличение напряжения приводит к резкому падению максимальной амплитуды до 4 К, что свидетельствует о стабилизации режима горения в факеле. Дальнейшее увеличение напряжения снова приводит к появлению частотных максимумов, однако они уже смещены сторону меньших частот на несколько единиц. При увеличении напряжения между электродами выше 3 кВ наблюдается отклонение факела пламени в сторону отрицательного электрода, что является следствием большого образования положительных ионов в пламени [19]. В диапазоне напряжений $3.5 \div 6.0$ кВ на спектре изменения температуры помимо основной частоты 13 Гц выделяется частота 17 Гц со своими гармониками. Очевидно, что изменение температуры в факеле пламени связано со структурой течения и происходящих химических реакций. Это обусловлено изменением основных гидродинамических параметров (скорость, давление, плотность и др.), которые, в свою очередь, влияют на изменение коэффициентов переноса и поступления окислителя в зону горения. Очевидно, что наличие внешнего электрического поля оказывает существенное воздействие на изменение всех указанных параметров и проявляется в изменении формы, высоты пламени и характерных температур.

Список источников

1. Schefer R.W., Wicksal D.M., Agrawal A.K. Combustion of hydrogen-enriched methane in a lean premixed swirl-stabilized burner // *Proc. Combust. Inst.* 2002. V. 29. P. 843–851. doi: 10.1016/S1540-7489(02)80108-0
2. Day M.S., Gao X., Bell J.B. Properties of lean turbulent methane-air flames with significant hydrogen addition // *Proc. Combust. Inst.* 2011. V. 33. P. 1601–1608. doi: 10.1016/j.proci.2010.05.099
3. Dinkelacker F., Manickam B., Muppall S.P.R. Modelling and simulation of lean premixed turbulent methane/hydrogen/air flames with an effective Lewis number approach // *Combust. Flame.* 2011. V. 158. P. 1742–1749. doi: 10.1016/j.combustflame.2010.12.003
4. Therkelsen P.L., Enrique P.J., Littlejohn D., Martin S.M., Cheng R.K. Self-induced unstable behaviors of CH₄ and H₂/CH₄ flames in a model combustor with a low-swirl injector // *Combust. Flame.* 2013. V. 160. P. 307–321. doi: 10.1016/j.combustflame.2011.11.008
5. Afarin Y., Tabejamaat S. Effect of hydrogen on H₂/CH₄ flame structure of MILD combustion using the LES method // *Int. J. Hydrogen Energy.* 2013. V. 38. P. 3447–3458. doi: 10.1016/j.ijhydene.2012.12.065
6. Zhang M., Wang J., Xie Y., Jin W., Wei Z., Huang Z., Kobayashi H. Flame front structure and burning velocity of turbulent premixed CH₄/H₂/air flames // *Int. J. Hydrogen Energy.* 2013. V. 38. P. 11421–11428. doi: 10.1016/j.ijhydene.2013.05.051
7. Hernandez-Perez F.E., Groth C.P.T., Gulder O.L. Large-eddy simulation of lean hydrogen-methane turbulent premixed flames in the methane-dominated regime // *Int. J. Hydrogen Energy.* 2014. V. 39. P. 7147–7157. doi: 10.1016/j.ijhydene.2014.02.028
8. Sun Z.-Y., Li G.-X. Turbulence influence on explosion characteristics of stoichiometric and rich hydrogen/air mixtures in a spherical closed vessel // *Energy Convers. Manag.* 2017. V. 149. P. 526–535. doi: 10.1016/j.enconman.2017.07.051
9. Sun Z.-Y. Experimental studies on the explosion indices in turbulent stoichiometric H₂/CH₄/air mixtures // *Int. J. Hydrogen Energy.* 2019. V. 44. P. 469–476. doi: 10.1016/j.ijhydene.2018.02.094

10. Li D., Wang R., Yang G., Wan J. Effect of hydrogen addition on the structure and stabilization of a micro-jet methane diffusion flame // *Int. J. Hydrogen Energy*. 2021. V. 46. P. 5790–5798. doi: 10.1016/j.ijhydene.2020.11.034
11. Grishin I., Zakharov V., Arefiev K. Experimental Study of Methane Combustion Efficiency in a High-Enthalpy Oxygen-Containing Flow // *Appl. Sci*. 2022. V. 12 (2). Art. 899. doi: 10.3390/app12020899
12. Xu W., Jiang Y. Combustion Inhibition of Aluminum–Methane–Air Flames by Fine NaCl Particles // *Energies*. 2018. V. 11. P. 1–12. doi: 10.3390/en11113147
13. Linteris G.T., Knyazev V.D., Babushok V.I. Inhibition of premixed methane flames by manganese and tin compounds // *Combustion and Flame*. 2002. V. 129 (3). P. 221–238. doi: 10.1016/S0010-2180(02)00346-2
14. Кривокорытов М.С., Голуб В.В., Моралев И.А., Володин В.В. Экспериментальное исследование развития струи гелия при акустическом воздействии // *Теплофизика высоких температур*. 2014. Т. 52, № 3. С. 450–455. doi: 10.7868/S004036441403017X
15. Голуб В.В., Иванов М.Ф., Володин В.В., Благодатских Д.В., Головастов С.В. Влияние акустических волн на зону воспламенения и переход горения в детонацию: эксперимент и расчет // *Теплофизика высоких температур*. 2009. Т. 47, № 2. С. 315–316. doi: 10.1134/S0018151X09020229
16. Голуб В.В., Бакланов Д.И., Головастов С.В., Иванов К.В., Иванов М.Ф., Киверин А.Д., Володин В.В. Воздействие акустического поля на развитие пламени и переход в детонацию // *Теплофизика высоких температур*. 2010. Т. 48, № 6. С. 901–907. doi: 10.1134/S0018151X1006012X
17. Левина Т.А., Просин М.В. Электромагнитное и акустическое воздействие на распространение пламени // *Пищевые инновации в биотехнологии* : сб. тез. VI Междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых / под общ. ред. А.Ю. Просекова. Кемерово: Кем. гос. ун-т, 2018. Т. 2. С. 338–341.
18. Довгаль А.В., Козлов В.В., Литвиненко М.В., Литвиненко Ю.А., Шмаков А.Г. Режимы горения микроструй водорода // *Прикладная механика техническая физика*. 2023. Т. 64, № 1. С. 3–12. doi: 10.15372/PMTF202215145
19. Агафонцев М.В., Ануфриев И.С., Копьев Е.П., Шадрин Е.Ю., Лобода Е.Л., Луценко А.В. Исследование характеристик турбулентного пламени при воздействии малых энергетических возмущений // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 55. С. 57–71. doi: 10.17223/19988621/55/6
20. Agafontsev M.V., Reyno V.V. Effect of low-frequency vibrations on the characteristics of the diffusion flame // *Journal of Physics: Conference Series*. 2022. V. 2389. Art. 012004. doi: 10.1088/1742-6596/2389/1/012004
21. Loboda E.L., Agafontsev M.V., Rejno V.V., Kliment'ev A.S. Studing the effect of low-amplitude pressure fluctuations on the field of temperatures in flame using thermography // *Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering*. 2018. V. 10833. P. 1–5. doi: 10.1117/12.2504423
22. Агафонцев М.В., Ануфриев И.С., Копьев Е.П., Шадрин Е.Ю., Лобода Е.Л., Луценко А.В. Исследование характеристик турбулентного пламени при воздействии малых энергетических возмущений // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 55. С. 57–71. doi: 10.17223/19988621/55/6
23. Зудов В.Н., Тутикин А.В. Влияние внешнего электрического поля на оптический разряд в скоростном потоке // *Журнал технической физики*. 2022. Т. 92, № 2. С. 209–215.
24. Хафизов Ф.Ш., Пермьяков А.В., Хафизов И.Ф., Краснов А.В., Пережогин Д.Ю., Еникеева Э.Д. Исследование влияния электромагнитного поля высокой напряженности на пламя // *Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов*. 2016. Т. 104, № 2. С. 105–110.
25. Hu J., Rivin B., Sher E. The effect of an electric field on the shape of co-flowing and candle-type methane–air flames // *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2000. V. 21 (1-3). P. 124–133. doi: 10.1016/S0894-1777(99)00062-X

26. Sayed-Kassem A., Elorf A., Gillon P., Idir M., Sarh B., Gilard V. Numerical modelling to study the effect of DC electric field on a laminar ethylene diffusion flame // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2021. V. 122. P. 1–19. doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2021.105167
27. Gillon P., Gilard V., Idir M., Sarh B. Electric field influence on the stability and the soot particles emission of a laminar diffusion flame // *Combustion Science and Technology*. 2018. V. 191 (2). P. 325–338. doi: 10.1080/00102202.2018.1467404
28. Лобода Е.Л., Рейно В.В., Агафонцев М.В. Выбор спектрального интервала для измерения полей температуры в пламени и регистрации экранированных пламенем высокотемпературных объектов с применением методов ИК-диагностики // *Известия вузов. Физика*. 2015. Т. 58, № 2. С. 124–128.

References

1. Schefer R.W., Wicksal D.M., Agrawal A.K. (2002) Combustion of hydrogen-enriched methane in a lean premixed swirl-stabilized burner. *Proceedings of the Combustion Institute*. 29. pp. 843–851. doi: 10.1016/S1540-7489(02)80108-0
2. Day M.S., Gao X., Bell J.B. (2011) Properties of lean turbulent methane-air flames with significant hydrogen addition. *Proceedings of the Combustion Institute*. 33. pp. 1601–1608. doi: 10.1016/j.proci.2010.05.099
3. Dinkelacker F., Manickam B., Muppall S.P.R. (2011) Modelling and simulation of lean premixed turbulent methane/hydrogen/air flames with an effective Lewis number approach. *Combustion and Flame*. 158. pp. 1742–1749. doi: 10.1016/j.combustflame.2010.12.003
4. Therkelsen P.L., Enrique P.J., Littlejohn D., Martin S.M., Cheng R.K. (2013) Self-induced unstable behaviors of CH₄ and H₂/CH₄ flames in a model combustor with a low-swirl injector. *Combustion and Flame*. 160. pp. 307–321. doi: 10.1016/j.combustflame.2011.11.008
5. Afarin Y., Tabejamaat S. (2013) Effect of hydrogen on H₂/CH₄ flame structure of MILD combustion using the LES method. *International Journal of Hydrogen Energy*. 38. pp. 3447–3458. doi: 10.1016/j.ijhydene.2012.12.065
6. Zhang M., Wanga J., Xie Y., Jin W., Wei Z., Huang Z., Kobayashi H. (2013) Flame front structure and burning velocity of turbulent premixed CH₄/H₂/air flames. *International Journal of Hydrogen Energy*. 38. pp. 11421–11428. doi: 10.1016/j.ijhydene.2013.05.051
7. Hernandez-Perez F.E., Groth C.P.T., Gulder O.L. (2014) Large-eddy simulation of lean hydrogen-methane turbulent premixed flames in the methane-dominated regime. *International Journal of Hydrogen Energy*. 39. pp. 7147–7157. doi: 10.1016/j.ijhydene.2014.02.028
8. Sun Z.-Y., Li G.-X. (2017) Turbulence influence on explosion characteristics of stoichiometric and rich hydrogen/air mixtures in a spherical closed vessel. *Energy Conversion and Management*. 149. pp. 526–535. doi: 10.1016/j.enconman.2017.07.051
9. Sun Z.-Y. (2019) Experimental studies on the explosion indices in turbulent stoichiometric H₂/CH₄/air mixtures. *International Journal of Hydrogen Energy*. 44. pp. 469–476. doi: 10.1016/j.ijhydene.2018.02.094
10. Li D., Wang R., Yang G., Wan J. (2021) Effect of hydrogen addition on the structure and stabilization of a micro-jet methane diffusion flame. *International Journal of Hydrogen Energy*. 46. pp. 5790–5798. doi: 10.1016/j.ijhydene.2020.11.034
11. Grishin I., Zakharov V., Arefiev K. (2022) Experimental study of methane combustion efficiency in a high-enthalpy oxygen-containing flow. *Applied Sciences*. 12. Article 899. doi: 10.3390/app12020899
12. Xu W., Jiang Y. (2018) Combustion inhibition of aluminum–methane–air flames by fine NaCl particles. *Energies*. 11. pp. 1–12. doi: 10.3390/en1113147
13. Linteris G.T., Knyazev V.D., Babushok V.I. (2002) Inhibition of premixed methane flames by manganese and tin compounds. *Combustion and Flame*. 129(3). pp. 221–238. doi: 10.1016/S0010-2180(02)00346-2

14. Krivokorytov M.S., Golub V.V., Moralev I.A., Volodin V.V. (2014) Eksperimental'noe issledovanie razvitiya strui geliya pri akusticheskom vozdeystvii [Experimental study of helium jet development under acoustic impact]. *High Temperature*. 52(3). pp. 450–455. doi: 10.7868/S004036441403017X
15. Golub V.V., Ivanov M.F., Volodin V.V., Blagodatskikh D.V., Golovastov S.V. (2009) Issledovanie akusticheskikh voln v zone vosplamneniya i perekhoda goreniya v detonatsiyu: eksperiment i raschet [Influence of acoustic waves on the ignition zone and combustion-to-detonation transition: experiment and calculation]. *High Temperature*. 47(2). pp. 315–316. doi: 10.1134/S0018151X09020229
16. Golub V.V., Baklanov D.I., Golovastov S.V., Ivanov K.V., Ivanov M.F., Kiverin A.D., Volodin V.V. (2010) Vozdeystvie akusticheskogo polya na razvitie plameni i perekhod v detonatsiyu [Impact of an acoustic field on flame development and transition to detonation]. *High Temperature*. 48(6). pp. 901–907. doi: 10.1134/S0018151X1006012X
17. Levina T.A., Prosin M.V. (2018) Elektromagnitnoe i akusticheskoe vozdeystvie na rasprostraneniye plameni [Electromagnetic and acoustic impact on flame propagation]. *Pishchevye innovatsii v biotekhnologii: sbornik tezisev VI Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii studentov, aspirantov i molodykh uchenykh – Food Innovations in Biotechnology: a collection of abstracts of the VI International Scientific Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists*. Ed. by A.Y. Prosekov; FGBOU VO “Kemerovo State University”. Kemerovo. 2. pp. 338–341.
18. Dovgal' A.V., Kozlov V.V., Litvinenko M.V., Litvinenko Yu.A., Shmakov A.G. (2023) Rezhimy goreniya mikrostruy vodoroda [Combustion modes of hydrogen microjets]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 64(1). pp. 3–12. doi: 10.15372/PMTF202215145
19. Agafontsev M.V., Anufriev I.S., Kop'ev E.P., Shadrin E.Yu., Loboda E.L., Lutsenko A.V. (2018) Issledovanie kharakteristik turbulentnogo plameni pri vozdeystvii malykh energeticheskikh vozmushcheniy [Study of turbulent flame characteristics under the influence of small energy perturbations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 57–71. doi: 10.17223/19988621/55/6
20. Agafontsev M.V., Reyno V.V. (2022) Effect of low-frequency vibrations on the characteristics of the diffusion flame. *Journal of Physics: Conference Series*. 2389. Article 012004. doi: 10.1088/1742-6596/2389/1/012004
21. Loboda E.L., Agafontsev M.V., Rejno V.V., Kliment'ev A.S. (2018) Studing the effect of low-amplitude pressure fluctuations on the field of temperatures in flame using thermography. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*. 10833. pp. 1–5. doi: 10.1117/12.2504423
22. Agafontsev M.V., Anufriev I.S., Kop'ev E.P., Shadrin E.Yu., Loboda E.L., Lutsenko A.V. (2018) Issledovanie kharakteristik turbulentnogo plameni pri vozdeystvii malykh energeticheskikh vozmushcheniy [Study of turbulent flame characteristics under the influence of small energy perturbations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 57–71. doi: 10.17223/19988621/55/6.
23. Zudov V.N., Tupikin A.V. (2022) Issledovanie vneshnikh poley vozdeystviya na opticheskiy razryad v skorostnom potoke [Influence of an external electric field on an optical discharge in a high-speed flow]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki – Journal of Technical Physics*. 92(2). pp. 209–215.
24. Khafizov F.Sh., Permyakov A.V., Khafizov I.F., Krasnov A.V., Perezhogin D.Yu., Enikeeva E.D. (2016) Issledovanie vozdeystviya elektromagnitnogo polya s vysokoy vyderzhkoy plameni [Study of the effect of high intensity electromagnetic field on the flame]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefi i nefteproduktov – Problems of Collection, Preparation and Transportation of Oil and Petroleum Products*. Ufa State Petroleum Technical University. 104(2). pp. 105–110.

25. Hu J., Rivin B., Sher E. (2000) The effect of an electric field on the shape of co-flowing and candle-type methane–air flames. *Experimental Thermal and Fluid Science*. 21(1-3). pp. 124–133. doi: 10.1016/S0894-1777(99)00062-X
26. Sayed-Kassem A., Elorf A., Gillon P., Idir M., Sarh B., Gilard V. (2021) Numerical modelling to study the effect of DC electric field on a laminar ethylene diffusion flame. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 122. pp. 1–19. doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2021.105167
27. Gillon P., Gilard V., Idir M., Sarh B. (2018) Electric field influence on the stability and the soot particles emission of a laminar diffusion flame. *Combustion Science and Technology*. 191(2). pp. 325–338. doi: 10.1080/00102202.2018.1467404
28. Loboda E.L., Reyno V.V., Agafontsev M.V. (2015) Vybor spektral'nogo intervala dlya izmereniya poley temperatury v plameni i registratsii ekranirovannykh plamenem vysokotemperaturnykh ob"ektov s primeneniem metodov IK-diagnostics [Spectral interval selection for measuring the temperature fields in a flame and registration of high-temperature objects shielded by a flame with application of IR-diagnostics methods]. *Izvestiya vuzov. Fizika – Izvestiya Vuzov. Physics*. 58(2). pp. 124–128.

Сведения об авторах:

Агафонцев Михаил Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической и вычислительной механики механико-математического факультета Томского государственного университета; старший научный сотрудник лаборатории прогнозирования состояния атмосферы Института оптики атмосферы им. В.Е. Зуева Сибирского отделения Российской Академии наук (Томск, Россия). E-mail: amv@mail.tsu.ru

Старосельцева Ася Алексеевна – аспирант Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: 222-pro@mail.ru

Рейно Владимир Владимирович – старший научный сотрудник лаборатории распространения волн Института оптики атмосферы им. В.Е. Зуева Сибирского отделения Российской Академии наук (Томск, Россия). E-mail: reyno@iao.ru

Лобода Егор Леонидович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой физической и вычислительной механики механико-математического факультета Томского государственного университета; главный научный сотрудник лаборатории прогнозирования состояния атмосферы Института оптики атмосферы им. В.Е. Зуева Сибирского отделения Российской Академии наук (Томск, Россия). E-mail: loboda@mail.tsu.ru

Information about the authors:

Agafontsev Mikhail V. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics of Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Tomsk, Russian Federation). E-mail: amv@mail.tsu.ru

Staroseltseva Asya A. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 222-pro@mail.ru

Reyno Vladimir V. (V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics of Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Tomsk, Russian Federation). E-mail: reyno@iao.ru

Loboda Egor L. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics of Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Tomsk, Russian Federation). E-mail: loboda@mail.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 02.12.2024; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 02.12.2024; accepted for publication 09.06.2025

Научная статья

УДК 531.314.2, 531.395, 531.62, 531-1, 531.011

doi: 10.17223/19988621/95/7

Уравнения траектории неконсервативной натуральной системы

Виталий Викторович Войтик

*Башкирский государственный медицинский университет, Уфа, Россия
vvvojtik@bashgmu.ru*

Аннотация. Выводятся уравнения, определяющие траекторию неконсервативной натуральной системы в конфигурационном пространстве в нестационарных внешних полях. Предварительно доказывается теорема об изменении кинетической энергии системы. Для вывода используются уравнения Лагранжа. Полученные уравнения определяют производную касательного вектора по траектории в зависимости от данной точки и касательного вектора. Они допускают численное решение. С помощью уравнений траектории и равенства параметризации можно решать задачи динамики натуральной системы.

Ключевые слова: натуральная система, теорема об изменении кинетической энергии, конфигурационное пространство, метрический тензор, касательный вектор, траектория, переменные внешние поля

Для цитирования: Войтик В.В. Уравнения траектории неконсервативной натуральной системы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 72–80. doi: 10.17223/19988621/95/7

Original article

Trajectory equations for a non-conservative natural system

Vitaliy V. Voytik

*Bashkir State Medical University, Ufa, Russian Federation
vvvojtik@bashgmu.ru*

Abstract. In practice, it is often necessary to know the trajectory of motion of natural mechanical systems. At present, the trajectory equations in configuration space are well known only for some conservative systems. It is also important to derive equations for systems in non-stationary external fields. In this paper, we prove a theorem on the change in kinetic energy, which states that the rate of kinetic energy change depends both on external forces and on the rate of metric tensor change. This theorem can be expressed geometrically as a combination of the products of forces and changes in the metric tensor with tangent vectors. Generalized velocities and accelerations are similarly described in terms of the tangent vectors and their derivatives along the trajectory. Substitution of these

expressions into the Lagrange equations results in trajectory equations corresponding to the degrees of freedom of the system. The left-hand side contains a covariant derivative of the tangent vector, and the right-hand side includes a cubic polynomial of the tangent vectors. These equations represent the geometric form of the Lagrange equations, which can be solved numerically using the fourth order Runge-Kutta method. Together with the trajectory parameterization, these equations provide a trajectory method for solving dynamics problems.

Keywords: natural system, kinetic energy change theorem, configuration space, metric tensor, tangent vector, trajectory, variable external fields

For citation: Voytik, V.V. (2025) Trajectory equations for a non-conservative natural system. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 72–80. doi: 10.17223/19988621/95/7

Введение

Механическое состояние натуральной системы, т.е. ее положение и состояние движения, в формулировке Лагранжа полностью определяется заданием ее начальных координат и начальных скоростей. Тогда решение уравнений движения Лагранжа приводит к установлению координат как функции времени. Но существует и геометрическая точка зрения на механическое движение. Другой, эквивалентный способ заключается в определении начальных координат системы в конфигурационном пространстве и касательного вектора к ее траектории. Тогда, зная кинетическую энергию системы как функцию координат и времени, можно определить траекторию и параметризовать ее, т.е. сопоставить каждый ее малый участок определенному моменту времени.

Если натуральная система является консервативной, то ее уравнения траектории в основном известны. В лучевой оптике они известны под названием уравнения эйконала [1. Уравнения (1.1.7), (1.1.15)]. Для материальной точки в постоянном внешнем немагнитном поле эти уравнения приведены в [2. Задача к п. 44; 3. П. 2.7)]. С точки зрения дифференциальной геометрии они сводятся к обычному второму закону Ньютона, выраженному в проекции на вектор нормали к траектории. Уравнения траектории составляют существенную часть некоторых разделов физики. Например, в геометрической оптике [4] рассматриваются уравнения, описывающие поведение монохроматических лучей света. В электронной оптике [5. Гл. 3] рассматриваются уравнения Гринберга, описывающие теорию фокусировки пучка заряженных частиц в постоянных электрическом и магнитном полях. Геометрическое представление механики в пространстве конфигураций рассматривалось также в работах [6–16]. В [17] обсуждалась теорема о полноте векторных полей в римановых гильбертовых многообразиях для траекторий, ускоряемых зависящими от времени силами.

Цель статьи – установить уравнения, определяющие траекторию натуральной системы в конфигурационном пространстве в самом общем случае, т.е. для неконсервативных систем. Это позволит рассматривать такие системы не только известными методами Лагранжа, Гамильтона и Гамильтона–Якоби–Остроградского, но и с наглядной геометрической точки зрения. Поэтому уравнения, описывающие траекторию натуральной системы в переменных полях и с переменной энергией,

являются важными и интересными. Помимо возможных далеко идущих теоретических следствий такие уравнения для натуральных систем из-за их широкой распространенности могут быть полезны для моделирования множества устройств, например электронно-оптического типа. Уравнения траектории могут также применяться в различных инженерных приложениях: от робототехники и аэрокосмических приложений до разработки алгоритмов оптимального управления и навигации.

1. Уравнения движения натуральной системы в форме Лагранжа

Лагранжиан натуральной системы, как известно [18; 19], представляет собой квадратичный полином по обобщенным скоростям $\dot{q}^\alpha$

$$L = \frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + P_\alpha \dot{q}^\alpha - U. \quad (1.1)$$

Структурой функции Лагранжа (1.1) обладает обычная механическая система (например, деформируемое тело с моментом инерции $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}(q^1, q^2, \dots, q^s, t)$ или точечная частица в римановом пространстве), обладающая потенциальной энергией $U = U(q^1, q^2, \dots, q^s, t)$ и потенциальным импульсом $P_\alpha = P_\alpha(q^1, q^2, \dots, q^s, t)$ (термин принадлежит Ч. Киттелю [20]) в некоторых электрическом и магнитном полях.

Импульс по координате q^γ равен

$$P_\gamma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\gamma} = \mu_{\gamma\beta} \dot{q}^\beta + P_\gamma. \quad (1.2)$$

Уравнения движения в форме Лагранжа для (1.1) имеют вид:

$$\frac{d}{dt} (\mu_{\gamma\beta} \dot{q}^\beta + P_\gamma) = \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\gamma} \dot{q}^\alpha - \frac{\partial U}{\partial q^\gamma}. \quad (1.3)$$

Представим уравнения Лагранжа в решенной относительно ковариантных ускорений форме. Полная производная $d\mu_{\gamma\beta}/dt$ складывается из двух частей: изменения метрического тензора со временем в данной точке конфигурационного пространства и изменения в данный момент времени при переходе в другую точку:

$$\frac{d\mu_{\gamma\beta}}{dt} = \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial t} + \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha. \quad (1.4)$$

Справедлива также аналогичная формула

$$\frac{dP_\gamma}{dt} = \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial P_\gamma}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha. \quad (1.5)$$

Дифференцируя левую часть (1.3), учитывая (1.4), (1.5) и группируя слагаемые по степеням скорости получим, что

$$\begin{aligned} \mu_{\gamma\beta} \ddot{q}^\beta = & -\frac{\partial U}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} + \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t} \right) \dot{q}^\alpha + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} \right) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Это и есть лагранжевские уравнения движения.

Учитывая равенство (1.2), энергия натуральной системы E как функция координат, скоростей и времени равна

$$E = p_\alpha \dot{q}^\alpha - L = \frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + U.$$

Отсюда кинетическая энергия T равна

$$T = \frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = E - U. \quad (1.7)$$

Кинетическую энергию натуральной системы как известную величину, стоящую в средней части равенства (1.7), можно также понимать и как уже известную функцию координат и времени $E - U$, которая стоит справа. Тогда, выражая из равенства (1.7) dt , получим

$$dt = \sqrt{\frac{\mu_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta}{2(E-U)}} = \frac{dq}{\sqrt{2(E-U)}}, \quad (1.8)$$

где $dq^2 = \mu_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta$ есть элемент длины между близкими точками в конфигурационном пространстве.

2. Постановка задачи

Искомые уравнения должны быть связаны с известными методами механики. Оказывается, что с точки зрения лагранжевой механики уравнения траектории представляют собой геометрическую форму уравнений Лагранжа.

Итак, пусть известны внешние поля: функции потенциальной энергии $U = U(q^1, q^2, \dots, q^s, t)$, потенциального импульса $P_\alpha = P_\alpha(q^1, q^2, \dots, q^s, t)$ и метрический тензор конфигурационного пространства $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}(q^1, q^2, \dots, q^s, t)$. Будем считать известной еще и общую энергию системы как функцию времени $E(t)$. Требуется установить уравнение вида:

$$\frac{d^2 q^\alpha}{dq^2} = f^\alpha \left(q^\beta, \frac{dq^\gamma}{dq}, t \right)$$

или эквивалентное ему.

Для этого необходимо в уравнениях Лагранжа (1.6) заменить все скорости $\dot{q}^\alpha$ и ускорения $\ddot{q}^\alpha$ соответственно на компоненты касательного вектора $\tau^\alpha = dq^\alpha/dq$ и компоненты $d\tau^\alpha/dq$. Прделаем это: заменим в обобщенных скоростях $\dot{q}^\beta$ и ускорениях $\ddot{q}^\beta$ переменную дифференцирования – время t – на длину кривой q согласно (1.8). Получим

$$\dot{q}^\beta = \frac{dq^\beta}{dq} \frac{dq}{dt} = \sqrt{2T} \tau^\beta, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}^\beta &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dq^\beta}{dt} \right) = \sqrt{2T} \frac{d}{dq} \left(\sqrt{2T} \frac{dq^\beta}{dq} \right) = \\ &= 2T \frac{d\tau^\beta}{dq} + \frac{dT}{dq} \tau^\beta = 2T \frac{d\tau^\beta}{dq} + \frac{1}{\sqrt{2T}} \cdot \frac{dT}{dt} \tau^\beta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из равенства (2.2) видно, что только его и выражения (2.1) для вывода уравнения траектории недостаточно. Требуется еще знать, как изменяется кинетическая энергия со временем.

3. Скорость изменения кинетической энергии

Выясним, как связана скорость изменения кинетической энергии T натуральной системы с изменением внешних полей. Справедлива

Теорема (об изменении кинетической энергии натуральной системы). Изменение кинетической энергии T натуральной системы как функции времени связано с внешними полями, действующими на нее, следующим равенством:

$$\frac{dT}{dt} = \left(-\frac{\partial U}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} \right) \dot{q}^\gamma - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\gamma. \quad (3.1)$$

Доказательство. Найдём полную производную кинетической энергии (1.7) по времени. Получим, что

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\mu_{\alpha\beta}}{dt} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \mu_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \ddot{q}^\beta.$$

Подставим в это равенство выражение (1.4) и уравнение движения (1.6) и сгруппируем члены по степеням скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & \left(-\frac{\partial U}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} \right) \dot{q}^\gamma + \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial q^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t} \right) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\gamma + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{2\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} \right) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Во второй скобке (3.2) производные потенциального импульса антисимметричны по индексам α и γ и дают ноль при умножении на симметричную форму $\dot{q}^\alpha \dot{q}^\gamma$. Поэтому их можно исключить из этой скобки. Скобку же третьего члена преобразуем следующим образом:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} \right) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} \right) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma.$$

Отсюда видно, что первая разность производных является антисимметричной по индексам α и γ , а вторая разность производных антисимметрична по индексам β и γ . Поэтому результат умножения скобки на симметричную форму $\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma$ является нулем. Учитывая эти обстоятельства, правая часть (3.2) упрощается к правой части (3.1) ■.

Второй член в (3.1) можно было ожидать заранее, поскольку при увеличении момента инерции у вращающегося тела его кинетическая энергия уменьшается.

Теорему об изменении кинетической энергии натуральной системы (3.1) можно переписать в эквивалентной геометрической форме подставив в (3.1) равенства (2.1). Тогда получим

$$\frac{dT}{dt} = \sqrt{2T} \left(-\frac{\partial U}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} \right) \tau^\gamma - T \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t} \tau^\alpha \tau^\gamma. \quad (3.3)$$

4. Уравнения Лагранжа в геометрической форме

Выведем уравнения траектории. Подставив в (2.2) равенство (3.3), получим, что обобщенные ускорения зависят от касательного вектора и вектора $d\tau^\beta/dq$ следующим образом:

$$\ddot{q}^\beta = 2T \frac{d\tau^\beta}{dq} + \left(-\frac{\partial U}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} \right) \tau^\beta \tau^\gamma - \frac{\sqrt{2T}}{2} \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t} \tau^\alpha \tau^\beta \tau^\gamma. \quad (4.1)$$

Подставим теперь в уравнение движения (1.6) равенства (2.1) и (4.1), где учтем, что $T = E - U$ и оставим в левой части получившегося равенства только член, пропорциональный $d\tau^\beta/dq$. После этого сгруппируем все члены в правой части по степеням касательного вектора. В результате получим

$$\begin{aligned} 2(E-U)\mu_{\gamma\beta} \frac{d\tau^\beta}{dq} = & -\frac{\partial U}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} + \sqrt{2(E-U)} \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t} \right) \tau^\alpha + \\ & + \left[(E-U) \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} \right) + \mu_{\gamma\beta} \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q^\alpha} \right) \right] \tau^\alpha \tau^\beta + \\ & + \frac{\sqrt{2(E-U)}}{2} \mu_{\gamma\beta} \frac{\partial \mu_{\varepsilon\alpha}}{\partial t} \tau^\alpha \tau^\beta \tau^\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Эти равенства и есть искомые общие уравнения траектории натуральной системы в конфигурационном пространстве с метрическим тензором $\mu_{\alpha\beta}$. Количество этих уравнений равно числу степеней свободы натуральной системы.

Обсуждение

Легко видеть, что для случая материальной точки единичной массы в постоянном немагнитном поле ($\partial P_\gamma/\partial t = 0$, $\partial P_\alpha/\partial q^\gamma = 0$) полученные уравнения траектории в декартовой системе координат ($\mu_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$) совпадают с [2. Задача к п. 44; 3. П. 2.7]. В качестве еще одной проверки (4.2) умножим обе части этого уравнения на вектор τ^γ . После умножения и выполнения очевидных преобразований левая часть получившегося равенства примет вид:

$$\begin{aligned} 2(E-U)\mu_{\gamma\beta}\tau^\gamma \frac{d\tau^\beta}{dq} = & (E-U) \left[\frac{d(\mu_{\gamma\beta}\tau^\gamma\tau^\beta)}{dq} - \tau^\gamma\tau^\beta \frac{d\mu_{\gamma\beta}}{dq} \right] = -(E-U) \frac{d\mu_{\gamma\beta}}{dq} \tau^\beta \tau^\gamma = \\ = & -(E-U) \left(\frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} \tau^\alpha + \frac{1}{\sqrt{2(E-U)}} \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial t} \right) \tau^\beta \tau^\gamma = \\ = & -(E-U) \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} \tau^\alpha \tau^\beta \tau^\gamma - \frac{\sqrt{2(E-U)}}{2} \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial t} \tau^\gamma \tau^\beta. \end{aligned}$$

Правая же часть равна

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial U}{\partial q^\gamma} \tau^\gamma - \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} \tau^\gamma + \sqrt{2(E-U)} \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t} \right) \tau^\alpha \tau^\gamma + \\ & + \left[(E-U) \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} \right) + \mu_{\gamma\beta} \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q^\alpha} \right) \right] \tau^\alpha \tau^\beta \tau^\gamma + \\ & + \frac{\sqrt{2(E-U)}}{2} \mu_{\gamma\beta} \frac{\partial \mu_{\varepsilon\alpha}}{\partial t} \tau^\alpha \tau^\beta \tau^\varepsilon \tau^\gamma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial U}{\partial q^\gamma} \tau^\gamma - \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} \tau^\gamma - \sqrt{2(E-U)} \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t} \tau^\alpha \tau^\gamma + (E-U) \left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} \right) \tau^\alpha \tau^\beta \tau^\gamma + \\
&\quad + \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q^\alpha} \right) \tau^\alpha + \frac{\sqrt{2(E-U)}}{2} \frac{\partial \mu_{\beta\alpha}}{\partial t} \tau^\alpha \tau^\beta = \\
&= -(E-U) \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} \tau^\alpha \tau^\beta \tau^\gamma - \frac{\sqrt{2(E-U)}}{2} \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t} \tau^\alpha \tau^\gamma.
\end{aligned}$$

Получаем тождество, как это и должно быть. Другими словами, уравнения (4.2) математически непротиворечивы.

Геометрические свойства траектории в конфигурационном пространстве есть, согласно (4.2), следствие переменных внешних воздействий. Эти уравнения не чисто геометрические, поскольку поля U , P_α , $\mu_{\alpha\beta}$ зависят от времени. Такие уравнения называются неавтономными [21]. Несмотря на то, что эти уравнения в неявной форме включают в себя время, это не исключает их из области дифференциальной геометрии. Наоборот, такая временная зависимость дополняет геометрические свойства натуральных систем разного рода нелинейными эффектами. В качестве примера существования переменной времени в геометрических уравнениях можно упомянуть уравнение геодезической в кривом пространстве-времени, которое включает в себя неявно время [22].

Уравнения для траектории (4.2) имеют сложный вид. Очень вероятно, что для аналитического решения этих уравнений потребуются сложные методы дифференциальной геометрии и анализа. Решение дифференциального уравнения (4.2), описывающего изменение касательного вектора, зависит от начальных условий, внешних полей и свойств самой натуральной системы (метрического тензора конфигурационного пространства $\mu_{\alpha\beta}$). Начальными условиями являются начальный касательный вектор τ_0 , начальные координаты q_0 и начальный момент времени t_0 . Численным методом, который может быть использован для нахождения решения, является популярный и точный метод Рунге–Кутты 4-го порядка (RK4).

Если внешние поля достаточно плавно и медленно изменяются в пространстве и времени, то можно ожидать, что решение существует и является единственным в некоторой окрестности начального положения системы. Если же это условие не выполняется (т.е. возникают сингулярности или особенности), то в таких случаях могут потребоваться специальные методы для обеспечения стабильности и точности решения.

Заключение

В данной статье была выяснена общая лагранжевая формулировка (3.1) и геометрическая траекторная формулировка (3.3) известной теоремы об изменении кинетической энергии (например, [18; 19]) для натуральных систем. Применив ее к уравнениям Лагранжа, были выведены уравнения траектории натуральной системы (4.2), движущейся под действием переменных внешних полей. Уравнения траектории вместе с равенством (1.8) образуют новый, траекторный метод решения задач динамики. Тем самым геометрический взгляд на нестационарные механические процессы обоснован.

Остается открытым вопрос о том, как же связаны уравнения траектории с принципом экстремального действия в форме Якоби. Эта задача является темой одной из следующих статей.

Список источников

1. Holm D.D. Geometric Mechanics. World Scientific, 2008. Pt. I: Dynamics and Symmetry.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. М.: Физматлит, 2004. Т. 1: Механика.
3. Biro T.S. Variational Principles in Physics from Classical to Quantum Realm. Springer, 2023. doi: 10.1007/978-3-031-27876-1
4. Слюсарев Г.Г. Геометрическая оптика. М.: ЛЕНАНД, 2019.
5. Кельман В.М., Явор С.Я. Электронная оптика. Л.: Наука, 1968.
6. Синдж Дж.Л. Тензорные методы в динамике. М.: Иностран. лит., 1947.
7. Синг Дж.Л. Классическая динамика. М.: Физматгиз, 1963.
8. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
9. DiBenedetto E. Classical Mechanics. Theory and Mathematical Modeling. New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2011. doi: 10.1007/978-0-8176-4648-6 (Cornerstones).
10. Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T. Manifolds, Tensor Analysis, and Applications. New York: Springer Science + Business Media, LLC, 1988. doi: 10.1007/978-1-4612-1029-0 (Applied Mathematical Sciences; v. 75).
11. Lam K.S. Fundamental principles of classical mechanics: a geometrical perspective. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2014. doi: 10.1142/8947
12. Bullo F., Lewis A. Geometric Control of Mechanical Systems. Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems. New York: Springer Science + Business Media, 2005. doi: 10.1007/978-1-4899-7276-7 (Texts in Applied Mathematics).
13. Holm D.D., Schmäh T., Stoica C., Ellis D.C.P. Geometric Mechanics and Symmetry: From Finite to Infinite Dimensions. Oxford: Oxford University Press, 2009. doi: 10.1093/oso/9780199212903.001.0001
14. Lewis A. The physical foundations of geometric mechanics // Journal of Geometric Mechanics. 2017. V. 9, is. 4. P. 487–574. doi: 10.3934/jgm.2017019
15. Oliva W.M. Geometric Mechanics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2002. (Lectures Notes in Mathematics; 1798).
16. Talman R. Geometric Mechanics. Toward a Unification of Classical Physics. Wiley VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2007.
17. Candela A.M., Romero A., Sánchez M. Completeness of the Trajectories of Particles Coupled to a General Force Field // Arch. Rational Mech. Anal. 2013. V. 208. P. 255–274. doi: 10.1007/s00205-012-0596-2
18. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. 2-е изд., испр. М.: Наука, 1966.
19. Маркеев А.П. Теоретическая механика : учебник для университетов. М.: ЧеРо, 1999.
20. Куммель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978.
21. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2012.
22. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. М.: Наука, 2003. Т. 2: Теория поля.

References

1. Holm D.D. (2008) *Geometric Mechanics. Part I: Dynamics and Symmetry*. World Scientific.
2. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1976) *Theoretical Physics. Volume 1. Mechanics*. Oxford, Butterworth-Heinemann, Elsevier Ltd.
3. Biro T.S. (2023) *Variational Principles in Physics from Classical to Quantum Realm*. Springer. doi: 10.1007/978-3-031-27876-1
4. Slyusarev G.G. (2019) *Geometricheskaya optika* [Geometric optics]. Moscow: LENAND.
5. Kel'man V.M., Yavor S.Ya. (1968) *Elektronnaya optika* [Electron optics]. Leningrad: Nauka.

