ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Математика и механика № 95
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 531.314.2, 531.395, 531.62, 531-1, 531.011
doi: 10.17223/19988621/95/7

Уравнения траектории неконсервативной натуральной системы

Виталий Викторович Войтик

Башкирский государственный медицинский университет, Уфа, Россия
vvvojtik@bashgmu.ru

Аннотация. Выводятся уравнения, определяющие траекторию неконсервативной натуральной системы в конфигурационном пространстве в нестационарных внешних полях. Предварительно доказывается теорема об изменении кинетической энергии системы. Для вывода используются уравнения Лагранжа. Полученные уравнения определяют производную касательного вектора по траектории в зависимости от данной точки и касательного вектора. Они допускают численное решение. С помощью уравнений траектории и равенства параметризации можно решать задачи динамики натуральной системы.
Ключевые слова: натуральная система, теорема об изменении кинетической энергии, конфигурационное пространство, метрический тензор, касательный вектор, траектория, переменные внешние поля

Для цитирования: Войтик В.В. Уравнения траектории неконсервативной натуральной системы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 72–80. doi: 10.17223/19988621/95/7

Original article

Trajectory equations for a non-conservative natural system

Vitaliy V. Voytik

Bashkir State Medical University, Ufa, Russian Federation
vvvojtik@bashgmu.ru

Abstract. In practice, it is often necessary to know the trajectory of motion of natural mechanical systems. At present, the trajectory equations in configuration space are well known only for some conservative systems. It is also important to derive equations for systems in non-stationary external fields. In this paper, we prove a theorem on the change in kinetic energy, which states that the rate of kinetic energy change depends both on external forces and on the rate of metric tensor change. This theorem can be expressed geometrically as a combination of the products of forces and changes in the metric tensor with tangent vectors. Generalized velocities and accelerations are similarly described in terms of the tangent vectors and their derivatives along the trajectory. Substitution of these expressions into the Lagrange equations results in trajectory equations corresponding to the degrees of freedom of the system. The left-hand side contains a covariant derivative of the tangent vector, and the right-hand side includes a cubic polynomial of the tangent vectors. These equations represent the geometric form of the Lagrange equations, which can be solved numerically using the fourth order Runge-Kutta method. Together with the trajectory parameterization, these equations provide a trajectory method for solving dynamics problems.

Keywords: natural system, kinetic energy change theorem, configuration space, metric tensor, tangent vector, trajectory, variable external fields

For citation: Voytik, V.V. (2025) Trajectory equations for a non-conservative natural system. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 72–80. doi: 10.17223/19988621/95/7

Введение

Механическое состояние натуральной системы, т.е. ее положение и состояние движения, в формулировке Лагранжа полностью определяется заданием ее начальных координат и начальных скоростей. Тогда решение уравнений движения Лагранжа приводит к установлению координат как функции времени. Но существует и геометрическая точка зрения на механическое движение. Другой, эквивалентный способ заключается в определении начальных координат системы в конфигурационном пространстве и касательного вектора к ее траектории. Тогда, зная кинетическую энергию системы как функцию координат и времени, можно определить траекторию и параметризовать ее, т.е. сопоставить каждый ее малый участок определенному моменту времени.

Если натуральная система является консервативной, то ее уравнения траектории в основном известны. В лучевой оптике они известны под названием уравнения эйконала [1. Уравнения (1.1.7), (1.1.15)]. Для материальной точки в постоянном внешнем немагнитном поле эти уравнения приведены в [2. Задача к п. 44; 3. П. 2.7]). С точки зрения дифференциальной геометрии они сводятся к обычному второму закону Ньютона, выраженному в проекции на вектор нормали к траектории. Уравнения траектории составляют существенную часть некоторых разделов физики. Например, в геометрической оптике [4] рассматриваются уравнения, описывающие поведение монохроматических лучей света. В электронной оптике [5. Гл. 3] рассматриваются уравнения Гринберга, описывающие теорию фокусировки пучка заряженных частиц в постоянных электрическом и магнитном полях. Геометрическое представление механики в пространстве конфигураций рассматривалось также в работах [6–16]. В [17] обсуждалась теорема о полноте векторных полей в римановых гильбертовых многообразиях для траекторий, ускоряемых зависящими от времени силами.