6. Synge J.L. (1936) *Tensorial Methods in Dynamics*. In: Applied Mathematics Series. 2. University of Toronto.
7. Synge J.L. (1960) *Classical Dynamics*. In: Flügge S. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Berlin–Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-45943-6_1
8. Arnold V.I. (1989) *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. In: Graduate Texts in Mathematics. 60. Springer-Verlag.
9. DiBenedetto E. (2011) *Classical Mechanics. Theory and Mathematical Modeling* (In series "Cornerstones"). Springer Science+Business Media, LLC. doi: 10.1007/978-0-8176-4648-6
10. Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T. (1988) *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. In: series Applied Mathematical Sciences. 75. New York: Springer Science+Business Media, LLC. doi: 10.1007/978-1-4612-1029-0
11. Lam K.S. (2014) *Fundamental Principles of Classical Mechanics: A Geometrical Perspective*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. doi: 10.1142/8947
12. Bullo F., Lewis A. (2005) *Geometric Control of Mechanical Systems. Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems*. In: Texts in Applied Mathematics. New York: Springer Science+Business Media. doi: 10.1007/978-1-4899-7276-7
13. Holm D.D., Schmäh T., Stoica C., Ellis D.C.P. (2009) *Geometric Mechanics and Symmetry: From Finite to Infinite Dimensions*. Oxford. doi: 10.1093/oso/9780199212903.001.0001
14. Lewis A. (2017) The physical foundations of geometric mechanics. *Journal of Geometric Mechanics*. 9(4). pp. 487–574. doi: 10.3934/jgm.2017019
15. Oliva W.M. (2002) *Geometric Mechanics*. In: Lectures Notes in Mathematics. 1798. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag.
16. Talman R. (2007) *Geometric Mechanics. Toward a Unification of Classical Physics*. WILEY VCH Verlag GmbH and Co. KGaA.
17. Candela A.M., Romero A., Sánchez M. (2013) Completeness of the trajectories of particles coupled to a general force field. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 208. pp. 255–274. doi: 10.1007/s00205-012-0596-2
18. Gantmakher F.R. (1975) *Лекции по аналитической механике* [Lectures on analytical mechanics]. Moscow: Mir.
19. Markeev A.P. (1999) *Теоретическая механика: Учебник для университетов* [Theoretical mechanics: textbook for universities]. Moscow: CheRo.
20. Kittel Ch. (2005) *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons Inc., Appendix G.
21. Arnold V.I. (1992) *Ordinary Differential Equations*. Berlin–Heidelberg: Springer.
22. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1975) *Theoretical Physics. Volume 2. The Classical Theory of Fields*. Oxford: Butterworth-Heinemann, Reed Educational and Professional Publishing Ltd.

Сведения об авторе:

Войтик Виталий Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры медицинской физики и информатики Башкирского государственного медицинского университета (Уфа, Россия). E-mail: vvvojtik@bashgmu.ru

Information about the author:

Voytik Vitaliy V. (Candidate of Physics and Mathematics, Bashkir State Medical University, Ufa, Russian Federation). E-mail: vvvojtik@bashgmu.ru

Статья поступила в редакцию 01.10.2024; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 01.10.2024; accepted for publication 09.06.2025

Научная статья

УДК 532.5-1/-9

doi: 10.17223/19988621/95/8

Математическая модель развития и стабилизации трещины автогидроразрыва пласта

Александр Янович Гильманов¹, Руслан Жаканович Касеинов²,
Артем Валерьевич Кузнецов³, Александр Павлович Шевелёв⁴

^{1, 2, 3, 4} Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

¹ a.y.gilmanov@utmn.ru

² stud0000243578@study.utmn.ru

³ stud0000219214@study.utmn.ru

⁴ a.p.shevelev@utmn.ru

Аннотация. Статья посвящена разработке модели развития трещины автогидроразрыва пласта. Разработаны стационарная и нестационарная модели. Обе модели основаны на использовании законов сохранения массы и импульса, а также краевого условия, соответствующего балансу притока и оттока суспензии. Решение системы уравнений проводится с помощью численных методов. Проведено сравнение динамики длины трещины с использованием разных моделей.

Ключевые слова: развитие трещины автогидроразрыва пласта, нестационарная модель, закон сохранения массы, закон сохранения импульса, длина трещины, давление гидроразрыва, явная конечно-разностная схема

Для цитирования: Гильманов А.Я., Касеинов Р.Ж., Кузнецов А.В., Шевелёв А.П. Математическая модель развития и стабилизации трещины автогидроразрыва пласта // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 81–96. doi: 10.17223/19988621/95/8

Original article

A mathematical model of hydraulic fracture growth and stabilization

Aleksandr Ya. Gil'manov¹, Ruslan Zh. Kaseinov²,
Artyom V. Kuznetsov³, Aleksandr P. Shevelev⁴

^{1, 2, 3, 4} University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

¹ a.y.gilmanov@utmn.ru

² stud0000243578@study.utmn.ru

³ stud0000219214@study.utmn.ru

⁴ a.p.shevelev@utmn.ru

Abstract. This paper considers stationary and non-stationary models of hydraulic fracture growth and stabilization. For the first time, the length of an elliptical section fracture is

determined in terms of the balance of fluid inflow into and outflow from the fracture. The stationary model assumes that the fracture formation time is much less than the characteristic time of water injection into the reservoir, and the rate of further fracture growth is much less than the rate of the outflow and is negligible. The non-stationary model takes into account the stage of the fracture growth. Both mathematical models are developed using the laws of conservation of mass and momentum. Darcy's law is applied to describe the leaks into the reservoir. The boundary conditions consider the constancy of the injected water flow rate and the balance between the fluid inflow into and outflow from the fracture. It is established that over time, the half-length of the fracture calculated by the non-stationary model gradually reaches a stationary value corresponding to that determined by the stationary model.

Keywords: hydraulic fracture growth, non-stationary model, mass conservation law, momentum conservation law, fracture length, hydraulic fracturing pressure, explicit finite difference scheme

For citation: Gil'manov, A.Ya., Kaseinov, R.Zh., Kuznetsov, A.V., Shevelev, A.P. (2025) A mathematical model of hydraulic fracture growth and stabilization. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 81–96. doi: 10.17223/19988621/95/8

Введение

В настоящее время ряд месторождений находится на поздних стадиях разработки, что требует закачки воды для вытеснения нефти из пласта [1]. Скорость фильтрации воды зависит от забойного давления нагнетательной скважины, пластового давления, фильтрационно-емкостных свойств пласта и вязкости воды [2]. В случае загрязнения призабойной зоны ее проницаемость снижается, что приводит к снижению расхода скважины, поэтому для его поддержания на прежнем уровне повышают забойное давление [3]. Результатом таких мероприятий может быть превышение давления разрыва породы [4, 5]. Тогда происходит образование техногенных трещин, которые в нефтегазовой отрасли называются трещинами автогидроразрыва пласта (автоГРП) [6–9].

Снижение фильтрационно-емкостных свойств вблизи скважины возможно вследствие продолжительного нагнетания в пласт неочищенной от примесей воды [10]. Дополнительно частицы могут оседать вблизи границ трещины автоГРП, что будет приводить к возрастанию давления в этой трещине и увеличению ее длины [9, 11]. По такой трещине в силу ее низкого фильтрационного сопротивления будет происходить опережающий по сравнению с движением флюида по пласту прорыв закачиваемой воды в добывающие скважины [9].

Таким образом, прогнозирование развития трещин автоГРП является важной и актуальной задачей для повышения охвата пласта заводнением. Предложены различные мероприятия, направленные на ограничение эффективных размеров таких трещин [12], однако для этого нужно знать, как увеличивается длина трещины, чтобы отследить момент времени, требующий применения указанных мероприятий.

Первоначально для моделирования динамики развития трещин автоГРП с целью предсказания контроля их роста были предложены одномерные модели, получившие широкое распространение [13–17]. Предложенные позднее многомерные модели [18, 19] не всегда применимы для экспресс-оценок развития трещин и могут быть с достаточной степенью точности заменены одномерными моделями,

поскольку длина трещины существенно превышает ее ширину и, как правило, высоту [15].

В первой одномерной модели трещины предполагается, что ее сечение является прямоугольным. Данная геометрия основана на двух допущениях: высота трещины много больше ее полной длины и, как следствие, возможно пренебречь верхней и нижней границами трещины. Такая модель носит название KGD (модель Khristianovich–Geertsma–De Klerk – по трем ее авторам) [15, 20]. В ней геометрическая форма трещины представляет собой прямоугольный параллелепипед шириной w , используется закон сохранения массы фаз, а скорость потока ньютоновской жидкости по трещине рассчитывается по закону Пуазейля для канала прямоугольного сечения. Граничные условия на скважине обычно соответствуют заданному расходу, при котором давление превышает давление разрыва породы и инициируется трещина. Обычно предполагается, что фронт жидкости, имеющий координату L , отстает от конца трещины, но в некоторых случаях этим фактом пренебрегают [15].

В другой модели PKN (модель Perkins–Kern–Nordgren) сечение трещины в вертикальной плоскости считается эллиптическим [15, 21]. Такая модель в большинстве случаев соответствует реальным условиям, поскольку в ней длина трещины должна на порядки превосходить высоту, причем считается, что трещина вскрывает весь продуктивный интервал либо высота трещины не меняется с течением времени. Как и в модели KGD, используются законы сохранения массы и импульса, однако в последнем учитывается эллиптическое сечение, перпендикулярное потоку. Утечки жидкости из трещины учтены Нордгреном [15] с использованием нестационарного закона Картера и уравнения неразрывности, в котором жидкость предполагается несжимаемой. В данной модели граница трещины является подвижной, что сильно усложняет саму задачу. В таком случае конец трещины фиксируют и его координату обозначают за L' , а ширину трещины в промежутке $L' \leq x \leq L(t)$ считают нулевой [15].

Обе описанные модели основаны на законах сохранения массы, импульса и геомеханических соотношениях между шириной трещины и давлением в ней.

Более сложные гибридные модели предполагают геометрию модели PKN и осложнены дополнительными соотношениями для утечек жидкости в пласт на некоторую глубину [22, 23]. Некоторые модели [24], наоборот, учитывают приток флюида в трещину, однако они применяются уже для стадий разработки месторождения, а не формирования и развития техногенных трещин.

Рассмотренные математические модели гидроразрыва пласта, описывающие прямолинейное распространение трещины, характеризуются различными подходами к обоснованию поставленной задачи. Как отмечалось, модели PKN и KGD отличаются формой трещины, кроме того, в модели KGD ширина трещины зависит от распределения давления по всей трещине, а в PKN – только от давления в рассматриваемой точке. Гибридные модели, хотя и основаны на базе вышеописанных моделей, но отличаются от них усложнением соотношений утечек жидкости гидроразрыва в пласт. В таких моделях не используют закон Картера, заменяя его на поршневой механизм проникновения частиц в пласт [15]. Еще одним направлением изучения механизма развития трещины является добавление в систему дополнительных условий, таких как учет налпания проппанта на стенки трещины [22].

Расчеты по всем перечисленным моделям направлены на определение динамики развития техногенной трещины [20, 21]. При этом считается, что трещина

изначально распространяется до бесконечности и давление формирования трещины задается на бесконечном удалении от скважины. При таком подходе не рассматриваются вопросы стабилизации длины трещины при равенстве расхода, закачиваемого в скважину и попадающего в трещину, и утечек воды через стенки трещины. Для анализа этих процессов необходимо рассмотрение иных граничных условий, детально учитывающих протяженность трещины. Этим вопросам и посвящена данная работа. Впервые длина трещины эллиптического сечения определяется из баланса притока жидкости в трещину и оттока из нее, что является развитием подхода, описанного в работе [25], где, однако, не учитывалась стадия роста трещины.

Стационарная модель определения размеров техногенной трещины

Рассматривается изотропный пласт, имеющий абсолютную проницаемость k , мощность (толщину) h и пластовое давление P_r , в который пробурена нагнетательная скважина для закачки воды с постоянным расходом Q_m . Этот расход таков, что забойное давление превышает давление гидроразрыва, которое принимается равным

$$P_{hf} = 1,5P_r. \quad (1)$$

Данный факт приводит к формированию техногенной трещины, скорость развития которой достаточно высока. При этом имеется выделенное направление распространения трещины, вдоль которого и направлена ось координат x . Учитывается симметрия относительно нагнетательной скважины, и далее рассматривается только половина трещины (рис. 1), поэтому начало координат ставится на забое нагнетательной скважины.

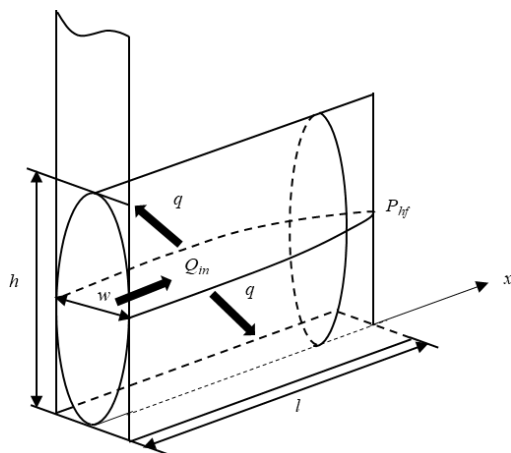


Рис. 1. Геометрия трещины с указанием направлений потоков
Fig. 1. Fracture geometry with indicated flow directions

Рост трещины прекратится при достижении баланса притока воды в трещину и оттока из нее, тогда полудлина трещины станет равной l . Поэтому саму трещину можно считать стационарной. Боковая поверхность трещины является прямоугольной, сечения в двух остальных плоскостях – эллиптическими, что соответствует модели РКН. Поток воды с динамической вязкостью μ по трещине

обусловлен закачкой воды с расходом Q_{in} , удельный отток воды из трещины на единицу ее длины обозначается как q . В пласте произошло вытеснение нефти, и ее остаточная нефтенасыщенность равна S_{or} , поэтому относительная фазовая проницаемость воды k_r берется при остаточной нефтенасыщенности $k_r(S_{or})$. Расстояние от трещины до контура питания равно L . В пласте имеются непроницаемые глинистые прослои, поэтому эффективная толщина, доступная для фильтрации жидкости, равна h_e . Описание рассматриваемого процесса с учетом введенных допущений возможно в рамках стационарной модели определения размеров трещины автоГРП, которая состоит из основных уравнений механики сплошных сред. Аналогично модели РKN рассматривается сечение трещины с максимальной шириной w . Известны характеристики горной породы: модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν .

При использовании стационарного приближения математическая модель для определения размеров трещины автоГРП состоит из закона сохранения массы, закона сохранения импульса для трещины эллиптического сечения [15], закона Дарси для описания удельного оттока воды из трещины в пористую среду, соотношения, связывающего ширину трещины с избыточным давлением для трещины эллиптического сечения [15]:

$$\frac{d(hw u)}{dx} = -q, \quad (2)$$

$$u = -\frac{w^2}{16\mu} \frac{dP}{dx}, \quad (3)$$

$$q = \frac{kk_r(S_{or})h_e}{\mu L} (P - P_r), \quad (4)$$

$$w = 2 \frac{1-\nu^2}{E} (P - P_{hf}) h, \quad (5)$$

где u – скорость потока воды по трещине, P – давление; давление гидроразрыва определяется из (1).

В этой системе уравнений искомыми функциями являются ширина трещины, давление, скорость потока воды и удельный отток воды из трещины.

Система уравнений (2)–(5) при подстановке (3)–(5) в (2) требует задания двух граничных условий по давлению. В начале координат на нагнетательной скважине в соответствии с постановкой задачи задан постоянный расход, т.е. граничное условие второго рода. Другая граница соответствует максимальной полудлине трещины l_{max} , на которой ставится граничное условие первого рода, т.е. постоянное значение давления, равное давлению гидроразрыва, поскольку в этом случае ширина трещины становится нулевой. l_{max} достигается при балансе притока воды в трещину и оттока из нее, который представляет собой дополнительное интегральное условие. Тогда граничные условия имеют вид:

$$\left. \frac{dP}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{64\mu Q_{in}}{\pi w^3 \Big|_{x=0} h}, \quad (6)$$

$$P(x=l_{max}) = P_{hf}, \quad (7)$$

$$Q_{in} = \int_0^{l_{max}} q(x) dx. \quad (8)$$

Для того чтобы решить систему уравнений (2)–(5), можно воспользоваться методом последовательного исключения неизвестных. Тогда в закон сохранения массы (2) из формулы (3) можно подставить u , а из закона Дарси (4) – q , после чего при учете связи ширины трещины и давления (5) получится уравнение, в котором неизвестным является только давление:

$$\frac{h^4(1-v^2)^3}{2E^3} \frac{d}{dx} \left((P - P_{hf})^3 \frac{dP}{dx} \right) = \frac{kk_r(S_{or})h_e}{L} (P - P_r). \quad (9)$$

В уравнении (9) можно упростить производную, если занести разность давлений под знак дифференциала, тогда после преобразований можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно избыточного давления

$$\frac{d^2(P - P_{hf})^4}{dx^2} = \frac{8E^3kk_r(S_{or})h_e}{Lh^4(1-v^2)^3} (P - P_r). \quad (10)$$

В силу нелинейности уравнения (10) поиск аналитического решения может быть трудоемким, поэтому рациональнее использовать численные методы его решения. Для упрощения дальнейших преобразований можно ввести замену, при которой избыточное давление в четвертой степени заменяется новой функцией

$$y = (P - P_{hf})^4. \quad (11)$$

В таком случае с учетом (11) в (10) будет иметься вторая производная от функции y по координате, которая при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка традиционно аппроксимируется центральной разностью. Пусть ось x разбита на N отрезков, индекс узла по координате i , шаг по координате

$$\Delta x = \frac{l_{\max}}{N}, \quad (12)$$

а замена (11) имеет вид:

$$y_i = (P_i - P_{hf})^4, i = \overline{0, N}. \quad (13)$$

В результате получится уравнение

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} = \frac{8E^3kk_r(S_{or})h_e}{Lh^4(1-v^2)^3} \left(\sqrt[4]{y_i} + P_{hf} - P_r \right), i = \overline{1, N-1}. \quad (14)$$

Граничные условия (6) и (7) с учетом (5) и (13) принимают вид:

$$\frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = -\frac{32\mu Q_{in} E^3}{\pi(1-v^2)^3 h^4}, \quad (15)$$

$$y_N = 0. \quad (16)$$

Краевое условие (8) переписывается при подстановке q из (4), интеграл рассчитывается численно по формуле трапеций:

$$Q_{in} = \frac{kk_r(S_{or})h_e}{\mu L} \Delta x \left(\frac{P_0 + P_N - 2P_r}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} (P_i - P_r) \right). \quad (17)$$

Неизвестными в системе $2N + 4$ уравнений (12)–(17) являются y_i , P_i , $i = 0, 1, \dots, N$, $l_{\max}$ и Δx . Количество этих неизвестных $2N + 4$. Уравнения остаются нелинейными

относительно u_i , поэтому решение системы (12)–(17) возможно с использованием метода простой итерации с относительной погрешностью 1%. Тогда становятся известными распределение давления по координате и максимальная полудлина трещины. Ширина трещины определяется из (5) после подстановки полученных значений давления.

Нестационарная модель развития и стабилизации техногенной трещины

Стационарная модель техногенной трещины рассчитывает полудлину трещины, но не позволяет определить время, за которое наступает баланс расхода закачиваемой воды и ее оттока из трещины. Пока такой баланс не наступит, трещина будет возрастать, если приток воды в нее превышает отток. Описание указанного явления возможно только в рамках нестационарной модели развития и стабилизации техногенной трещины.

Закон сохранения массы в рамках такой модели имеет вид:

$$\frac{\partial(hw)}{\partial t} + \frac{\partial(hwu)}{\partial x} = -q, \quad (18)$$

где t – время. Поток по трещине по-прежнему описывается скоростью u , рассчитываемой из закона (3), однако теперь для нестационарной модели уравнение (3) следует переписать с учетом того, что обыкновенную производную от давления по пространственной координате следует заменить на частную производную:

$$u = -\frac{w^2}{16\mu} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (19)$$

Уравнения (4) и (5) остаются неизменными. Тогда в системе уравнений (4), (5), (18), (19) искомые функции совпадают с теми, что были в стационарной модели, но зависят от двух аргументов: x и t .

В силу зависимости функций от времени необходимо задать начальное условие, которое соответствует заданию нулевой ширины трещины, т.е. давления гидроразрыва пласта:

$$P(t = 0, x > 0) = P_{hf}. \quad (20)$$

Граничные условия соответствуют (6) и (7), однако в (6) также необходимо учесть частную производную:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{64\mu Q_{in}}{\pi w^3|_{x=0} h}. \quad (21)$$

Недостатком классических нестационарных одномерных моделей является сложность задания правого граничного условия при численных расчетах. В частности, в модели PKN граничное условие представляет собой нулевую длину трещины на бесконечном удалении от скважины либо считается задача с подвижной границей. В рамках более однозначного подхода можно определить максимальную полудлину трещины из балансового соотношения (8), позволяющего определить максимальную длину трещины $l_{\max}$, при этом текущая длина трещины $l(t)$ определяется как точка, в которой давление становится равным давлению гидроразрыва пласта. Система уравнений является интегро-дифференциальной и замкнутой.

Аналогично стационарной модели для решения описанной системы уравнений можно использовать метод последовательного исключения неизвестных. В резуль-

тате получится уравнение, в котором искомой функцией будет только давление в трещине:

$$\frac{\partial(P - P_{hf})}{\partial t} - \frac{h^2(1-v^2)^2}{16\mu E^2} \frac{\partial^2(P - P_{hf})^4}{\partial x^2} = -\frac{kk_r(S_{or})h_e E}{2\mu L h^2(1-v^2)}(P - P_r). \quad (22)$$

Уравнение (22) – нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, поэтому для его решения целесообразно использовать численные методы. Наиболее простым среди таких методов является явная конечно-разностная схема с шагом по времени Δt :

$$\begin{aligned} \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} - \frac{h^2(1-v^2)^2}{16\mu E^2} \frac{(P_{i+1}^n - P_{hf})^4 - 2(P_i^n - P_{hf})^4 + (P_{i-1}^n - P_{hf})^4}{(\Delta x)^2} = \\ = -\frac{kk_r(S_{or})h_e E}{2\mu L h^2(1-v^2)}(P_i^n - P_r), \end{aligned} \quad (23)$$

где n – индекс узла вычислительной сетки по времени. Для шага по координате справедлива формула (12).

Численная аппроксимация интеграла в краевом условии (8) проводится по формуле трапеций аналогично выражению (17) при подстановке уравнений (4), (12):

$$Q_{in} = \frac{kk_r(S_{or})h_e l_{\max}^{n+1}}{\mu L N} \left(\frac{P_0^{n+1} + P_N^{n+1} - 2P_r}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} (P_i^{n+1} - P_r) \right). \quad (24)$$

Начальное условие (20) аппроксимируется как

$$P_i^0 = P_{hf}, i = \overline{1, N-1}. \quad (25)$$

Чтобы переписать граничное условие (21), необходимо учесть связь ширины трещины и давления (5), тогда

$$\left. \frac{\partial(P - P_{hf})^4}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{32\mu Q_{in} E^3}{\pi h^4(1-v^2)^3}.$$

В результате граничные условия запишутся как

$$\frac{(P_1^n - P_{hf})^4 - (P_0^n - P_{hf})^4}{\Delta x} = -\frac{32\mu Q_{in} E^3}{\pi h^4(1-v^2)^3}, \forall n, \quad (26)$$

$$P_N^n = P_{hf}, \forall n. \quad (27)$$

Если учесть (12), то $l_{\max}$ входит в уравнения (23) и (24), поэтому получившаяся система уравнений с начальным условием (25) и граничными условиями (26) и (27) решается методом простой итерации.

Результаты расчетов длины трещины

Для расчетов длины трещины по стационарной и нестационарной моделям, разработанным авторами, взяты следующие данные: $P_r = 10$ МПа, $\mu = 1$ МПа·с, $Q_{in} = 0,001$ м³/с, $E = 50$ ГПа, $v = 0,2$, $h = 30$ м, $h_e = 20$ м, $k_r(S_{or}) = 0,5$, число шагов по координате равно 100. Шаг по времени для нестационарной модели равен 0,0005 с. При заданных параметрах объем утечек из трещины за 1 с составляет порядка 10^{-3} м³,

а прирост объема трещины за это же время имеет порядок 10^{-5} м^3 , что свидетельствует о справедливости допущения о малой скорости роста трещины по сравнению со скоростью утечек.

В рамках стационарной модели полудлина трещины автоГРП определяется балансом притока воды из скважины в трещину и ее оттока из трещины в пористую среду (17). При заданных выше параметрах полудлина трещины равна 47 м, распределение давления в ней показано на рис. 2.

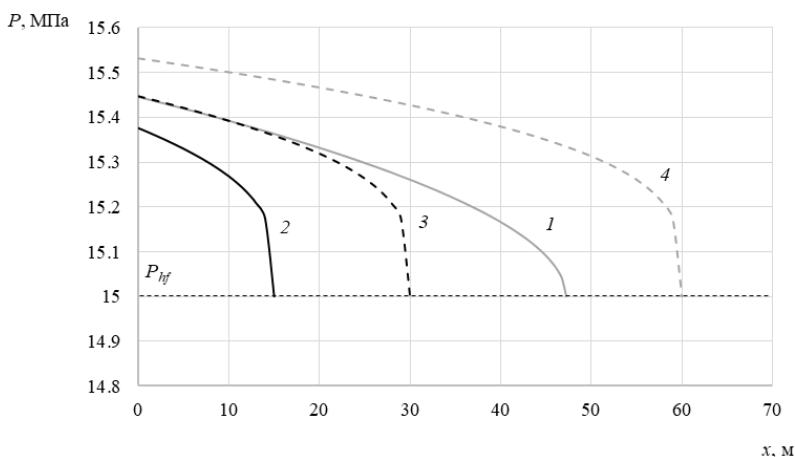


Рис. 2. Распределение давления в трещине для стационарной модели, разработанной авторами (кривая 1), и стационарной модели PKN при различных полудлинах трещины: кривая 2 – при $l = 15$ м, кривая 3 – при $l = 30$ м, кривая 4 – при $l = 45$ м

Fig. 2. Pressure distribution within the fracture in the stationary model developed by the authors (1) and a stationary PKN model for various half-lengths of the fracture: $l =$ (2) 15, (3) 30, and (4) 45 m

Распределение давления также может быть рассчитано по стационарной модели PKN, получаемой из классической модели PKN [15] при $t \rightarrow \infty$. Распределения давления, посчитанные при различном выборе l , для такой модели приведены на рис. 2. Остальные параметры аналогичны стационарной модели. В целом эти распределения качественно повторяют зависимость, полученную по разработанной в статье стационарной модели. Значение давления на забое нагнетательной скважины определяется расходом воды. Далее давление снижается до давления гидроразрыва в точке в точке $x = l$. При $l = 30$ м модель PKN воспроизводит при $x < 20$ м распределение давления, соответствующее стационарной модели, но ближе к правой границе трещины значения давления отличаются из-за различия размеров трещины.

В случае классической нестационарной модели PKN полудлина трещины определяется по точке, в которой давление становится равным давлению гидроразрыва, при этом правая граница расчетной области удаляется далеко, имитируя бесконечность, поскольку ее влияние мало [15]. При вышеприведенных параметрах была рассчитана динамика развития трещины по нестационарной модели PKN при различных расстояниях от нагнетательной скважины до правой границы расчетной области L (рис. 3). С течением времени полудлина трещины возрастает, причем значение L практически не влияет на динамику роста трещины.

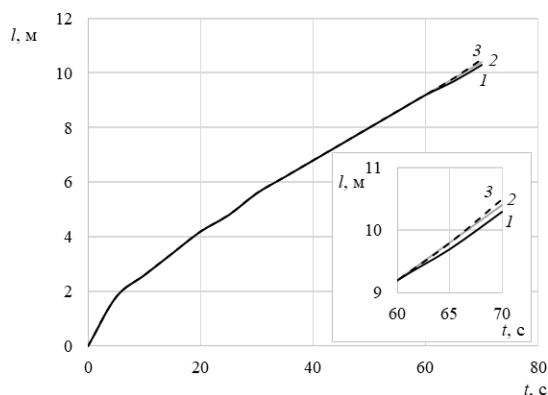


Рис. 3. Динамика роста трещины по модели PKN при различных значениях координаты правой границы: кривая 1 соответствует $L = 50$ м, кривая 2 – $L = 100$ м, кривая 3 – $L = 200$ м

Fig. 3. Dynamics of the fracture growth according to the PKN model at different right boundary coordinates: $L = (1) 50$, $(2) 100$, and $(3) 200$ m

Расчет зависимости полудлины трещины от времени по нестационарной модели, разработанной авторами, при вышеприведенных параметрах показывает, что со временем длина трещины возрастает медленнее, чем по модели PKN, хотя до 50 с значения полудлин по обеим моделям практически совпадают. Этот эффект замедления роста полудлины трещины связан с постепенной стабилизацией размеров трещины по нестационарной модели, учитывающей баланс расхода нагнетаемой жидкости и оттока из трещины. В модели PKN стабилизация размеров трещины не наступает, что, однако, не соответствует практике [9].

Расчеты по нестационарной модели при различном числе ячеек по горизонтальной координате показывают, что динамика развития трещины не зависит от крупности разбиения численной сетки (рис. 4), поэтому и при 100 ячейках модель воспроизводит результаты достоверно.

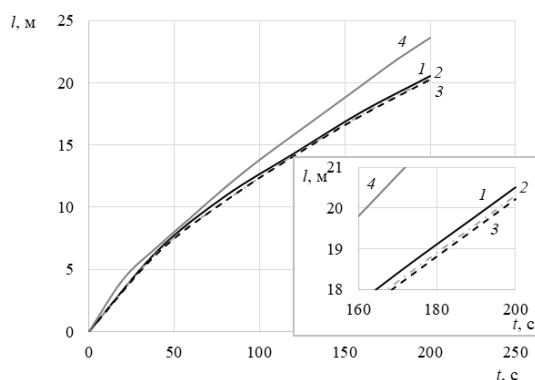


Рис. 4. Влияние числа ячеек на динамику роста трещины по нестационарной модели в сравнении с моделью PKN: кривая 1 соответствует 100 ячейкам, кривая 2 – 250 ячейкам, кривая 3 – 500 ячейкам, кривая 4 – модели PKN

Fig. 4. Effect of the number of cells on the fracture growth dynamics according to the non-stationary model in comparison with the PKN model: $(1) 100$, $(2) 250$, and $(3) 500$ cells, (4) PKN model

Влияние числа ячеек на результаты расчетов можно также рассмотреть на примере распределения давления по координате в момент времени 200 с (рис. 5). В целом распределение давления сохраняет практически неизменный вид при разном выборе крупности численной сетки, однако при более мелкой сетке размытие фронта давления меньше.

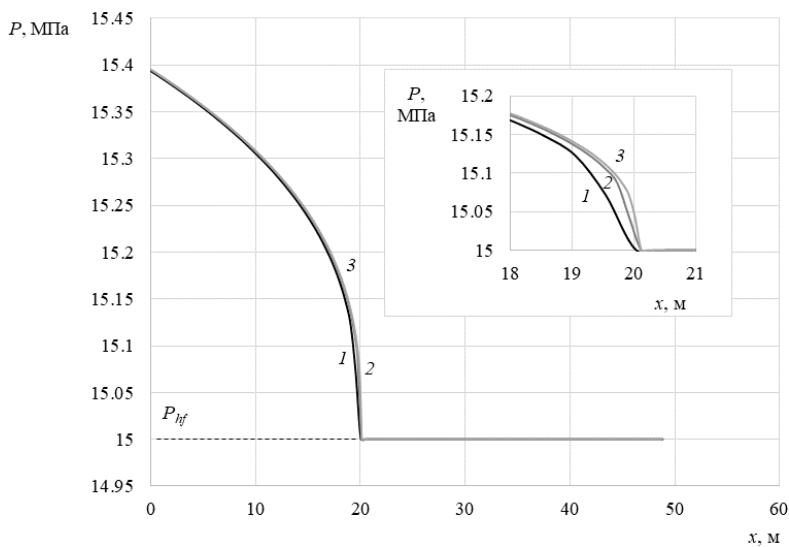


Рис. 5. Влияние числа ячеек на распределение давления, полученное по нестационарной модели (кривая 1 – 100 ячеек, кривая 2 – 250 ячеек, кривая 3 – 500 ячеек)

Fig. 5. Effect of number of cells on the pressure distribution obtained using the non-stationary model: (1) 100, (2) 250, and (3) 500 cells

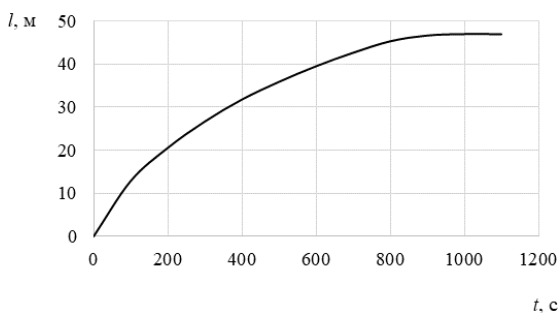


Рис. 6. Зависимость полудлины трещины от времени для нестационарной модели

Fig. 6. Time dependence of the fracture half-length in the non-stationary model

Дальнейшие расчеты по нестационарной модели показывают, что со временем полудлина трещины выходит на стационарное значение, согласующееся со значением, определенным по стационарной модели (рис. 6). При вышеприведенных параметрах в обоих случаях это значение равно 47 м и обусловлено балансом расхода закачиваемой жидкости и оттока из трещины в пласт. При этом распределения давления для стационарной и нестационарной моделей при выходе на стационарное значение полудлины трещины (в момент времени $t = 1\,000$ с) также дают близкие

результаты, расходящиеся по относительной величине (по отношению к разности давления и давления гидроразрыва) на 5% (рис. 7), что обусловлено наличием итерационных процедур для нахождения давления в обоих случаях.

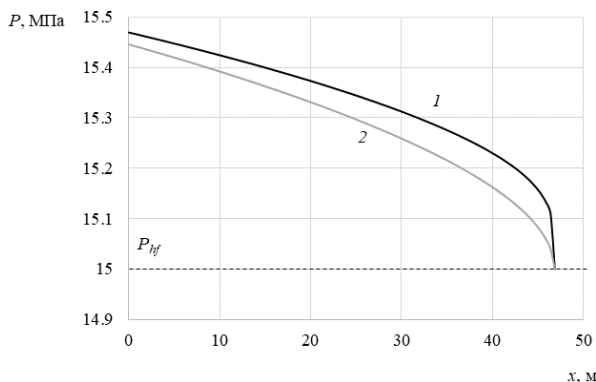


Рис. 7. Сравнение распределения давления для стационарной (кривая 1) и нестационарной модели (кривая 2) при стабилизации трещины
Fig. 7. Comparison of pressure distributions in the (1) stationary and (2) non-stationary models under fracture stabilization conditions

Выводы

1. Разработаны стационарная и нестационарная модели стабилизации трещины автоГРП, позволяющие однозначно определить длину трещины из баланса расхода закачиваемой жидкости и оттока из трещины в пласт.

2. Проанализирована динамика развития трещины автоГРП, определенная по нестационарной модели, проведено сравнение с классической моделью PKN. Длина трещины по нестационарной модели растет медленнее, чем по модели PKN, поскольку в случае модели PKN не наблюдается выход на стационарные значения длины трещины из-за требования удаления правой границы расчетной области.

3. Показано, что количество ячеек численной сетки практически не влияет на динамику роста трещины, однако укрупнение сетки приводит к размытию фронта давления.

4. Определено, что при моделировании развития трещины автоГРП по нестационарной модели длина трещины ограничена значением, при котором отток воды из трещины в пласт компенсирует приток флюида из скважины. Это значение согласуется с результатами расчетов по стационарной модели.

Список источников

1. Петухов Н.Ю., Кулушев М.М., Емельянов А.Г., Мироненко А.А. Опыт реализации программы ограничения закачки рабочего агента на Приобском месторождении // Нефтяное хозяйство. 2020. № 10. С. 54–58. doi: 10.24887/0028-2448-2020-10-54-58
2. Yang Y., Xiao W., Bernabe Y., Xie Q., Wang J., He Y., Li M., Chen M., Ren J., Zhao J., Zheng L. Effect of pore structure and injection pressure on waterflooding in tight oil sandstone cores using NMR technique and pore network simulation // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2022. V. 217. Art. 110886. doi: 10.1016/j.petrol.2022.110886

3. Андреева А.И., Афанасьев А.А. Сравнение оптимальных режимов водогазового воздействия в рамках одномерной и двумерной постановок задачи фильтрации // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15, № 3. С. 253–262. doi: 10.7242/1999-6691/2022.15.3.19
4. Yan X., Yu H. Numerical simulation of hydraulic fracturing with consideration of the pore pressure distribution based on the unified pipe-interface element model // Engineering Fracture Mechanics. 2022. V. 275. Art. 108836. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108836
5. Lv M., Xue B., Guo W., Guan B. Novel calculation method to predict gas–water two-phase production for the fractured tight-gas horizontal well // Journal of Petroleum Exploration and Production Technology. 2023. V. 13. P. 1–15. doi: 10.1007/s13202-023-01696-1
6. Chang X., Xu E., Guo Y., Yang C., Hu Z., Guo W. Experimental study of hydraulic fracture initiation and propagation in deep shale with different injection methods // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2022. V. 216. Art. 110834. doi: 10.1016/j.petrol.2022.110834
7. Feng N., Chang Y., Wang Z., Liang T., Guo X., Zhu Y., Hu L., Wan Y. Comprehensive evaluation of waterflooding performance with induced fractures in tight reservoir: a field case // Geofluids. 2021. V. 2021. P. 1–11. doi: 10.1155/2021/6617211
8. Шель Е.В., Кабанова П.К., Ткаченко Д.Р., Базыров И.Ш., Логвинюк А.В. Моделирование инициации и распространения трещины гидроразрыва пласта на нагнетательной скважине для не трещиноватых терригенных пород на примере Приобского месторождения // ПРОНЕФТЬ. Профессионально о нефти. 2020. № 2 (16). С. 36–42. doi: 10.7868/S2587739920020056
9. Давлетбаев А.А., Байков В.А., Бикбулатова Г.Р., Асмандияров Р.Н., Назаргалин Э.Р., Слабейкий А.А., Сергеевичев А.В., Нуриев Р.И. Промысловые исследования по изучению самопроизвольного развития техногенных трещин в нагнетательных скважинах // Российская техническая нефтегазовая конференция и выставка SPE по разведке и добыче, Москва, Россия, 14–16 октября 2014. М., 2014. Статья SPE-171232-RU. С. 1–9. doi: 10.2118/171232-RU
10. Гараева А.Н., Королев Э.А., Храмченков М.Г. Особенности кольматации порового пространства в напряженно-деформируемых глинистых коллекторах // Нефтяное хозяйство. 2017. № 8. С. 72–74. doi: 10.24887/0028-2448-2017-8-72-74
11. Шляпкин А.С. Подход к моделированию гидроразрыва пласта в скважинах с горизонтальным окончанием // Нефтепромысловое дело. 2020. № 9. С. 14–19.
12. Seright R. Gel propagation through fractures // Society of Petroleum Engineers, SPE/DOE Improved Oil Recovery Symposium, April 3–5, 2000, Tulsa, USA. 2000. Conference paper SPE 59316. P. 1–9. doi: 10.2118/59316-MS
13. Шляпкин А.С., Татосов А.В. О решении задачи гидроразрыва пласта в одномерной математической постановке // Нефтяное хозяйство. 2020. № 12. С. 118–121. doi: 10.24887/0028-2448-2020-12-118-121
14. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Методы моделирования зарождения и распространения трещин. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016.
15. Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г. Математические модели гидроразрыва пласта // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 33–61.
16. Ивашинов О.Е., Смирнов Н.Н. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2003. № 6. С. 28–36.
17. Ентов В.М., Зазовский А.Ф., Стелин И.Б., Хараидзе Д.М. Одномерная модель распространения трещины гидроразрыва // Численные методы решения задач фильтрации. Динамика многофазных сред: материалы IX Всесоюз. семинара, 1989, Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1989. С. 91–95.
18. Paullo Munoz L.F., Mejia C., Rueda J., Roehl D. Pseudo-coupled hydraulic fracturing analysis with displacement discontinuity and finite element methods // Engineering Fracture Mechanics. 2022. V. 274. Art. 108774. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108774
19. Zhou Y., Yang D., Zhang X., Chen W., Xia X. Numerical investigation of the interaction between hydraulic fractures and natural fractures in porous media based on an enriched FEM // Engineering Fracture Mechanics. 2020. V. 235. Art. 107175. doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.107175

20. Geertsma J., de Klerk F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures // *Journal of Petroleum Technology*. 1969. V. 12. P. 1571–1581.
21. Detournay E., Cheng A.H.-D., McLennan J.D. A poroelastic PKN hydraulic fracture model based on an explicit moving mesh algorithm // *Journal of Energy Resources Technology*. 1990. V. 112 (4). P. 224–230.
22. Татосов А.В., Шляпкин А.С. Движение проппанта в раскрывающейся трещине гидроразрыва пласта // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2018. Т. 18, № 2. С. 217–226. doi: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226
23. Parchei-Esfahani M., Gee B., Gracie R. Dynamic hydraulic stimulation and fracturing from a wellbore using pressure pulsing // *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. V. 235. Art. 107152. doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.107152
24. Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Моделирование нестационарной фильтрации в системе пласт – трещина гидроразрыва // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 77. С. 158–168. doi: 10.17223/19988621/77/12
25. Анурьев Д.А., Фёдоров К.М., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П., Морозовский Н.А., Торопов К.В. Анализ возможности блокирования трещин автоГРП суспензионной системой // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2023. № 84. С. 36–51. doi: 10.17223/19988621/84/4

References

1. Petukhov N.Yu., Kulushev M.M., Emel'yanov A.G., Mironenko A.A. (2020) Opyt realizatsii programmy ogranicheniya zakachki rabocheho agenta na Priobskom mestorozhdenii [Experience in implementation a program for limiting the injection of a working agent at the Priobskoye field]. *Neftyanoe khozyaystvo – Oil Industry*. 10. pp. 54–58. doi: 10.24887/0028-2448-2020-10-54-58
2. Yang Y., Xiao W., Bernabe Y., Xie Q., Wang J., He Y., Li M., Chen M., Ren J., Zhao J., Zheng L. (2022) Effect of pore structure and injection pressure on waterflooding in tight oil sandstone cores using NMR technique and pore network simulation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 217. Article 110886. doi: 10.1016/j.petrol.2022.110886
3. Andreeva A.I., Afanasyev A.A. (2022) Comparison of optimal modes of water-gas impact within the framework of one-dimensional and two-dimensional formulations of the filtration problem. *Computational Continuum Mechanics*. 15(3). pp. 253–262. doi: 10.7242/1999-6691/2022.15.3.19
4. Yan X., Yu H. (2022) Numerical simulation of hydraulic fracturing with consideration of the pore pressure distribution based on the unified pipe-interface element model. *Engineering Fracture Mechanics*. 275. Article 108836. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108836
5. Lv M., Xue B., Guo W., Guan B. (2023) Novel calculation method to predict gas–water two-phase production for the fractured tight-gas horizontal well. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*. 13. pp. 1–15. doi: 10.1007/s13202-023-01696-1
6. Chang X., Xu E., Guo Y., Yang C., Hu Z., Guo W. (2022) Experimental study of hydraulic fracture initiation and propagation in deep shale with different injection methods. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 216. Article 110834. doi: 10.1016/j.petrol.2022.110834
7. Feng N., Chang Y., Wang Z., Liang T., Guo X., Zhu Y., Hu L., Wan Y. (2021) Comprehensive evaluation of waterflooding performance with induced fractures in tight reservoir: a field case. *Geofluids*. 2021. pp. 1–11. doi: 10.1155/2021/6617211
8. Shel' E.V., Kabanova P.K., Tkachenko D.R., Bazyrov I.Sh., Logvinyuk A.V. (2020) Modelirovanie initsiatsii i rasprostraneniya treshchiny gidrorazryva plasta na nagnetatel'noy skvazhine dlya ne treshchinovatykh terrigennykh porod na primere Priobskogo mestorozhdeniya [Modeling the initiation and propagation of a hydraulic fracturing at an injection well for non-fractured terrigenous rocks using the example of the Priobskoye field]. *PRONEFT'*.

- Professional'no o nefti – PRONEFT. Professionally about Oil.* 2(16). pp. 36–42. doi: 10.7868/S2587739920020056
9. Davletbaev A.Ya., Baykov V.A., Bikbulatova G.R., Asmandiyarov R.N., Nazargalin E.R., Slabetsky A.A., Sergeychev A.V., Nuriev R.I. (2014) Field studies of spontaneous growth of induced fractures in injection wells. *Russian Oil and Gas Exploration and Production Technical Conference and Exhibition, Moscow, Russia.* Article SPE-171232-MS. pp. 1–9. doi: 10.2118/171232-MS
10. Garaeva A.N., Korolev E.A., Khramchenkov M.G. (2017) Osobennosti kol'matatsii porovogo prostranstva v napryazhenno-deformiruemyykh glinistykh kollektorakh [Some peculiarities of pore space colmatation process in stress heterogeneous clayey reservoirs]. *Neftyanoe khozyaystvo – Oil Industry.* 8. pp. 72–74. doi: 10.24887/0028-2448-2017-8-72-74
11. Shlyapkin A.S. (2020) Podkhod k modelirovaniyu gidrorazryva plasta v skvazhinakh s gorizontalmym okonchaniem [An approach to modeling hydraulic fracturing in wells with horizontal completion]. *Neftpromyslovoye delo – Oilfield Engineering.* 9. pp. 14–19.
12. Seright R. (2000) Gel propagation through fractures. *Society of Petroleum Engineers.* Article SPE 59316. pp. 1–9. doi: 10.2118/59316-MS
13. Shlyapkin A.S., Tatosov A.V. (2020) O reshenii zadachi gidrorazryva plasta v odnomernoy matematicheskoy postanovke [On solving the fracturing problem in a hybrid PKN-KGD formulation]. *Neftyanoe khozyaystvo – Oil Industry.* 12. pp. 118–121. doi: 10.24887/0028-2448-2020-12-118-121
14. Chyorny S.G., Lapin V.N., Esipov D.V., Kuranakov D.S. (2016) *Metody modelirovaniya zarozhdeniya i rasprostraneniya treshchin* [Methods of modeling the initiation and propagation of fractures]. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN.
15. Esipov D.V., Kuranakov D.S., Lapin V.N., Chyorny S.G. (2014) Matematicheskie modeli gidrorazryva plasta [Mathematical models of hydraulic fractures]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies.* 19(2). pp. 33–61.
16. Ivashnev O.E., Smirnov N.N. (2003) Formirovanie treshchiny gidrorazryva v porистой среде [Formation of a hydraulic fracturing in a porous medium]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika – Moscow University Mechanics Bulletin.* 6. pp. 28–36.
17. Entov V.M., Zazovskiy A.F., Stelin I.B., Kharaidze D.M. (1989) Odnomernaya model' rasprostraneniya treshchiny gidrorazryva [One-dimensional model of hydraulic fracture propagation]. *Materiyy IX Vsesoyuznogo seminar «Chislennyye metody resheniya zadach fil'tratsii. Dinamika mnogofaznykh sred» – Proceedings of the IX All-Union Seminar “Numerical methods for solving filtration problems. Dynamics of Multiphase Media.”.* Novosibirsk, ITPM SO AN USSR. pp. 91–95.
18. Paullo Munoz L.F., Mejia C., Rueda J., Roehl D. (2022) Pseudo-coupled hydraulic fracturing analysis with displacement discontinuity and finite element methods. *Engineering Fracture Mechanics.* 274. Article 108774. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108774
19. Zhou Y., Yang D., Zhang X., Chen W., Xia X. (2020) Numerical investigation of the interaction between hydraulic fractures and natural fractures in porous media based on an enriched FEM. *Engineering Fracture Mechanics.* 235. Article 107175. doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.107175
20. Geertsma J., de Klerk F. (1969) A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures. *Journal of Petroleum Technology.* 12. pp. 1571–1581. doi: 10.2118/2458-PA
21. Detournay E., Cheng A.H.-D., McLennan J.D. (1990) A poroelastic PKN hydraulic fracture model based on an explicit moving mesh algorithm. *Journal of Energy Resource Technology.* 112(4). pp. 224–230. doi: 10.1115/1.2905762
22. Tatosov A.V., Shlyapkin A.S. (2018) Dvizhenie proppanta v raskryvayushcheysya treshchine gidrorazryva plasta [The motion of propping agent in an opening crack in hydraulic fracturing plast]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics.* 18(2). pp. 217–226. doi: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226

23. Parchei-Esfahani M., Gee B., Gracie R. (2020) Dynamic hydraulic stimulation and fracturing from a wellbore using pressure pulsing. *Engineering Fracture Mechanics*. 235. Article 107152. doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.107152
24. Khabibullin I.L., Khisamov A.A. (2022) Modelirovanie nestatsionarnoy fil'tratsii v sisteme plast – treshchina gidrorazryva [Modeling of unsteady filtration in a formation–hydraulic fracture system]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 158–168. doi: 10.17223/19988621/77/12
25. Anur'ev D.A., Fedorov K.M., Gil'manov A.Ya., Shevelev A.P., Morozovskiy N.A., Toropov K.V. (2023) Analiz vozmozhnosti blokirovaniya treshchin avtoGRP suspenzionnoy sistemoy [Analysis of the possibility of technogenic fracture blocking using a suspension system]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 36–51. doi: 10.17223/19988621/84/4

Сведения об авторах:

Гильманов Александр Янович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры моделирования физических процессов и систем Школы естественных наук Тюменского государственного университета (Тюмень, Россия). E-mail: a.y.gilmanov@utmn.ru

Касенинов Руслан Жаканович – студент магистратуры по направлению «Техническая физика» Школы естественных наук Тюменского государственного университета (Тюмень, Россия). E-mail: stud0000243578@study.utmn.ru

Кузнецов Артем Валерьевич – аспирант Школы естественных наук Тюменского государственного университета (Тюмень, Россия). E-mail: stud0000219214@study.utmn.ru

Шевелёв Александр Павлович – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры моделирования физических процессов и систем Школы естественных наук Тюменского государственного университета (Тюмень, Россия). E-mail: a.p.shevelev@utmn.ru

Information about the authors:

Gil'manov Aleksandr Ya. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: a.y.gilmanov@utmn.ru

Kaseinov Ruslan Zh. (School of Natural Sciences, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: stud0000243578@study.utmn.ru

Kuznetsov Artyom V. (School of Natural Sciences, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: stud0000219214@study.utmn.ru

Shevelev Aleksandr P. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: a.p.shevelev@utmn.ru

Статья поступила в редакцию 16.05.2024; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 16.05.2024; accepted for publication 09.06.2025

Научная статья

УДК 532.5.013.4

doi: 10.17223/19988621/95/9

Изменение области гидродинамической устойчивости в зависимости от параметра термовязкости

Надир Эрикович Муртазин¹, Регина Димовна Муртазина²,
Айгуль Айратовна Мухутдинова³, Аделина Димовна Низамова⁴

¹ Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

² Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

^{3, 4} Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра
Российской академии наук, Уфа, Россия

¹ nadir.murtazing@gmail.com

² reginaufa@yandex.ru

³ mukhutdinova23@ya.ru

⁴ adeshka@yandex.ru

Аннотация. Изучается поток несжимаемой жидкости в плоском канале, характеризующийся заданным температурным полем и перепадом давления. Полученные результаты показывают, что неоднородность температурного поля существенно влияет на устойчивость потока. Обнаружено, что при определенных значениях температурного поля поток становится неустойчивым, что может привести к турбулизации, а также то, что нейтральные кривые для случая неизотермического течения отличаются от нейтральных кривых для случая изотермического течения. Исследованы влияния параметра вязкости жидкости от температурного поля на критические характеристики потока.

Ключевые слова: критические параметры течения, нейтральные кривые, динамика возмущений поперечных скоростей

Благодарности: Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

Для цитирования: Муртазин Н.Э., Муртазина Р.Д., Мухутдинова А.А., Низамова А.Д. Изменение области гидродинамической устойчивости в зависимости от параметра термовязкости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 97–107. doi: 10.17223/19988621/95/9

Original article

Variation in the region of hydrodynamic stability depending on a thermoviscosity parameter

Nadir E. Murtazin¹, Regina D. Murtazina²,
Aygul' A. Mukhutdinova³, Adelina D. Nizamova⁴

¹ Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russian Federation

² Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation

^{3,4} Mavlyutov Institute of Mechanics of the Ufa Federal Research Center
of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation

¹ nadir.murtazing@gmail.com

² reginaufa@yandex.ru

³ mukhutdinova23@ya.ru

⁴ adeshka@yandex.ru

Abstract. This paper considers an incompressible fluid flow in a flat channel with a non-uniform temperature field under the pressure drop. The diagrams of the increase in the intensity of disturbances for the first eigenvalue and the decay of disturbances for the second eigenvalue are plotted. Neutral curves are presented for the flow of the fluids with constant viscosity and fluids with a linear dependence of viscosity. The critical flow parameters are shown as functions of the thermoviscosity parameter.

The obtained results show that with increasing thermoviscosity parameter, the critical Reynolds number decreases, and the region of unstable regimes expands. In this case, the critical wave number increases and always exceeds that for the isothermal fluid flow. At very small thermoviscosity parameters, the critical wave and Reynolds numbers for the thermoviscous fluid flow and isothermal fluid flow coincide.

Thus, when determining the conditions for the laminar-to-turbulent transition of the flow regime, it is necessary to take into account the dependence of the viscosity on temperature. The shape of this dependence does not have a significant effect on the critical Reynolds numbers. In this case, the important factor is the non-uniform temperature distribution over the channel cross-section and the corresponding distribution of the fluid viscosity.

Keywords: critical flow parameters, neutral curves, dynamics of transverse velocity perturbations

Acknowledgments: This study was supported by the state budget funds within the state assignment 124030400064-2 (theme No. FMRS-2024-0001).

For citation: Murtazin, N.E., Murtazina, R.D., Mukhutdinova, A.A., Nizamova, A.D. (2025) Variation in the region of hydrodynamic stability depending on a thermoviscosity parameter. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 97–107. doi: 10.17223/19988621/95/9

Введение

Ламинарный и турбулентный режимы течения могут быть предпочтительными в зависимости от конкретного технологического процесса. Ламинарный режим повышает энергосбережение, в то время как турбулентный обеспечивает эффективный тепло- и массообмен. При увеличении скорости потока могут возникать возмущения, приводящие к вторичному нелинейному режиму или турбулизации.

Выполненные ранее исследования гидродинамической устойчивости [1–5] не учитывают неоднородность температурного поля. Однако многие жидкости обладают значительной зависимостью вязкости от температуры [6], что может существенно влиять на область устойчивости ламинарного течения, особенно при наличии температурных перепадов. Устойчивость также играет важную роль при изучении несмешивающихся вытеснений, таких как вытеснение воды нефтью, нефти газом или водой при постоянном перепаде давления в ячейках Хеле–Шоу [7, 8].

Зависимость вязкости жидкостей от температуры обычно имеет экспоненциальный характер. Однако при небольших значениях перепада температуры эту зави-

симось можно считать линейной, что вызывает особый интерес в вопросе гидродинамической устойчивости. В настоящей работе изучается поток несжимаемой жидкости в плоском канале, характеризующийся заданными температурным полем и перепадом давления. Представлены собственные значения и графики, показывающие динамику возмущений поперечных скоростей для двух собственных значений. Работа отличается от предыдущих исследований тем, что в ней учитывается неоднородность температурного поля и изучается влияние этой неоднородности на устойчивость потока. Кроме того, построены области режимов течения, ограниченные нейтральными кривыми для случая неизотермического течения, что является новым подходом в данной области исследований.

Постановка задачи

Изучается поток несжимаемой жидкости в плоском канале, в котором верхняя стенка подвергается нагреву, для возможности пренебрежения явлением конвекции. В данном случае предполагаем, что вязкость жидкости изменяется в зависимости от температуры согласно виду, который представлен на рис. 1, с помощью некоторого параметра $\alpha_L < 0.5$.

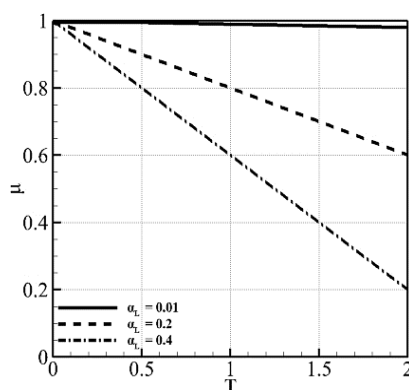


Рис. 1. Вязкость жидкости

Fig. 1. Fluid viscosity

Распределения полей температуры $T = 1 + y$, вязкости и скоростей представлены на рис. 2, где y – ширина канала. На рис. 2, с приведены эпюры продольной скорости u (слева направо): 1) при максимальной вязкости, соответствующей минимальному значению температуры; 2) при зависимости вязкости от линейного распределения температуры по сечению канала; 3) при минимальной вязкости, соответствующей максимальному значению температуры при $\alpha_L = 0.4$ (см. рис. 1). В первом и третьем случаях эпюры соответствуют пуазейлевскому симметричному относительно средней линии канала профилю. Это означает, что профиль скорости потока в этих случаях имеет максимум в центре канала и симметричен относительно средней линии. При этом во втором случае профиль несимметричен, а его максимум смещен к верхней стенке канала, на которой задано большее значение температуры. Это означает, что в этом случае профиль скорости потока имеет максимум не в центре канала, а ближе к верхней стенке, и несимметричен

относительно средней линии. Все величины в рассмотренных случаях записаны в безразмерном виде, что позволяет проводить сравнительный анализ и использовать полученные результаты для решения практических задач.

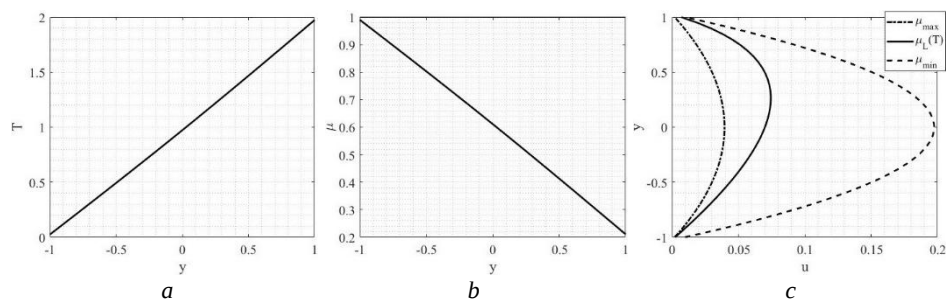


Рис. 2. Распределения полей температуры (a), вязкости (b) и скоростей (c)
Fig. 2. (a) Temperature, (b) viscosity, and (c) velocity fields

В работе [9] был проведен подробный вывод уравнения для описания процесса смены режима течения жидкости. В настоящей работе также используется это уравнение. Задача об устойчивости течения жидкости рассматривается при условии малости пульсаций температурного поля по сравнению с пульсациями полей давления и компонент вектора скорости.

Таким образом, в задаче предполагается, что температурное поле меняется медленнее, чем давление и скорость потока, и его влияние на устойчивость потока незначительно. Это позволяет упростить уравнение для описания процесса смены режима течения жидкости и использовать его для проведения анализа устойчивости потока в различных условиях.

Уравнение имеет следующий вид:

$$\mu \cdot [\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi] - ik \operatorname{Re} [(u - c) \cdot (\varphi'' - k^2\varphi) - u''\varphi] + \\ + 2\mu' \cdot (\varphi''' - k^2\varphi') + \mu'' (\varphi'' + k^2\varphi) = 0,$$

со следующими условиями:

$$\varphi(-1) = 0, \quad \varphi'(-1) = 0, \quad \varphi(1) = 0, \quad \varphi'(1) = 0,$$

где μ – вязкость жидкости; k – волновые числа; c – скорость распространения возмущений (собственное значение); $\varphi = \varphi(y)$ – амплитуды возмущений поперечных скоростей (собственная функция); Re – число Рейнольдса.

Методика решения

Для анализа устойчивости потоков жидкостей часто применяют методы спектрального разложения, которые позволяют найти множество собственных значений и соответствующих им собственных функций [10]. Различные характеристики потока с экспоненциальной зависимостью вязкости жидкости представлены в работе [11]. В этой работе использовался аналогичный метод решения задачи. Было показано, что спектральный метод эффективен для решения задач, связанных с анализом устойчивости потоков жидкостей, и позволяет получить высокую точность вычислений.

Для проверки корректности работы программного кода был проведен ряд тестов. В частности, в случае малых значений параметра α_L были получены результаты, качественно схожие со случаем изотермического течения. То есть используемый метод работает корректно и может быть применен для решения задач, связанных с анализом устойчивости потоков жидкостей.

Для оценки точности вычислений, полученных с помощью используемого спектрального метода, был рассмотрен следующий пример с известными точными решениями:

$$y'' = -cy, \\ y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0.$$

Этот пример позволяет оценить относительную погрешность вычислений и проверить, насколько хорошо метод работает при решении задач, связанных с дифференциальными уравнениями.

На рис. 3 представлены графики относительной погрешности вычислений δ , которая показывает, насколько отличается полученное значение от точного решения в логарифмической шкале.

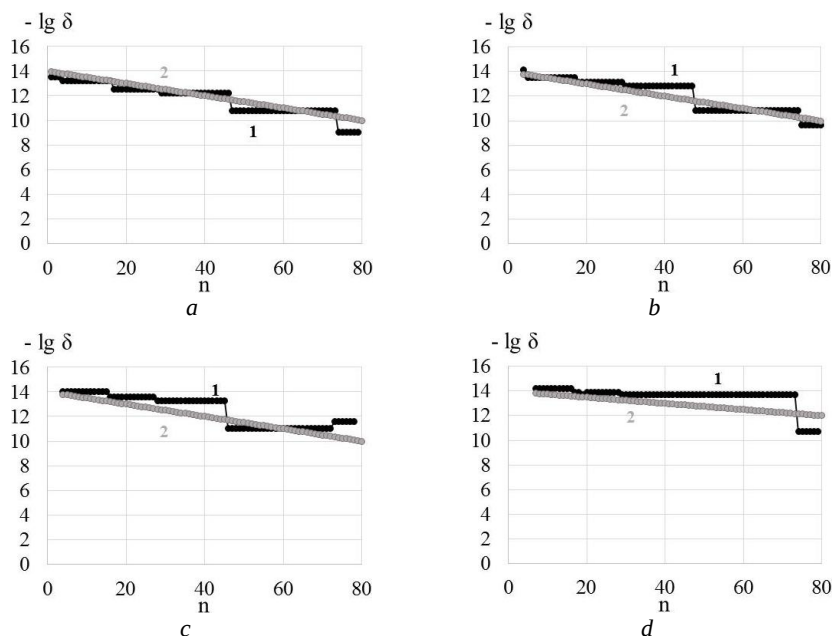


Рис. 3. Графики относительной погрешности вычислений δ : 1 – численный метод; 2 – приближение для: $c_n = 1$ (a); $c_n = 4$ (b); $c_n = 9$ (c); $c_n = 16$ (d)

Fig. 3. Diagrams of relative calculation error δ : 1, numerical method and 2, approximation at: $c_n =$ (a) 1; (b) 4; (c) 9; and (d) 16

В процессе выполнения множества вычислений было определено, что при превышении определенного значения параметра n результаты начинают изменяться и отличаются от точного решения, а точность вычисления ухудшается.

Кроме того, необходимо учесть не только взаимное влияние компонент разложения, но и ошибки округления и накопления погрешностей. Прямые линии (2) на

графиках получены эмпирически и характеризуют уменьшение погрешности вычислений.

В ходе проведенных вычислений была получена высокая точность результатов, что подтверждает эффективность используемого спектрального метода. Было показано, что относительная погрешность вычислений не превышает заданного уровня точности, т.е. метод может быть успешно применен для решения задач, связанных с анализом устойчивости потоков жидкостей.

Таким образом, в нашей работе используется эффективный спектральный метод для анализа устойчивости потоков жидкостей. Метод был проверен, его эффективность подтверждена.

Результаты исследования

В таблице представлены результаты исследования – десять собственных значений с наибольшей мнимой частью. Видно, что одно из представленных собственных значений имеет мнимую часть, большую нуля, т.е. поток при заданных параметрах не является устойчивым.

Собственные значения s для параметра $\alpha_L = 0.2$

$0.155671660372163 + 0.000954176990010i$
$0.610961696862313 - 0.024744542965387i$
$0.611485955842666 - 0.024965971464412i$
$0.186806686887322 - 0.034650615946688i$
$0.590866234915675 - 0.044525721499001i$
$0.591547260285365 - 0.044817086756817i$
$0.570772756937466 - 0.064304853311070i$
$0.571583868148145 - 0.064658639749481i$
$0.550672847094971 - 0.084079905105507i$
$0.551600364994774 - 0.084494932767070i$

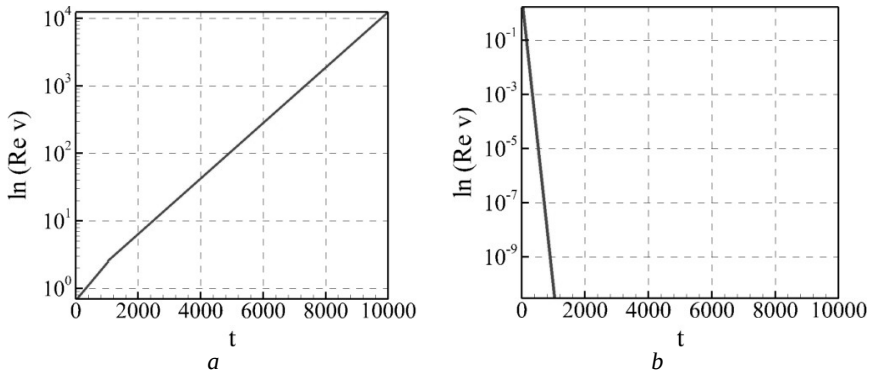


Рис. 4. Динамика возмущений поперечных скоростей:

для неустойчивого (a) и для устойчивого (b) собственных значений

Fig. 4. Dynamics of transverse velocity perturbations for: (a) unstable and (b) stable eigenvalues

На рис. 4 показана динамика возмущений поперечных скоростей для собственных значений с положительной мнимой частью (a) и с отрицательной мнимой частью (b). Как видно из рисунка, интенсивность возмущений для собственного

значения с отрицательной мнимой частью увеличивается со временем, в то время как для собственного значения с положительной мнимой частью – уменьшается. То есть поток жидкости не является устойчивым при заданных параметрах, и возмущения, соответствующие собственному значению с мнимой частью, большей нуля, будут затухать со временем.

Таким образом, спектральный метод является эффективным инструментом для анализа устойчивости потоков жидкостей. Результаты, представленные в таблице, показывает, что поток жидкости может быть неустойчив при определенных значениях параметров и что спектральный метод позволяет определить собственные значения и соответствующие им возмущения поперечных скоростей. Это важно для практических приложений, таких как разработка систем теплообмена и промышленных конденсаторов.

Границы области неустойчивости потока жидкости являются важным аспектом при разработке систем теплообмена и промышленных конденсаторов. Нейтральные кривые, которые представлены на рис. 5, позволяют определить эти границы для потока.

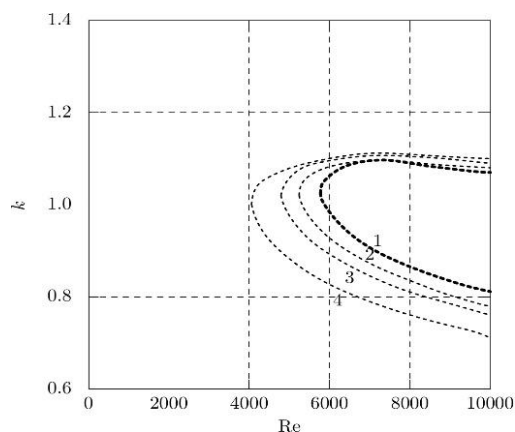


Рис. 5. Области режимов течения: изотермическое течение (1); для параметров $\alpha_L = 0.05$ (2); $\alpha_L = 0.1$ (3); $\alpha_L = 0.2$ (4)

Fig. 5. Areas of flow modes: (1) isothermal flow and the flow at $\alpha_L =$ (2) 0.05; (3) 0.1; and (4) 0.2

Нейтральная кривая – это такая кривая, на которой отмечены все вещественные собственные значения. То есть изменение вязкости влияет на устойчивость потока и может привести к его неустойчивости.

Отметим, что с увеличением параметра α_L область неустойчивости расширяется и всегда включает в себя область неустойчивости потока с постоянной вязкостью. Это означает, что изменение вязкости влияет на устойчивость потока и может привести к его неустойчивости. Кроме того, при проектировании систем теплообмена и промышленных конденсаторов необходимо учитывать изменение вязкости жидкости и выбирать такие параметры, при которых поток будет устойчивым.

Результаты свидетельствуют, что критическое число Рейнольдса подвержено изменению в зависимости от параметра α_L термовязкости. Это означает, что изменение вязкости жидкости в зависимости от температуры влияет на устойчивость потока и может привести к его неустойчивости. Из рис. 6 видно, что с увеличением

значений параметра α_L критическое число Рейнольдса уменьшается, что приводит к неустойчивости потока. Это подтверждает необходимость учета температурной зависимости вязкости при анализе устойчивости потоков жидкостей.

На рис. 7 демонстрируется изменение критического волнового числа в зависимости от параметра α_L . Из графика видно, что с ростом значений параметра α_L критическое волновое число также увеличивается и всегда превышает критическое волновое число для изотермического потока жидкости. Таким образом, изменение вязкости жидкости влияет на волновые характеристики потока и может привести к его неустойчивости.

Обобщенный график зависимости критических параметров течения от параметра α_L представлен на рис. 8.

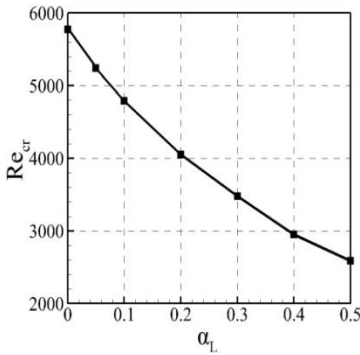


Рис. 6. Зависимость критического Re от α_L

Fig. 6. Critical Re as a function of α_L

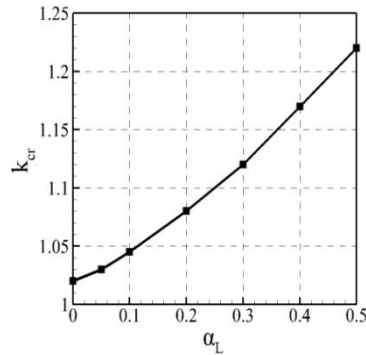


Рис. 7. Зависимость критического параметра k от α_L

Fig. 7. Critical parameter k as a function of α_L

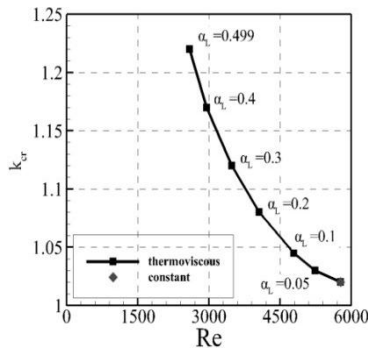


Рис. 8. Зависимости критических параметров для различных значений α_L

Fig. 8. Dependences of the critical parameters at various α_L

Таким образом, проведенный анализ показывает, что температурная зависимость вязкости играет важную роль в определении критических параметров течения. При анализе устойчивости потоков жидкостей необходимо учитывать влияние параметра α_L на критические значения потока. Для более точного анализа необходимо проводить дополнительные исследования, учитывающие другие факторы, такие как турбулентность, влияние поверхностных свойств канала и т.д.

Стоит отметить, что в дальнейших исследованиях планируется выполнить экспериментальные исследования для сопоставления полученных результатов с численными на основе экспериментальной установки, реализованной авторами настоящей работы [12]. В настоящее время установка имеет форму кольцевого канала, но может быть модифицирована для других форм каналов. Параметр α_L может быть подобран для различных жидкостей теплоносителей и в зависимости от заданного диапазона температуры. Это важно для практических приложений, таких как разработка систем теплообмена и промышленных конденсаторов.

Заключение

Полученные результаты показывают, что неоднородность температурного поля существенно влияет на устойчивость потока. Обнаружено, что при определенных значениях температурного поля поток становится неустойчивым, и это может привести к турбулизации, а также то, что нейтральные кривые для случая неизотермического течения отличаются от нейтральных кривых для случая изотермического течения.

Выполненные исследования имеют важное практическое значение для разработки систем теплообмена и промышленных конденсаторов. Они позволяют понять, как неоднородность температурного поля влияет на устойчивость потока и как это влияние можно учитывать при проектировании систем теплообмена. Полученные результаты также могут быть использованы для оптимизации режимов работы существующих систем теплообмена, чтобы повысить их эффективность и снизить энергозатраты.

В заключение стоит отметить, что выполненная работа представляет собой фундаментальное исследование влияния неоднородности температурного поля на устойчивость потока жидкости. Наши результаты имеют важное практическое значение для разработки систем теплообмена и промышленных конденсаторов, а также будут полезны для инженеров и исследователей, работающих в этой области.

Список источников

1. *Drazin P.G.* Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
2. *Petukhov B.S.* Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // *Advances in Heat Transfer*. 1970. V. 6. P. 503–564. doi: 10.1016/S0065-2717(08)70153-9
3. *Orszag S.A.* Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // *J. of Fluid Mech.* 1971. V. 50. P. 689–703. doi: 10.1017/S0022112071002842
4. *Шкаликов А.А.* Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2003. Т. 3. С. 89–112. URL: <http://mi.mathnet.ru/cmfd17>
5. *Скорыходов С.Л., Кузьмина Н.П.* Аналитико-численный метод решения задачи типа Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в океане // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2018. Т. 58, № 6. С. 1022–1039. doi: 10.7868/S0044466918060133
6. *Урманчеев С.Ф., Киреев В.Н.* Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // *Доклады академии наук*. 2004. Т. 396, № 2. С. 204–207. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17352428>
7. *Рахимов А.А., Валиев А.А.* Особенности экспериментального изучения устойчивого и неустойчивого вытеснения в ячейке Хеле–Шоу, заполненной стеклянными шариками //

- Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 140–157. doi: 10.17223/19988621/77/11
8. Рахимов А.А., Валиев А.А. Экспериментальное изучение влияния ультразвука на движение стеклянных шариков в ячейках Хеле–Шоу // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 117–132. doi: 10.17223/19988621/80/11
 9. Киреев В.Н., Низамова А.Д., Урманчиев С.Ф. Некоторые особенности гидродинамической неустойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 3. С. 454–459. doi: 10.1134/S003282351903007X
 10. Melenk J.M., Kirchner N.P., Schwab C. Spectral Galerkin discretization for hydrodynamic stability problems // Computing. 2000. V. 65. P. 97–118. doi: 10.1007/s006070070014
 11. Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmanceev S.F. Features of laminar-turbulent transition for the coolant flow in a plane heat-exchanger channel // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. P. 2211–2215. doi: 10.1134/S1995080221090249
 12. Мухутдинова А.А., Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф. Экспериментальная установка для исследования устойчивости течения жидкости // Многофазные системы. 2024. Т. 19, № 1. С. 35–39. doi: 10.21662/mfs2024.1.005

References

1. Drazin P.G. (2002) *Introduction to Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.
2. Petukhov B.S. (1970) Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties. *Advances in Heat Transfer*. 6. pp. 503–564. doi: 10.1016/S0065-2717(08)70153-9
3. Orszag S.A. (1971) Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation. *Journal of Fluid Mechanics*. 50. pp. 689–703. doi: 10.1017/S0022112071002842
4. Shkalikov A.A. (2004) Spectral portraits of the Orr–Sommerfeld operator for large Reynolds numbers. *Journal of Mathematical Sciences*. 124(6). pp. 5417–5441. doi: 10.1023/B:JOTH.0000047362.09147.c7
5. Skorohodov S.L., Kuzmina N.P. (2018) Analytical-numerical method for solving an Orr-Sommerfeld-type problem for analysis of instability of ocean currents. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 58(6). pp. 976–992. doi: 10.7868/S0044466918060133
6. Urmanceev S.F., Kireev V.N. (2004) Steady flow of a fluid with an anomalous temperature dependence of viscosity. *Doklady Physics*. 49(5). pp. 328–331. doi: 10.1134/1.1763627
7. Rakhimov A.A., Valiev A.A. (2022) Osobennosti eksperimental'nogo izucheniya ustoychivogo i neustoychivogo vytesneniya v yacheyke Khele-Shou, zapolnennoy steklyannymi sharikami [Features of an experimental study of the stable and unstable displacement in the Hele-Shaw cell filled with glass balls]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 140–157. doi: 10.17223/19988621/77/11
8. Rakhimov A.A., Valiev A.A. (2022) Eksperimental'noe izuchenie vliyaniya ul'trazvuka na dvizhenie steklyannykh sharikov v yacheykakh Khele-Shou [An experimental study of the ultrasound effect on the motion of glass spherules in Hele-Shaw cells]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 117–132. doi: 10.17223/19988621/80/11
9. Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmanceev S.F. (2019) Some features of the hydrodynamic instability of the flow of a thermally viscous fluid in a flat channel. *Fluid Dynamics*. 54. pp. 978–982. doi: 10.1134/S003282351903007X
10. Melenk J.M., Kirchner N.P., Schwab C. (2000) Spectral Galerkin discretization for hydrodynamic stability problems. *Computing*. 65. pp. 97–118. doi: 10.1007/s006070070014
11. Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmanceev S.F. (2021) Features of laminar-turbulent transition for the coolant flow in a plane heat-exchanger channel. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 42. pp. 2211–2215. doi: 10.1134/S1995080221090249

12. Mukhutdinova A.A., Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. (2024) Experimental setup for researching the stability of fluid flow. *Multiphase Systems*. 19(1). pp. 35–39. doi: 10.21662/mfs2024.1.005

Сведения об авторах:

Муртазин Надир Эрикович – студент Уфимского государственного нефтяного технического университета (Уфа, Россия). E-mail: nadir.murtazing@gmail.com

Муртазина Регина Димовна – кандидат физико-математических наук, доцент Уфимского университета науки и технологий (Уфа, Россия). E-mail: reginaufa@yandex.ru

Мухутдинова Айгуль Айратовна – аспирант, младший научный сотрудник Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра Российской академии наук (Уфа, Россия). E-mail: mukhutdinova23@ya.ru

Низамова Аделина Димовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра Российской академии наук (Уфа, Россия). E-mail: adeshka@yandex.ru

Information about the authors:

Murtazin Nadir E. (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russian Federation). E-mail: nadir.murtazing@gmail.com

Murtazina Regina D. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation). E-mail: reginaufa@yandex.ru

Mukhutdinova Aygul' A. (Junior Researcher, Mavlyutov Institute of Mechanics of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation). E-mail: mukhutdinova23@ya.ru

Nizamova Adelina D. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Mavlyutov Institute of Mechanics of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation). E-mail: adeshka@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 27.04.2024; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 27.04.2024; accepted for publication 09.06.2025

Научная статья

УДК 539.32, 53.09

doi: 10.17223/19988621/95/10

Влияние нарушения стехиометрии, УФ- и γ -облучения на вязкоупругие свойства эпоксидного связующего

Валерий Михайлович Пестренин¹, Ирина Владимировна Пестренина²,
Лидия Владимировна Ландик³, Андрей Федорович Мерзляков⁴,
Татьяна Николаевна Поморцева⁵, Андрей Рамилевич Фагалов⁶,
Алексей Викторович Кондюрин⁷, Константин Юрьевич Кузнецов⁸

^{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8} Пермский национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

⁷ Эвингар Сайентифик, Эвингар, Австралия

¹ PestreninVM@mail.ru

² IPestrenina@gmail.com

³ LidiaLandik@gmail.com

⁴ merzlyakov@psu.ru

⁵ tata.lisica@yandex.ru

⁶ slowards@gmail.com

⁷ alexey.kondyurin@gmail.com

⁸ kostya.kuzneczov.2002@mail.ru

Аннотация. Приводятся результаты исследования влияния космических факторов: нарушения стехиометрии, обусловленного испарением реагентов в вакууме, УФ- и гамма-облучения, – во время отверждения эпоксидных связующих на их вязкоупругие характеристики при малых деформациях. Показано, что влияние УФ- и гамма-облучения на эти характеристики материала противоположно влиянию изменения количественного соотношения реагентов, поэтому управление облучением способно компенсировать возникновение нарушения стехиометрического баланса при отверждении элементов конструкции из композитов в космосе.

Ключевые слова: эпоксидное связующее, нарушение стехиометрии, УФ-облучение, гамма-облучение, вязкоупругие свойства

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Правительства Пермского края в рамках научного проекта № С-26/1025.

Для цитирования: Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В., Мерзляков А.Ф., Поморцева Т.Н., Фагалов А.Р., Кондюрин А.В., Кузнецов К.Ю. Влияние нарушения стехиометрии, УФ- и γ -облучения на вязкоупругие свойства эпоксидного связующего // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 108–123. doi: 10.17223/19988621/95/10

Original article

Effect of stoichiometry violation and UV- and γ -irradiation on the viscoelastic properties of an epoxy binder

Valeriy M. Pestrenin¹, Irena V. Pestrenina², Lidiya V. Landik³,
Andrey F. Merzlyakov⁴, Tat'yana N. Pomortseva⁵, Andrey R. Fagalov⁶,
Aleksey V. Kondyurin⁷, Konstantin Yu. Kuznetsov⁸

^{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8} Perm State University, Perm, Russian Federation

⁷ Ewingar Scientific, Ewingar, Australia

¹ PestreninVM@mail.ru

² IPestrenina@gmail.com

³ LidiaLandik@gmail.com

⁴ merzlyakov@psu.ru

⁵ tata.lisica@yandex.ru

⁶ slowards@gmail.com

⁷ alexey.kondyurin@gmail.com

⁸ kostya.kuzneczov.2002@mail.ru

Abstract. In this paper, the effect of quantitative composition violations (stoichiometry) and UV- and gamma irradiation on the viscoelastic mechanical properties of an epoxy material (ED-20 resin and TETA hardener) during curing has been considered. The relevance of this study is justified by the development of technologies for manufacturing composite structures by curing under space conditions. Experimental studies have shown that reducing the hardener ratio to 0.8 of the calculated value does not significantly affect the material properties. With a greater violation of stoichiometry, the dynamic material constants decrease significantly, whereas the viscosity increases. UV-irradiation of the epoxy resin during curing leads to increased material rigidity and a shear relaxation kernel $\Gamma(t)$ near $t=0$. The dynamic shear modulus of the samples exposed to gamma irradiation for curing is higher than that of the fully cured but not irradiated samples. For the samples that are pre-cured before irradiation and those that are cured during irradiation, the dynamic shear moduli are almost the same. The viscosity of samples with violated stoichiometry increases with decreasing hardener ratio. This fact is typical for both gamma-irradiated and non-irradiated samples, although the viscosity of the gamma-irradiated samples is lower than that of the non-irradiated ones.

Keywords: epoxy binder, stoichiometry violation, UV-irradiation, gamma irradiation, viscoelastic properties

Acknowledgments: This work was financially supported by the Government of the Perm Krai (project No. C-26/1025).

For citation: Pestrenin, V.M., Pestrenina, I.V., Landik, L.V., Merzlyakov, A.F., Pomortseva, T.N., Fagalov, A.R., Kondyurin, A.V., Kuznetsov, K.Yu. (2025) Effect of stoichiometry violation and UV- and γ -irradiation on the viscoelastic properties of an epoxy binder. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 108–123. doi: 10.17223/19988621/95/10

Введение

Конструкции из композитов на основе полимерных матриц, изготавливаемые по технологии отверждения в космосе, подвергаются воздействию космической плазмы, в частности УФ- и γ -облучению [1], при этом отверждение полимера происходит в условиях вакуума. При отверждении полимера в вакууме наблюдается изменение его массы, объясняемое испарением его отдельных компонентов, что приводит к нарушению баланса между мономерами и другими реагентами (нарушению стехиометрии). Баланс определяется расчетным путем, и его нарушение оказывает существенное влияние на свойства, в том числе механические, изделий из полимеров [2–5].

Основным источником УФ-излучения на орбите является Солнце [6–18]. Влияние УФ-облучения на отверждение полимеров изучалось в работах [19–22], где показано, что, с одной стороны, оно способствует созданию линейных, или сшитых, полимерных структур с высокой молекулярной массой из мономеров с низкой молекулярной массой. Это обуславливает улучшение механических свойств – прочность, твердость и термическую стабильность. С другой стороны, УФ-облучение может вызывать разрушение полимерных цепей, что приводит к деградации их механических характеристик как в процессе отверждения, так и в готовых изделиях. При этом интенсивность УФ-облучения уменьшается с глубиной проникновения в полимер, что дает градиентный характер зависимости изменения свойств полимера по толщине от облучаемой поверхности.