Цель статьи – установить уравнения, определяющие траекторию натуральной системы в конфигурационном пространстве в самом общем случае, т.е. для неконсервативных систем. Это позволит рассматривать такие системы не только известными методами Лагранжа, Гамильтона и Гамильтона–Якоби–Остроградского, но и с наглядной геометрической точки зрения. Поэтому уравнения, описывающие траекторию натуральной системы в переменных полях и с переменной энергией, являются важными и интересными. Помимо возможных далеко идущих теоретических следствий такие уравнения для натуральных систем из-за их широкой распространенности могут быть полезны для моделирования множества устройств, например электронно-оптического типа. Уравнения траектории могут также применяться в различных инженерных приложениях: от робототехники и аэрокосмических приложений до разработки алгоритмов оптимального управления и навигации.

1. Уравнения движения натуральной системы в форме Лагранжа

Лагранжиан натуральной системы, как известно [18; 19], представляет собой квадратичный полином по обобщенным скоростям $\dot{q}^\alpha$

$$L = \frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta + P_\alpha\dot{q}^\alpha - U. \tag{1.1}$$

Структурой функции Лагранжа (1.1) обладает обычная механическая система (например, деформируемое тело с моментом инерции $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}(q^1, q^2, \ldots, q^s, t)$ или точечная частица в римановом пространстве), обладающая потенциальной энергией $U = U\,(q^1, q^2, \ldots, q^s, t)$ и потенциальным импульсом $P_\alpha = P_\alpha(q^1, q^2, \ldots, q^s, t)$ (термин принадлежит Ч. Киттелю [20]) в некоторых электрическом и магнитном полях.

Импульс по координате q^γ равен

$$p_\gamma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\gamma} = \mu_{\gamma\beta}\dot{q}^\beta + P_\gamma\,. \tag{1.2}$$

Уравнения движения в форме Лагранжа для (1.1) имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\mu_{\gamma\beta}\dot{q}^\beta + P_\gamma\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial\mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta + \frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\gamma}\dot{q}^\alpha - \frac{\partial U}{\partial q^\gamma}\,. \tag{1.3}$$

Представим уравнения Лагранжа в решенной относительно ковариантных ускорений форме. Полная производная $d\mu_{\gamma\beta}/dt$ складывается из двух частей: изменения метрического тензора со временем в данной точке конфигурационного пространства и изменения в данный момент времени при переходе в другую точку:

$$\frac{d\mu_{\gamma\beta}}{dt} = \frac{\partial\mu_{\gamma\beta}}{\partial t} + \frac{\partial\mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha\,. \tag{1.4}$$

Справедлива также аналогичная формула

$$\frac{dP_\gamma}{dt} = \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial P_\gamma}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha\,. \tag{1.5}$$

Дифференцируя левую часть (1.3), учитывая (1.4), (1.5) и группируя слагаемые по степеням скорости получим, что

$$\begin{aligned}\mu_{\gamma\beta}\ddot{q}^\beta = &-\frac{\partial U}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial t} + \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial\mu_{\gamma\alpha}}{\partial t}\right)\dot{q}^\alpha + \\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mu_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial\mu_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial\mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta}\right)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Это и есть лагранжевские уравнения движения.