Гамма-лучи исходят от Солнца и из дальнего космоса. Кроме того, гамма-лучи генерируются столкновениями высокоэнергетических частиц Солнца и дальнего космоса с атомами остаточной атмосферы. Энергии гамма-лучей лежат во всем диапазоне энергий, но неравномерно по интенсивности. Гамма-излучение представляет собой электромагнитные волны с длиной волны менее $2 \cdot 10^{-10}$ м. Такие волны проявляют ярко выраженные корпускулярные свойства и обычно рассматриваются как поток фотонов. Взаимодействие фотонов с эпоксидным связующим приводит к образованию в нем свободных радикалов, которые способствуют, с одной стороны, более эффективному отверждению полимеров, а с другой – их старению и деградации [23, 24].

Эффект влияния гамма-излучения на твердые полимеры проявляется в изменении их механических свойств [24–29], при этом в зависимости от дозы облучения жесткостные характеристики могут улучшаться или ухудшаться. Исследования в этой области направлены на понимание и оптимизацию влияния гамма-излучения на полимеры для создания материалов с желаемыми свойствами [23, 25–29].

Гамма-излучение является одним из факторов космической плазмы и будет воздействовать на неотвержденный препрег и отвержденный композиционный материал в орбитальном полете. При этом гамма-излучение обладает высокой проникающей способностью в композиционный материал, в отличие от других факторов космической плазмы, таких как налетающий поток атомарного кислорода, поток ионов и электронов и УФ-излучение. Поэтому действие гамма-излучения на материал будет однородным по всей толщине материала, что позволяет адекватно осуществить эксперименты с облучением объемного связующего композиционного материала в виде лопаток и провести соответствующие исследования связующего после облучения.

Большинство исследователей, изучая влияние нарушения стехиометрии, УФ- и γ -облучения, ограничиваются исследованием лишь жесткостных параметров полимера (как правило, модуля Юнга). Настоящая работа посвящена определению вязкоупругих материальных характеристик эпоксидного связующего на основе смолы ЭД-20 (ООО НПК «Астат», ГОСТ 10587–84) и отвердителя ТЭТА (Huntsman Holland B.V., customer product number 211350/2023) в случае, когда нарушается его стехиометрия, а также когда он подвергается УФ- или γ -облучению в процессе отверждения. В каждом случае испытаниям подвергались три образца.

1. Влияние нарушения стехиометрии на механические свойства эпоксидного связующего

Расчетное весовое соотношение эпоксидной смолы и отвердителя для полного расхода реакционных эпоксидных и аминных групп составляет 10:1. В процессе отверждения в вакууме вследствие испарения более летучего компонента (отвердителя) происходит нарушение стехиометрии связующего. В данных экспериментах нарушение стехиометрии связующего моделировалось заданием изначально более низкой концентрации отвердителя. В испытаниях рассматривались варианты со следующим весовым соотношением эпоксидной смолы и отвердителя: 10:1; 10:0.9; 10:0.8; 10:0.7. Исходные компоненты тщательно перемешивались вручную шпателем, и смесь заливалась в форму для последующего отверждения. Для отверждения образцов использовалась климатическая камера MVH-408 CNSA, которая предварительно разогревалась до температуры 80°C. Подготовленные образцы помещались в климатическую камеру и выдерживались при температуре 80°C в течение 3 ч. После истечения заданного времени образцы доставались из камеры, охлаждались при комнатной температуре не более 5 мин, затем извлекались из формы. Для механических испытаний выбирались ровные, без каких-либо видимых пузырьков и дефектов образцы.

Механические испытания полученных образцов проводились на испытательной машине Zwick – Z-250. При изготовлении образцов и проведении испытаний руководствовались следующими ГОСТами: ГОСТ 34370–2017 Пластмассы. Определение механических свойств при растяжении; ГОСТ 11262–80 Пластмассы. Метод испытания на растяжение. При проведении испытания усилия (Н) регистрировались с помощью датчика силы Xforce HP 2.5 кН. Программа испытаний позволяет посчитать напряжение в образце по формуле $\sigma = F/S$, где F – усилие, S – площадь сечения образца. Удлинение (мм) регистрировалось с использованием макродатчика продольной деформации makroXtens II фирмы ZwickRoell (Германия), щупы датчика фиксировались непосредственно на образце, точность измерения 1 мкм. Устанавливается база (расстояние между щупами) 10 мм. По измеренному расстоянию между щупами в процессе испытания считается деформация по известной формуле $\delta = (\Delta l/l_0) \cdot 100\%$. Для управления испытательной машиной использовалось универсальное программное обеспечение TestXpert фирмы Zwick. Для измерения статических и динамических усилий использовался датчик силы Xforce HP с номинальным усилием 2.5 кН. Погрешность измерения не превосходит 1% прилагаемой нагрузки. Деформация образцов измерялась с помощью контактного экстензометра датчика продольной деформации BTC-EXMACRO с начальной расчетной длиной 10–100 мм. Длина щупа 300 мм, диапазон измерения 80 мм,

разрешение 0.6 мкм. Использование данного датчика позволило проводить измерения деформации в течение всего времени испытания. Образец во время испытания закреплялся с помощью винтовых захватов, обеспечивающих стабильность крепления образцов. Испытуемый образец нагружался растяжением до деформации 0.7% со скоростью 0.5 мм/мин, после чего подвижная траверса останавливалась, а измерение усилия продолжалось. Такое испытание на релаксацию проходило в течение 3 ч.

Образцы подвергались испытанию при малых деформациях. Поэтому принималось, что их физическое состояние описывается линейной теорией вязкоупругости. При этом объемная деформация считалась упругой. Уравнения Вольтерра, описывающие вязкоупругое состояние изотропной объемно не релаксирующей среды, записываются в виде:

$$s_{ij} = 2G\epsilon_{ij} - \int_0^t \Gamma(t - \tau) \epsilon_{ij}(\tau) d\tau, \quad (1.1)$$

$$\sigma = K\theta, \quad (1.2)$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma$ – девиатор напряжений, $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$, ϵ_{ij} – девиатор деформаций, $K = \text{const}$ – объемный модуль упругости, $\Gamma(t)$ – ядро релаксации, G – динамический модуль сдвига. В рассматриваемых материалах (облученном УФ и не облученном) ядро релаксации $\Gamma(t)$ разыскивается в виде суммы экспонентного ряда:

$$\Gamma(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}. \quad (1.3)$$

При обработке результатов константы G , K , α_1 , α_2 , C_1 , C_2 определялись путем минимизации среднеквадратического отклонения найденных в эксперименте $\tilde{\sigma}_{ij}$ (в m точках по времени) и теоретических данных σ_{ij} (1.1):

$$J = \sqrt{\frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{\sigma_{ij}(t_m)}{\tilde{\sigma}_{ij}(t_m)} \right)^2 \right)}. \quad (1.4)$$

Данная задача имеет следующие особенности: она линейна относительно параметров G , C_1 , C_2 и нелинейна относительно K , α_1 , α_2 , последнее обстоятельство обуславливает неединственность решения рассматриваемой задачи. Параметры G , C_1 , C_2 находятся из системы линейных алгебраических условий минимума функционала (1.4). Остальные параметры определяются методом Нелдера–Мида (деформируемых многогранников) [2].

Обработка результатов испытаний проводилась в предположении, что материал с нарушенной стехиометрией при малых деформациях описывается уравнениями линейной вязкоупругости, причем объемная деформация является упругой. Ниже приводятся результаты обработки для указанных выше групп испытаний.

Приведенные для средних значений материальных параметров рис. 1, 2 отражают следующие особенности поведения рассматриваемого полимера при нарушении стехиометрии:

- при уменьшении доли отвердителя в пределах 1.0–0.8 динамический модуль сдвига практически не меняется, а при содержании отвердителя 0.7 значительно снижается; объемный модуль меняется незначительно на этом промежутке;
- при уменьшении доли отвердителя в пределах 1.0–0.7 вязкость полимера значительно возрастает, т.е. увеличивается значение интеграла от функции $\Gamma(t)$.

Таблица 1.1

**Средние значения параметров в зависимости от стехиометрии,
в скобках интервал в процентах для доверительной вероятности 95%**

ЭД-20 / ТЭТА	G, МПа	K, МПа	α_1	α_2	C ₁ , МПа/мин	C ₂ , МПа/мин
10:1	1 071.8 (15%)	267 360 (24%)	0.09 (0.01%)	0.0009 (20%)	30.9 (24%)	1.26 (25%)
10:0.9	959.2 (10.2%)	271 850 (17.6%)	0.203 (4%)	0.010 (29%)	63.45 (16.7%)	1.86 (17.1%)
10:0.8	1 060.9 (7%)	294 611 (11%)	0.237 (18%)	0.009 (28%)	108.34 (4.7%)	2.59 (29%)
10:0.7	548.7 (13.5%)	269 629 (13.5%)	0.17 (14.6%)	0.0007 (19%)	127.63 (5.3%)	1.24 (15.9%)

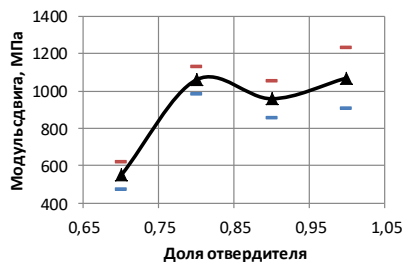


Рис. 1. Зависимость модуля сдвига от доли отвердителя. Указан 95%-ный доверительный интервал

Fig. 1. Shear modulus as a function of hardener ratio. The 95% confidence interval is indicated

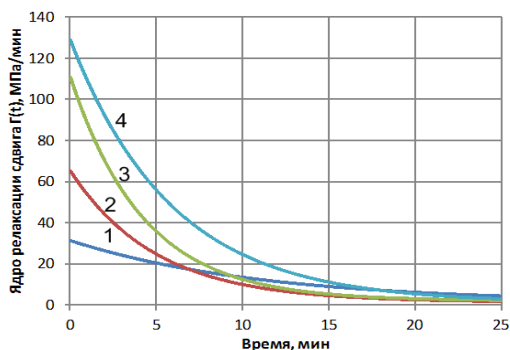


Рис. 2. Материальные функции $\Gamma(t)$ в зависимости от стехиометрии: 1 – 10:1.0; 2 – 10:0.9; 3 – 10:0.8; 4 – 10:0.7

Fig. 2. Dependence of material functions $\Gamma(t)$ on stoichiometry: (1) 10:1.0; (2) 10:0.9; (3) 10:0.8; and (4) 10:0.7

Отмеченные особенности возможно объяснить тем, что при уменьшении отвердителя в полимеризационной смеси в отвержденном полимере остаются непрореагировавшими эпоксидные группы и часть молекул эпоксидной смолы остается в свободном состоянии.

2. Влияние УФ-облучения на механические свойства эпоксидной смолы при ее отверждении

Отверждение проводилось в течение суток (24 ч) в закрытом шкафу. Размер образцов-лопаток $20 \times 2 \times 4$ мм. Состав образцов: ЭД-20 и ТЭТА в соотношении 10:1. В состав образцов не входили фотоускорители полимеризации или другие фотосенсибилизаторы. Над исследуемым образцом на расстоянии 5 см размещалась УФ-лампа ДКБУ-9 с длиной волны излучения 253,7 нм, потоком излучения 2,4 Вт. Над контрольным образцом установлена LED лампа; благодаря гибкой ножке она была размещена на таком расстоянии до образца, чтобы температура на его

поверхности была такой же, как и на образце под УФ-лампой (рис. 3). В процессе отверждения температура измерялась термогигрометром RITMIX CAT-030 (диапазон показателей температуры от -50 до $+70^{\circ}\text{C}$, погрешность измерения температуры $\pm 1^{\circ}\text{C}$). Ее значения в первом эксперименте в пределах $27\text{--}35^{\circ}\text{C}$; во втором и третьем – $26\text{--}27^{\circ}\text{C}$.



Рис. 3. Экспериментальная камера
Fig. 3. Experimental chamber

Испытания полученных образцов проводились на испытательной машине Zwick – Z-250. Испытуемый образец нагружался как в разд. 1. Обработка результатов испытаний проводилась в предположении, что материал при малых деформациях описывается уравнениями линейной вязкоупругости, причем объемная деформация является упругой. Здесь сохраняются обозначения для материальных параметров, принятые в разд. 1.

Ниже приводятся результаты обработки для указанных испытаний. На рис. 4 сравниваются теоретические и экспериментальные зависимости $\sigma(t)$ и $\sigma(\epsilon)$. Средние по трем экспериментам упругие константы G и K приведены в табл. 2.1.

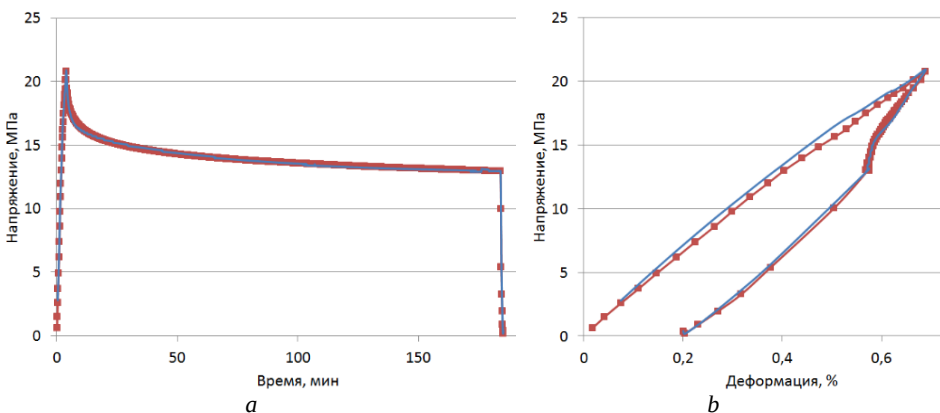


Рис. 4. Экспериментальные (с маркерами) и теоретические кривые в третьем испытании для УФ-облученного образца: $a - \sigma(t)$; $b - \sigma(\epsilon)$

Fig. 4. Experimental (with markers) and theoretical curves in the third test for a UV-irradiated sample: $(a) \sigma(t)$ and $(b) \sigma(\epsilon)$

Таблица 2.1

Средние значения параметров необлученного и УФ-облученного образцов, в скобках интервал в процентах для доверительной вероятности 95%

Варианты	G , МПа	K , МПа	α_1	α_2	C_1 , МПа/мин	C_2 , МПа/мин
Необлученный	1 111.7 (15.5%)	279 494 (13.7%)	0.297 (7.3%)	0.0130 (29.1%)	260.7 (38%)	7.5 (38%)
УФ-облученный	1 311.8 (2.1%)	318 415 (7.5%)	0.660 (20.7%)	0.0138 (2.9%)	5.72 (15.3%)	0.065 (31.1%)

Анализируя изменение констант G и K , заключаем, что УФ-облучение образца в процессе его отверждения приводит к увеличению значений и динамического модуля G , и объемного модуля K . Этот факт проявился во всех трех испытаниях: модуль G увеличился на 31.5% в первом испытании, на 14.1% – во втором, на 8.2% – в третьем; объемный модуль K увеличился на 17.4% в первом испытании, на 14.1% – во втором и на 8.2% – в третьем. На рис. 5 приводятся графики материальных функций $\Gamma(t)$ для необлученного (сплошная линия) и облученного образцов (штриховая линия).

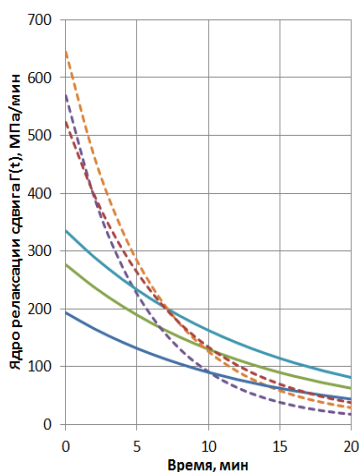


Рис. 5. Изменение $\Gamma(t)$ по трем экспериментам. Сплошные линии – необлученные образцы, штриховые линии – УФ-облученные образцы

Fig. 5. Variation of $\Gamma(t)$ in three experiments with non-irradiated samples (solid lines) and UV-irradiated samples (dashed lines)

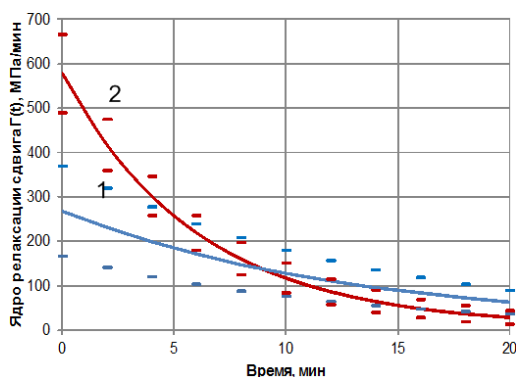


Рис. 6. Ядро релаксации $\Gamma(t)$ с 95%-ным доверительным интервалом: 1 – необлученного образца; 2 – УФ-облученного образца

Fig. 6. Relaxation kernel $\Gamma(t)$ with a 95% confidence interval: (1) non-irradiated and (2) UV-irradiated samples

Представленные данные показывают, что при малых деформациях отвержденные образцы без УФ-облучения и с УФ-облучением описываются моделью линейно вязкоупругого тела, причем его объемная деформация является упругой. При этом УФ-облучение эпоксидной смолы на этапе ее отверждения существенно изменяет как ее динамические, так и вязкие свойства. Динамические константы G и K для УФ-облученных образцов выше, чем для необлученных.

Ядро релаксации сдвига материала на промежутке времени от $t = 0$ до $t = 10$ мин для УФ-облученных образцов выше. Этот факт проявляется во всех трех испытаниях и означает, что для облученного материала эффект его вязкого поведения проявляется ярче в момент начала нагружения образца или скачкообразного изменения его состояния.

3. Влияние гамма-облучения на механические свойства эпоксидного связующего

В настоящем разделе изучается влияние гамма-излучения на отверждение смеси эпоксидной смолы ЭД-20 и отвердителя ТЭТА с нарушением стехиометрического соотношения компонентов, чтобы показать возможность использования гамма-облучения для восстановления механических свойств связующего, измененных из-за нарушения стехиометрического соотношения компонентов.

Источником облучения являлся УНУ «Гамматок-100» ИПХФ РАН, мощность излучения 0.64 Мрад/час. Испытанию подвергались образцы с композицией: смола ЭД-20, отвердитель ТЭТА. Соотношение компонентов 10:1, 10:0.9, 10:0.8, 10:0.7. Испытывались образцы из трех групп:

- первая группа – образцы изготавливались непосредственно перед гамма-облучением и в процессе отверждения облучались 24 ч, в результате чего получали дозу $0.64 \cdot 24 = 15.34$ Мрад = 153.4 кГрей;
- вторая группа – такому же облучению подвергались заранее отвержденные образцы;
- третья группа – образцы с той же стехиометрией отверждались без облучения (результаты экспериментов с этими образцами описаны в разд. 1).



Рис. 7. Образцы первой группы после отверждения под действием гамма-облучения

Fig. 7. Samples of the first group after curing when exposed to gamma irradiation



Рис. 8. Образцы второй группы, отвержденные заранее, перед гамма-облучением

Fig. 8. Pre-cured samples of the second group before exposed to gamma irradiation

Испытуемый образец нагружался до деформации 0.7 или 0.5% со скоростью 0.5мм/мин, после чего подвижная траверса останавливалась, а измерение усилия продолжалось. Такое испытание на релаксацию проходило в течение 30 мин, после чего образец разгружался с той же скоростью (0.5 мм/мин). Результаты испытаний в виде таблицы (время–деформация–напряжение) выводились в файлы с шагом по

времени 1 и 5 с. Так как не все образцы получились пригодными для дальнейшего механического испытания, для каждого варианта стехиометрии удалось испытать по одному-два образца из первой и второй групп, поэтому статистическая обработка испытаний не проводилась. На рис. 7,8 приведены фотографии образцов после испытаний.

Типичные картины испытаний образцов первой и второй групп приводятся на рис. 9–10.

Обработка результатов испытаний проводилась в предположении, что облученный материал с нарушенной стехиометрией при малых деформациях описывается уравнениями линейной вязкоупругости, причем объемная деформация является упругой. Здесь сохраняются обозначения для материальных параметров, принятые в разд. 1. В табл. 3.1 приводятся результаты обработки для указанных выше групп испытаний.

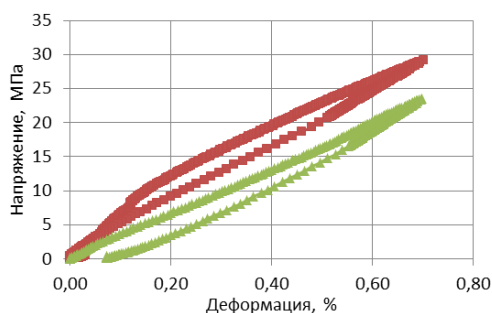


Рис. 9. σ – ϵ для образцов с соотношением смола / отвердитель 10/1.0: верхняя линия – отвержденный во время гамма-облучения образец, нижняя линия – облученный предварительно отвержденный

Fig. 9. σ – ϵ diagram for samples with a resin/hardener ratio of 10/1.0: cured when exposed to gamma irradiation (upper line) and irradiated being pre-cured (lower line)

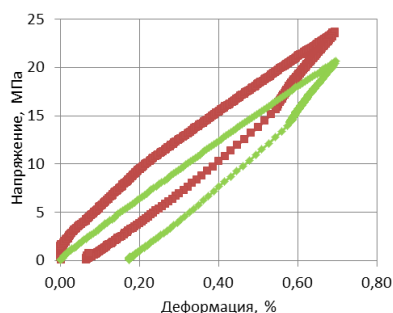


Рис. 10. σ – ϵ для образцов с соотношением смола / отвердитель 10/0.7: верхняя линия – отвержденный во время гамма-облучения образец, нижняя линия – облученный предварительно отвержденный

Fig. 10. σ – ϵ diagram for samples with a resin/hardener ratio of 10/0.7: cured when exposed to gamma irradiation (upper line) and irradiated being pre-cured (lower line)

Таблица 3.1

**Средние значения параметров для образцов первой и второй групп
в зависимости от стехиометрии**

	ЭД-20 / ТЭТА	G, МПа	K, МПа	α_1	α_2	C ₁ , МПа/мин	C ₂ , МПа/мин
Группа 1	10:1	1 331.4	343 100	0.10	0.00055	4,80	0,45
	10:0.9	1 318.0	337 300	0.14	0.0045	22,1	0,22
	10:0.8	1 273.1	308 200	0.21	–	71,4	0
	10:0.7	1 107.4	267 800	0.29	–	88,6	0
Группа 2	10:1	1 340.0	349 100	0.053	–	17.9	0
	10:0.9	1 397.0	294 500	0.070	–	35.1	0
	10:0.8	1 209.0	304 400	0.20	–	87.0	0
	10:0.7	1 007.0	289 100	0.19	–	108.9	0

На рис. 11 сравниваются динамические модули сдвига для облученных образцов (группа 1 и группа 2) и образцов, отвержденных, но не подвергавшихся облучению (результаты заимствованы из главы 1).

На рис. 12 сравниваются материальные функции $\Gamma(t)$ для гамма-облученных образцов (группа 1) с заданной стехиометрией и образцов с такой же стехиометрией, полностью отвержденных при температуре 80°C в течение 3 ч (данные взяты из разд. 1).

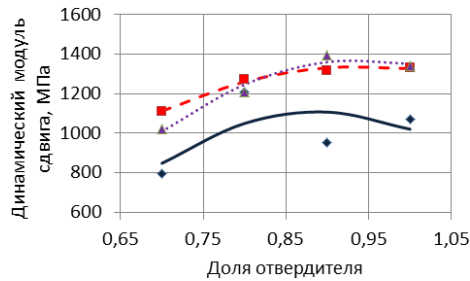


Рис. 11. Динамические модули сдвига в зависимости от доли отвердителя: сплошная линия – необлученный образец (группа 3); штриховая – облученный одновременно с отверждением (группа 1); пунктирная – облученный в отвержденном состоянии (группа 2)

Fig. 11. Dynamic shear moduli as the functions of hardener ratio for: a non-irradiated sample of group 3 (solid line), a group 1 sample irradiated when being cured (dashed line), and a group 2 sample irradiated in the cured state (dotted line)

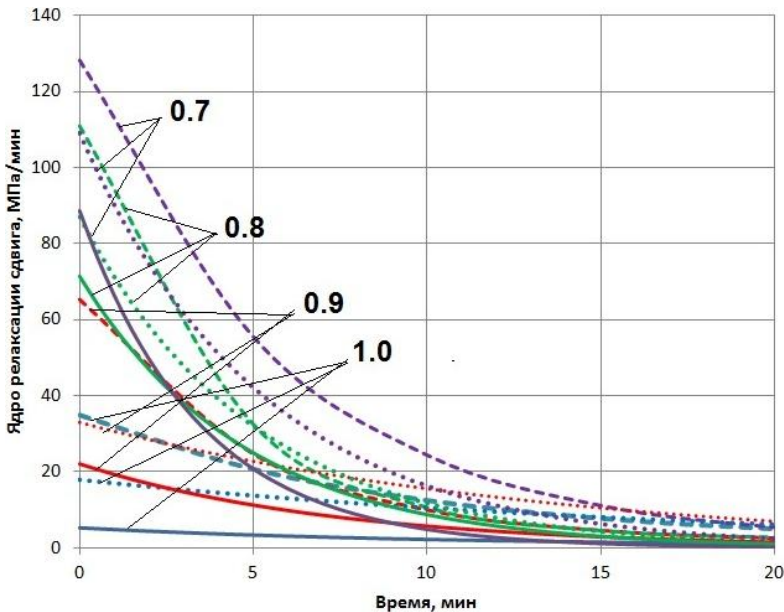


Рис. 12. Ядро сдвига $\Gamma(t)$ образцов группы 3 – штриховая линия; группы 1 – сплошная линия; группы 2 – пунктирная линия. Доля отвердителя указана около линий

Fig. 12. Shear core $\Gamma(t)$ of the samples of group 3 (dashed line), group 1 (solid line), and group 2 (dotted line). The hardener ratios are indicated above the lines

Представленные в данном разделе результаты позволяют сделать следующие выводы о влиянии гамма-излучения на полимер смола ЭД-20 / отвердитель ТЭТА с соотношением компонентов 10:1, 10:0.9, 10:0.8, 10:0.7:

– из сравнения цвета облученных образцов (см. рис. 7, 8) можно заключить, что влияние гамма-излучения на полимер, подвергающийся отверждению, сказывается в большей степени, чем на предварительно отвержденный;

– из рис. 11 следует, что динамический модуль сдвига у образцов, подвергаемых облучению, выше, чем у полностью отвержденных, но не облученных; это означает, что гамма-облучение приводит к возрастанию жесткостных свойств полимеров; при этом динамический модуль сдвига образцов, предварительно отвержденных перед облучением, и тех, которые отверждаются при облучении, практически совпадают (данные по необлученным образцам заимствованы из разд. 1);

– рис. 12 свидетельствует, что вязкость образцов с нарушенной стехиометрией увеличивается при уменьшении доли отвердителя, этот факт проявляется как для гамма-облученных образцов (группы 1 и 2), так и для необлученных (данные заимствованы из разд. 1); при этом вязкость соответствующих гамма-облученных образцов оказывается меньшей, чем необлученных.

Заключение

Проведены экспериментально-теоретические исследования влияния на вязкоупругие механические характеристики эпоксидного связующего ЭД-20 / ТЭТА в случае малых деформаций факторов космического воздействия: нарушения стехиометрии вследствие испарения отвердителя, УФ- и гамма-излучения.

Полученные результаты о влиянии гамма-излучения на механические свойства смолы ЭД-20 и отвердителя ТЭТА показывают, что управление таким облучением способно компенсировать нарушение стехиометрического соотношения компонентов в этом полимере, вызванное испарением отвердителя в условиях космоса.

Приведенные результаты найдут применение в исследовании поведения конструкций, использующих в качестве конструкционных данные материалы.

Список источников

1. Walter H.U. Fluid sciences and materials science in space. A European Perspective. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
2. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В., Поморцева Т.Н., Мерзляков А.Ф. Уравнения вязкоупругости не полностью отвержденного эпоксидного связующего при малых деформациях // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 119–134. doi: 10.17223/19988621/89/9
3. Jing F., Zhao R., Li C., Xi Z., Wang Q., Xie H. Molecules Influence of the Epoxy/Acid Stoichiometry on the Cure Behavior and Mechanical Properties of Epoxy Vitrimers // *Molecules*. 2022. V. 27 (19). Art. 6335. doi: 10.3390/molecules27196335
4. Czolkos I., Erkan Y., Dommersnes P., Jesorka A., Orwar O. Controlled Formation and Mixing of Two-Dimensional Fluids // *Nano Letter*. 2007. V. 7 (7). P. 1980–1984. doi: 10.1021/nl070726u
5. Navarro R.S., Huang M.S., Roth J.G., Hubka K.M., Long C.M., Enejder A., Heilshorn S.C. Tuning Polymer Hydrophilicity to Regulate Gel Mechanics and Encapsulated Cell Morphology // *Advanced Healthcare Materials*. 2022. V. 11 (13). Art. e2200011. doi: 10.1002/adhm.202200011
6. de Groh K.K., Banks B.A., Hammerstrom A.M., Youngstrom E.E., Kaminski C., Marx L.M., Fine E.S., Gummow J.D., Wright D. MISSE PEACE Polymers: An International Space Station

- Environmental Exposure Experiment // Proceedings of the Conference on ISS Utilization. 2001. Cape Canaveral, FL, AIAA 2001-4923; NASA TM-2001-211311.
7. *Pippin H.G.* Final report on analysis of Boeing specimens flown on the effects of space environment on materials experiment // Boeing Phantom Works. 1999.
 8. *Connell J.W.* The effects of low-Earth orbit atomic oxygen exposure on Phenylphosphine oxide-containing polymers // Final report, Evaluation of Space Environment and Effects on Materials (ESEM), Appendix D. 1985.
 9. *Kiefer R.L., Orwold R.A., Harrison J.E., Ronesi V.M., Thibeault S.A.* The effects of the space environment on Polyetherimide films. Evaluation of Space Environment and Effects on Materials (ESEM) // Final report, Appendix C, NASDA. 1985.
 10. *Czaubon B., Paillos A., Siffre J., Thomas R.* Mass spectrometric analysis of reaction products of fast oxygen atoms-material interactions // J. of Spacecraft and Rockets. 1998. V. 35 (6). P. 797–804.
 11. *Dever J., de Groh K.K., Townsend J.A., Wang L.L.* Mechanical Properties Degradation of teflon FEP Returned from the Hubble Space telescope // NASA report 1998-206618. AIAA-98-0895.
 12. *Koontz S., Albyn K., Leger L.* Atomic oxygen testing with thermal atom systems: a critical evaluation // J. of Spacecraft. 1991. V. 28 (3). P. 315–323.
 13. *Koontz S., Leger L., Albyn K., Cross J.* Vacuum ultraviolet radiation / atomic oxygen synergism in materials reactivity // J. of Spacecraft. 1989. V. 27 (3). P. 346–348.
 14. *Lura F., Hagelschuler D., Abramov V.V.* The complex simulation of essential space environment factors for the investigation of materials and surfaces for space applications. Berlin: DLR, 2003.
 15. *Novikov L.S., Panasyuk M.I.* Model of space. Moscow: KDU, 2007. V. 2.
 16. ECSS Space Environment Standard // ECSS E-10-04 (Guide for LEO mission), ECSS-Q-70-04 (outgassing), ESA. 2000.
 17. *Dever J.A., Pietromica A.J., Stueber T., Sechkar E., Messer R.* Simulated space vacuum ultraviolet (VUV) exposure testing for polymer films // NASA TM-2002-211337. AIAA-2001-1054. 2001.
 18. *de Groh K.K., Martin M.* The Effect of Heating on the Degradation of Ground Laboratory and Space Irradiated Teflon FEP // NASA TM-2002-211704. 2002. URL: https://www.mdpi.com/journal/polymers/special_issues/UV_polymerization
 19. *Worzakowska M.* UV Polymerization of Methacrylates—Preparation and Properties of Novel Copolymers // Polymers. 2021. V. 13 (10). Art. 1659. doi: 10.3390/polym13101659
 20. *Malik M.S., Schlögl S., Wolfahrt M., Sangermano M.* Review on UV-Induced Cationic Frontal Polymerization of Epoxy Monomers // Polymers. 2020. V. 12 (9). Art. 2146. doi: 10.3390/polym12092146
 21. *Wypych G.* Handbook of UV Degradation and Stabilization. Elsevier Science, 2020. URL: <https://chemtec.org/products/978-1-895198-86-7#:~:text=>
 22. *Kondyurin A.* Design and Fabrication of Large Polymer Constructions in Space. Elsevier, 2022. doi: 10.1016/B978-0-12-816803-5.00001-X
 23. *Klein T.F., Lesieutre G.A.* Space Environment effects on damping of polymer matrix carbon fiber composites // Journal of Spacecraft and Rockets. 2000. V. 37 (4). P. 519–525.
 24. *González Niño C., Vidal J., Del Cerro M., Royo-Pascual L., Murillo-Ciordia G., Castell P.* Effect of Gamma Radiation on the Processability of New and Recycled PA-6 Polymers // Polymers (Basel). 2023. V. 15 (3). Art. 613. doi: 10.3390/polym15030613. PMID: 36771914; PMCID: PMC9920695.
 25. *Vinícius da Silva Paula M., Araújo de Azevedo L., Diego de Lima Silva I., Brito da Silva C.A. Jr., Vinhas G.M., Alves S. Jr.* Gamma radiation effect on the chemical, mechanical and thermal properties of PCL/MCM-48-PVA nanocomposite films // Heliyon. 2023. V. 9 (7). Art. e18091. doi: 10.1016/j.heliyon.2023.e18091; PMID: 37483791; PMCID: PMC10362146.
 26. *Lucchesi L., Beghini M., Bernardo M.D., Raffaelli F., Cemmi A., Sarcina I.D., Ferrante C.* γ -irradiation effect on the mechanical properties of in situ specimens made of structural epoxy

- adhesive and comparison with adhesive bulk behavior // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. 2023. V. 124. Art. 103387. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2023.103387
27. Hossain Md.T., Hossain Md.S., Kabir M.S., Ahmed S., Khan R.A., Chowdhury A.M.S. Improvement of mechanical properties of jute-nano cellulose-reinforced unsaturated polyester resin-based composite: Effects of gamma radiation // *Hybrid Advances*. 2023. V. 3. Art. 100068. doi: 10.1016/j.hybadv.2023.100068
28. Chayoukhi S., Gassoumi B., Dhiflaoui H., Mejri A., Boukhachem A., Amlouk M. Effects of ^{60}Co γ -radiation on the structural, morphological, optical, tribological and mechanical properties of SnO_2 sprayed thin films // *Inorganic Chemistry Communications*. 2023. V. 155. Art. 111037. doi: 10.1016/j.inoche.2023.111037
29. Chayoukhi S., Abid M., Gassoumi B., Mejri A., Boukhachem A., Amlouk M. Experimental and numerical studies of the mechanical properties of nitrile-butadiene rubber exposed to gamma radiation // *Radiation Physics and Chemistry*. 2023. V. 208. Art. 110925. doi: 10.1016/j.radphyschem.2023.110925

References

1. Walter H.U. (1987) *Fluid sciences and materials science in space. A European Perspective*. Berlin: Springer-Verlag.
2. Pestrenin V.M., Landik L.V., Pomortseva T. N., Merzlyakov A.F., Pestrenina I.V. (2024) Uravneniya vyazkoprugosti ne polnost'yu otverzhdennogo epoksidnogo svyazuyushchego pri малыkh deformatsiyakh [Equations of viscoelasticity for an incompletely cured epoxy binder under small strains]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 119–134. doi: 10.17223/19988621/89/9
3. Jing F., Zhao R., Li C., Xi Z., Wang Q., Xie H. (2022) Molecules influence of the epoxy/acid stoichiometry on the cure behavior and mechanical properties of epoxy vitrimers. *Molecules*. 27(19). Article 6335. doi: 10.3390/molecules27196335
4. Czolkos I., Erkan Y., Dommersnes P., Jesorka A., Orwar O. (2007) Controlled formation and mixing of two-dimensional fluids. *Nano Letter*. 7(7). pp. 1980–1984. doi: 10.1021/nl070726u
5. Navarro R.S., Huang M.S., Roth J.G., Hubka K.M., Long C.M., Enejder A., Heilshorn S.C. (2022) Tuning polymer hydrophilicity to regulate gel mechanics and encapsulated cell morphology. *Advanced Healthcare Materials*. 11(13). Article e2200011. doi: 10.1002/adhm.202200011
6. de Groh K.K., Banks B.A., Hammerstrom A.M., Youngstrom E.E., Kaminski C., Marx L.M., Fine E.S., Gummow J.D., Wright D. (2001) MISSE PEACE Polymers: An International Space Station Environmental Exposure Experiment. *Proceedings of the Conference on ISS Utilization*. Cape Canaveral, FL, AIAA 2001-4923; NASA TM-2001-211311.
7. Pippin H.G. (1999) Final report on analysis of Boeing specimens flown on the effects of space environment on materials experiment. *Boeing Phantom Works*.
8. Connell J.W. (1985) The effects of low-Earth orbit atomic oxygen exposure on Phenylphosphine oxide-containing polymers. *Final Report, Evaluation of Space Environment and Effects on Materials (ESEM), Appendix D*.
9. Kiefer R.L., Orwold R.A., Harrison J.E., Ronesi V.M., Thibeault S.A. (1985) The effects of the space environment on Polyetherimide films. *Final Report, Evaluation of Space Environment and Effects on Materials (ESEM), Appendix C, NASDA*.
10. Czaubon B., Paillos A., Siffre J., Thomas R. (1998) Mass spectrometric analysis of reaction products of fast oxygen atoms-material interactions. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 35(6). pp. 797–804. doi: 10.2514/2.3402
11. Dever J., de Groh K.K., Townsend J.A., Wang L.L. (1998) Mechanical properties degradation of teflon FEP returned from the Hubble space telescope. *NASA report 206618*. AIAA-98-0895.