Учитывая равенство (1.2), энергия натуральной системы E как функция координат, скоростей и времени равна

$$E = p_\alpha \dot{q}^\alpha - L = \frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + U \ .$$

Отсюда кинетическая энергия T равна

$$T = \frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = E - U \ . \tag{1.7}$$

Кинетическую энергию натуральной системы как известную величину, стоящую в средней части равенства (1.7), можно также понимать и как уже известную функцию координат и времени $E - U$, которая стоит справа. Тогда, выражая из равенства (1.7) dt, получим

$$dt = \sqrt{\frac{\mu_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta}{2(E-U)}} = \frac{dq}{\sqrt{2(E-U)}} \ , \tag{1.8}$$

где $dq^2 = \mu_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta$ есть элемент длины между близкими точками в конфигурационном пространстве.

2. Постановка задачи

Искомые уравнения должны быть связаны с известными методами механики. Оказывается, что с точки зрения лагранжевской механики уравнения траектории представляют собой геометрическую форму уравнений Лагранжа.

Итак, пусть известны внешние поля: функции потенциальной энергии $U = U(q^1, q^2, \dots, q^s, t)$, потенциального импульса $P_\alpha = P_\alpha(q^1, q^2, \dots, q^s, t)$ и метрический тензор конфигурационного пространства $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}(q^1, q^2, \dots, q^s, t)$. Будем считать известной еще и общую энергию системы как функцию времени $E(t)$. Требуется установить уравнение вида:

$$\frac{d^2 q^\alpha}{dq^2} = f^\alpha\left(q^\beta, \frac{dq^\gamma}{dq}, t\right)$$

или эквивалентное ему.

Для этого необходимо в уравнениях Лагранжа (1.6) заменить все скорости $\dot{q}^\alpha$ и ускорения $\ddot{q}^\alpha$ соответственно на компоненты касательного вектора $\tau^\alpha = dq^\alpha/dq$ и компоненты $d\tau^\alpha/dq$. Проделаем это: заменим в обобщенных скоростях $\dot{q}^\beta$ и ускорениях $\ddot{q}^\beta$ переменную дифференцирования – время t – на длину кривой q согласно (1.8). Получим

$$\dot{q}^\beta = \frac{dq^\beta}{dq}\frac{dq}{dt} = \sqrt{2T}\ \tau^\beta \ , \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}^\beta &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dq^\beta}{dt}\right) = \sqrt{2T}\frac{d}{dq}\left(\sqrt{2T}\frac{dq^\beta}{dq}\right) = \\ &= 2T\frac{d\tau^\beta}{dq} + \frac{dT}{dq}\tau^\beta = 2T\frac{d\tau^\beta}{dq} + \frac{1}{\sqrt{2T}}\cdot\frac{dT}{dt}\tau^\beta. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Из равенства (2.2) видно, что только его и выражения (2.1) для вывода уравнения траектории недостаточно. Требуется еще знать, как изменяется кинетическая энергия со временем.

3. Скорость изменения кинетической энергии

Выясним, как связана скорость изменения кинетической энергии T натуральной системы с изменением внешних полей. Справедлива

Теорема (об изменении кинетической энергии натуральной системы). *Изменение кинетической энергии T натуральной системы как функции времени связано с внешними полями, действующими на нее, следующим равенством:*

$$\frac{dT}{dt}=\left(-\frac{\partial U}{\partial q^{\gamma}}-\frac{\partial P_{\gamma}}{\partial t}\right)\dot{q}^{\gamma}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\gamma}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Найдём полную производную кинетической энергии (1.7) по времени. Получим, что

$$\frac{dT}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d\mu_{\alpha\beta}}{dt}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}+\mu_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\ddot{q}^{\beta}.$$