12. Koontz S., Albyn K., Leger L. (1991) Atomic oxygen testing with thermal atom systems: a critical evaluation. *Journal of Spacecraft*. 28(3). pp. 315–323. doi: 10.2514/3.26246
13. Koontz S., Leger L., Albyn K., Cross J. (1989) Vacuum ultraviolet radiation / atomic oxygen synergism in materials reactivity. *Journal of Spacecraft*. 27(3). pp. 346–348. doi: 10.2514/3.26146
14. Lura F., Hagelschuler D., Abraimov V.V. (2003) *The Complex Simulation of Essential Space Environment Factors for the Investigation of Materials and Surfaces for Space Applications*. DLR, Berlin, Germany.
15. Novikov L.S., Panasyuk M.I. (2007) *Model of Space*. Volume 2. Moscow: KDU.
16. ECSS Space Environment Standard (2000) *ECSS E-10-04 (Guide for LEO mission)*, ECSS-Q-70-04 (outgassing), ESA.
17. Dever J.A., Pietromica A.J., Stueber T., Sechkar E., Messer R. (2001) Simulated space vacuum ultraviolet (VUV) exposure testing for polymer films. *NASA TM-2002-211337*. AIAA-2001-1054.
18. de Groh K.K., Martin M. (2002) The Effect of Heating on the Degradation of Ground Laboratory and Space Irradiated Teflon FEP. *NASA TM-2002-211704*. URL: https://www.mdpi.com/journal/polymers/special_issues/UV_polymerization
19. Worzakowska M. (2021) UV polymerization of methacrylates—preparation and properties of novel copolymers. *Polymers*. 13(10). Article 1659. doi: 10.3390/polym13101659
20. Malik M.S., Schlögl S., Wolfahrt M., Sangermano M. (2020) Review on UV-induced cationic frontal polymerization of epoxy monomers. *Polymers*. 12(9). Article 2146. doi: 10.3390/polym12092146.
21. Wypych G. (2020) *Handbook of UV Degradation and Stabilization*. Elsevier Science. URL: <https://chemtec.org/products/978-1-895198-86-7#:~:text=>
22. Kondyurin A. (2022) *Design and Fabrication of Large Polymer Constructions in Space*. Elsevier. doi: 10.1016/B978-0-12-816803-5.00001-X
23. Klein T.F., Lesieutre, G.A. (2000) Space environment effects on damping of polymer matrix carbon fiber composites *Journal of Spacecraft and Rockets*. 37(4). pp. 519–525. doi: 10.2514/2.3594
24. González Niño C., Vidal J., Del Cerro M., Royo-Pascual L., Murillo-Ciordia G., Castell P. (2023) Effect of gamma radiation on the processability of new and recycled PA-6 polymers. *Polymers*. 15(3). Article 613. doi: 10.3390/polym15030613
25. Vinícius da Silva Paula M., Araújo de Azevedo L., Diego de Lima Silva I., Brito da Silva C.A.Jr., Vinhas G.M., Alves S.Jr. (2023) Gamma radiation effect on the chemical, mechanical and thermal properties of PCL/MCM-48-PVA nanocomposite films. *Heliyon*. 9(7). Article e18091. doi: 10.1016/j.heliyon.2023.e18091
26. Lucchesi L., Beghini M., Bernardo M.D., Raffaelli F., Cemmi A., Sarcina I.D., Ferrante C. (2023) γ -irradiation effect on the mechanical properties of in situ specimens made of structural epoxy adhesive and comparison with adhesive bulk behavior. *International Journal of Adhesion and Adhesives*. 124. Article 103387. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2023.103387
27. Hossain Md.T., Hossain Md.S., Kabir M.S., Ahmed S., Khan R.A., Chowdhury A.M.S. (2023) Improvement of mechanical properties of jute-nano cellulose-reinforced unsaturated polyester resin-based composite: Effects of gamma radiation. *Hybrid Advances*. 3. Article 100068. doi: 10.1016/j.hybadv.2023.100068
28. Chayoukhi S., Gassoumi B., Dhiflaoui H., Mejri A., Boukhachem A., Amlouk M. (2023) Effects of ^{60}Co γ -radiation on the structural, morphological, optical, tribological and mechanical properties of SnO_2 sprayed thin films. *Inorganic Chemistry Communications*. 155. Article 111037. doi: 10.1016/j.inoche.2023.111037
29. Chayoukhi S., Abid M., Gassoumi B., Mejri A., Boukhachem A., Amlouk M. (2023) Experimental and numerical studies of the mechanical properties of nitrile-butadiene rubber exposed to gamma radiation. *Radiation Physics and Chemistry*. 208. Article 110925. doi: 10.1016/j.radphyschem.2023.110925

Сведения об авторах:

Пестренин Валерий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского национального исследовательского университета (Пермь, Россия). E-mail: PestreninVM@mail.ru

Пестренина Ирина Владимировна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского национального исследовательского университета (Пермь, Россия). E-mail: IPestrenina@gmail.com

Ландик Лидия Владимировна – инженер кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского национального исследовательского университета (Пермь, Россия). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

Мерзляков Андрей Федорович – заведующий учебно-научной лабораторией термомеханических методов испытаний кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского национального исследовательского университета (Пермь, Россия). E-mail: merzlyakov@psu.ru

Поморцева Татьяна Николаевна – заведующий учебно-методическим кабинетом кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского национального исследовательского университета (Пермь, Россия). E-mail: tata.lisica@yandex.ru

Фагалов Андрей Рамилевич – магистр кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского национального исследовательского университета (Пермь, Россия). E-mail: slowards@gmail.com

Кондюрин Алексей Викторович – кандидат технических наук, директор Эвингар Сайентифик (Эвингар, Австралия). Email: alexey.kondyurin@gmail.com

Кузнецов Константин Юрьевич – бакалавр кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского национального исследовательского университета (Пермь, Россия). E-mail: kostya.kuznecov.2002@mail.ru

Information about the authors:

Pestrenin Valeriy M. (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: pestreninvm@mail.ru

Pestrenina Irena V. (Candidate of Technical Sciences, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: ipestrenina@gmail.com

Landik Lidiya V. (Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

Merzlyakov Andrey F. (Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: merzlyakov@psu.ru

Pomortseva Tat'yana N. (Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: tata.lisica@yandex.ru

Fagalov Andrey R. (Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: slowards@gmail.com

Kondyurin Aleksey V. (Candidate of Technical Sciences, Ewingar Scientific, Ewingar, Australia). E-mail: alexey.kondyurin@gmail.com

Kuznetsov Konstantin Yu. (Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: kostya.kuznecov.2002@mail.ru

Статья поступила в редакцию 19.05.2024; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 19.05.2024; accepted for publication 09.06.2025

Научная статья

УДК 536.46 + 536.24

doi: 10.17223/19988621/95/11

Методика и результаты численного расчета нестационарной скорости горения высокоэнергетического материала по известному закону изменения давления

Василий Андреевич Порязов¹, Алексей Юрьевич Крайнов²,
Дмитрий Алексеевич Крайнов³, Сергей Александрович Басалаев⁴

^{1, 2, 3, 4} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ poryazov@ftf.tsu.ru

² a.krainov@ftf.tsu.ru

³ kraynov@tpu.ru

⁴ tarm@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Представлены методика и результаты численного расчета нестационарной скорости горения металлизированного смесового твердого топлива (МСТТ) по известному закону изменения давления. Для определения нестационарной скорости горения использовался метод, основанный на численном решении системы уравнений, описывающей физико-математическую модель горения МСТТ в сопряженной постановке, где физико-химические процессы в твердой фазе определяются уравнением теплопроводности и уравнением разложения окислителя в конденсированной фазе, процессы в газовой фазе описываются на основе подходов динамики многофазных реагирующих сред, на поверхности твердого топлива ставятся условия сохранения потоков массы компонентов и энергии. Анализ результатов исследования показал, что нестационарная скорость горения ВЭМ при сбросе давления отличается от квазистационарной, а предложенный метод расчета является корректным.

Ключевые слова: металлизированное твердое топливо, математическая модель, нестационарная скорость горения

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ 19-79-10054.

Для цитирования: Порязов В.А., Крайнов А.Ю., Крайнов Д.А., Басалаев С.А. Методика и результаты численного расчета нестационарной скорости горения высокоэнергетического материала по известному закону изменения давления // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 124–136. doi: 10.17223/19988621/95/11

Original article

The methodology and numerical calculations for the non-stationary burning rate of a high-energy material according to the well-known law of pressure variation

Vasiliy A. Poryazov¹, Aleksey Yu. Krainov²,
Dmitriy A. Krainov³, Sergey A. Basalaev⁴

^{1, 2, 3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ poryazov@ftf.tsu.ru

² a.krainov@ftf.tsu.ru

³ kraynov@tpu.ru

⁴ tarm@niipmm.tsu.ru

Abstract. This paper presents the methodology and numerical calculations of the non-stationary burning rate of a high-energy material (HEM) based on the well-known law of pressure variation. Numerical calculations are carried out using the method based on the numerical solution of a system of equations describing a physical and mathematical model of the burning of HEMs in a conjugate formulation. In this model, the physical and chemical processes occurring in the solid phase are determined by the equations of thermal conductivity and oxidizer decomposition in the condensed phase. The gas-phase processes are described using the approaches of the dynamics of multiphase reacting media. On the surface of the solid propellant, the conditions for the conservation of component mass and energy are specified. The analysis of the results reveals that the non-stationary burning rate of HEMs during pressure release differs from the stationary one, and the proposed calculation method is accurate.

Keywords: metallized solid rocket propellant, mathematical model, non-stationary burning rate

Acknowledgments: This work was carried out with a financial support from the Russian Science Foundation (project No. 19-79-10054).

For citation: Poryazov, V.A., Krainov, A.Yu., Krainov, D.A., Basalaev, S.A. (2025) The methodology and numerical calculations for the non-stationary burning rate of a high-energy material according to the well-known law of pressure variation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 124–136. doi: 10.17223/19988621/95/11

Введение

Получение информации о нестационарной скорости горения высокоэнергетического материала (ВЭМ) является актуальной научной задачей, особенно при быстром изменении давления [1–4]. Современная научная литература располагает значительным количеством предлагаемых методов [5, 6]. Широкое распространение получили методы, основанные на решении обратных задач внутренней баллистики (ОЗВБ-методы) [7–10].

При этом активно развиваются методы математического моделирования нестационарных процессов горения конденсированных высокоэнергетических

систем [11–13]. Предложенная в работе методика расчета нестационарной скорости горения рассматривается как вариант развития методов нахождения нестационарной скорости горения по известному закону изменения давления в камере сгорания.

В работе представлены методика и результаты численного расчета нестационарной скорости горения высокоэнергетического материала по известному закону изменения давления. Для определения нестационарной скорости горения использовался метод, основанный на численном решении системы уравнений, описывающей физико-математическую модель горения металлизированного смесового твердого топлива (МСТТ) в сопряженной постановке, где физико-химические процессы в твердой фазе определяются уравнением теплопроводности и уравнением разложения окислителя в конденсированной фазе, процессы в газовой фазе описываются на основе подходов динамики многофазных реагирующих сред, на поверхности твердого топлива ставятся условия сохранения потоков массы компонентов и энергии.

Методика эксперимента, описание экспериментальной установки

Эксперименты проводились на установке, схема которой приведена на рис. 1. Детальное описание установки, составов и условий проведения экспериментов дано в [10].

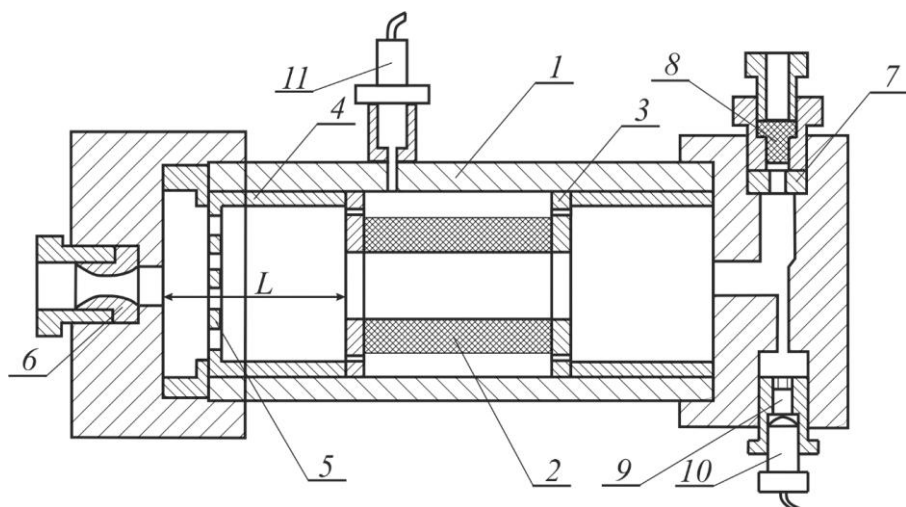


Рис. 1. Схема установки [10]: 1 – камера сгорания; 2 – заряд исследуемого ВЭМ; 3 – перфорированный контейнер; 4 – фиксаторы; 5 – диафрагма; 6 – основное сопло; 7 – дополнительное сопло; 8 – сгорающая пробка; 9 – воспламенитель; 10 – электрокапсульный инициатор; 11 – датчик давления

Fig. 1. Installation design [10]: 1, combustion chamber; 2, charge of the studied HEM; 3, perforated container; 4, clamps; 5, diaphragm; 6, main nozzle; 7, additional nozzle; 8, burning plug; 9, igniter; 10, electric capsule initiator; and 11, pressure sensor

Экспериментальные исследования по определению нестационарной скорости горения проводились для ВЭМ на основе инертного углеводородного горючего-связующего СКДМ-80 (раствор дивинильного каучука в трансформаторном масле в соотношении 20/80) и окислителя – бидисперсного перхлората аммония ПХА.

В качестве энергетических добавок использовались порошки алюминия промышленных марок АСД-4. Значение среднемассового диаметра частиц алюминия D_{43} 7.34 мкм. Экспериментально полученная зависимость давления от времени представлена на рис. 2. Аппроксимация полученного в эксперименте закона изменения давления имеет вид:

$$p(t) = (87.003922 + (-1.9153078 \times \text{pow}(9.4525223 \times t, 6.688972) - 102.57151/(\text{pow}(9.4525223 \times t, 5.9404836) - 0.46647462) - 24.064697)/\exp(t))/(2.2169473 + \text{pow}(8.4400129 \times t, 218.28163)) + (7.2332478 + 46.266483/(\text{pow}(9.4525223 \times t, 5.9404836) - 0.46647462))/\exp(t) - 2.1986706.$$

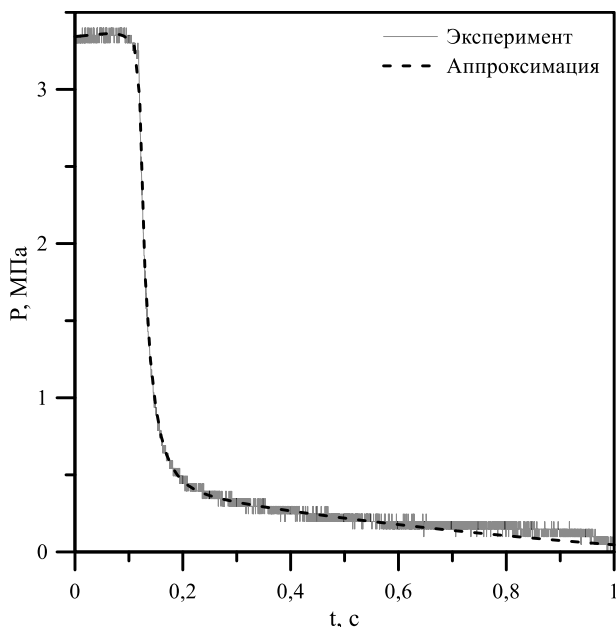


Рис. 2. Изменение давления во времени, полученное в эксперименте

Fig. 2. Experimental pressure variation with time

Физико-математическая модель и метод решения

Постановка задачи основывается на работах [11, 13]. Физико-химические процессы в твердой фазе определяются уравнением теплопроводности в конденсированной фазе и уравнением разложения окислителя. Процессы в газовой фазе описываются на основе подходов динамики многофазных реагирующих сред Р.И. Нигматулина [14]. Граница $x = 0$ находится и совпадает с поверхностью МСТТ, состоящего из окислителя, связки и порошка алюминия. Справа от границы находятся продукты газификации МСТТ. Предполагается, что окислитель твердого топлива при нагревании разлагается с образованием газообразных продуктов разложения. Газообразные продукты разложения окислителя образуются на последней стадии реакции, по достижении глубины превращения 0.99. Одновременно с поверхности топлива испаряется горючее связующее, увлекая за собой частицы алюминия. В газовой фазе газообразные горючее и окислитель смешиваются и реагируют. Реакция в газовой фазе экзотермическая, скорость реакции описывается законом

Аррениуса первого порядка. Газ при нагревании расширяется, возникает течение его от поверхности МСТТ, которым захватываются частицы алюминия. Частицы алюминия имеют известное, заранее заданное распределение по размерам, номер фракции частиц изменяется от i до N_f . Частицы в потоке реагирующих продуктов газификации окислителя и горючего прогреваются и начинают гореть. Величина температуры загорания частиц алюминия $T_{z,i}$ зависит от их размера. Зависимость температуры загорания частиц алюминия от их размера взята из [15]. При сформулированных допущениях математическая постановка задачи имеет следующий вид.

Для твердого топлива, $-\infty < x < 0$:

уравнение теплопроводности в твердом топливе:

$$\rho_c c_c \left(\frac{\partial T_c}{\partial t} + u_c \frac{\partial T_c}{\partial x} \right) = \lambda_c \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2} + Q_c k_c \rho_c (1 - \eta) \exp \left(-\frac{E_c}{RT_c} \right), \quad (1)$$

уравнение разложения окислителя в твердом топливе:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_c \frac{\partial \eta}{\partial x} = k_c (1 - \eta) \exp \left(-\frac{E_c}{RT_c} \right). \quad (2)$$

Уравнения для газовой фазы, $0 < x < L$:

уравнение сохранения массы газа:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g u_g}{\partial x} = - \sum_{i=1..N_f} G_{1,i}, \quad (3)$$

уравнение сохранения импульса газа:

$$\frac{\partial \rho_g u_g}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_g u_g^2 + p)}{\partial x} = \sum_{i=1..N_f} [-\tau_{tr,i} - G_{1,i} u_g], \quad (4)$$

уравнение сохранения энергии газа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_g (\epsilon_g + 0.5 u_g^2)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_g u_g (\epsilon_g + 0.5 u_g^2) + p u_g]}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial x} \right) - \\ - \sum_{i=1..N_f} \left[G_{1,i} (c_{pg} T_g + u_g^2 / 2) + u_{p,i} \tau_{tr,i} + \alpha_{p,i} n_{p,i} S_{p,i} (T_g - T_{p,i}) \right] + Q_g G_g, \end{aligned} \quad (5)$$

уравнение сохранения массы окислителя в газе:

$$\frac{\partial \rho_{ox}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{ox} u_g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_g \rho_g \frac{\partial a_{ox}}{\partial x} \right) - \sum_{i=1..N_f} G_{1,i} - G_g, \quad (6)$$

уравнения баланса массы частиц i -й фракции:

$$\frac{\partial \rho_{p,i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{p,i} u_{p,i}}{\partial x} = G_{1,i}, \quad i = 1..N_f, \quad (7)$$

уравнение сохранения импульса частиц i -й фракции:

$$\frac{\partial \rho_{p,i} u_{p,i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{p,i} u_{p,i}^2}{\partial x} = \tau_{tr,i} + G_{1,i} u_g, \quad i = 1..N_f, \quad (8)$$

уравнение энергии частиц i -й фракции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{p,i} (\epsilon_{p,i} + 0.5 u_{p,i}^2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{p,i} u_{p,i} (\epsilon_{p,i} + 0.5 u_{p,i}^2)}{\partial x} = \frac{Q_1 G_{1,i}}{\alpha_1} + \\ + \left[G_{1,i} (c_{pg} T_g + u_g^2 / 2) + \tau_{tr,i} u_{p,i} + \alpha_{p,i} S_{p,i} n_{p,i} (T_g - T_{p,i}) \right], \quad i = 1..N_f, \end{aligned} \quad (9)$$

уравнение счетной концентрации частиц i -й фракции:

$$\frac{\partial n_{p,i}}{\partial t} + \frac{\partial n_{p,i} u_{p,i}}{\partial x} = 0, \quad i = 1..N_f, \quad (10)$$

уравнение состояния газа:

$$p = \rho_g R_g T_g, \quad (11)$$

начальные условия:

$$\begin{aligned} -\infty < x < 0 : T_c(x, 0) = T_0, \eta = 0, \\ 0 \leq x < \infty : T_g(x, 0) = T_{p,i}(x, 0) = T_b, \rho_{ox}(x, 0) = 0, \rho_{p,i}(x, 0) = 0, \\ u_g(x, 0) = u_{p,i}(x, 0) = 0, \rho_g(x, 0) = \rho_b, n_{p,i}(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Граничные условия задаются из следующих соображений. Координата $x = 0$ соответствует поверхности горения.

На границе $x = 0$ выполняются законы сохранения потоков массы компонентов газификации твердого топлива и потоков энергии:

$$\begin{aligned} \lambda_g \frac{T_g(0, t)}{\partial x} = \lambda_c \frac{T_c(0, t)}{\partial x} + L_c \rho_f u_c, T_{p,i}(0, t) = T_g(0, t), \rho_g(0, t) = \frac{p_g}{R_g T_g(0, t)}, \\ \alpha_{ox} u_c \rho_c = \rho_g D_g \frac{\partial a_{ox}(0, t)}{\partial x} + u_g(0, t) \rho_{ox}(0, t), n_{p,i}(0, t) = \frac{\rho_{p,i}(0, t)}{(4/3) \pi r_{Al,0,i}^3 \rho_p^0}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\rho_{p,i}(0, t) = \alpha_{Al,i} \rho_c, \alpha_{Al,i} \rho_c u_c = \rho_{p,i}(0, t) u_{p,i}(0, t), \left(1 - \sum_{i=1..N_f} \alpha_{Al,i} \right) \rho_c u_c = \rho_g(0, t) u_g(0, t).$$

на левой границе, $x = -\infty$:

$$\frac{\partial T_c(-\infty, t)}{\partial x} = 0, \quad (14)$$

на правой границе, $x = L$:

$$\frac{\partial a_{ox}(L, t)}{\partial x} = \frac{\partial T_g(L, t)}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

$$p(L, t) = p_L(t), \quad p_L(t) = \begin{cases} P_b = const, & t \leq t_c, \\ P(t), & t > t_c. \end{cases}$$

В уравнениях (1)–(15) c_{pg} , c_{vg} , c_c – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, газа при постоянном объеме, твердого топлива, T – температура, u_c – линейная скорость горения твердого топлива, u – скорость, p – давление, ρ – плотность, λ – коэффициент теплопроводности, Q – тепловой эффект реакции, k – предэкспоненциальный множитель в законе Аррениуса, η – глубина превращения в твердом топливе, E – энергия активации химической реакции, R – универсальная газовая постоянная, $\varepsilon_g = p/(\gamma - 1) + 0.5 u_g^2 \rho_g$ – полная энергия газа, $\varepsilon_{p,i} = c_p T_{p,i} \rho_{p,i} + 0.5 u_{p,i}^2 \rho_{p,i}$ – полная энергия частиц i -й фракции, $\alpha_{p,i} = Nu_{p,i} \lambda_g / (2 r_{p,i})$ – коэффициент теплообмена газа с частицами, D_g – коэффициент диффузии, $\gamma = c_{pg} / c_{vg}$ – показатель адиабаты, τ_{tr} – сила трения, $\rho_c = 1/(\alpha_{c,ox} / \rho_{c,ox} + \alpha_f / \rho_f + \alpha_{Al} / \rho_{Al})$ – плотность смесового твердого топлива, $\rho_{c,ox}$ – плотность вещества окислителя, ρ_f – плотность вещества связки, ρ_{Al} – плотность

алюминия, $\alpha_{Al} = \sum_{i=1..Nf} \alpha_{Al,i}$ – массовая доля порошка алюминия, $\alpha_{c,ox}$ – массовая

доля окислителя, α_f – массовая доля горючего связующего, t – время, x – координата, L_c – теплота испарения связки, $r_{p,i} = \sqrt[3]{3\rho_{p,i}/(4\pi n_{p,i}\rho_{Al})}$ – радиус частицы

i -й фракции; $r_{Al,i} = \left[\left(\frac{\mu_{Al} + 3/2\mu_O}{\mu_{Al}} r_{Al,0,i}^3 - \frac{\rho_{p,i}}{(4/3)\pi n_{p,i}\rho_p^0} \right) \frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O} \right]^{1/3}$ – размер (радиус)

оставшейся части алюминия в частице, μ_{Al} , μ_O – молярные массы алюминия и кислорода, L – правая граница расчетной области, давление на которой меняется по заданному закону. Индексом b отмечены начальные значения параметров состояния, p – параметры частиц, g – параметры газа, c – параметры смесового твердого топлива, ox – окислитель, f – горючее, Al – алюминий, i – номер фракции частиц алюминия.

Коэффициент теплоотдачи вычисляется по формуле [16]

$$\alpha_{p,i} = \frac{Nu\lambda_g}{2r_{p,i}}, \quad Nu = 2 + \sqrt{Nu_l^2 + Nu_t^2}, \quad Nu_l = 0,664 Re^{0,5}, \quad Nu_t = 0,037 Re^{0,8}.$$

Скорость изменения массы частиц при их горении определяется зависимостью $G_{1,i} = \alpha_1 n_{p,i} \rho_p^0 S_{p,i} k(a_{ox}, r_{Al,i}) \beta_{m,i} / (k(a_{ox}, r_{Al,i}) + \beta_{m,i})$, где $\beta_{m,i} = \lambda_g(T_g) Nu / (c_g \rho_g r_{p,i})$ –

коэффициент массоотдачи частиц при числе Льюиса $Le = \frac{D_g}{\lambda_g(T_g)/(c_g \rho_g)} = 1$,

$k(a_{ox}, r_{Al,i}) = k_{02} a_f^{0,9} / \sqrt{r_{Al,i}}$, α_1 – стехиометрический коэффициент реакции алюминия с окислителем, $S_{p,i}$ – площадь поверхности частицы, ρ_p^0 – плотность вещества частицы.

Скорость химической реакции в газовой фазе определяется из соотношения

$$G_2 = \rho_{ox} k_{0g} \exp(-E_g / (RT_g)).$$

Сила трения между частицами и газом определяется выражением $\tau_{tr,i} = n_{p,i} F_{tr,i}$ [11],

где $F_{tr,i} = C_r S_{m,i} \rho_g (u_g - u_{p,i}) |u_g - u_{p,i}| / 2$ – сила взаимодействия одиночной частицы

с газом, $C_r = 24(1 + 0.15 Re^{0.682}) / Re$ – коэффициент трения, $Re = 2\rho_g r_{p,i} |u_g - u_{p,i}| / \eta_g$ –

число Рейнольдса, S_m – площадь миделевого сечения, η_g – коэффициент динамической вязкости газа.

Методика решения

Уравнения (1)–(15) решались численно. Уравнения (1), (2) решались с использованием явной разностной схемы, для аппроксимации конвективных слагаемых использовались разности против потока. Шаг по пространству брался равным $\Delta h = 2.5 \cdot 10^{-7}$ м. Количество точек подбиралось таким, чтобы выполнялось граничное условие (14). Уравнения (3)–(6) решались численно методом С.К. Годунова [17]. Слагаемые в правых частях уравнений, описывающие процессы переноса за счет теплопроводности и диффузии, аппроксимировались явно на трехточечном шаблоне. Решение уравнений (7)–(10) проводилось методом [18]. Шаг по пространству

вблизи поверхности твердого топлива (до координаты $x = 7.5 \cdot 10^{-5}$ м) задавался постоянным и равным $\Delta h_i = 2.5 \cdot 10^{-7}$ м. После координаты $x = 7.5 \cdot 10^{-5}$ м шаг по пространству увеличивался в направлении правой границы по правилу $\Delta h_{i+1} = 1.02 \cdot \Delta h_i$. Размер расчетной области выбирался таким, чтобы в этой области завершились все реакции горения газа и частиц алюминия. Величина схемной диффузии при выбранном шаге Δh была много меньше коэффициента диффузии D_g . Шаг по времени определялся из условия устойчивости Куранта, $\Delta t < \Delta h_i / (\max[c] + \max[|u_g|])$, где c – скорость звука, и условия устойчивости явной разностной схемы для решения уравнений (1), (2) и выбирался минимальный. Граничные условия (13)–(15) аппроксимировались конечными разностями с первым порядком точности.

Система уравнений (1)–(15) решается до установления стационарной линейной скорости горения твердого топлива u_c при заданных начальных условиях, далее расчет проводится в соответствии с заданным законом изменения давления.

Результаты расчетов

В расчетах приняты следующие исходные данные: $c_{pg} = 1466.5$ Дж/(кг·К), $c_{vg} = 1202$ Дж/(кг·К), $R = 8.315$ Дж/(кг·К), $c_c = 1465$ Дж/(кг·К), $c_p = 760$ Дж/(кг·К), $\lambda_c = 0.25$ Дж/(м·с·К), $\lambda_g = 0.35$ Дж/(м·с·К), $\eta_g = 5 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $Q_c = 0.7$ МДж/кг, $k_{0c} = 6.3 \cdot 10^8$ 1/с, $E_c = 100000$ Дж/моль, $Q_1 = 12.75$ МДж/кг, $k_{02} = 2.22 \cdot 10^{-5}$ м^{1.5}/с, $Q_g = 42.61775$ МДж/кг, $k_{0g} = 4.12 \cdot 10^9$ 1/с, $E_g = 188325$ Дж/моль, $\alpha_1 = 0.8889$, $\alpha_{Al} = 0.15$, $\alpha_{ox} = 0.65$, $\alpha_f = 0.2$, $\rho_{c,ox} = 1950$ кг/м³, $\rho_f = 1270$ кг/м³, $\rho_{Al} = 2700$ кг/м³, $a_f = 0.5$, $T_b = 293$ К. Для проведения расчетов была принято, что частицы, оттекающие от поверхности твердого топлива с газообразными продуктами газификации твердого топлива, имеют одинаковый размер (монодисперсная среда, $N_f = 1$), $r_{Al,0} = 7.5$ мкм.

Проведены расчеты зависимости стационарной скорости горения от давления. На рис. 3 представлена зависимость стационарной скорости горения от давления. На рис. 4. представлена связь стационарной скорости горения с температурой поверхности топлива.

Далее расчеты проводились при заданном законе изменения давления над поверхностью топлива, полученном из эксперимента при: $P_b = 3.3$ МПа; функция $p(t)$, определяющая закон изменения давления во времени при сбросе давления, была получена путем аппроксимации экспериментальных измерений:

$$p(t) = (87.003922 + (-1.9153078 \times \text{pow}(9.4525223 \times t, 6.688972) - 102.57151/(\text{pow}(9.4525223 \times t, 5.9404836) - 0.46647462) - 24.064697)/\exp(t))/(2.2169473 + \text{pow}(8.4400129 \times t, 218.28163)) + (7.2332478 + 46.266483/(\text{pow}(9.4525223 \times t, 5.9404836) - 0.46647462))/\exp(t) - 2.1986706.$$

Представляет интерес определение отклонения нестационарной скорости горения от квазистационарных ее значений при изменении давления, как измерено в эксперименте. На рис. 5 представлено изменение скорости горения от времени при изменении давления во времени в соответствии с аппроксимацией экспериментальных данных, пунктирной линией показана квазистационарная скорость горения при соответствующем мгновенном значении давления. На рис. 6 представ-

лено изменение температуры поверхности топлива от времени при изменении давления над поверхностью горения в соответствии с экспериментальными данными.

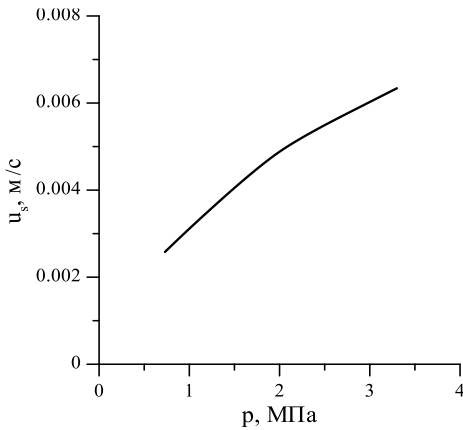


Рис. 3. Зависимость стационарной скорости горения от давления
Fig. 3. Stationary burning rate as a function of pressure

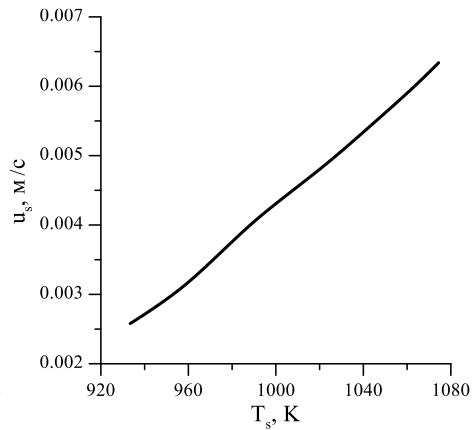


Рис. 4. Связь стационарной скорости горения с температурой поверхности топлива
Fig. 4. Stationary burning rate as a function of temperature of the propellant surface

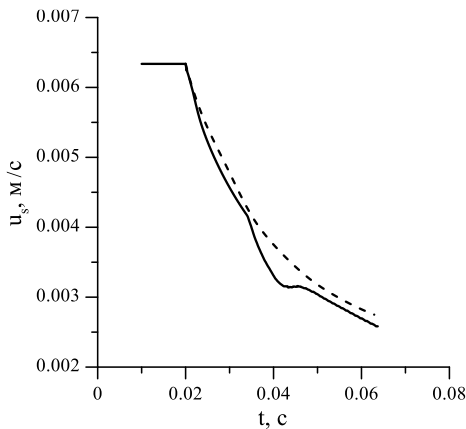


Рис. 5. Нестационарная скорость горения во времени при изменении давления над поверхностью топлива, как в эксперименте (сплошная линия), и квазистационарная скорость горения при соответствующем мгновенном значении давления (пунктирная линия)
Fig. 5. Time dependence of the non-stationary burning rate at varying pressure above the propellant surface as in the experiment (the solid line) and quasi-stationary burning rate at the corresponding instantaneous pressure (the dotted line)

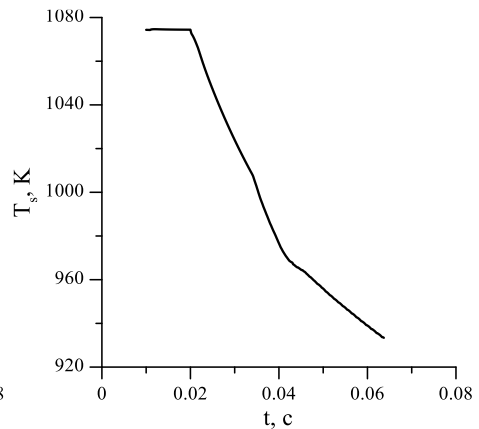


Рис. 6. Изменение температуры поверхности топлива при изменении давления над поверхностью топлива, как в эксперименте
Fig. 6. Variation of the propellant surface temperature with pressure above the propellant surface as in the experiment

На рис. 7 представлена связь нестационарной скорости горения с температурой поверхности топлива при изменении давления, как в эксперименте (сплошная линия), и в квазистационарном случае (пунктирная линия). На рис. 8 представлено отношение нестационарной скорости горения к квазистационарной скорости горения при изменении давления над поверхностью топлива при изменении давления во времени в соответствии с аппроксимацией экспериментальных данных. Соответствующее мгновенное значение квазистационарной скорости горения вычисляется при значении давления в заданный момент времени.

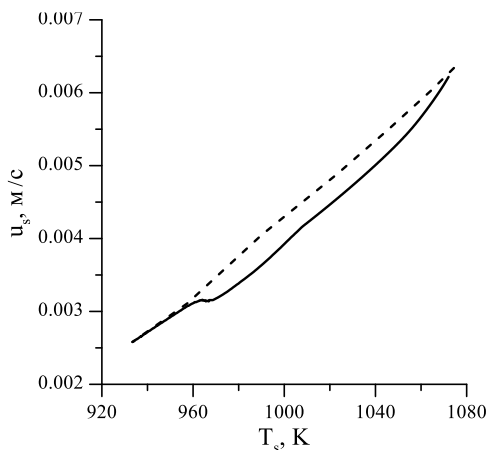


Рис. 7. Связь нестационарной скорости горения с температурой поверхности топлива при изменении давления, как в эксперименте (сплошная линия), и в квазистационарном случае (пунктирная линия)

Fig. 7. Non-stationary burning rate as a function of temperature of the propellant surface at varying pressure both in the experiment (the solid line) and in the quasi-stationary case (the dotted line)

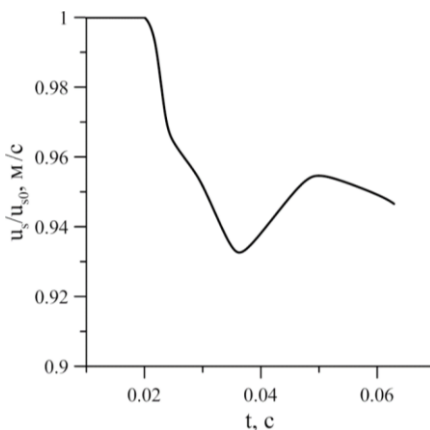


Рис. 8. Отношение нестационарной скорости горения к квазистационарной скорости горения при соответствующем мгновенном значении давления, как в эксперименте

Fig. 8. The ratio of non-stationary and quasi-stationary burning rates at the corresponding instantaneous pressure as in the experiment

Заключение

В работе предложена методика численного расчета нестационарной скорости горения высокоэнергетического материала по известному закону изменения давления. Для расчета нестационарной скорости горения использовалась ранее разработанная авторами физико-математическая модель горения металлизированного смесового твердого топлива в сопряженной постановке [11–13]. В предложенной модели физико-химические процессы в твердой фазе определяются уравнением теплопроводности и уравнением разложения окислителя в конденсированной фазе, а процессы в газовой фазе описываются на основе подходов динамики многофазных реагирующих сред, на поверхности твердого топлива ставятся условия сохранения потоков массы компонентов и энергии. Анализ результатов исследования показывает, что предложенная методика применима для расчета нестационарной скорости горения и отражает основные физические закономерности процесса.

Список источников

1. De Luca L.T., Kuo K.K., Summerfield M. Extinction theories and experiments // *Fundamentals of Solid-Propellant Combustion. Progress in Astronautics and Aeronautics*, 1984. V. 90. P. 661–732.
2. Маршаков В.Н. Анализ повторного воспламенения пороха после спада давления с позиции очагово-пульсирующего механизма горения // *Физика горения и взрыва*. 1991. Т. 27, № 1. С. 12–18.
3. Маршаков В.Н., Пучков В.М. Расчет нестационарной скорости горения по известному закону изменения давления при переходных процессах в двигателе на твердом топливе // *Химическая физика*. 2014. Т. 33, № 5. С. 62–68.
4. Маршаков В.Н. Эксперимент и расчет спада давления в камере сгорания ракетного двигателя при вскрытии дополнительного сопла // *Горение и взрыв*. 2017. Т. 10, № 4. С. 63–70.
5. Zarko V.E., Kuo K.K. Critical review of methods for regression rate measurements of condensed phase systems // *Non-intrusive Combustion Diagnostics* / K.K. Kuo, T. Parr (eds.). New York: Begel House, 1994. P. 600–623.
6. Архипов В.А., Бондарчук С.С., Жуков А.С. Нестационарные режимы горения конденсированных систем : учеб. пособие. Томск: Изд. Дом. Том. гос. ун-та, 2017.
7. Архипов В.А., Зимин Д.А. Анализ условий применимости обратных методов восстановления нестационарной скорости горения // *Физика горения и взрыва*. 2000. Т. 36, № 3. С. 39–43.
8. Архипов В.А., Бондарчук С.С., Коротких А.Г. Сравнительный анализ методов измерения нестационарной скорости горения. I. Методы исследования // *Физика горения и взрыва*. 2010. Т. 46, № 5. С. 82–87.
9. Архипов В.А., Бондарчук С.С., Коротких А.Г. Сравнительный анализ методов измерения нестационарной скорости горения. II. Результаты исследования // *Физика горения и взрыва*. 2010. Т. 46, № 5. С. 88–96.
10. Архипов В.А., Басалаев С.А., Бондарчук С.С., Глотов О.Г., Порязов В.А., Дубкова Я.А. Экспериментальное исследование нестационарной скорости горения высокоэнергетических материалов при сбросе давления // *Физика горения и взрыва*. 2023. Т. 59, № 2. С. 133–140.
11. Крайнов А.Ю., Порязов В.А., Моисеева К.М. Численное моделирование нестационарного горения твердого топлива в камере сгорания регулируемой твердотопливной двигательной установки // *Инженерно-физический журнал*. 2022. Т. 95, № 6. С. 1633–1643.
12. Крайнов А.Ю., Порязов В.А. Численное моделирование нестационарного горения пороха при быстром росте давления на основе сопряженной модели горения // *Инженерно-физический журнал*. 2022. Т. 95, № 1. С. 185–193.
13. Krainov A.Yu., Poryazov V.A., Krainov D.A. Mathematical modelling on extinction of metalized composite solid propellant under a sudden drop in pressure // *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*. 2021. V. 47 (1). P. 1–9. doi: 10.1002/prep.202100123
14. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
15. Ягодников Д.А. Воспламенение и горение порошкообразных металлов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009.
16. Справочник по теплообменникам: в 2 т. М.: Энергоатомиздат, 1987. Т. 1.
17. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
18. Крайко А.Н. О поверхностях разрыва в среде, лишенной ‘собственного’ давления // *Прикладная математика и механика*. 1979. Т. 43, № 3. С. 500–510.

References

1. De Luca L.T., Kuo K.K., Summerfield M. (1984) Extinction theories and experiments. *Fundamentals of Solid-Propellant Combustion. Progress in Astronautics and Aeronautics*. 90. pp. 661–732. doi: 10.2514/5.9781600865671.0661.0732

2. Marshakov V.N. (1991) Analysis of secondary ignition of a powder after a drop in pressure from the position of a site-pulsation mechanism of combustion. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 27(1). pp. 10–15. doi: 10.1007/BF00785347
3. Marshakov, V.N., Puchkov, V.M. (2014) Calculation of the unsteady burning velocity according to a known law of pressure variation during transient processes in a solid-propellant rocket engine. *Russian Journal of Physical Chemistry B*. 8. pp. 345–351. doi: 10.1134/S1990793114030099
4. Marshakov V.N. (2017) Eksperiment i raschet spada davleniya v kamere sgoraniya raketnogo dvigatelya pri vskrytii dopolnitel'nogo sopla [Experiment and calculation of pressure drop in the combustion chamber of a rocket engine when opening an additional nozzle]. *Gorenie i vzryv – Combustion and Explosion*. 10(4). pp. 63–70.
5. Zarko V.E., Kuo K.K. (1994) Critical review of methods for regression rate measurements of condensed phase systems. *Non-intrusive Combustion Diagnostics*. New York: Begel House. pp. 600–623.
6. Arkhipov V.A., Bondarchuk S.S., Zhukov A.S. (2017) *Nestatsionarnye rezhimy goreniya kondensirovannykh sistem. Uchebnoe posobie* [Non-stationary combustion modes of condensed systems. Study guide]. Tomsk.
7. Arkhipov V.A., Zimin D.A. (2020) Applicability conditions for inverse methods of reconstructing the nonsteady burning rate. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 36(3). pp. 318–322. doi: 10.1007/BF02699383
8. Arkhipov V.A., Bondarchuk S.S., Korotkikh A.G. (2010) Comparative analysis of methods for measuring the transient burning rate. I. Research methods. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 46(5). pp. 564–569. doi: 10.1007/s10573-010-0074-9
9. Arkhipov V.A., Bondarchuk S.S., Korotkikh A.G. (2010) Comparative analysis of methods for measuring the transient burning rate. II. Research results. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 46(5). pp. 570–577. doi: 10.1007/s10573-010-0075-8
10. Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Bondarchuk S.S., Poryazov V.A., Dubkova, Y.A. (2023) Experimental study of unsteady burning rate of high-energy materials under depressurization. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 59(2). pp. 244–251. doi: 10.1134/S0010508223020168
11. Krainov A.Yu., Poryazov V.A., Moiseeva K.M. (2022) Numerical simulation of the nonstationary burning of a solid propellant in the combustion chamber of a controllable solid-propellant propulsion system. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 95(6). pp. 1604–1614. doi: 10.1007/s10891-022-02629-1
12. Krainov A.Y., Poryazov V.A. (2022) Numerical simulation of unsteady gunpowder combustion at a rapid rise in pressure on the basis of a conjugate combustion model. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 95(1). pp. 184–192. doi: 10.1007/s10891-022-02466-2
13. Krainov A.Yu., Poryazov V.A., Krainov D.A. (2021) Mathematical modelling on extinction of metallized composite solid propellant under a sudden drop in pressure. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*. 46. doi: 10.1002/prop.202100123
14. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka.
15. Yagodnikov D.A. (2009) *Vosplamnenie i gorenie poroshkoobraznykh metallov* [Ignition and combustion of powdered metals]. Moscow: Moskovskiy gosudarstvennyy tekhnicheskii universitet im. N.E. Bauman.
16. *Spravochnik po teploobmennikam* (1987) [Handbook of heat exchangers]. Volume 1. Moscow: Energoatomizdat.
17. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov, M.I., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution to multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.
18. Kraiko A.N. (1979) On discontinuity surfaces in a medium devoid of “proper” pressure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 43(3). pp. 539–549. doi: 10.1016/0021-8928(79)90102-3

Сведения об авторах:

Порязов Василий Андреевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

Крайнов Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: a.krainov@ftf.tsu.ru

Крайнов Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: kraynov@tpu.ru

Басалаев Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Poryazov Vasily A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

Krainov Aleksey Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: a.krainov@ftf.tsu.ru

Krainov Dmitry A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kraynov@tpu.ru

Basalaev Sergey A. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 06.05.2024; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 06.05.2024; accepted for publication 09.06.2025

Научная статья

УДК 531

doi: 10.17223/19988621/95/12

**Исследование процессов лазерного выращивания,
структуры и механических свойств композиционных
материалов, полученных из порошковой смеси
Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂**

**Владимир Васильевич Промахов¹, Алексей Евгеньевич Матвеев²,
Никита Александрович Шульц³, Владислав Романович Бахмат⁴,
Тимур Эшанкулович Туранов⁵**

^{1, 2, 3, 4, 5} Томский государственный университет, Томск, Россия

² Томский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук, Томск, Россия

¹ vvpromakhov@mail.ru

² cool.mr.c@mail.ru

³ schulznikita97@gmail.com

⁴ bakhmatvr@gmail.com

⁵ timur.kb2@icloud.com

Аннотация. Получены образцы металломатричных композиционных материалов на основе системы Inconel 625 – 5 мас. % (Al–TiB₂) с применением аддитивной технологии прямого лазерного выращивания. Показано, что параметры наплавки критически влияют на структуру формируемых валиков, так же как и качество просушки исходных порошков. Изучены закономерности формирования структуры и физико-механических свойств полученных образцов. Установлены факторы, которые определяют твердость и прочность полученных материалов. Показано, что термообработка первого типа позволяет повысить предел прочности полученных металломатричных композиционных материалов в среднем на 20%.