Подставим в это равенство выражение (1.4) и уравнение движения (1.6) и сгруппируем члены по степеням скоростей:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt}&=\left(-\frac{\partial U}{\partial q^{\gamma}}-\frac{\partial P_{\gamma}}{\partial t}\right)\dot{q}^{\gamma}+\left(\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial q^{\gamma}}-\frac{\partial P_{\gamma}}{\partial q^{\alpha}}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t}\right)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\gamma}+\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{2\partial\mu_{\alpha\beta}}{\partial q^{\gamma}}-\frac{\partial\mu_{\gamma\beta}}{\partial q^{\alpha}}-\frac{\partial\mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^{\beta}}\right)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Во второй скобке (3.2) производные потенциального импульса антисимметричны по индексам α и γ и дают ноль при умножении на симметричную форму $\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\gamma}$. Поэтому их можно исключить из этой скобки. Скобку же третьего члена преобразуем следующим образом:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\partial\mu_{\alpha\beta}}{\partial q^{\gamma}}-\frac{\partial\mu_{\gamma\beta}}{\partial q^{\alpha}}-\frac{\partial\mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^{\beta}}\right)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mu_{\alpha\beta}}{\partial q^{\gamma}}-\frac{\partial\mu_{\gamma\beta}}{\partial q^{\alpha}}+\frac{\partial\mu_{\alpha\beta}}{\partial q^{\gamma}}-\frac{\partial\mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^{\beta}}\right)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}.$$

Отсюда видно, что первая разность производных является антисимметричной по индексам α и γ, а вторая разность производных антисимметрична по индексам β и γ. Поэтому результат умножения скобки на симметричную форму $\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}$ является нулем. Учитывая эти обстоятельства, правая часть (3.2) упрощается к правой части (3.1) ■.

Второй член в (3.1) можно было ожидать заранее, поскольку при увеличении момента инерции у вращающегося тела его кинетическая энергия уменьшается.

Теорему об изменении кинетической энергии натуральной системы (3.1) можно переписать в эквивалентной геометрической форме подставив в (3.1) равенства (2.1). Тогда получим

$$\frac{dT}{dt}=\sqrt{2T}\left(-\frac{\partial U}{\partial q^{\gamma}}-\frac{\partial P_{\gamma}}{\partial t}\right)\tau^{\gamma}-T\frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t}\tau^{\alpha}\tau^{\gamma}. \tag{3.3}$$

4. Уравнения Лагранжа в геометрической форме

Выведем уравнения траектории. Подставив в (2.2) равенство (3.3), получим, что обобщенные ускорения зависят от касательного вектора и вектора $d\tau^{\beta}/dq$ следующим образом:

$$\ddot{q}^{\beta} = 2T\frac{d\tau^{\beta}}{dq} + \left(-\frac{\partial U}{\partial q^{\gamma}} - \frac{\partial P_{\gamma}}{\partial t}\right)\tau^{\beta}\tau^{\gamma} - \frac{\sqrt{2T}}{2}\frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t}\tau^{\alpha}\tau^{\beta}\tau^{\gamma}. \qquad (4.1)$$

Подставим теперь в уравнение движения (1.6) равенства (2.1) и (4.1), где учтем, что $T = E - U$ и оставим в левой части получившегося равенства только член, пропорциональный $d\tau^{\beta}/dq$. После этого сгруппируем все члены в правой части по степеням касательного вектора. В результате получим

$$2(E-U)\mu_{\gamma\beta}\frac{d\tau^{\beta}}{dq} = -\frac{\partial U}{\partial q^{\gamma}} - \frac{\partial P_{\gamma}}{\partial t} + \sqrt{2(E-U)}\left(\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial q^{\gamma}} - \frac{\partial P_{\gamma}}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t}\right)\tau^{\alpha} +$$
$$+\left[(E-U)\left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^{\gamma}} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^{\beta}}\right) + \mu_{\gamma\beta}\left(\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q^{\alpha}}\right)\right]\tau^{\alpha}\tau^{\beta} + \qquad (4.2)$$
$$+\frac{\sqrt{2(E-U)}}{2}\mu_{\gamma\beta}\frac{\partial \mu_{\varepsilon\alpha}}{\partial t}\tau^{\alpha}\tau^{\beta}\tau^{\varepsilon}.$$

Эти равенства и есть искомые общие уравнения траектории натуральной системы в конфигурационном пространстве с метрическим тензором $\mu_{\alpha\beta}$. Количество этих уравнений равно числу степеней свободы натуральной системы.