Ключевые слова: металломатричные композиционные материалы, прямое лазерное выращивание, структура, физико-механические свойства

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ № 20-79-10086-П.

Для цитирования: Промахов В.В., Матвеев А.Е., Шульц Н.А., Бахмат В.Р., Туранов Т.Э. Исследование процессов лазерного выращивания, структуры и механических свойств композиционных материалов, полученных из порошковой смеси Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 137–151. doi: 10.17223/19988621/95/12

Original article

A study of the laser deposition, structure, and mechanical properties of composite materials based on the Inconel 625 – 5 wt. % Al–TiB₂ powder mixture

Vladimir V. Promakhov¹, Aleksey E. Matveev², Nikita A. Schulz³,
Vladislav R. Bakhmat⁴, Timur E. Turanov⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

² Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation

¹ vvpromakhov@mail.ru

² cool.mr.c@mail.ru

³ schulznikita97@gmail.com

⁴ bakhmatvr@gmail.com

⁵ timur.kb2@icloud.com

Abstract. In this work, samples of metal-matrix composite materials based on the Inconel 625–5 wt. % (Al–TiB₂) system were obtained using the additive technology of direct laser deposition. The results showed that the surfacing parameters critically affected the structure of the formed beads, as well as the quality of drying the initial powders. The patterns of the structure formation and physical and mechanical properties of the obtained samples were studied. The factors determining the hardness and strength of the obtained materials were derived. It was shown that the first-type heat treatment allowed increasing the ultimate strength of the obtained metal-matrix composite materials by an average of 20%.

Keywords: metal-matrix composite materials, direct laser deposition, structure, physical and mechanical properties

Acknowledgments: This study was financially supported by the Russian Science Foundation (grant No. 20-79-10086-П).

For citation: Promakhov, V.V., Matveev, A.E., Schulz, N.A., Bakhmat, V.R., Turanov, T.E. (2025) A study of the laser deposition, structure, and mechanical properties of composite materials based on the Inconel 625 – 5 wt. % Al–TiB₂ powder mixture. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 137–151. doi: 10.17223/19988621/95/12

Введение

Развитие и внедрение цифровых технологий (ЦТ) с рациональным использованием природных материалов и человеческих ресурсов является основой для ядра шестого технологического уклада на современном этапе развития общества [1, 2]. Несомненно, одним из перспективных направлений в области ЦТ являются технологии аддитивного лазерного выращивания изделий, которые активно внедряются в отечественной промышленности. Минпромторгом была разработана «Стратегия развития аддитивных технологий» (утверждена распоряжением Правительства РФ от 14 июля 2021 г. № 1913-р.), которая предполагает, что к 2030 г. российский рынок достигнет 13,2 млрд рублей [3]. Однако для достижения поставленных в стратегии целей необходимо достичь технологического суверенитета в области создания

конкурентоспособного оборудования и сырьевых материалов (порошков), применяемых в аддитивных технологиях лазерного выращивания [4]. В то же время обсуждение вопроса о стратегических направлениях разработок новых материалов для наукоемких отраслей промышленности приводит к потребности в жаропрочных материалах и технологиях их создания [5].

Большая часть авторов современных исследований в этом вопросе сходятся во мнении, что будущее за керамическими материалами в силу их высокой температуры плавления и жаропрочности [6]. При этом те же особенности структуры керамики (особенности связей в кристаллической решетке), которые определяют ее преимущество перед металлами, порождают и основной недостаток – хрупкое разрушение. На сегодняшний день традиционным порошком, который применяется в аддитивных технологиях для получения жаропрочных изделий, является никелевый сплав марки Inconel 625 [7]. Однако высокая плотность сплава ($8,44 \text{ г/см}^3$) способствует увеличению массы изделия, что ограничивает его применение в транспортных областях промышленности: авиакосмической, автомобильной, судостроительной и др. Возникает закономерный вопрос о снижении массы изделий, полученных методом аддитивного выращивания с применением порошков Inconel 625, при сохранении или увеличении их физико-механических свойств. В рамках данной работы для повышения прочностных свойств будут использованы композиционные металломатричные частицы, состоящие из металлической / интерметаллидной матрицы и мелкодисперсных частиц тугоплавкого материала (керамики). Такой подход позволит реализовать значительный научно-технический потенциал материалов для аддитивных технологий с уникальными свойствами. В данном направлении ведутся активные исследования по самораспространяющемуся высокотемпературному синтезу (СВС) композиционных материалов в малотоннажных объемах [8, 9]. Потенциал рабочих температур данных материалов может достигать 1500°C . В частности, методом СВС были получены металломатричные композиционные материалы Al–TiB₂ [10]. Структура композитов представлена алюминиевой матрицей (60 мас. %), внутри которой распределены частицы диборида титана (40 мас. %) субмикронного и нанометрового размера. В процессе исследований удалось осуществить переход от лабораторных условий к полупромышленным и синтезировать материалы массой от 1 до 10 кг [11]. Возникает закономерный вопрос о возможности применения композиционных металломатричных порошков системы Al–TiB₂ в технологиях прямого лазерного выращивания. Одним из возможных методов применения этих композитов является их добавление к жаропрочному порошку на основе сплава никеля и хрома (семейство Inconel) в процессе лазерного выращивания. Предполагается, что применение композита Al–TiB₂ в качестве добавки позволит увеличить физико-механические свойства изделий, полученных прямым лазерным выращиванием: прочность, твердость, жаропрочность, а также снизить массу изделия при сохранении физико-механических параметров. Предполагается, что в процессе лазерного выращивания легкоплавкая матрица алюминия позволит создать жидкий слой расплава, который будет смачивать керамические включения (TiB₂), что позволит осуществить их равномерное распределение в основном материале Inconel 625. Целью данной работы является выявление параметров получения композиционных материалов методом прямого лазерного выращивания из порошковой смеси Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂, а также исследование физико-механических свойств этих материалов.

Материалы и методы

В качестве базового материала использовали порошок Inconel 625 (Hoganas). Заявленный производителем химический состав сплава приведен в табл. 1. На рис. 1, *a, b* представлены внешний вид частиц порошка Inconel 625 (Hoganas) и его гранулометрический состав соответственно.

Таблица 1

Химический состав порошка Inconel 625

Ni	Cr	Fe	Mo	P	Nb	B	Ti	Др.
Осн.	20,08	0,51	8,9	—	3,51	—	—	0,08
Si	Co	C	Mn	Al	O ₂	S	Cu	
0,43	—	0,01	0,37	0,01	0,07	—	—	

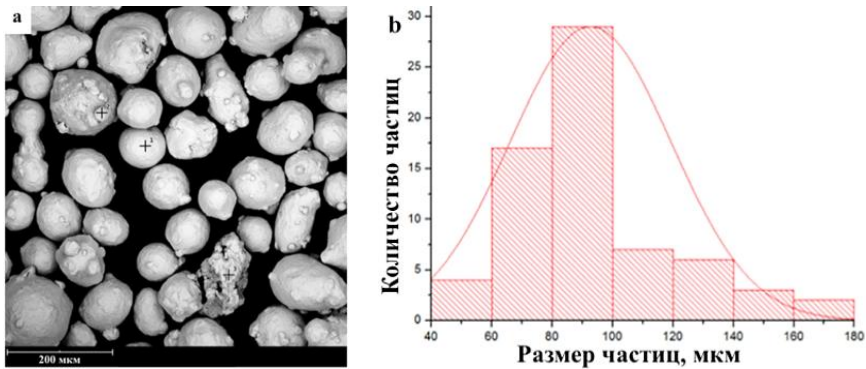


Рис. 1. Порошок Inconel 625 (Hoganas): РЭМ-изображение частиц порошка (*a*), гранулометрический состав порошка (*b*)

Fig. 1. Inconel 625 (Hoganas) powder: (*a*) SEM image of powder particles and (*b*) granulometric composition of the powder

Согласно представленным данным, частицы порошка имеют сферическую форму. В качестве армирующей добавки использовались композиционные материалы системы Al–TiB₂, полученные методом самораспространяющегося высокотемпературного синтеза. Методика получения описана в работе [10]. На рис. 2, *a* представлены изображения структуры композиционных СВС-частиц. На рис. 2, *b* показано распределение частиц TiB₂ в матрице алюминия по размерам.

Полученные с применением СВС материалы измельчались в порошок дисперсностью 30–80 мкм. Измельченные композиционные порошки смешивали с порошком Inconel 625 в соотношении 5 мас. % – 95 мас. % соответственно.

Образцы Inconel 625–NiTi–TiB₂ были получены с помощью волоконного лазера LS–3 производства IPG Photonics. Оптимальные режимы лазерного выращивания определяли при изменении параметров диаметра лазерного луча, мощности излучения, скорости перемещения луча, массового расхода порошка.

Структура материала была изучена с применением сканирующего электронного микроскопа (СЭМ) T-SCAN с фокусированными ионными пучками, а также с помощью детектора энергодисперсионного рентгеновского спектра (EDS). Для исследования механических свойств из порошковой смеси Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂

методом прямого лазерного выращивания были изготовлены образцы дисков для исследования твердости и лопаток для исследования прочности на растяжение. Схематическое изображение лопаток представлено на рис. 3.

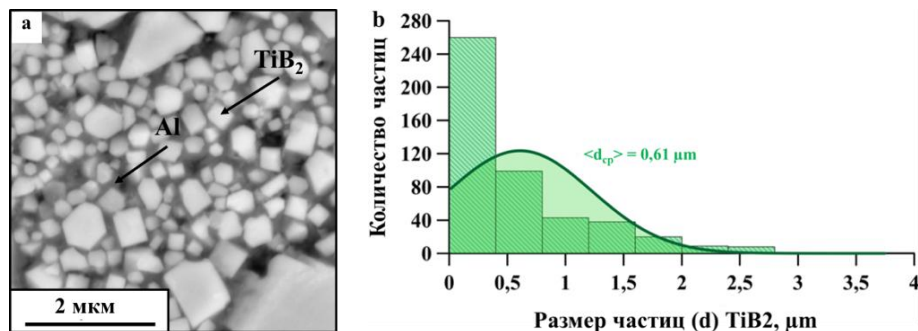


Рис. 2. СЭМ-изображение структуры композитов (а) и гистограмма размеров керамических частиц TiB_2 распределенных в матрице алюминия (b)

Fig. 2. (a) SEM images of the composite structure and (b) histogram of the sizes of the TiB_2 ceramic particles distributed in the aluminum matrix

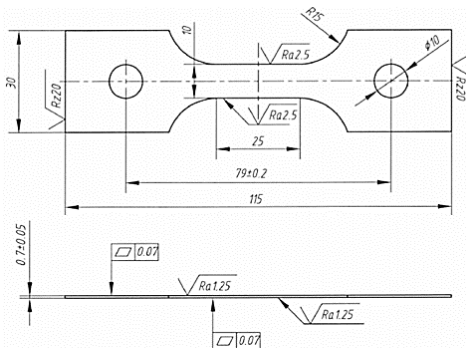


Рис. 3. Схематическое изображение образцов лопаток для испытаний на растяжение

Fig. 3. Schematic representation of blade specimens for tensile testing

Микротвердость полученных образцов была измерена с помощью твердомера Buehler Wilson Micromet 6040 (Buehler LLC, Лейк-Блафф, Иллинойс, США) с программным обеспечением для анализа изображений Thixomet Pro (Nikon Co., Токио, Япония). Испытания на растяжение образцов проводились на универсальной системе статических испытаний Instron (Illinois Tool Works Inc., Гленвиль, Иллинойс, США), которая оснащена видеоекстензометром для точного измерения деформации без необходимости контакта с образцом.

Результаты и обсуждение

Величины вертикального и горизонтального смещения зависят от габаритов единичного наплавленного валика. В связи с этим был проведен ряд экспериментов, направленных на выявление влияния параметров наплавки порошковой смеси Inconel 625 – 5 мас. % Al– TiB_2 на геометрию образующихся валиков (рис. 4). При

этом погонный расход (отношение расхода присадочного порошка к скорости наплавки, г/мм) оставался неизменным.

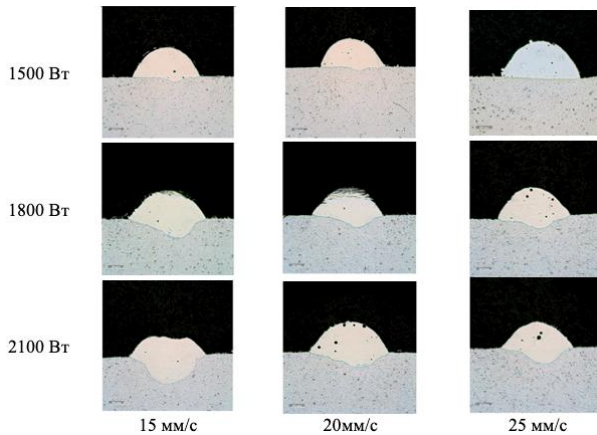


Рис. 4. Поперечное сечение наплавленных валиков при варьировании мощности излучения и скорости перемещения лазерного луча с сохранением погонного расхода присадочного порошка

Fig. 4. Cross-section of deposited beads at varying radiation power and laser beam speed at a constant linear consumption of the filler powder

Результаты измерения геометрии валиков и графики влияния параметров наплавки на ширину и высоту наплавленного валика приведены в табл. 2 и на рис. 5 соответственно.

Таблица 2

Результаты измерения геометрии наплавляемого валика

D, мм	P, Вт	V, мм/с	G, г/мин	Ширина валика, мм	Высота валика, мм
2,5	1 500	25	27.3	1.75	0.71
	1 500	20	21.9	1.92	0.75
	1 500	15	16.4	2.13	0.79
	1 800	25	27.3	1.88	0.74
	1 800	20	21.9	2.04	0.63
	1 800	15	16.4	2.4	0.68
	2 100	25	27.3	2.04	0.64
	2 100	20	21.9	2.39	0.73
	2 100	15	16.4	2.45	0.66

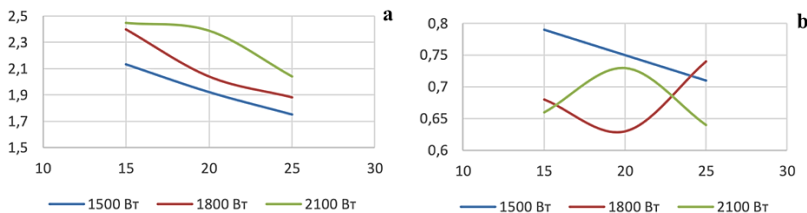


Рис. 5. Ширина (a) и высота (b) наплавленных валиков в зависимости от параметров процесса наплавки при постоянном погонном расходе присадочного порошка

Fig. 5. (a) Width and (b) height of deposited beads depending on the parameters of the deposition at a constant linear consumption of the filler powder

Далее были назначены величины поперечного смещения, которое имеет значение, равное $2/3$ от ширины единичного валика, и вертикального смещения, приблизительно равного высоте валика, после чего были выращены образцы шириной и высотой в 5 валиков соответственно. По результатам металлографического анализа были обнаружены газовые поры в наплавленном металле (рис. 6, *a*), располагающиеся как поодиночке, так и скоплениями. Единичные поры имеют большие размеры, до 150 мкм в диаметре. Было выдвинуто предположение, что данная пористость вызвана влагой, абсорбированной порошком за время хранения. Для проверки представленной гипотезы порошковая смесь Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂ дополнительно сушилась в вакуумной печи при температуре 100°C в течение 4 ч. После процедуры просушивания экспериментальные работы были проведены повторно. По результатам металлографического анализа установлено, что после просушки порошков пор не наблюдалось (рис. 6, *b*): присутствовали единичные поры, размер и количество которых не превышает 20 мкм и 0.5 об. %. Стоит отметить, что небольшое количество пор является характерным для процессов порошковой металлургии, литья и сварки без применения дополнительной уплотняющей пластической обработки (ГИП).

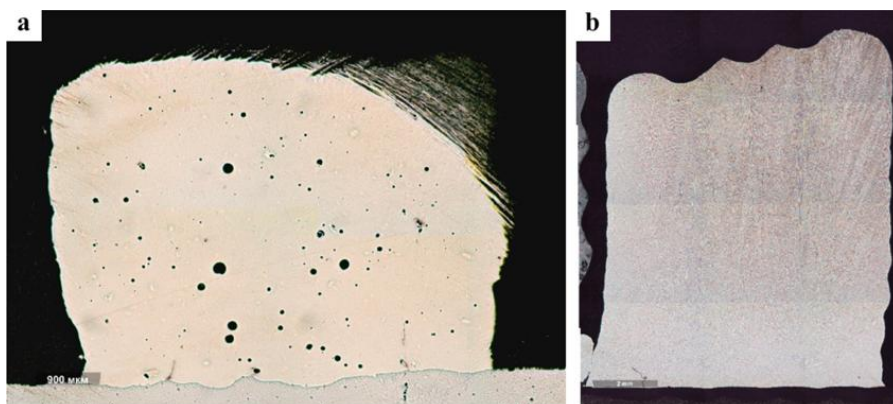


Рис. 6. Металлографические изображения материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания из порошков системы Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂: до просушивания (*a*); после просушивания (*b*)

Fig. 6. Metallographic images of the materials obtained by direct laser deposition from powders of the Inconel 625 – 5 wt.% Al–TiB₂ system: (*a*) before and (*b*) after drying

При более детальном анализе металлографических изображений материалов, полученных прямым лазерным выращиванием с применением порошковой смеси Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂, в структуре композита были обнаружены микротрещины (рис. 7, область 1).

При анализе характера и расположения трещин было выдвинуто предположение, что данный тип дефекта относится к типу трещин, вызванных падением пластичности. Стоит отметить, что падение пластичности наблюдается в материалах, чувствительных к изменению температур в диапазоне между солидусом сплава и приблизительно половиной температуры солидуса. Установлено, что низкая мощность лазера способствует возникновению несплавлений в валиках (рис. 8, *a*, область 1). С другой стороны, увеличение мощности сопровождается образованием

трещин (рис. 8, *b*, область 2), а также повреждением фокусирующей линзы, что приводит к искажению формы конечного материала (рис. 8, *c*).

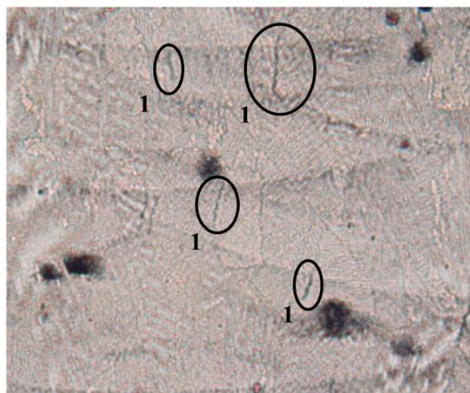


Рис. 7. Изображения микротрещин на поверхности образцов металлматричных композитов системы Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂

Fig. 7. Images of microcracks on the surface of metal-matrix composite samples of the Inconel 625 – 5 wt.% Al–TiB₂ system

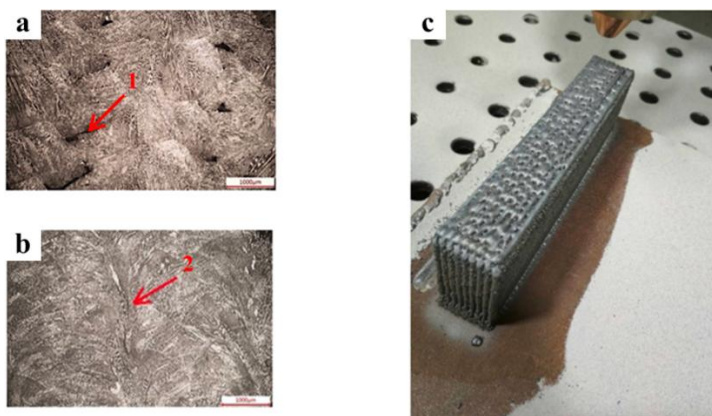


Рис. 8. Дефекты в структуре образцов, возникающие вследствие неправильно подобранных технологических параметров процесса: несплавления (*a*), трещины (*b*), нестабильное формирование наносимого валика, вызванное выходом из строя фокусирующей линзы (*c*)

Fig. 8. Defects in the structure of samples caused by incorrectly selected technological parameters of the process: (a) lack of fusion, (b) cracks, and (c) unstable formation of the applied bead due to the focusing lens failure

Стоит отметить, что низкая скорость выращивания граничных валиков также приводит к образованию несплавов. Следовательно, для устранения подобного дефекта необходимо увеличить скорость выращивания и повысить мощность излучения. Однако в этом случае необходимо учитывать, что увеличение скорости подачи порошка снижает количество частиц, которые подаются в ванну расплава. Это может привести к снижению высоты граничных валиков и искажению конечной формы изделия. Для устранения этого дефекта были проведены экспери-

ментальные работы по подбору соотношения скоростей лазерной наплавки. Далее были проведены экспериментальные работы по увеличению стабильности процессов прямого лазерного выращивания. Эксперименты проводили путем изменения расхода порошка и шага поднятия сопла. Установлено, что высота слоя наплавки уменьшается в два раза при снижении скорости расхода порошка. Стабильность процесса сохраняется при снижении этого параметра в полтора раза. Следовательно, это значение является оптимальным параметром для прямого лазерного выращивания материалов с применением порошковой смеси 625 – 5 мас. % Al–TiB₂. Увеличение шага прироста, несомненно, приводит к увеличению производительности прямого лазерного выращивания. Однако увеличение шага выше предельного значения приводит к образованию несплавов между валиками. Технологические параметры, обеспечивающие более мягкий режим, оказались наименее производительными, порядка 200 г/час. Дефектов типа несплавов и трещин не обнаружено. Для повышения производительности были апробированы параметры более жесткого режима ($D = 2.5$ мм, $P = 1\,500$ Вт, $V = 25$ мм/с, $G = 25$ г/мин). Форма валика, обеспечиваемая данными параметрами, позволяла производить смещения $\Delta X = 1.6$ мм, $\Delta Z = 0.8$ мм, что привело к производительности порядка 1.1 кг/час. При данном режиме происходит образование дефектов типа несплавов и трещин.

Вышеизложенные данные позволили определить оптимальные параметры прямого лазерного выращивания изделий с применением порошковой смеси 625 – 5 мас. % Al–TiB₂ (табл. 3). При этом достигается хорошая производительность изделия (0.5 кг/ч), а также стабильное формирование его геометрической формы. Фотографии поперечного сечения выращенных образцов показаны на рис. 9.

Таблица 3

Параметры процесса выращивания демонстрационных образцов

Диаметр луча в зоне обработки, мм	2.1
Мощность, Вт	1 000
Скорость выращивания крайних валиков, мм/с	10
Скорость выращивания заполняющих валиков, мм/с	15
Расход порошка, г/мин	11.4
Смещение по X, мм	1.4
Смещение по Z, мм	0.6
Диаметр луча в зоне обработки, мм	2.1
Мощность, Вт	1 000
Скорость выращивания крайних валиков, мм/с	10

Для оценки характера распределения керамических частиц диборида титана внутри металлической матрицы при выявленных оптимальных условиях осаждения порошковой смеси Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂ было проведено исследование образцов с помощью сканирующего электронного микроскопа (рис. 10, а). Установлено, что внутри матрицы наблюдаются включения черного цвета. Размер этих включений изменяется в диапазоне от 0.8 до 3 мкм. По результатам элементного анализа (рис. 10, б) установлено, что в белых областях наблюдается повышенное содержание ниобия и молибдена, в черных областях повышено содержание титана. Предполагается, что алюминий растворяется в основном материале Inconel 625.



Рис. 9. Макроструктура образцов, полученных по оптимизированным параметрам лазерного выращивания из порошковой смеси Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂

Fig. 9. Macrostructure of the samples obtained using optimized parameters of the laser deposition from the Inconel 625 – 5 wt.% Al–TiB₂ powder mixture

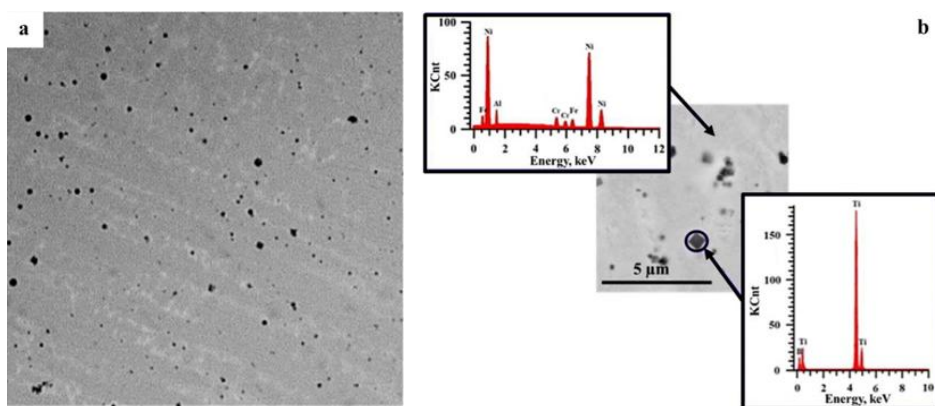


Рис. 10. СЭМ-изображение структуры композиционных материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания с применением порошковой смеси Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂ (a); элементный анализ локальной области структуры композита (b)

Fig. 10. (a) SEM image of the structure of the composite materials obtained by direct laser deposition using the Inconel 625 – 5 wt.% Al–TiB₂ powder mixture and (b) elemental analysis of a local region of the composite structure

Определение физико-механических свойств: твердости и прочности на растяжение проводились на образцах, полученных методом прямого лазерного выращивания с применением смеси Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂ при оптимальных параметрах, определенных ранее. Результаты измерения микротвердости образцов представлены в табл. 4. Кроме того, для сравнения была исследована микротвердость чистого Inconel 625 без

Полученные результаты демонстрируют, что добавление 5 мас. % частиц Al–TiB₂ приводит к повышению твердости почти в 1,5 раза. добавок.

Таблица 4

Микротвердость образцов из порошковой системы Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂

Номер точки	Микротвердость, $HV_{0.1}$	
	Inconel 625	Inconel 625 95% + NiTi–TiB ₂ 5%
1	260	389
2	269	395
3	275	411
4	275	405
5	284	405
Среднее значение	273	401

Механические испытания на растяжение проводились на образцах системы Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂. Были подготовлены две серии дополнительных образцов, которые были подвергнуты термической обработке двух типов. Первый тип –гомогенизация плюс двойное старение, т.е. стандартный режим, который широко используется для деформируемого или литого сплава IN718 [11]: 1 065°C × 1.5 ч / воздушное охлаждение, 760°C × 10 ч / охлаждение в печи до 650°C (со скоростью 55°C/ч), а затем выдержка в течение 8 ч до комнатной температуры. Второй тип термической обработки – гомогенизация плюс однократное старение: гомогенизация при 1 150°C в течение 2 ч (воздушное охлаждение), затем старение при 700°C в течение 12 ч и, наконец, водяное охлаждение [12].

Результаты проведенных механических испытаний представлены в табл. 5 и на рис. 11, 12.

Таблица 5

Результаты механических испытаний на растяжение образцов, полученных методом лазерного выращивания из порошковой смеси Inconel 625 – 5 мас. % Al–TiB₂

№	Тип термообработки	Предел прочности, МПа	Перемещение, мм	Деформация при растяжении, %
1	Без термообработки	949.5	6.0	20.4
2		944.5	5.9	19.8
3		928.8	3.2	20.7
4		988.1	3.9	19.4
5	Первый тип термообработки	1 278.6	2.5	9.4
6		1 231.9	2.4	9.0
7		1 126.3	2.1	7.9
8		1 191.7	2.2	8.5
9		1 167.9	2.6	9.7
10	Второй тип термообработки	1 104.7	2.2	7.9
11		1 033.1	2.0	7.2
12		1 100.5	2.3	8.2
13		1069.8	2.4	8.4
14		1 117.8	2.5	8.7

Установлено, что использование СВС-частиц Al–TiB₂ в качестве армирующего материала позволило увеличить прочность на растяжение образцов, полученных прямым лазерным выращиванием, от 721 МПа (согласно [10]) до 952.7 МПа.

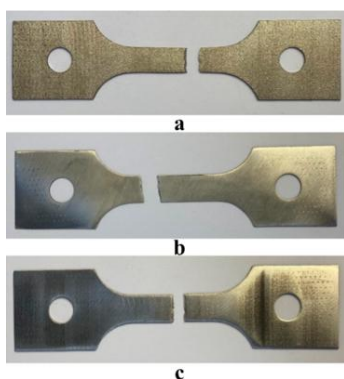


Рис. 11. Фотографии образцов после испытаний: без термической обработки (а), термообработка первого типа (b), термообработка второго типа (c)

Fig. 11. Photos of the samples after testing: (a) without heat treatment, (b) first-type heat treatment, and (c) second-type heat treatment

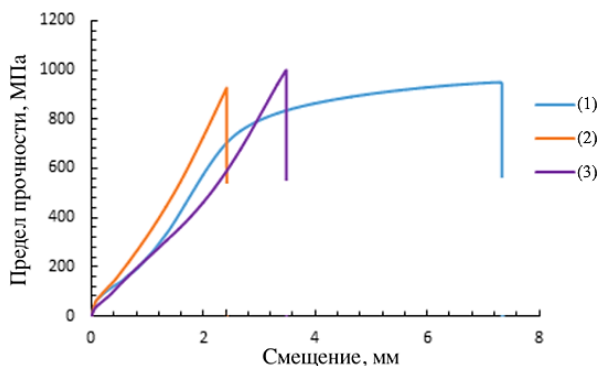


Рис. 12. График зависимости предела прочности образцов при растяжении от перемещения: без термической обработки (1), термообработка первого типа (2), термообработка второго типа (3)

Fig. 12. Plot of the tensile strength of samples versus displacement: (1) without heat treatment, (2) first-type heat treatment, and (3) second-type heat treatment

Кроме того, использование термической обработки первого и второго типов позволяет увеличить предел прочности в среднем на 20–22%. Вместе с этим термическая обработка снижает деформацию при растяжении более чем в 2 раза.

Заключение

Полученные результаты демонстрируют, что использование 5 мас. % композиционных СВС-частиц Al–TiB₂ в качестве добавки к порошку Inconel 625 в процессе лазерного выращивания при оптимальных параметрах процесса позволяет увеличить механические свойства полученного материала относительно стандартного порошка Inconel 625. Увеличение твердости и прочности на сжатие образцов композиционных материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания с применением СВС-порошков Al–TiB₂, связано с рядом факторов. Во-первых,

высокая твердость диборида титана (25–35 ГПа) способствует повышению твердости полученных металломатричных композиционных материалов. Во-вторых, в процессе лазерной наплавки керамические частицы выступают в качестве центров кристаллизации, что может способствовать уменьшению размера зерна и повышению прочности [11]. Для композиционной структуры полученных материалов возможна реализация нескольких механизмов упрочнения: (1) дисперсное упрочнение; (2) упрочнение за счет уменьшения среднего размера зерна и реализации закономерности Холла–Петча [12]. Воздействие термической обработки типа гомогенизация–старение позволяет значительно увеличить прочность при растяжении, но при этом приводит к снижению пластичности.

Список источников

1. Глущенко В.В. Теория технологических укладов: концептуальных трансформаций в работе университетов в период шестого технологического уклада // *Norwegian Journal of Development of the International Science*. 2020. V. 40 (3). P. 5–15.
2. Кяримов Р.Р., Шапошников Н.Н., Мутрянин А.В. Техничко-экономическое обоснование применения аддитивной технологии селективного лазерного сплавления на примере элементов космической техники из титана // *Космическая техника и технологии*. 2022. № 4 (39). С. 5–21.
3. Абрамов И.В., Абрамов В.И. Центры аддитивных технологий – драйверы цифровой трансформации экономики // *Вопросы инновационной экономики*. 2022. Т. 12, №. 3. С. 1325–1344. doi: 10.18334/vinec.12.3.115107
4. Promakhov V., Matveev A., Schulz N., Grigoriev M., Olisov A., Vorozhtsov A., Zhukov A., Klimenko V. High-temperature synthesis of metal–matrix composites (Ni-Ti)-TiB₂ // *Applied Sciences*. 2021. V. 11 (5). Art. 2426. doi: 10.3390/app11052426
5. Matveev A., Promakhov V., Schultz N., Vorozhtsov A. Synthesis of metal matrix composites based on crxniy-tin for additive technology // *Materials*. 2021. V. 14 (20). Art. 5914. doi: 10.3390/ma14205914
6. Matveev A., Promakhov V., Schulz N., Bakhmat V., Belchikov I. Structure and phase composition of SHS composites based on Al–Ti–B system with different Al content // *Ceramics International*. 2024. V. 50 (1). P. 503–511. doi: 10.1016/j.ceramint.2023.10.126
7. Tan C.F., Radzai S.M. Effect of hardness test on precipitation hardening aluminium alloy 6061-T6 // *Chiang Mai Journal of Science*. 2009. V. 36 (3). P. 276–286.
8. Akbari M.K., Baharvandi H.R., Mirzaee O. Nano-sized aluminum oxide reinforced commercial casting A356 alloy matrix: Evaluation of hardness, wear resistance and compressive strength focusing on particle distribution in aluminum matrix // *Composites. Part B: Engineering*. 2013. V. 52. P. 262–268. doi: 10.1016/j.compositesb.2013.04.038
9. Wang Y.N., Huang J.C. The role of twinning and untwinning in yielding behavior in hot-extruded Mg–Al–Zn alloy // *Acta Materialia*. 2007. V. 55 (3). P. 897–905. doi: 10.1016/j.actamat.2006.09.010
10. Zhang Y., Bandyopadhyay A. Influence of compositionally graded interface on microstructure and compressive deformation of 316L stainless steel to Al12Si aluminum alloy bimetallic structures // *ACS Applied Materials & Interfaces*. 2021. V. 13 (7). P. 9174–9185. doi: 10.1021/acsami.0c21478
11. Li W., Yang Y., Liu J., Zhou Y., Li M., Wen S., Wei Q., Yan C., Shi Y. Enhanced nanohardness and new insights into texture evolution and phase transformation of TiAl/TiB₂ in-situ metal matrix composites prepared via selective laser melting // *Acta Materialia*. 2017. V. 136. P. 90–104. doi: 10.1016/j.actamat.2017.07.003
12. Chen L., Sun Y., Li L., Ren Y., Ren X. In situ TiC/Inconel 625 nanocomposites fabricated by selective laser melting: Densification behavior, microstructure evolution, and wear properties // *Applied Surface Science*. 2020. V. 518. Art. 145981. doi: 10.1016/j.apsusc.2020.145981

References

1. Glushchenko V.V. (2020) Teoriya tekhnologicheskikh ukladov: kontseptual'nykh transformatsiy v rabote universitetov v period shestogo tekhnologicheskogo uklada [Theory of technological paradigms: conceptual transformations in the work of universities during the sixth technological paradigm]. *Norwegian Journal of Development of the International Science*. 40(3). pp. 5–15.
2. Kyarimov R.R., Shaposhnikov N.N., Mitryanin A.V. (2022) Tekhniko-ekonomicheskoe obosnovanie primeneniya additivnoy tekhnologii selektivnogo lazernogo splavleniya na primere elementov kosmicheskoy tekhniki iz titana [Feasibility study for use of selective laser melting-based additive manufacturing technology as exemplified by titanium space hardware components]. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii – Space Technology and Engineering*. 4(39). pp. 5–21.
3. Abramov I.V., Abramov V.I. (2022) Tsentry additivnykh tekhnologiy–drayvery tsifrovoy transformatsii ekonomiki [Additive technology centers – drivers of digital transformation of the economy]. *Voprosy innovatsionnoy ekonomiki – Issues of Innovative Economy*. 12(3). pp. 1325–1344. doi: 10.18334/vinec.12.3.115107
4. Promakhov V., Matveev A., Schulz N., Grigoriev M., Olisov A., Vorozhtsov A., Zhukov A., Klimenko V. (2021) High-temperature synthesis of metal–matrix composites (Ni–Ti)–TiB₂. *Applied Sciences*. 11(5). Article 2426. doi: 10.3390/app11052426
5. Matveev A., Promakhov V., Schultz N., Vorozhtsov A. (2021) Synthesis of metal matrix composites based on CrxNiy–TiN for additive technology. *Materials*. 14(20). Article 5914. doi: 10.3390/ma14205914
6. Matveev A., Promakhov V., Schulz N., Bakhmat V., Belchikov I. (2024) Structure and phase composition of SHS composites based on Al–Ti–B system with different Al content. *Ceramics International*. 50(1). pp. 503–511. doi: 10.1016/j.ceramint.2023.10.126
7. Tan C.F., Radzai S.M. (2009) Effect of hardness test on precipitation hardening aluminium alloy 6061–T6. *Chiang Mai Journal of Science*. 36(3). pp. 276–286.
8. Akbari M.K., Baharvandi H.R., Mirzaee O. (2013) Nano-sized aluminum oxide reinforced commercial casting A356 alloy matrix: Evaluation of hardness, wear resistance and compressive strength focusing on particle distribution in aluminum matrix. *Composites Part B: Engineering*. 52. pp. 262–268. doi: 10.1016/j.compositesb.2013.04.038
9. Wang Y.N., Huang J.C. (2007) The role of twinning and untwinning in yielding behavior in hot-extruded Mg–Al–Zn alloy. *Acta Materialia*. 55(3). pp. 897–905. doi: 10.1016/j.actamat.2006.09.010
10. Zhang Y., Bandyopadhyay A. (2021) Influence of compositionally graded interface on microstructure and compressive deformation of 316L stainless steel to Al12Si aluminum alloy bimetallic structures. *ACS Applied Materials & Interfaces*. 13(7). pp. 9174–9185. doi: 10.1021/acsami.0c21478
11. Li W., Yang Y., Liu J., Zhou Y., Li M., Wen S., Wei Q., Yan C., Shi Y. (2017) Enhanced nanohardness and new insights into texture evolution and phase transformation of TiAl/TiB₂ in-situ metal matrix composites prepared via selective laser melting. *Acta Materialia*. 136. pp. 90–104. doi: 10.1016/j.actamat.2017.07.003
12. Chen L., Sun Y., Li L., Ren Y., Ren X. (2020) In situ TiC/Inconel 625 nanocomposites fabricated by selective laser melting: Densification behavior, microstructure evolution, and wear properties. *Applied Surface Science*. 518. Article 145981. doi: 10.1016/j.apsusc.2020.145981

Сведения об авторах:

Промахов Владимир Васильевич – кандидат технических наук, директор НОЦ «Аддитивные технологии» Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: vvpromakhov@mail.ru

Матвеев Алексей Евгеньевич – младший научный сотрудник НОЦ «Аддитивные технологии» Томского государственного университета; младший научный сотрудник Томского научного центра Сибирского отделения Российской академии наук (Томск, Россия). E-mail: cool.mr.c@mail.ru

Шульц Никита Александрович – научный сотрудник НОЦ «Аддитивные технологии» Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: schulznikita97@gmail.com

Бахмат Владислав Романович – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bakhmatvr@gmail.com

Туранов Тимур Эшанкулович – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: timur.kb2@icloud.com

Information about the authors:

Promakhov Vladimir V. (Candidate of Technical Sciences, Scientific and Educational Center “Additive Technologies” of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vvpromakhov@mail.ru

Matveev Aleksey E. (Scientific and Educational Center “Additive Technologies” of Tomsk State University; Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: cool.mr.c@mail.ru

Schulz Nikita A. (Scientific and Educational Center “Additive Technologies” of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: schulznikita97@gmail.com

Bakhmat Vladislav R. (Scientific and Educational Center “Additive Technologies” of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bakhmatvr@gmail.com

Turanov Timur E. (Scientific and Educational Center “Additive Technologies” of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: timur.kb2@icloud.com

Статья поступила в редакцию 22.04.2025; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 22.04.2025; accepted for publication 09.06.2025

Научная статья

УДК 534.1

doi: 10.17223/19988621/95/13

Вертикальные колебания жесткой полосы на вязкоупругой полуплоскости

Исмоил Иброхимович Сафаров¹, Мухсин Худойбердиевич Тешаев²,
Баходир Негматиллаев³, Максуд Шарипович Ахмедов⁴

¹ Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан

² Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук
Республики Узбекистан, Бухара, Узбекистан

^{3,4} Бухарский инженерно-технологический институт, Бухара, Узбекистан

¹ safarov54@mail.ru

² muhsin_5@mail.ru

³ proins@mail.ru

⁴ maksud.akhmedov.1985@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются вертикальные колебания жесткой полосы на вязкоупругой полуплоскости под действием вертикальной нагрузки. Цель исследования – разработка методики решения задачи и алгоритма для определения нормальной реакции основания, перемещения полосы и вязкоупругой полуплоскости. Методом двойного преобразования Лапласа и Фурье решается задача Лэмба для вязкоупругой полуплоскости. Динамическая контактная задача решена с привлечением численных методов. Установлено, что учет вязкоупругих свойств основания (или полупространства) в значительной мере влияет на динамическую реакцию.