Обсуждение

Легко видеть, что для случая материальной точки единичной массы в постоянном немагнитном поле ($\partial P_{\gamma}/\partial t = 0$, $\partial P_{\alpha}/\partial q^{\gamma} = 0$) полученные уравнения траектории в декартовой системе координат ($\mu_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$) совпадают с [2. Задача к п. 44; 3. П. 2.7]. В качестве еще одной проверки (4.2) умножим обе части этого уравнения на вектор τ^{γ}. После умножения и выполнения очевидных преобразований левая часть получившегося равенства примет вид:

$$2(E-U)\,\mu_{\gamma\beta}\tau^{\gamma}\frac{d\tau^{\beta}}{dq} = (E-U)\left[\frac{d\left(\mu_{\gamma\beta}\tau^{\gamma}\tau^{\beta}\right)}{dq} - \tau^{\gamma}\tau^{\beta}\frac{d\mu_{\gamma\beta}}{dq}\right] = -(E-U)\frac{d\mu_{\gamma\beta}}{dq}\tau^{\beta}\tau^{\gamma} =$$
$$= -(E-U)\left(\frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^{\alpha}}\tau^{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{2(E-U)}}\frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial t}\right)\tau^{\beta}\tau^{\gamma} =$$
$$= -(E-U)\frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^{\alpha}}\tau^{\alpha}\tau^{\beta}\tau^{\gamma} - \frac{\sqrt{2(E-U)}}{2}\frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial t}\tau^{\gamma}\tau^{\beta}.$$

Правая же часть равна

$$-\frac{\partial U}{\partial q^{\gamma}}\tau^{\gamma} - \frac{\partial P_{\gamma}}{\partial t}\tau^{\gamma} + \sqrt{2(E-U)}\left(\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial q^{\gamma}} - \frac{\partial P_{\gamma}}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t}\right)\tau^{\alpha}\tau^{\gamma} +$$
$$+\left[(E-U)\left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^{\gamma}} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^{\beta}}\right) + \mu_{\gamma\beta}\left(\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q^{\alpha}}\right)\right]\tau^{\alpha}\tau^{\beta}\tau^{\gamma} +$$
$$+\frac{\sqrt{2(E-U)}}{2}\mu_{\gamma\varepsilon}\frac{\partial \mu_{\beta\alpha}}{\partial t}\tau^{\alpha}\tau^{\beta}\tau^{\varepsilon}\tau^{\gamma} =$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial q^{\gamma}}\tau^{\gamma} - \frac{\partial P_{\gamma}}{\partial t}\tau^{\gamma} - \sqrt{2(E-U)}\,\frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t}\tau^{\alpha}\tau^{\gamma} + (E-U)\left(\frac{\partial \mu_{\alpha\beta}}{\partial q^{\gamma}} - \frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial q^{\beta}}\right)\tau^{\alpha}\tau^{\beta}\tau^{\gamma} +$$

$$+\left(\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q^{\alpha}}\right)\tau^{\alpha} + \frac{\sqrt{2(E-U)}}{2}\,\frac{\partial \mu_{\beta\alpha}}{\partial t}\tau^{\alpha}\tau^{\beta} =$$

$$= -(E-U)\,\frac{\partial \mu_{\gamma\beta}}{\partial q^{\alpha}}\tau^{\alpha}\tau^{\beta}\tau^{\gamma} - \frac{\sqrt{2(E-U)}}{2}\,\frac{\partial \mu_{\gamma\alpha}}{\partial t}\tau^{\alpha}\tau^{\gamma}.$$

Получаем тождество, как это и должно быть. Другими словами, уравнения (4.2) математически непротиворечивы.

Геометрические свойства траектории в конфигурационном пространстве есть, согласно (4.2), следствие переменных внешних воздействий. Эти уравнения не чисто геометрические, поскольку поля U, P_{α}, $\mu_{\alpha\beta}$ зависят от времени. Такие уравнения называются неавтономными [21]. Несмотря на то, что эти уравнения в неявной форме включают в себя время, это не исключает их из области дифференциальной геометрии. Наоборот, такая временна́я зависимость дополняет геометрические свойства натуральных систем разного рода нелинейными эффектами. В качестве примера существования переменной времени в геометрических уравнениях можно упомянуть уравнение геодезической в кривом пространстве-времени, которое включает в себя неявно время [22].

Уравнения для траектории (4.2) имеют сложный вид. Очень вероятно, что для аналитического решения этих уравнений потребуются сложные методы дифференциальной геометрии и анализа. Решение дифференциального уравнения (4.2), описывающего изменение касательного вектора, зависит от начальных условий, внешних полей и свойств самой натуральной системы (метрического тензора конфигурационного пространства $\mu_{\alpha\beta}$). Начальными условиями являются начальный касательный вектор $\boldsymbol{\tau}_0$, начальные координаты q_0 и начальный момент времени t_0. Численным методом, который может быть использован для нахождения решения, является популярный и точный метод Рунге–Кутты 4-го порядка (RK4).

Если внешние поля достаточно плавно и медленно изменяются в пространстве и времени, то можно ожидать, что решение существует и является единственным в некоторой окрестности начального положения системы. Если же это условие не выполняется (т.е. возникают сингулярности или особенности), то в таких случаях могут потребоваться специальные методы для обеспечения стабильности и точности решения.

Заключение

В данной статье была выяснена общая лагранжевская формулировка (3.1) и геометрическая траекторная формулировка (3.3) известной теоремы об изменении кинетической энергии (например, [18; 19]) для натуральных систем. Применив ее к уравнениям Лагранжа, были выведены уравнения траектории натуральной системы (4.2), движущейся под действием переменных внешних полей. Уравнения траектории вместе с равенством (1.8) образуют новый, траекторный метод решения задач динамики. Тем самым геометрический взгляд на нестационарные механические процессы обоснован.

Остается открытым вопрос о том, как же связаны уравнения траектории с принципом экстремального действия в форме Якоби. Эта задача является темой одной из следующих статей.

Список источников

1. *Holm D.D.* Geometric Mechanics. World Scientific, 2008. Pt. I: Dynamics and Symmetry.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. М.: Физматлит, 2004. Т. 1: Механика.
3. *Biro T.S.* Variational Principles in Physics from Classical to Quantum Realm. Springer, 2023. doi: 10.1007/978-3-031-27876-1
4. *Слюсарев Г.Г.* Геометрическая оптика. М.: ЛЕНАНД, 2019.
5. *Кельман В.М., Явор С.Я.* Электронная оптика. Л.: Наука, 1968.
6. *Синдж Дж.Л.* Тензорные методы в динамике. М.: Иностр. лит., 1947.
7. *Синг Дж.Л.* Классическая динамика. М.: Физматгиз, 1963.
8. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
9. *DiBenedetto E.* Classical Mechanics. Theory and Mathematical Modeling. New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2011. doi: 10.1007/978-0-8176-4648-6 (Cornerstones).
10. *Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T.* Manifolds, Tensor Analysis, and Applications. New York: Springer Science + Business Media, LLC, 1988. doi: 10.1007/978-1-4612-1029-0 (Applied Mathematical Sciences; v. 75).
11. *Lam K.S.* Fundamental principles of classical mechanics: a geometrical perspective. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2014. doi: 10.1142/8947
12. *Bullo F., Lewis A.* Geometric Control of Mechanical Systems. Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems. New York: Springer Science + Business Media, 2005. doi: 10.1007/978-1-4899-7276-7 (Texts in Applied Mathematics).
13. *Holm D.D., Schmah T., Stoica C., Ellis D.C.P.* Geometric Mechanics and Symmetry: From Finite to Infinite Dimensions. Oxford: Oxford University Press, 2009. doi: 10.1093/oso/9780199212903.001.0001
14. *Lewis A.* The physical foundations of geometric mechanics // Journal of Geometric Mechanics. 2017. V. 9, is. 4. P. 487–574. doi: 10.3934/jgm.2017019
15. *Oliva W.M.* Geometric Mechanics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2002. (Lectures Notes in Mathematics; 1798).
16. *Talman R.* Geometric Mechanics. Toward a Unification of Classical Physics. Wiley VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2007.
17. *Candela A.M., Romero A., Sánchez M.* Completeness of the Trajectories of Particles Coupled to a General Force Field // Arch. Rational Mech. Anal. 2013. V. 208. P. 255–274. doi: 10.1007/s00205-012-0596-2
18. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. 2-е изд., испр. М.: Наука, 1966.
19. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика : учебник для университетов. М.: ЧеРо, 1999.
20. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978.
21. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2012.
22. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. М.: Наука, 2003. Т. 2: Теория поля.