Ключевые слова: жесткий штамп, вертикальная нагрузка, контактное напряжение, вязкоупругая плоскость

Для цитирования: Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Негматиллаев Б.Н., Ахмедов М.Ш. Вертикальные колебания жесткой полосы на вязкоупругой полуплоскости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 152–163. doi: 10.17223/19988621/95/13

Original article

Oscillations of a rigid strip on a viscoelastic half-plane under the vertical load

Ismoil I. Safarov¹, Mukhsin Kh. Teshayev²,
Bakhadir Negmatillaev³, Maksud Sh. Akhmedov⁴

¹ Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan

² Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan

^{3,4} Bukhara Institute of Engineering and Technology, Bukhara, Uzbekistan

¹ safarov54@mail.ru

² muhsin_5@mail.ru

³ proins@mail.ru

⁴ maqsud.axmedov.1985@mail.ru

Abstract. The oscillations of a rigid strip on a viscoelastic half-plane under the action of a vertical load are considered. The strip is exposed to a time-dependent vertical force. The aim of this study is to develop a problem-solving technique and an algorithm to determine the normal response of the base and the displacement of the strip and viscoelastic half-plane. The contact stress of the half-plane is specified as a series expansion by Chebyshev polynomials of the first kind. The Lamb problem for a viscoelastic plane is solved using the method of double Laplace and Fourier transforms. The problem of oscillations of rigid and viscoelastic beam slabs on a viscoelastic half-plane is considered using the Fourier series method. It is concluded that the Fourier series and Fourier transform methods allow analytical solving of dynamic contact problems for arbitrary viscoelastic kernels. However, when applying this methodology, certain restrictions are placed on the type of loading function. The determination of displacements and stresses from the obtained analytical expressions is a separate and rather complicated computational problem. Thus, the dynamic contact problem is solved using numerical methods.

Keywords: rigid die, vertical load, contact stress, viscoelastic plane

For citation: Safarov, I.I., Teshae, M.Kh., Negmatillaev, B.N., Akhmedov, M.Sh. (2025) Oscillations of a rigid strip on a viscoelastic half-plane under the vertical load. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 152–163. doi: 10.17223/19988621/95/13

Введение

В литературе подробно освещены исследования колебаний штампа, когда основание упругое. В [1–4] рассматриваются задачи гармонических колебаний круглого штампа, лежащего на упругом полупространстве. В этих работах парные интегральные уравнения сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма II рода, которые решены двумя методами: методом последовательных приближений и заменой полученной системы системой алгебраических уравнений.

В работе [5] анализируется задача взаимного влияния двух круглых штампов, совершающих гармонические колебания, когда напряжения под штампами распределены равномерно, а в [6] в приближенной постановке изучены свободные колебания штампа.

В работах [7–10] рассмотрены задачи, когда подошва штампа не плоская, и при наличии сцепления. В [11–14] исследованы нестационарные колебания круглого штампа и для контактных напряжений получены приближенные выражения. В работах [15–17] рассматривается невесомый квадратный штамп, когда на него действуют импульсные нагрузки. В этом случае методом Б.Н. Жемочкина определены контактные напряжения в нескольких точках в заданные моменты времени. Им же в приближенной постановке исследованы нестационарные колебания двух массивов [18, 19]. Способ определения нормальных контактных напряжений под жестким штампом, расположенным на упругом полупространстве, приводится в работах [20–23]. Исследованы колебания балочных плит конечной жесткости, лежащих на упругой полуплоскости, методом ортогональных полиномов Чебышева.

В работе [24] предложен эффективный итерационный подход для расчета балок и плит на нелинейно-упругом неоднородном основании. Этот подход позволяет полностью найти НДС основания, внутренние усилия и осадки плиты. В [25] разработан универсальный алгоритм решения контактной задачи о действии штампа на границу упругого штампа. В работе [26] рассмотрена пространственная контактная задача об одновременном действии на грани упругого клина эллиптического в плане штампа и сосредоточенной силы, приложенной вне области контакта на ребре клина.

В вышеприведенном обзоре работ по статическим и динамическим контактным задачам основание штампа рассматривается как упругое полупространство, на которое действует внешняя нагрузка. Однако при использовании этой теории не учитывается деформирование во времени, т.е. внутреннее трение материала.

Постановка задачи и методы решения

Пусть на жесткую полосу с шириной, равной единице, и длиной $2a$ воздействует динамическая нагрузка $P(t)$ в вертикальном направлении. Требуется определить нормальную реакцию основания $p(x, t)$ и вертикальное перемещение полосы $\omega(t)$.

Дифференциальное уравнение движения полосы

$$M_0 \frac{C_2^2}{a^2} \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} = P(t) - R(t), \quad (1)$$

и условие плотного прилегания поверхности плиты к основанию

$$\omega(t) = v(x, 0, t), \quad |x| \leq 1, \quad (2)$$

где $R(t) = 2a \int_0^1 p(x, t) dx$, M_0 – масса полосы, $C_2 = \sqrt{\mu / \rho}$ – скорость распростра-

нения поперечных волн, μ , ρ – модуль упругости и плотность материала полосы, $p(x, t)$ – реактивное давление основания.

Для решения задачи воспользуемся уравнениями движения полуплоскости в перемещениях:

$$\begin{aligned} (1 - K^*) \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + (1 - \beta^2) \frac{d^2 v}{dx dy} + \beta^2 \frac{d^2 u}{dy^2} \right] &= \beta^2 \frac{d^2 u}{dt^2}; \\ (1 - K^*) \left[\beta^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + (1 - \beta^2) \frac{d^2 u}{dx dy} + \frac{d^2 v}{dy^2} \right] &= \beta^2 \frac{d^2 v}{dt^2}, \end{aligned}$$

где K – интегральный оператор вида:

$$\begin{aligned} K^* f &= \int_0^t K(t - \tau) f(\tau) d\tau; \\ \beta^2 &= \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\nu_0}{1 - \nu_0}; \quad C_1 = \frac{\sqrt{\lambda + 2\mu}}{\rho_0}; \quad C_2 = \frac{\sqrt{\mu}}{\rho_0}, \end{aligned} \quad (3)$$

C_1 и C_2 – скорости продольной и поперечной волн; λ , μ , ρ_0 – коэффициенты Ламе и плотность материала полуплоскости соответственно.

Применяя к уравнениям (1) преобразование Лапласа по времени, при нулевых начальных условиях получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + (1-\beta^2)\frac{d^2\bar{v}}{dx dy} + \beta^2\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} &= \frac{\beta^2\nu}{1-\bar{K}}\bar{u}; \\ \beta^2\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} + (1-\beta^2)\frac{d^2\bar{u}}{dx dy} + \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} &= \frac{\beta^2\nu}{1-\bar{K}}\bar{v},\end{aligned}\quad (4)$$

где $\bar{u}, \bar{v}, \bar{K}$ – Лаплас-образы функций $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $K(t)$; δ – параметр Лаплас-преобразования.

В дальнейшем вводятся в рассмотрение функции $\bar{\varphi}(x, y, \delta)$ и $\bar{\psi}(x, y, \delta)$:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{1}{a}\frac{d\bar{\varphi}}{dx} + \frac{1}{a}\frac{d\bar{\psi}}{dy}; \\ \bar{v} &= \frac{1}{a}\frac{d\bar{\varphi}}{dy} - \frac{1}{a}\frac{d\bar{\psi}}{dx}.\end{aligned}\quad (5)$$

Тогда уравнения (4) приводятся к уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{\varphi}}{dx^2} + \frac{d^2\bar{\varphi}}{dy^2} &= \frac{\beta^2\delta^2}{1-\bar{K}}\bar{\varphi}; \\ \frac{d^2\bar{\psi}}{dx^2} + \frac{d^2\bar{\psi}}{dy^2} &= \frac{\delta^2}{1-\bar{K}}\bar{\psi}.\end{aligned}\quad (6)$$

Применяя к уравнениям (6) преобразование Фурье (ПФ), получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{\bar{\varphi}}}{dy^2} - \left(\xi^2 + \frac{\beta^2\delta^2}{1-\bar{K}}\right)\bar{\bar{\varphi}} &= 0; \\ \frac{d^2\bar{\bar{\psi}}}{dy^2} - \left(\xi^2 + \frac{\delta^2}{1-\bar{K}}\right)\bar{\bar{\psi}} &= 0,\end{aligned}\quad (7)$$

где ПФ функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\varphi}}(\xi, y, \delta) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(x, y, \delta) e^{i\xi x} dx; \\ \bar{\bar{\psi}}(\xi, y, \delta) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x, y, \delta) e^{i\xi x} dx.\end{aligned}$$

здесь ξ – параметр ПФ.

Учитывая условия затухания напряжений при $y \rightarrow \infty$, решение уравнений (7) представим в виде:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\varphi}} &= A(\xi, \delta) e^{-y\sqrt{\xi^2 + \frac{\beta^2\delta^2}{1-\bar{K}}}}; \\ \bar{\bar{\psi}} &= B(\xi, \delta) e^{-y\sqrt{\xi^2 + \frac{\delta^2}{1-\bar{K}}}},\end{aligned}\quad (8)$$

где коэффициенты $A(\xi, \delta)$ и $B(\xi, \delta)$ находятся из граничных условий

$$\bar{\sigma}_y(x, 0, \delta) = -\bar{P}(x, \delta); \quad \bar{\tau}_{x,y}(x, 0, \delta) = 0. \quad (9)$$

Выражения напряжений σ_y и τ_{xy} через функции $\varphi(x, y, \delta)$ и $\psi(x, y, \delta)$:

$$\begin{aligned}\sigma_y(x, y, t) &= \frac{\lambda}{a^2} (1 - K^*) \Delta \varphi + \frac{2\mu}{a^2} (1 - K^*) \left(\frac{d^2 \varphi}{dy^2} - \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right); \\ \tau_{xy}(x, y, t) &= \frac{\mu}{a^2} (1 - K^*) \left(2 \frac{d^2 \varphi}{dx dy} + \frac{d^2 \psi}{dy^2} - \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right).\end{aligned}\quad (10)$$

Подставляя на граничные условия (9), получаем:

$$\begin{aligned}\left(\xi^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}} \right) A(\xi, \delta) - i \xi \sqrt{\xi^2 + \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}}} B(\xi, \delta) &= - \frac{a^2 \bar{\bar{P}}(\xi, \delta)}{2\mu(1 - \bar{K})}; \\ i \xi \sqrt{\xi^2 + \frac{\beta^2 \delta^2}{1 - \bar{K}}} A(\xi, \delta) + \left(\xi^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}} \right) B(\xi, \delta) &= 0,\end{aligned}\quad (11)$$

где двойное преобразование заданной функции $P(x, t)$ имеет вид:

$$\bar{\bar{P}}(\xi, \delta) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} p(x, t) e^{i\xi x - \delta t} dt dx. \quad (12)$$

Из системы (11) очевидно, что

$$\begin{aligned}A(\xi, \delta) &= - \frac{a^2}{\mu(1 - \bar{K})} \frac{2\xi^2 + \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}}}{F_1(\xi, \delta)} \bar{\bar{P}}(\xi, \delta); \\ B(\xi, \delta) &= \frac{2ia^2}{\mu(1 - \bar{K})} \frac{\xi \sqrt{\xi^2 + \frac{\beta^2 \delta^2}{1 - \bar{K}}}}{F_1(\xi, \delta)} \bar{\bar{P}}(\xi, \delta).\end{aligned}\quad (13)$$

Здесь

$$F_1(\xi, \delta) = \left(2\xi^2 + \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}} \right)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 + \frac{\beta^2 \delta^2}{1 - \bar{K}}} \sqrt{\xi^2 + \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}}}.$$

Подставляя (13) в выражение (9), после некоторых математических преобразований для определения вертикальных $v(x, 0, t)$ и горизонтальных $u(x, 0, t)$ перемещений вязкоупругой полуплоскости имеем

$$\begin{aligned}v(x, 0, t) &= \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta^2 \sqrt{\xi^2 + \frac{\beta^2 \delta^2}{1 - \bar{K}}}}{(1 - \bar{K}) F_1(\xi, \delta)} \bar{\bar{P}}(\xi, \delta) e^{\delta t - i\xi x} d\xi d\delta; \\ u(x, 0, t) &= \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi i} \times \\ &\times \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(2\xi^2 + \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}} \right) - 2 \sqrt{\xi^2 + \frac{\beta^2 \delta^2}{1 - \bar{K}}} \sqrt{\xi^2 + \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}}} \right] \frac{\bar{\bar{P}}(\xi, \delta) e^{\delta t - i\xi x}}{(1 - \bar{K}) F_1(\xi, \delta)} d\xi d\delta.\end{aligned}\quad (14)$$

Таким образом, применение метода двойного преобразования Лапласа и Фурье к решению динамических задач вязкоупругости создает ряд сложностей в получении численных результатов.

Следуя [16], решение уравнений (14), т.е., контактное напряжение полуплоскости, ищем в виде:

$$P(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}(t) \frac{T_{2m}(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (15)$$

Разложив (15) по координате t в ряд Фурье и применяя ПФ по координате x , получим

$$\bar{P}(\xi, t) = a \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_{2m,k} J_{2m}(\xi) \exp\left(\frac{ik\pi}{T} t\right), \quad (16)$$

где

$$A_{2m,k} = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} A_{2m}(t) \exp\left(\frac{ik\pi}{T} t\right) dt.$$

Подставляя (16) в уравнения (14) и учитывая, что

$$\begin{aligned} R(t) &= \pi a \sum_{k=1}^{\infty} A_{0,k} \exp\left(\frac{ik\pi}{T} t\right) dt; \\ P(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} P_k \exp\left(\frac{ik\pi}{T} t\right) dt, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$A_{2m,k} = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} P(t) \exp\left(\frac{ik\pi}{T} t\right) dt,$$

имеем

$$A_{0,k} - \frac{k^2 \pi^2}{T^2} m_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m A_{2m,k}}{1-K} \int_0^{\infty} \frac{\delta^2 \sqrt{\xi^2 + \beta^2 \delta^2}}{F_k(\xi)} J_{2m} \cos x \xi d\xi = \frac{P_k}{\pi a}.$$

Учитывая условие (2), подставляем (3) в уравнение (1):

$$\begin{aligned} -\frac{k^2 \pi^2}{T^2} M_0 \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^2}{1-K} \exp\left(\frac{ik\pi}{T} t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{P}_k(\xi) \sqrt{\xi^2 + \beta^2 \delta^2}}{F_k(\xi)} \cos x \xi d\xi &= P(t) - R(t); \\ (|x| \leq 1); \quad \int_0^{\infty} \bar{P}_k(\xi) \cos x \xi d\xi &= 0; \quad (|x| > 1). \end{aligned}$$

Здесь

$$m_0 = \frac{2}{\pi} \frac{h\rho}{a\rho_0}.$$

В соответствии с результатами, полученными для вертикального перемещения на границе полуплоскости, имеем

$$v(x, 0, t) = \frac{1}{\mu \sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^2}{1-K} \exp\left(\frac{ik\pi}{T} t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{P}_k(\xi) \sqrt{\xi^2 + \beta^2 \delta^2}}{F_k(\xi)} e^{i\xi x} d\xi. \quad (18)$$

Интеграл в выражении (18), в соответствии с [23], может быть записан в виде:

$$\int_0^{\infty} \frac{\delta^2 \sqrt{\xi^2 + \beta^2 \delta^2}}{F_k(\xi)} J_{2m} \cos x \xi d\xi = (-1)^m \left[C_{2m,0} + 2 \sum_{r=1}^{\infty} C_{2m,2r} T_{2r}(x) \right], \quad (|x| \leq 1), \quad (19)$$

где

$$C_{2m,2r} = \frac{2}{\pi} \left[-\pi \frac{\sqrt{\eta_1^2 - \beta^2}}{F'(\eta_1)} Z_{2m}(\delta\eta_1) + \int_0^\beta \frac{\sqrt{\beta^2 - \eta^2}}{F(\eta)} Z_{2m}(\delta\eta) d\eta + \right. \\ \left. + \int_\beta^1 \frac{4\eta^2(\eta^2 - \beta^2)\sqrt{1 - \eta^2}}{f(\eta)F(\eta)} Z_{2m}(\delta\eta) K_{2r}(\delta\eta) d\eta \right]; \quad (20)$$

$$F(\eta) = (2\eta^2 - 1)^2 - 4\eta^2 \sqrt{(\eta^2 - \beta^2)} \sqrt{\eta^2 - 1};$$

$$f(\eta) = (2\eta^2 - 1)^2 + 4\eta^2 \sqrt{(\eta^2 - \beta^2)} \sqrt{\eta^2 - 1};$$

η_1 – наибольший действительный положительный корень (НДПК) уравнения

$$(2\eta^2 - 1)^2 - 4\eta^2 \sqrt{(\eta^2 - \beta^2)} = 0.$$

Подставляя разложение (18) в (1)

$$A_{0,k} - \frac{k^2 \pi^2}{T^2} m_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m,k}}{1-K} \left[C_{2m,0} + 2 \sum_{r=1}^{\infty} C_{2m,2r} T_{2r}(x) \right] = \frac{P_k}{\pi a}; \quad (|x| \leq 1), \quad (21)$$

умножаем равенства (21) на $T_i(x)$ и с учетом ортогональности полиномов Чебышева, получаем

$$A_{0,k} - \frac{k^2 \pi^2}{T^2} m_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m,k}}{1-K} C_{2m,0} = \frac{P_k}{\pi a}; \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m,k}}{1-K} C_{2m,2r} = 0. \quad (22)$$

Подставляя решения уравнений (22) в выражения (14), контактные напряжения полуплоскости и перемещений полосы можно вычислить по формуле

$$\omega(t) = \frac{1}{\mu \pi m_0} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (t-\tau) [P_k - \pi a A_{0,k}] \exp\left(\frac{ik\pi}{T} \tau\right) d\tau.$$

Результаты и анализ

На основе разработанного алгоритма получены численные результаты в программном комплексе MATLABe. В расчетах использовалось трехпараметрное ядро релаксации Колтунова–Ржаницина $K(t) = A e^{-\beta t} / t^{1-\alpha}$. Расчеты по соотношениям (15)–(22) проводились при следующих значениях основных параметров задачи: $\beta = 0.05$; $\alpha = 0.1$; $h = 0.5$; $\Delta t = 0.01$, $h/l = 0.1$, $\chi = 1.15$. Коэффициент Пуассона материала полупространства принят постоянным: $\nu = 0.25$. Вертикальная сила принята в виде треугольника

$$P(t) = P_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_0} \right),$$

где P_0 – амплитуда вертикальной нагрузки, τ_0 – время воздействия нагрузок.

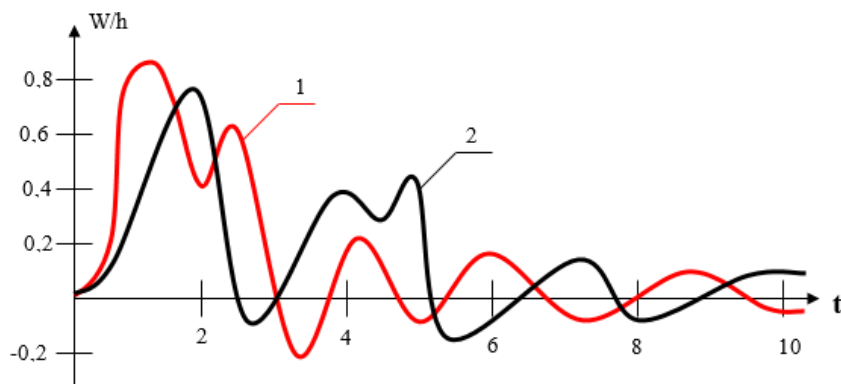


Рис. 1. Изменение перемещений жесткой полосы в функции от времени:
 $A = 0.0048$ (1); $A = 0.48$ (2)

Fig. 1. Displacement of a rigid strip as a function of time: $A = (1) 0.0048$ and (2) 0.48

Воздействующая нагрузка принята нестационарной, в форме треугольника. На рис. 1 показано изменение перемещений жесткой полосы от времени при различной вязкости полупространства. Результаты расчетов показывают, что учет вязкоупругих свойств основания (или полупространства) в значительной мере влияет на динамическую реакцию.

Заключение

Разработаны методика и алгоритм решения задачи исследования вертикальных колебаний жесткой полосы на вязкоупругой полуплоскости под действием вертикальной нагрузки. Переход от изображений к оригиналам осуществляется приближенно. Методом рядов Фурье и преобразований Фурье контактные задачи аналитически решаются при произвольных ядрах вязкоупругости. Однако при применении этого метода ставятся определенные ограничения на вид функции нагружения. Определение смещений и напряжений по полученным аналитическим выражениям представляет собой отдельную, достаточно сложную вычислительную задачу. Найдено, что учет вязкоупругих свойств материалов полупространства оказывает существенное влияние на реакцию основания.

Список источников

1. Mitra M., Gopalakrishnan S. Guided Wave Based Structural Health Monitoring: Review. Smart Materials and Structures. 2016. V. 25 (5). P. 1–27. doi: 10.1088/0964-1726/25/5/053001
2. Учебные руководства и пособия по использованию COMSOL Multiphysics // COMSOL.ru. URL: <https://www.comsol.ru/documentation>
3. Umek A. Dynamic responses of building foundations to incident elastic waves: PhD Thesis. Illinois: Ill. Inst. Technol., 1973.
4. Рылько М.А. О движении в упругой среде жесткого прямоугольного включения под действием плоской волны // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1977. № 1. С. 158–164.
5. Вялов С.С. Вопросы теории деформируемости связных грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1966. Вып. 3. С. 1–4.

6. Бережной Д.В., Коноплев Ю.Г., Паймушин В.Н., Секаева Л.Р. Исследование взаимодействия бетонного коллектора с сухими и водонасыщенными грунтами // Математическое моделирование и краевые задачи: тр. Всерос. науч. конф. Самара: СамГТУ, 2004. Ч. 1: Математические модели механики, прочность и надежность конструкций. С. 37–39.
7. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004.
8. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
9. Сафаров И.И., Тешаев М.Х. Динамическое гашение колебаний твердого тела, установленного на вязкоупругих опорах // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31 (1). С. 63–74. doi: 10.18500/0869-6632-003021.
10. Safarov I., Teshaev M. Control of resonant oscillations of viscoelastic systems // Theoretical and Applied Mechanics. 2023. V. 51 (1). P. 1–12. doi: 10.2298/TAM220510007S
11. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
12. Оценка вибрации при проектировании, строительстве и эксплуатации объектов метрополитена: свод правил по проектированию и строительству СП 23-105–2004. М.: Госстрой России, 2004.
13. Залётов В.В. Распределение напряжений в изотропном полупространстве при заданных граничных условиях смешанного типа // Труды ИПММ НАН Украины. 2006. Т. 13. С. 83–91.
14. Chigirinsky V., Naumenko O. Studying the stressed state of elastic medium using the argument functions of a complex variable // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2019. V. 5/7 (101). P. 27–35.
15. Chigirinsky V., Naizabekov A., Lezhnev S., Kuzmin S., Naumenko O. Solving applied problems of elastic theory in geomechanics using the method of argument functions of a complex variable // Eastern European Journal of Enterprise Technologies. 2022. V. 5/7 (119). P. 105–113.
16. Chigirinsky V., Naizabekov A., Lezhnev S. Closed problem of plasticity theory // Journal of Chemical Technology and Metallurgy. 2021. V. 56 (4). P. 867–876.
17. Chigirinsky V., Putnoki A. Development of a dynamic model of transients in mechanical systems using argument functions // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2017. V. 3/7 (87). P. 11–21.
18. Safarov I.I., Teshaev M.Kh. Unsteady Motions of Spherical Shells in a Viscoelastic Medium // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2023. № 83. P. 166–179. doi: 10.17223/19988621/83/14
19. Safarov I.I., Almuratov Sh.N., Teshaev M.Kh., Homidov F.F., Rayimov D.G. On the dynamic stress-strain state of isotropic rectangular plates on an elastic base under vibration loads // Indian Journal of Engineering. 2020. V. 17 (47). P. 127–133.
20. Феоктистов С.И., Андрианов И.К. Оценка верхнего и нижнего уровней допустимых деформаций при изготовлении листовых и тонкостенных деталей на основе диаграммы предельных деформаций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 136–148. doi: 10.17223/19988621/86/10
21. Usmonov B.Sh., Safarov I.I., Teshaev M.Kh. Nonlinear flutter of the transient process of hereditarily deformable systems in supersonic flight mode // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2024. № 88. P. 124–137. doi: 10.17223/19988621/88/10
22. Mirsaidov M.M., Safarov I.I., Teshaev M.Kh. Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2019. V. 13 (2). P. 105–116. doi: 10.24874/jsscm.2019.13.02.08.
23. Сеймов В.М. Динамические контактные задачи. Киев: Наукова думка, 1976.
24. Босаков С.В., Козунова О.В. Вариационно-разностный подход в решении контактной задачи для нелинейно-упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета // Вестник Белорусского национального технического университета. 2009. № 1. С. 5–13.

25. Дмитриева К.В. Контактная задача для штампа на упругом клине со свободными гранями // Вестник Белорусского национального технического университета. 2010. № 4. С. 24–29.
26. Молчанов А.А., Пожарский Д.А. Обсуждения контактной задачи Галина и взаимодействие штампов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (4). С. 1636–1638.

References

1. Mitra M., Gopalakrishnan S. (2016) Guided wave based structural health monitoring: Review. *Smart Materials and Structures*. 25(5). pp. 1–27. doi: 10.1088/0964-1726/25/5/053001
2. *Uchebnye rukovodstva i posobiya po ispol'zovaniyu COMSOL Multiphysics* [Training guides and tutorials on how to use COMSOL Multiphysics]. URL: <https://www.comsol.ru/documentation>
3. Umek A. (1973) *Dynamic Responses of Building Foundations to Incident Elastic Waves*. PhD Thesis. Illinois: Illinois Institute of Technology.
4. Ryl'ko M.A. (1977) O dvizhenii v uprugoy srede zhestkogo pryamougol'nogo vklyucheniya pod deystviem ploskoy volny [About motion in an elastic medium of a rigid rectangular inclusion under the action of a plane wave]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 1. pp. 158–164.
5. Vyalov S.S. (1966) Voprosy teorii deformiruемости svyazannykh gruntov [Questions of the theory of deformability of cohesive soils]. *Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov – Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 3. pp. 1–4.
6. Berezhnoy D.V., Konoplev Yu.G., Paymushin V.N., Sekaeva L.R. (2004) Issledovanie vzaimodeystviya betonnoho kollektora s sukhimi i vodonasyshennymi gruntami [Investigation of interaction of a concrete collector with dry and water-saturated soils]. *Trudy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii «Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi»*. Samara: SamGTU. pp. 37–39.
7. Gorshkov A.G., Medvedskiy A.L., Rabinskiy L.N., Tarlakovskiy D.V. (2004) *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in continuous media]. Moscow: FIZMATLIT.
8. Timoshenko S.P., Gud'er J. (1975) *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow: Nauka.
9. Safarov I.I., Teshaeв M.Kh. (2023) Dinamicheskoe gashenie kolebaniy tvyordogo tela, ustanovlennogo na vyazkouprugikh oporakh [Dynamic damping of vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika – Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 31(1). pp. 63–74. doi: 10.18500/0869-6632-003021
10. Safarov I., Teshaeв M. (2024) Control of resonant oscillations of viscoelastic systems. *Theoretical and Applied Mechanics*. 51(1). pp. 1–12. doi: 10.2298/TAM220510007S
11. Sneddon E. (1955) Preobrazovaniya Fur'e [*Fourier transformations*]. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoy literatury.
12. *Svod pravil po proektirovaniyu i stroitel'stvu SP 23-105-2004 “Otsenka vibratsii pri proektirovani, stroitel'stve i ekspluatatsii ob'ektov metropolitena* [Code of rules for design and construction SP 23-105-2004 “Vibration assessment during design, construction, and operation of metro facilities”] (2004) Moscow: Gosstroy Rossii
13. Zalyotov V.V. (2006) Raspredelenie napryazheniy v izotropnom poluprostranstve pri zadannykh granichnykh usloviyakh smeshannogo tipa [Distribution of stresses in isotropic half-space at the given boundary conditions of mixed type]. *Trudy IPMM NAN Ukrainy – Proceedings of IPMM NAS of Ukraine*. 13. pp. 83–91.
14. Chigirinsky V., Naumenko O. (2019) Studying the stressed state of elastic medium using the argument functions of a complex variable. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 5/7(101). pp. 27–35. doi: 10.15587/1729-4061.2019.177514
15. Chigirinsky V., Naizabekov A., Lezhnev S., Kuzmin S., Naumenko O. (2022) Solving applied problems of elastic theory in geomechanics using the method of argument functions of

- a complex variable. *Eastern European Journal of Enterprise Technologies*. 5/7(119). pp. 105–113. doi: 10.15587/1729-4061.2022.265673
16. Chigirinsky V., Naizabekov A., Lezhnev S. (2021) Closed problem of plasticity theory. *Journal of Chemical Technology and Metallurgy*. 56(4). pp. 867–876.
 17. Chigirinsky V., Putnoki A. (2017) Development of a dynamic model of transients in mechanical systems using argument functions. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 3/7(87). pp. 11–21. doi: 10.15587/1729-4061.2017.101282
 18. Safarov I.I., Teshaeв M.Kh. (2023) Nestatsionarnye dvizheniya sfericheskikh obolochek v vyazkoupругoy srede [Unsteady motions of spherical shells in a viscoelastic medium]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 166–179. doi: 10.17223/19988621/83/14
 19. Safarov I.I., Almuratov Sh.N., Teshaeв M.Kh., Homidov F.F., Rayimov D.G. (2020) On the dynamic stress-strain state of isotropic rectangular plates on an elastic base under vibration loads. *Indian Journal of Engineering*. 17(47). pp. 127–133.
 20. Feoktistov S.I., Andrianov I.K. (2023) Otsenka verkhnego i nizhnego urovney dopustimyykh deformatsiy pri izgotovlenii listovykh i tonkostennykh detaley na osnove diagrammy predel'nykh deformatsiy [Estimation of the upper and lower levels of permissible deformations at manufacturing of sheet and thin-walled parts on the basis of the diagram of limiting deformations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 136–148. doi: 10.17223/19988621/86/10
 21. Usmonov B.Sh., Safarov I.I., Teshaeв M.Kh. (2024) Nelineynyy flatter perekhodnogo protsessa nasledstvenno-deformiruemyykh sistem pri sverkhzvukovom rezhime poleta [Nonlinear flutter of the transient process of hereditarily deformable systems in supersonic flight mode]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 124–137. doi: 10.17223/19988621/88/10
 22. Mirsaidov M.M., Safarov I.I., Teshaeв M.Kh. (2019) Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 13(2). pp. 105–116. doi: 10.24874/jsscm.2019.13.02.08
 23. Seymov V.M. (1976) *Dinamicheskie kontaktnye zadachi* [Dynamic contact problems]. Kyiv: Naukova Dumka.
 24. Bosakov S.V., Kozunova O.V. (2009) Variatsionno-raznostnyy podkhod v reshenii kontaktnoy zadachi dlya nelineyno-uprugogo neodnorodnogo osnovaniya. Ploskaya deformatsiya. Teoriya rascheta. [Variation-difference approach in solving the contact problem for nonlinear-elastic inhomogeneous base. Flat deformation. Theory of calculation]. *Vestnik BNTU – Repository BNTU*. 1. pp. 5–13.
 25. Dmitrieva K.V. (2010) Kontaktnaya zadacha dlya shchampa na uprugom kline so svobodnymi granyami [Contact problem for a stamp on an elastic wedge with free faces]. *Vestnik BNTU – Repository BNTU*. 4. pp. 24–29.
 26. Molchanov A.A., Pozharskiy D.A. (2011) Obsuzhdeniya kontaktnoy zadachi Galina i vzaimodeystvie shtampov. [Discussions of the Galin contact problem and die interaction]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I.Lobachevskogo – Bulletin of Nizhny Novgorod Lobachevsky University*. 4(4). pp. 1636–1638.

Сведения об авторах:

Сафаров Исмоил Иброхимович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики Ташкентского химико-технологического института (Ташкент, Узбекистан). E-mail: safarov54@mail.ru

Тешаев Мухсин Худойбердиевич – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник Бухарского отделения Института математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Бухара, Узбекистан). E-mail: muhsin_5@mail.ru

Негматиллаев Бахадир – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры архитектуры Бухарского инженерно-технологического института (Бухара, Узбекистан). E-mail: proins@mail.ru

Ахмедов Максуд Шарипович – доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам, и.о. зав. кафедрой высшей математики Бухарского инженерно-технологического института (Бухара, Узбекистан). E-mail: maqsud.axmedov.1985@mail.ru

Information about the authors:

Safarov Ismoil I. (Doctor of Physics and Mathematics, Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: safarov54@mail.ru

Teshaev Mukhsin Kh. (Doctor of Physics and Mathematics, Bukhara Branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan). E-mail: muhsin_5@mail.ru

Negmatillaev Bakhadir (Candidate of Technical Sciences, Bukhara Institute of Engineering and Technology, Bukhara, Uzbekistan). E-mail: proins@mail.ru

Akhmedov Maksud Sh. (Doctor of Physics and Mathematics, Bukhara Institute of Engineering and Technology, Bukhara, Uzbekistan). E-mail: maqsud.axmedov.1985@mail.ru

Статья поступила в редакцию 28.05.2024; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 28.05.2024; accepted for publication 09.06.2025

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/95/14

Вязкое разрушение магниевого сплава Mg–3Al–1Zn при динамических нагрузках

Владимир Владимирович Скрипняк¹,

Наталья Владимировна Скрипняк²,

Олег Николаевич Загородкин³, Владимир Альбертович Скрипняк⁴

1, 2, 3, 4 Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ skrp2012@yandex.ru

² natali.skrp@mail.ru

³ still035@gmail.com

⁴ skrp2006@yandex.ru

Аннотация. Представлены результаты экспериментально-численного исследования механического отклика тонколистового проката сплава МА2-1 на динамическое продавливание и одноосное растяжение. Установлено, что при продавливании полусферическим индентором со скоростями от 10 до 0.1 м/с трещины формируются при меньших значениях эквивалентных пластических деформаций, чем при одноосном растяжении с аналогичными скоростями деформации. Полученные в расчетах процесса динамического продавливания пластин МА2-1 конфигурации трещин и прогибы пластин согласуются с наблюдаемыми в экспериментах.

Ключевые слова: динамическое испытание на продавливание, одноосное растяжение, магниевые сплавы, высокие скорости деформации, трехосность напряженного состояния

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-79-10103).

Для цитирования: Скрипняк В.В., Скрипняк Н.В., Загородкин О.Н., Скрипняк В.А. Вязкое разрушение магниевого сплава Mg–3Al–1Zn при динамических нагрузках // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 164–179. doi: 10.17223/19988621/95/14

Original article

Ductile fracture of Mg–3Al–1Zn alloy under dynamic loads

Vladimir V. Skripnyak¹, Nataliya V. Skripnyak²,

Oleg N. Zagorodkin³, Vladimir A. Skripnyak⁴

1, 2, 3, 4 Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ skrp2012@yandex.ru

² natali.skrp@mail.ru

³ still035@gmail.com

⁴ skrp2006@yandex.ru

Abstract. The evaluation of the physical and mechanical properties of materials at high strain rates plays a key role in improving the accuracy of predicting the stress–strain state of structures operating under extreme conditions. This paper presents the results of a comprehensive experimental and numerical study of the mechanical response of thin-sheet rolled products of Mg-3Al-1Zn alloy (MA2-1) to dynamic punching and uniaxial tension. Magnesium alloy samples were exposed to uniaxial tension at rates ranging from 0.1 to 1000 s⁻¹ and punching with a hemispherical indenter at velocities of 10, 5, 1, and 0.1 m/s. A numerical simulation of the experimental conditions was carried out to estimate the resistance to high-speed plastic deformation under uniaxial and biaxial tension and to determine the stress distribution in the Mg-3Al-1Zn alloy plate under the specified loading conditions. To describe the deformation, damage, and fracture of Mg-3Al-1Zn alloy, the computational model was based on the model of the mechanical behavior of the alloy with a hexagonal close-packed (HCP) crystal lattice and the model of damage initiation and growth. The simulation results confirmed that the fracture of the magnesium alloy was ductile under high-speed biaxial tension. It was found that cracks were formed during biaxial tension under conditions of punching by a hemispherical indenter at velocities from 10 to 0.1 m/s at lower values of equivalent plastic strains than during uniaxial tension at similar strain rates. The crack shapes and plate deflections obtained in the calculations of dynamic punching of the Mg-3Al-1Zn alloy plates using the model of damaged HCP materials were consistent with those observed in the experiments.

Keywords: dynamic punching test, uniaxial tension, magnesium alloys, high strain rates, stress triaxiality

Acknowledgments: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-79-10103).

For citation: Skripnyak, V.V., Skripnyak, N.V., Zagorodkin, O.N., Skripnyak, V.A. (2025) Ductile fracture of Mg–3Al–1Zn alloy under dynamic loads . *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 164–179. doi: 10.17223/19988621/95/14

Введение

Магниевого сплавы обладают низкой массовой плотностью, высокими удельными прочностными характеристиками, высокими механическими демпфирующими свойствами, электромагнитной экранирующей способностью, высокой теплопроводностью, что делает их перспективными конструкционными материалами, позволяющими существенно снизить вес конструкций [1, 2]. Применение магниевых сплавов обеспечивает снижение веса авиакосмических конструкций, улучшает маневренность летательных аппаратов и снижает стоимость запуска космических аппаратов [1]. Легкие и высокопрочные магниевые сплавы обладают высокой стабильностью и технологичностью, что делает их особенно ценными для промышленного производства технических конструктивных элементов, электронных изделий и биомедицинских имплантатов. В связи с высокой актуальностью расширенного использования магниевых сплавов в технике анализ их механического поведения и влияние микроструктуры на механические и коррозионные свойства находятся в центре современных исследований.

В связи с этим важной задачей является получение информации о механическом поведении конструкционных магниевых сплавов в широком диапазоне условий нагружения, включая динамические воздействия. Следует отметить, что магниевые сплавы относятся к изомеханической подгруппе сплавов с гексагональной плотноупакованной кристаллической решеткой (ГПУ), механическое поведение которых отличается от поведения других подгрупп ГПУ-сплавов [3]. Для повышения точности теоретических прогнозов, полученных с помощью численного моделирования механического поведения магниевых сплавов (деформации и разрушения) в условиях ударных воздействий, необходимо модифицировать определяющие уравнения и модели зарождения повреждений и разрушения [4, 5]. Одним из важных аспектов описания механического поведения деформируемых магниевых сплавов при высокоскоростной деформации изделий является прогнозирование локализации пластической деформации и развития повреждений. Исследования показали, что существенное влияние на условия разрушения магниевых сплавов при высокоскоростной деформации (штамповке) оказывают как эквивалентная скорость деформации, так и параметр трехосности напряженного состояния ($\eta = -p/\sigma_{eq}$, где p – давление, σ_{eq} – эквивалентное напряжение по Мизесу) [6].

Цель настоящей работы – исследование механического поведения тонколистового проката магниевого сплава Mg–3Al–1Zn при одноосном растяжении и динамическом продавливании с использованием полусферического индентора. Полученные в работе результаты экспериментально-теоретических исследований механического поведения магниевых сплавов при высоких скоростях деформации дополняют полученные ранее данные.

1. Экспериментальное исследование

Экспериментальные исследования проводились на образцах промышленного сплава Mg–3Al–1Zn, произведенного по ГОСТ 14957–76 со следующим химическим составом (мас. %): 93.7% Mg; 4.36% Al; 1.34% Zn; 0.39% Mn. Массовая плотность сплава составляла 1.79 г/см^3 , при квазистатических нагрузках при температуре 295 К сплав со средним размером зерна 40 мкм имел предел текучести $\sigma_{0.2} = 150 \text{ МПа}$, предел прочности на растяжение $UTS = 260\text{--}280 \text{ МПа}$, удлинение до разрушения $\delta \sim 5\text{--}12\%$.

Механические свойства сплава МА2-1 при температуре 295 К были следующими: модуль сдвига $\mu = 17 \text{ ГПа}$; модуль Юнга $E = 44.55 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.35$; предел текучести $\sigma_{0.2} = 150 \pm 5 \text{ МПа}$, предел прочности $\sigma_B = 250 \pm 10 \text{ МПа}$, коэффициент линейного термического расширения $26 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, удельная теплоемкость $C_p = 1088.5 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$; коэффициент Тейлора–Куинни $\approx 0.4\text{--}0.6$ [7].

Исследовался магниевый сплав с однородной поликристаллической структурой со средним размером равноосного зерна $\sim 40 \text{ мкм}$.

Для экспериментов на одноосное растяжение образцы вырезались электроэрозионным методом на станке с ЧПУ DK7732 (Taizhou Terui CNC Machine Co., Ltd, Тайчжоу, Китай) из прутка магниевого сплава Mg–3Al–1Zn, диаметр которого составлял 60 мм.

Размеры образцов составляли: толщина $1.1 \pm 0.01 \text{ мм}$; наименьшая ширина $6.0 \text{ мм} \pm 0.01 \text{ мм}$; начальная длина рабочей части $20.0 \pm 0.1 \text{ мм}$; минимальная площадь поперечного сечения плоских образцов $A_0 = 6.6 \pm 0.06 \text{ мм}^2$.