References

1. Holm D.D. (2008) *Geometric Mechanics. Part I: Dynamics and Symmetry*. World Scientific.
2. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1976) *Theoretical Physics. Volume 1. Mechanics.* Oxford, Butterworth-Heinemann, Elsevier Ltd.
3. Biro T.S. (2023) *Variational Principles in Physics from Classical to Quantum Realm*. Springer. doi: 10.1007/978-3-031-27876-1
4. Slyusarev G.G. (2019) *Geometricheskaya optika* [Geometric optics]. Moscow: LENAND.
5. Kel'man V.M., Yavor S.Ya. (1968) *Elektronnaya optika* [Electron optics]. Leningrad: Nauka.

6. Synge J.L. (1936) *Tensorial Methods in Dynamics*. In: Applied Mathematics Series. 2. University of Toronto.
7. Synge J.L. (1960) *Classical Dynamics*. In: Flügge S. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Berlin–Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-45943-6_1
8. Arnold V.I. (1989) *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. In: Graduate Texts in Mathematics. 60. Springer-Verlag.
9. DiBenedetto E. (2011) *Classical Mechanics. Theory and Mathematical Modeling* (In series "Cornerstones"). Springer Science+Business Media, LLC. doi: 10.1007/978-0-8176-4648-6
10. Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T. (1988) *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. In: series Applied Mathematical Sciences. 75. New York: Springer Science+Business Media, LLC. doi: 10.1007/978-1-4612-1029-0
11. Lam K.S. (2014) *Fundamental Principles of Classical Mechanics: A Geometrical Perspective*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. doi: 10.1142/8947
12. Bullo F., Lewis A. (2005) *Geometric Control of Mechanical Systems. Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems.* In: Texts in Applied Mathematics. New York: Springer Science+Business Media. doi: 10.1007/978-1-4899-7276-7
13. Holm D.D., Schmah T., Stoica C., Ellis D.C.P. (2009) *Geometric Mechanics and Symmetry: From Finite to Infinite Dimensions.* Oxford. doi: 10.1093/oso/9780199212903.001.0001
14. Lewis A. (2017) The physical foundations of geometric mechanics. *Journal of Geometric Mechanics.* 9(4). pp. 487–574. doi: 10.3934/jgm.2017019
15. Oliva W.M. (2002) *Geometric Mechanics.* In: Lectures Notes in Mathematics. 1798. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag.
16. Talman R. (2007) *Geometric Mechanics. Toward a Unification of Classical Physics*. WILEY VCH Verlag GmbH and Co. KGaA.
17. Candela A.M., Romero A., Sánchez M. (2013) Completeness of the trajectories of particles coupled to a general force field. *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* 208. pp. 255–274. doi: 10.1007/s00205-012-0596-2
18. Gantmakher F.R. (1975) *Lektsii