Для испытаний на двухосное растяжение при продавливании полусферическим индентором образцы изготавливались электроэрозионным методом резки перпендикулярно оси симметрии прутка диаметром 60 мм в состоянии поставки, что обеспечивало высокую геометрическую точность. Толщина образцов составляла 2.0 ± 0.01 мм.

Испытания одноосное растяжение и на двухосное растяжение при продавливании полусферическим индентором проводились при температуре 295 ± 5 К.

Испытания на одноосное растяжение проводились на сервогидравлическом испытательном стенде Instron VHS 40/50-20 в соответствии с ISO 26203-2:2011.

Смещения и растягивающее усилие регистрировались вплоть до разрушения с временным разрешением 0.0001 с. Было проведено по три испытания при каждой из скоростей деформации 10^3 , 10^2 и 0.1 с⁻¹. Высокая степень воспроизводимости значений сил, смещений и скорости деформации наблюдалась в каждой серии испытаний.

Экспериментальные исследования на двухосное растяжение при продавливании полусферическим индентором образцов магниевового сплава проводились в соответствии со стандартами ISO 8490-86 и ASTM E643-09, а также рекомендациями INSTRON. Для снижения коэффициента трения между образцом и индентором поверхности образцов полировались.

Испытания проводились при следующих фиксированных значениях скоростей индентирования: 0.1 ± 0.001 м/с, 1 ± 0.01 м/с, 5 ± 0.01 м/с и 10 ± 0.1 м/с. В ходе испытаний с высоким временным разрешением регистрировались изменения силы, действующей на индентор, а также максимальные перемещения в зоне контакта. Нагрузка регистрировалась сертифицированным динамическим датчиком Kistler.

Жесткость высокоскоростного сервогидравлического стенда Instron VHS 40/50-20 и система управления скоростью перемещения образца обеспечивали нагружение образцов с высокой степенью постоянства заданных скоростей индентирования. Скорости перемещения индентора регистрировались с временным разрешением 0.0001 с вплоть до разрушения образцов. В индентор устанавливался датчик усилий, а образец закреплялся в зажимном устройстве, перемещающемся с заданной скоростью. Между индентором и поверхностью образца использовалась смазка ИПФ ЭР-3 (ООО «Газпромнефть», Москва, Россия), которая значительно снижает трение при штамповке и обладает противозадирными свойствами. Для каждой скорости штамповки было проведено 5 испытаний.

2. Численное моделирование

Численное моделирование пластического течения и развития повреждений магниевового сплава Mg-3Al-1Zn при одноосном растяжении плоских образцов и динамическом продавливании пластин полусферическим индентором проводилось с использованием оригинального модуля UMAT в комплексе LS DYNA в ANSYS WB 19.2.

Приращение температуры в процессе пластического течения вследствие диссипации энергии определялось в адиабатическом приближении [3]

$$T = T_0 + \int_0^{\varepsilon_{eq}^p} (\beta / \rho C_p) \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq}^p, \quad (1)$$

где T_0 – начальная температура, $\beta \sim 0.47$ – коэффициент Тейлора–Куинни [7], а эквивалентное напряжение по Мизесу $\sigma_{eq} = [(3/2)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - 0.5\sigma_{kk}^2]^{1/2}$, σ_{ij} – компоненты тензора напряжения, ρ – массовая плотность, C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, $\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{(2/3)\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p}$ – эквивалентная пластическая деформация.

Напряжение течения сплава при развитии повреждений описывалось с использованием определяющего соотношения [8]:

$$(\sigma_{eq}^2/\sigma_s^2) + 2q_1 f^* \cosh[-q_2 p/(2\sigma_s)] - 1 - q_3(f^*)^2 = 0, \quad (2)$$

где σ_{eq} – эквивалентное напряжение Мизеса, σ_s – предел текучести, p – давление, q_1 , q_2 и q_3 – параметры модели, а f^* – параметр поврежденности материала.

Модификация уравнения состояния Зерилли–Армстронга для магниевых сплавов с ГПУ-решеткой для описания зависимости σ_s от скорости деформации, эквивалентной пластической деформации и температуры использовалась в форме (3) [9]:

$$\sigma_s = \sigma_{s0} + C_5 (\varepsilon_{eq}^p)^{n_1} + k_{hp} d_g^{-1/2} + C_2 \exp\{-C_3 T + C_4 T \ln(\varepsilon^*)\},$$

$$\varepsilon^* = \dot{\varepsilon}_{eq}^p / \dot{\varepsilon}_{eq0},$$

$$\dot{\varepsilon}_{eq}^p = [(2/3)\dot{\varepsilon}_{ij}^p\dot{\varepsilon}_{ij}^p]^{1/2}, \quad (3)$$

$$\dot{\varepsilon}_{eq0} = 1c^{-1},$$

где σ_{s0} , k_{hp} , n_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 – параметры материала, d_g – средний размер зерна, T – температура.

Параметры модели для сплава Mg–3Al–1Zn приведены в таблице.

Модельные коэффициенты сплава Mg–3Al–1Zn

Коэффициент для Mg–3Al–1Zn	σ_{s0} , МПа	k_{hp} , МПа мкм ^{1/2}	C_2 , МПа	C_3 , К ⁻¹	C_4 , К ⁻¹	C_5 , МПа	n_1
	141	157	65	0,0029	0,0007	405	0,5

В качестве критерия зарождения неустойчивости пластической деформации, приводящей к формированию макрополос локализации, использован критерий Консидере [10]

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon_{eq}^p} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial \dot{\varepsilon}_{eq}^p} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{eq}^p}{\partial \varepsilon_{eq}^p} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon_{eq}^p} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial f^*} \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon_{eq}^p} = \sigma_s, \quad (4)$$

где f^* – параметр поврежденности материала.

С учетом (1)–(3) при нагружении с постоянной скоростью деформации, при отсутствии повреждений в сплаве в начальном состоянии критерий (4) принимает вид (5):

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon_{eq}^p} = (1 - \frac{\partial \sigma_s}{\partial T} \frac{\beta}{\rho C_p}) \sigma_s. \quad (5)$$

С учетом экспериментальных данных [11, 12] для магниевых сплавов значения коэффициентов $\partial \sigma_s / \partial T \approx 0.4764$ МПа/К, $1 - \frac{\partial \sigma_s}{\partial T} \frac{\beta}{\rho C_p} \approx 0.775$.

Снижение сопротивления пластическому течению, вызванное нагревом в результате диссипации работы напряжений на пластических деформациях, оказывает

влияние на возникновение локализации пластического течения и последующий рост параметра поврежденности в материале. Приращение параметра поврежденности во времени, обусловленное зарождением повреждений $\dot{f}_{nuc}$, зависит от эквивалентной пластической деформации ϵ_{eq}^p и описывается с помощью нормального распределения. Скорость роста параметра поврежденности, связанная с увеличением размеров повреждений $\dot{f}_{growth}$, связана с объемными неупругими деформациями:

$$\begin{aligned}\dot{f} &= \dot{f}_{nuc} + \dot{f}_{growth}; \\ \dot{f}_{nuc} &= [f_N / (\sqrt{2\pi}s_N)] \exp\{-0.5[(\epsilon_{eq}^p - \epsilon_N) / s_N]^2\} \dot{\epsilon}_{eq}^p; \\ \dot{f}_{growth} &= (1 - f) \dot{\epsilon}_{kk}^p,\end{aligned}\quad (6)$$

где ϵ_N – средняя деформация зародышеобразования, s_N – стандартное отклонение, f_N – параметр материала.

Параметр поврежденности деформируемого сплава определяется как

$$\begin{aligned}f^* &= f \text{ if } f \leq f_c; \\ f^* &= f_c + (f_F - f_c) / (f_F - f_c) \text{ if } f > f_c,\end{aligned}\quad (7)$$

где f_c , $f_F = (q_1 + \sqrt{q_1^2 - q_3}) / q_3$, q_1 , q_2 и q_3 – константы модели.

Модель вязкого разрушения Гурсона–Твергаарда–Нидлемана (GTN) требует знания 9 параметров: трех параметров модели (q_1 , q_2 и q_3), начальной доли повреждений f_0 , трех параметров кинетики повреждаемости (ϵ_N , s_N и f_N), двух параметров разрушения (f_c и f_F) [8].

Параметры модели для магниевого сплава были получены в полуобратном численном моделировании одноосного испытания на растяжение: $q_1 = 1.5$; $q_2 = 1$; $q_3 = 1.0$; $f_0 = 0$; $f_N = 0.156$; $f_c = 0.112$; $f_F = 0.260$; $\epsilon_N = 0.1$; $s_N = 0.02$.

Заключительная стадия вязкого разрушения характеризуется объединением повреждений в зоне разрушения в трещину, что приводит к ускорению темпа роста параметра повреждений f^* вплоть до разрушения при достижении параметра повреждения значений f_F .

При моделировании одноосного растяжения плоских образцов использованы граничные условия (8), заданные на поверхностях, указанных на рис. 1, а. При моделировании продавливания пластин полусферическим индентором использованы граничные условия (9), заданные на поверхностях, указанных на рис. 1, б. Поверхность полусферического индентора обозначена S_1 . Неподвижные части поверхности образца между верхней и нижней опорными матрицами обозначены S_2 , S_3 и S_4 соответственно. Нижняя часть поверхности образца S_5 является свободной поверхностью, а изменяющаяся поверхность контакта между образцом и индентором обозначена как S_6 .

При одноосном растяжении образца при постоянной скорости деформации граничные условия имеют вид:

$$u_3|_{S_1} = V_0, \quad u_i|_{S_3} = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \sigma_{ij}|_{S_5} = 0; \quad \sigma_{ij}|_{S_2 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6} = 0, \quad (8)$$

где u_3 – компоненты вектора скорости частиц на поверхностях S_k , $k = 1 \dots 6$, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений.

При высокоскоростном продавливании плоского образца полусферическим индентором граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 u_3|_{S_1} &= V_0, \quad i=1, 2, 3; \quad u_i|_{S_3 \cup S_4} = 0, \quad i=1, 2, 3; \quad \sigma_{ij}|_{S_5} = 0; \quad \sigma_{ij}|_{S_2} \cap S_6 = 0; \\
 u_i^+|_{S_6} &= u_i^-|_{S_6}, \quad i=1, 2, 3; \quad p^+|_{S_6} = -p^-|_{S_6}, \quad i=1, 2, 3; \\
 \sigma_{ij}^+|_{S_6} &= \sigma_{ij}^-|_{S_6} = 0, \quad i \neq j,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где u_3 – компоненты вектора скорости частиц на поверхности S_k , $k = 1 \dots 6$, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, p – давление, V_0 – скорость жесткого штампа.

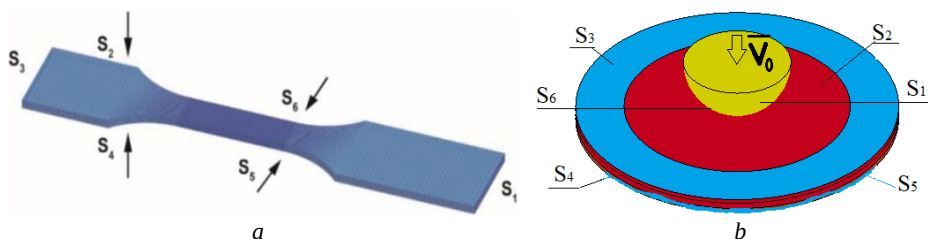


Рис. 1. Формулировка граничных условий: для одноосного растяжения (а); для продавливания полусферическим индентором (b)

Fig. 1. Formulation of boundary conditions for: (a) uniaxial tension and (b) pushing by a hemispherical indenter

Предполагалось, что в начальный момент времени материал образцов находился в однородном температурном поле в ненапряженном состоянии. Контактные условия взаимодействия индентора с образцом и зажимного устройства с образцом описывались с помощью модели, реализованной в карте `automatic_surface_to_surface` LS DYNA. Параметры коэффициента трения задавались $FS = 0.4$, а коэффициенты демпфирования $VDC = 30$, что обеспечивало отсутствие колебаний рассчитываемых усилий в зоне контакта. В расчетах использовалась конечно-разностная схема второго порядка точности с характерным размером шага пространственной сетки 0.3 мм. Для дискретизации расчетной области образца использовались трехмерные линейные лагранжевые гексагональные элементы ($\sim 200\,000$ элементов). Индентор и элементы зажимного устройства моделировались в виде жестких тел. Выбранный шаг пространственной сетки обеспечивал сходимость численных результатов моделирования.

3. Результаты и обсуждение

Полученные экспериментальные зависимости истинных напряжений от истинных деформаций при испытаниях плоских образцов сплава Mg–3Al–1Zn на одноосное растяжение показаны на рис. 2, а. На рис. 2, b дано сравнение экспериментальных диаграмм с расчетными диаграммами зависимостей истинных напряжений от истинных деформаций. Квадратными символами на рис. 2, b отмечены моменты потери устойчивости пластического течения в соответствии с критерием (5).

Полученные результаты свидетельствуют, что для сплава Mg–3Al–1Zn эквивалентные пластические деформации, при которых начинается накопление повреждений, близки к значениям возникновения неустойчивости пластического течения и снижаются с ростом скорости деформации растяжения от 0.1 до $1\,000\text{ с}^{-1}$.

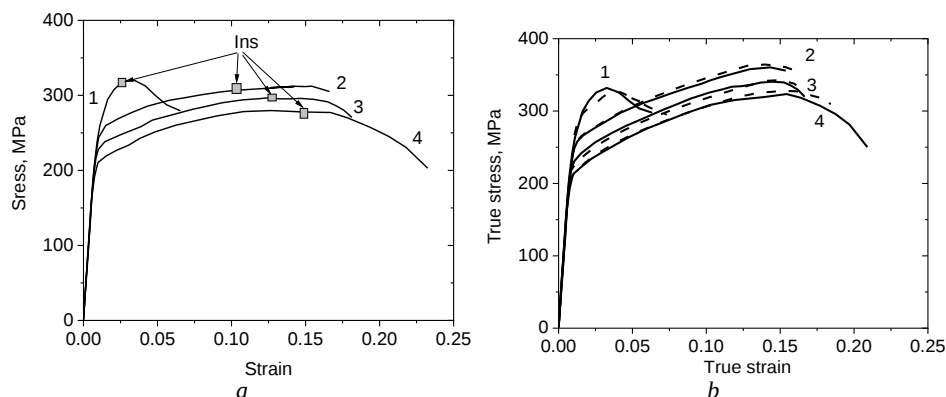


Рис. 2. Технические напряжения от условных деформаций сплава Mg-3Al-1Zn, линии 1, 2, 3, 4 соответствуют скоростям деформации 0.1, 10, 100, 1 000 с⁻¹ соответственно; прогнозы зарождения неустойчивости пластического течения показаны заполненными квадратными символами (а). Результаты численного моделирования показаны штрихпунктирными линиями, экспериментальные диаграммы – сплошными линиями (б)

Fig. 2. Engineering stress versus engineering strain of Mg-3Al-1Zn alloy: (a) curves 1, 2, 3, and 4 correspond to strain rates of 0.1, 10, 100, and 1000 s⁻¹, respectively, the filled squares indicate predictions of the onset of plastic flow instability; (b) the dashed curves are the numerical simulation results and the solid curves are the experimental results

Экспериментальные диаграммы усилий сопротивления продавливанию от прогиба пластины $F(u_3)$ для скоростей показаны на рис. 3. Закономерности зависимости силы продавливания от прогиба, показанные на рис. 3, сохраняются для всего исследованного диапазона скоростей продавливания.

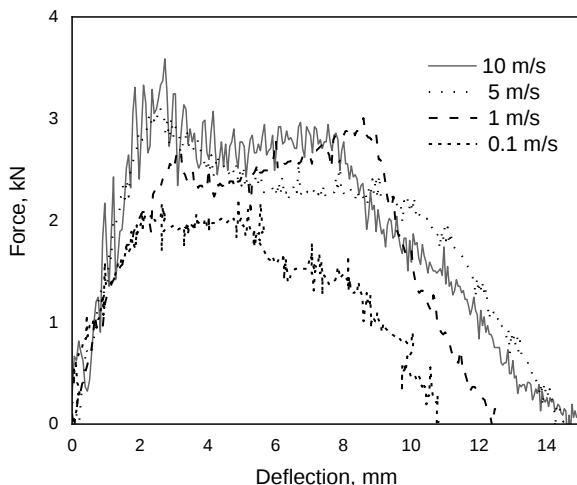


Рис. 3. Экспериментальные диаграммы $F(u_3)$ для сплава Mg-3Al-1Zn
Fig. 3. Experimental diagrams $F(u_3)$ for Mg-3Al-1Zn alloy

Полученные результаты свидетельствуют, что в рассмотренном диапазоне скоростей нагружения от 0.1 до 10 м/с в сплаве Mg-3Al-1Zn в условиях деформации

при продавливании реализуется вязкое разрушение. Образованию трещин предшествует существенная эквивалентная пластическая деформация.

Колебания сил продавливания, наблюдаемые на рис. 3, вызваны релаксацией касательных напряжений при зарождении локализованных микрополос сдвига при высоких скоростях деформации магниевого сплава. Скорости деформации увеличиваются с ростом скорости продавливания, что сопровождается ростом амплитуды колебаний. Следует отметить, что использование специальной смазки в зоне контакта поверхностей индентора и образца не только снижает силы трения, но и способствует увеличению прогиба образца до момента зарождения трещин.

На рис. 4 показаны фотографии образцов после продавливания полусферическим индентором со скоростями 10, 5, 1 и 0.1 м/с. Форма трещин в зоне вдавливания зависит от скорости продавливания и толщины образцов. При скорости продавливания 10 м/с у всех испытанных образцов сплава Mg–3Al–1Zn толщиной 2 мм образовались только радиальные трещины, что привело к раскрытию 4 фрагментов. Кольцевых трещин не наблюдалось. При более низких скоростях продавливания образовалось три радиальных трещины, что привело к раскрытию 3 фрагментов, как видно на рис. 4.

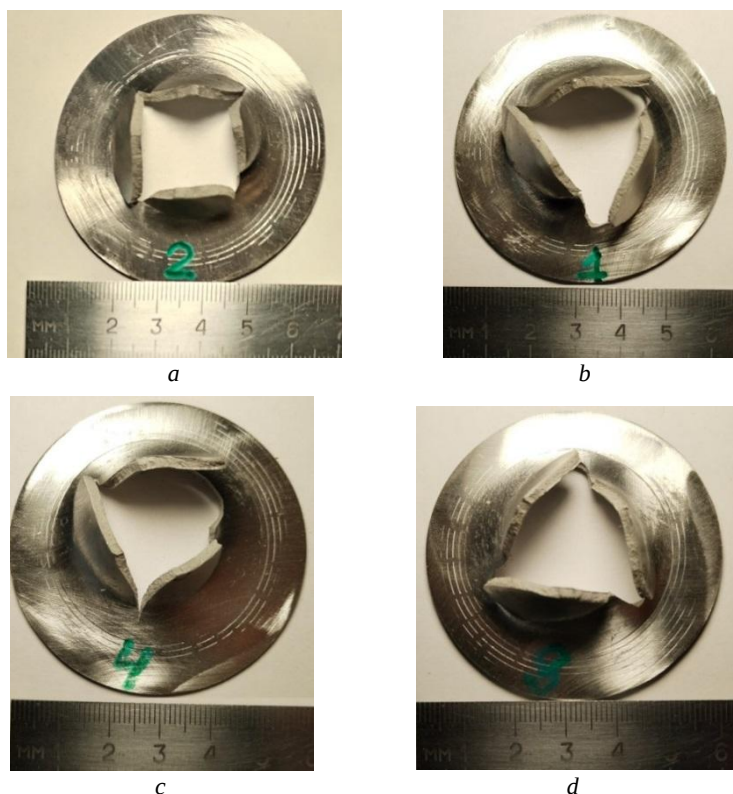


Рис. 4. Фотографии образцов после продавливания полусферическим индентором со скоростями: *a* – 10 м/с; *b* – 5 м/с; *c* – 1 м/с; *d* – 0,1 м/с

Fig. 4. Photographs of the samples after indentation with a hemispherical indenter at velocities of (a) 10, (b) 5, (c) 1, and (d) 0.1 m/s

Результаты численного моделирования условий высокоскоростного продавливания пластин сплава Mg–3Al–1Zn показали, что прочность при двухосном растяжении составляет 0.24 ГПа при скорости продавливания 10 м/с, а при скорости 0.1 м/с – 0.17 ГПа. Полученные оценки предела прочности сплава Mg–3Al–1Zn при динамическом продавливании согласуются с данными [1, 9, 10], полученными при одноосном растяжении. Значения предельных деформаций до разрушения при двухосном растяжении при продавливании оказались существенно ниже, чем при одноосном растяжении. Таким образом, для сплава Mg–3Al–1Zn в зоне разрушения образцов при двухосном растяжении при динамическом продавливании величина пластической деформации существенно ниже значений остаточного удлинения δ при одноосном растяжении при скоростях деформации 0.1, 10^2 и 10^3 с^{-1} и начальной температуре 295 К.

На рис. 5 показаны расчетные и экспериментальные зависимости силы от прогиба при скорости индентирования 10 м/с.

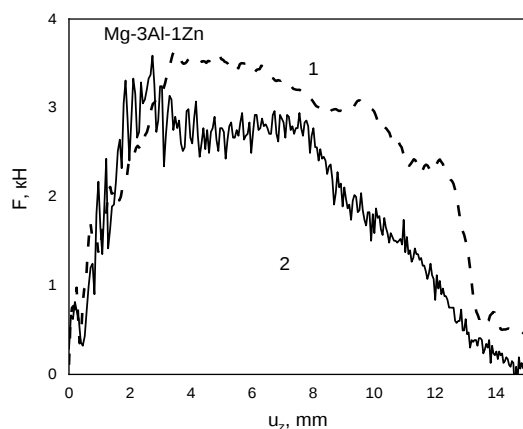


Рис. 5. Расчетные и экспериментальные зависимости силы от прогиба при скорости индентирования 10 м/с; 1 – расчет, 2 – эксперимент

Fig. 5. Calculated and experimental dependences of the force on deflection at an indentation velocity of 10 m/s; 1, calculation and 2, experiment

При динамическом продавливании до 10 м/с экспериментальные и расчетные зависимости усилия от прогиба имеют высокую корреляцию. Расчетное распределение эквивалентной пластической деформации в поперечном сечении деформированных образцов в момент времени 0.202 мс показано на рис. 6, а.

Результаты моделирования свидетельствуют, что при динамическом продавливании пластин магниевого сплава Mg–3Al–1Zn полусферическим индентором распределение эквивалентной пластической деформации неравномерно по толщине пластины. Максимальные значения эквивалентной пластической деформации достигаются при растяжении материала в приповерхностном слое на тыльной поверхности нагруженной пластины. Поэтому при продавливании трещины зарождаются именно с тыльной поверхности пластин, что приводит к образованию системы радиальных трещин с ростом деформации. Полученные результаты объясняют причины отсутствия кольцевых трещин и образования системы радиальных трещин при динамическом нагружении пластин магниевого сплава.

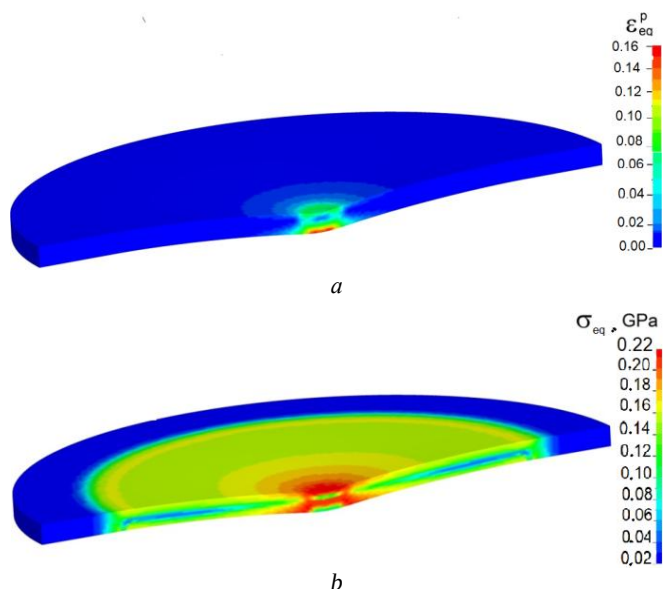


Рис. 6. Расчетное распределение эффективной пластической деформации в поперечном сечении образцов в момент времени 0.202 мс; скорость индентирования составляет 10 м/с (а). Расчетное распределение эквивалентных напряжений по Мизесу в поперечном сечении образцов сплава Mg–3Al–1Zn при продавливании за время 0.202 мс (b)

Fig. 6. (a) Calculated distribution of the effective plastic deformation in the cross section of the samples at a time instant of 0.202 ms with an indentation velocity of 10 m/s. (b) Calculated distribution of equivalent stresses according to von Mises in the cross section of the stamped samples made of Mg–3Al–1Zn alloy in a time of 0.202 ms

Рассчитанное распределение эквивалентного напряжения Мизеса в поперечном сечении образца сплава Mg–3Al–1Zn при продавливании в момент времени 0.202 мс показано на рис. 6, b. Расчетные распределения эквивалентных напряжений в сечении пластины при продавливании свидетельствуют, что вблизи срединной поверхности касательные напряжения существенно ниже, чем на контактных и тыльных свободных поверхностях пластины. Относительно низкое трение на контактных поверхностях, учитываемое в расчетной модели, не вносит существенных искажений в расчетные распределения эквивалентных напряжений по Мизесу и не вызывает изменений в характере зарождения трещин. Зарождения хрупких микротрещин не наблюдается. Эволюция эквивалентных напряжений и эквивалентных пластических деформаций соответствует вязкому характеру разрушения пластин из магниевого сплава в исследованном диапазоне скоростей продавливания до 10 м/с. Полученные результаты свидетельствуют о потенциальной возможности использования динамической штамповки для производства изделий из листового проката магниевого сплава Mg–3Al–1Zn.

На рис. 7 показано рассчитанное распределение эффективных скоростей деформации в поперечном сечении образцов сплава Mg–3Al–1Zn после продавливания со скоростью 10 м/с в моменты времени 0.202 мс (a) и 0,606 мс (b). Отметим, что полученная в расчетах конфигурация формирующихся трещин согласуется с экспериментальными результатами, показанными на рис. 4.

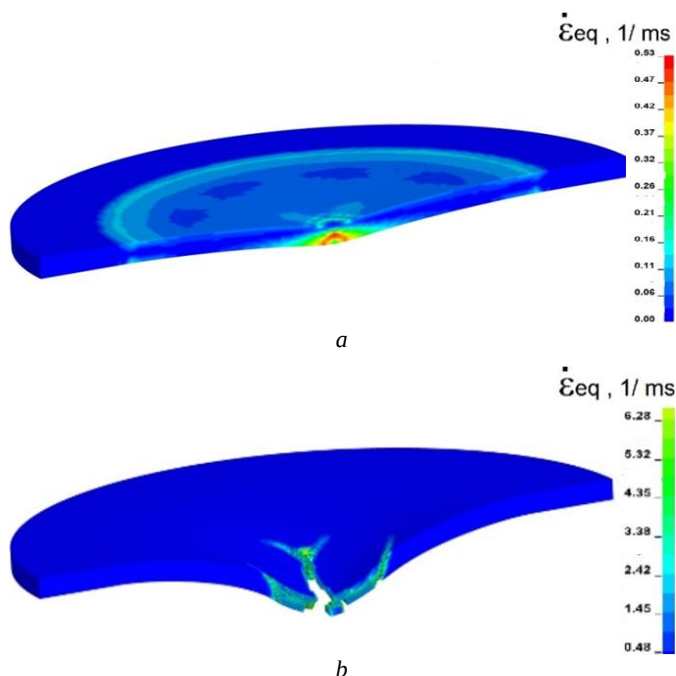


Рис. 7. Расчетное распределение эффективных скоростей деформации в поперечном сечении образцов сплава Mg-3Al-1Zn в момент времени 0,202 мс (а) и в момент времени 0,606 мс (б). Скорость индентирования составляет 10 м/с

Fig. 7. Calculated distribution of effective strain rates in the cross section of Mg-3Al-1Zn samples with an indentation velocity of 10 m/s at time instants of (a) 0.202 and (b) 0.606 ms

Скорость деформации в зоне пластической деформации при продавливании со скоростью 10 м/с изменяется в диапазоне от 100 до 530 с⁻¹. Скорость деформации в локальной зоне вблизи образования трещины может превышать эти значения до 6 300 с⁻¹. Таким образом, для повышения точности прогнозов механического поведения магниевого сплава Mg-3Al-1Zn (деформации, поврежденности и остаточных напряжений), получаемых в результате численного моделирования динамического продавливания пластин, необходимо использовать широкодиапазонные определяющие уравнения и кинетические модели повреждения и разрушения сплавов, учитывающие влияние параметров нагружения, таких как температура, скорость деформации, величина пластической деформации, параметр трехосности напряжений, а также структурных факторов, в том числе параметров зеренной структуры.

Расчетное распределение параметра трехосности напряженного состояния в поперечном сечении образцов сплава Mg-3Al-1Zn в момент времени 0.202 мс при скорости индентирования 10 м/с приведено на рис. 8, а. На рис. 8, б показана зависимость параметра трехосности напряжений от времени в центральной области на задней поверхности образца, где зарождаются радиальные трещины.

Полученные результаты численного моделирования высокоскоростного продавливания пластин сплава Mg-3Al-1Zn полусферическим индентором свидетельствуют, что материал пластины деформируется при напряженных состояниях, изменяющихся в объеме пластины в процессе деформации. Отметим, что на начальных

этапах прогиба пластины материал деформировался при отрицательных и положительных значениях параметра трехосности напряжений, что обусловлено состояниями растяжения и сжатия в слоях пластины при прогибе. Напряженное состояние изменяется при возникновении трещин, что приводит не только к изменению абсолютных значений параметра трехосности напряженного состояния, но и к изменению его знака, как показано на рис. 8, *b*.

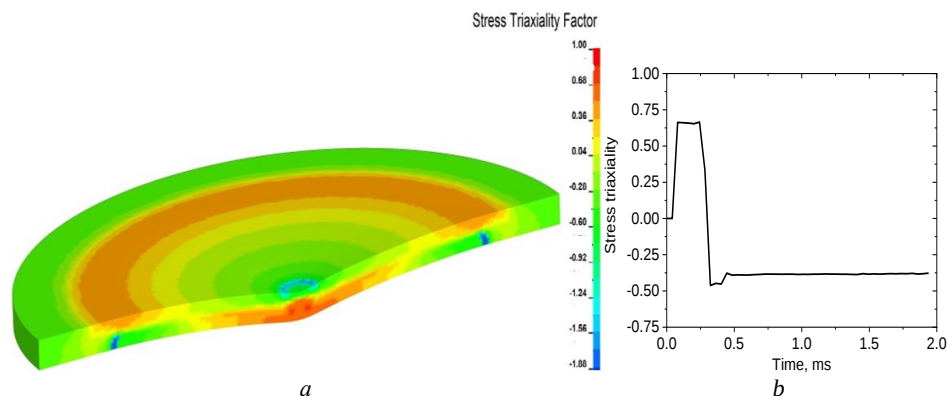


Рис. 8. Расчетное распределение коэффициента трехосности напряжений в поперечном сечении образца Mg-3Al-1Zn при индентировании в момент времени 0.202 мс (*a*). Зависимость от времени параметра трехосности напряжений в центральной точке на задней поверхности нагружаемого образца при скорости индентирования 10 м/с (*b*)

Fig. 8. (a) Calculated distribution of the stress triaxiality coefficient in the cross-section of the Mg-3Al-1Zn sample during indentation at a time instant of 0.202 ms. (b) Time dependence of the stress triaxiality parameter at the central point on the back surface of the loaded sample at an indentation velocity of 10 m/s

С увеличением скорости нагружения зарождение трещин происходит при меньших прогибах пластины. Поэтому результирующее влияние величины параметра трехосности напряжений на деформацию до разрушения уменьшается при увеличении скоростей деформации в условиях двухосного растяжения при динамическом продавливании.

Заключение

Проведено комплексное экспериментально-теоретическое исследование процессов деформации и разрушения магниевого сплава Mg-3Al-1Zn при одноосном растяжении образцов со скоростями деформации от 0.1 до 1 000 с⁻¹ и двухосном растяжении при продавливании полусферическим индентором со скоростями 0.1, 1, 5 и 10 м/с при комнатной температуре.

Полученные результаты свидетельствуют, что для сплава Mg-3Al-1Zn эквивалентные пластические деформации, при которых начинается накопление повреждений, близки к значениям возникновения неустойчивости пластического течения и снижаются с ростом скорости деформации растяжения от 0.1 до 1 000 с⁻¹.

Было показано, что для сплава Mg-3Al-1Zn в рассмотренном диапазоне скоростей нагружения от 0.1 до 10 м/с в процессе деформации при продавливании реализуется вязкое разрушение.

Полученные в данной работе результаты свидетельствуют, что для магниевого сплава Mg–3Al–1Zn при двухосном растяжении при продавливании в зоне разрушения образца величина пластической деформации значительно ниже значений остаточного удлинения до разрушения при одноосном растяжении со скоростями деформации 0.1, 10, 100 и 1000 с⁻¹ и начальной комнатной температурой.

Было показано, что эволюция эквивалентных напряжений и эквивалентных пластических деформаций соответствует вязкому характеру разрушения пластин из магниевого сплава в исследованном диапазоне скоростей продавливания.

Для магниевого сплава при двухосном растяжении при продавливании деформации до разрушения уменьшаются с ростом скорости деформации.

Полученные результаты численного моделирования высокоскоростного продавливания пластин сплава Mg–3Al–1Zn полусферическим индентором свидетельствуют, что материал пластины деформируется при напряженных состояниях, изменяющихся в объеме пластины в процессе деформации. Влияние на деформацию до разрушения параметра трехосности напряжения уменьшается при увеличении скоростей деформации.

Полученные результаты подтверждают потенциальную возможность использования динамической штамповки для производства изделий из листового проката магниевого сплава Mg–3Al–1Zn. Полученные в данной работе результаты могут быть использованы при разработке и для модификаций вычислительных моделей механического поведения конструкций из магниевого сплава, которые подвергаются пластическим деформациям при динамических воздействиях.

Список источников

1. Yang J., Zhu Z., Han S., Gu Y., Zhu Z., Zhang H.-D. Evolution, limitations, advantages, and future challenges of magnesium alloys as materials for aerospace applications // *Journal of Alloys and Compounds*. 2024. V. 1008. Art. 176707. doi: 10.1016/j.jallcom.2024.176707
2. Yang M., Chen C., Wang D., Shao Y., Zhou W., Shuai C., Yang Y., Ning X. Biomedical rare-earth magnesium alloy: Current status and future prospects // *Journal of Magnesium and Alloys*. 2024. V. 12. P. 1260–1282. doi: 10.1016/j.jma.2024.03.014
3. Skripnyak V.V., Skripnyak V.A. Hexagonal close-packed (hcp) alloys under dynamic impacts // *Journal of Applied Physics*. 2022. V. 131. Art. 165902. doi: 10.1063/5.0085338
4. Wang J., Yuan X., Jin P., Ma H., Shi B., Zheng H., Chen T., Xia W. Study on modified Johnson-Cook constitutive material model to predict the dynamic behavior Mg-1Al-4Y alloy // *Materials Research Express*. 2020. V. 7 (2). Art. 026522. doi: 10.1088/2053-1591/ab7070
5. Luan J., Sun C., Li X., Zhang Q. Constitutive model for AZ31 magnesium alloy based on isothermal compression test // *Materials Science and Technology*. 2014. V. 30 (2). P. 211–219. doi: 10.1179/1743284713Y.0000000341
6. Huang X., Hou J., Lin B., Li B., Jiang B. Deformation localization behavior research of AZ31 magnesium alloy under impact load // *Journal of Physics: Conference Series*. 2023. V. 2541. Art. 012054. doi: 10.1088/1742-6596/2541/1/012054
7. Ozdur N.A., Ermana S.C., Seghir R., Stainier L., Aydiner C.C. Thermomechanical investigation of textured magnesium in an effort to validate crystal plasticity simulations // *Procedia Structural Integrity*. 2024. V. 61. P. 277–284. doi: 10.1016/j.prostr.2024.06.035
8. Needleman A., Tvergaard V. Analyses of Plastic Flow Localization in Metals // *Applied Mechanics Reviews*. 1992. V. 45 (3S). P. S3–S18. doi: 10.1115/1.3121390
9. Zerilli F.J., Armstrong R.W. Constitutive equation for h.c.p. metals and high strength alloy steels // *High strain rate effects on polymer, metal and ceramic matrix composites and other advanced materials*. New York: ASME, 1995. V. 48. Art. 121

10. Yasnikov I.S., Vinogradov A., Estrin Y. Revisiting the Considère criterion from the viewpoint of dislocation theory fundamentals // *Scripta Materialia*. 2014. V. 76. P. 37–40. doi: 10.1016/j.scriptamat.2013.12.009
11. Lukas P., Trojanova Z. Effect of fabrication processing on the deformation behaviour of AZ31 magnesium alloys // *Kovove Materialy-Metallic Materials*. 2011. V. 49. P. 385–391. doi: 10.4149/km-2011-6-385
12. Скрипняк В.А., Скрипняк В.В., Козулин А.А., Иохим К.В. Влияние концентраторов напряжений на механическое поведение магниевого сплава при высокоскоростной деформации в температурном диапазоне от 295 К до 673 К // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2019. № 1. С. 151–160. doi: 10.15593/perm.mech/2019.1.13

References

1. Yang J., Zhu Z., Han S., Gu Y., Zhu Z., Zhang H.-D. (2024) Evolution, limitations, advantages, and future challenges of magnesium alloys as materials for aerospace applications. *Journal of Alloys and Compounds*. 1008. Article 176707. doi: 10.1016/j.jallcom.2024.176707
2. Yang M., Chen C., Wang D., Shao Y., Zhou W., Shuai C., Yang Y., Ning X. (2024) Biomedical rare-earth magnesium alloy: Current status and future prospects. *Journal of Magnesium and Alloys*. 12. pp. 1260–1282. doi: 10.1016/j.jma.2024.03.014
3. Skripnyak V.V., Skripnyak V.A. (2022) Hexagonal close-packed (hcp) alloys under dynamic impacts. *Journal of Applied Physics*. 131. Article 165902. doi: 10.1063/5.0085338
4. Wang J., Yuan X., Jin P., Ma H., Shi B., Zheng H., Chen T., Xia W. (2020) Study on modified Johnson-Cook constitutive material model to predict the dynamic behavior Mg-1Al-4Y alloy. *Materials Research Express*. 7(2). Article 026522. doi: 10.1088/2053-1591/ab7070
5. Luan J., Sun C., Li X., Zhang Q. (2014) Constitutive model for AZ31 magnesium alloy based on isothermal compression test. *Materials Science and Technology*. 30(2). pp. 211–219. doi: 10.1179/1743284713Y.0000000341
6. Huang X., Hou J., Lin B., Li B., Jiang B. (2023) Deformation localization behavior research of AZ31 magnesium alloy under impact load. *Journal of Physics: Conference Series*. 2541. Article 012054. doi: 10.1088/1742-6596/2541/1/012054
7. Ozdur N. A., Erman S. C., Seghir R., Stainier L., Aydin C.C. (2024) A thermomechanical investigation of textured magnesium in an effort to validate crystalplasticity simulations. *Procedia Structural Integrity*. 61. pp. 277–284. doi: 10.1016/j.prostr.2024.06.035
8. Needleman A., Tvergaard V. (1992) Analyses of plastic flow localization in metals. *Applied Mechanics Reviews*. 45(3S). S3–S18. doi: 10.1115/1.3121390
9. Zerilli F.J., Armstrong R.W. (1995) Constitutive equation for h.c.p. metals and high strength alloy steels. *High strain rate effects on polymer, metal and ceramic matrix composites and other advanced materials*. New York: ASME. 48. pp. 121–126.
10. Yasnikov I.S., Vinogradov A., Estrin Y. (2014) Revisiting the Considère criterion from the viewpoint of dislocation theory fundamentals. *Scripta Materialia*. 76. pp. 37–40. doi: 10.1016/j.scriptamat.2013.12.009
11. Lukas P., Trojanova Z. (2011) Effect of fabrication processing on the deformation behaviour of AZ31 magnesium alloys. *Kovove Materialy – Metallic Materials*. 49. pp. 385–391. doi: 10.4149/km-2011-6-385
12. Skripnyak V.A., Skripnyak V.V., Kozulin A.A., Iokhim K.V. (2019) Vliyanie kontsentratorov napryazheniy na mekhanicheskoe povedenie magnievogo splava pri vysokoskorostnoy deformatsii v temperaturnom diapazone ot 295 K do 673 K [The influence of stress concentrators on the magnesium alloy mechanical behavior under deformation at high strain rates in the temperature range from 295 to 673 K]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 1. pp. 151–160. doi: 10.15593/perm.mech/2019.1.13

Сведения об авторах:

Скрипняк Владимир Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: skrp2012@yandex.ru

Скрипняк Наталья Владимировна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Лаборатории свойств веществ в экстремальных состояниях Научного управления Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: natali.skrp@mail.ru

Загородкин Олег Николаевич – аспирант кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: still035@gmail.com

Скрипняк Владимир Альбертович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: skrp2006@yandex.ru

Information about the authors:

Skripnyak Vladimir V. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: skrp2012@yandex.ru

Skripnyak Nataliya V. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Laboratory for Properties of Substances in Extreme States, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: natali.skrp@mail.ru

Zagorodkin Oleg N. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: still035@gmail.com

Skripnyak Vladimir A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: skrp2006@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 03.03.2025; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 03.03.2025; accepted for publication 09.06.2025

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2025. № 95

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 25.06.2025 г. Формат 70×100¹/₁₆.
Печ. л. 11,25; усл. печ. л. 10,5. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 6367.

Дата выхода в свет 10.07.2025 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru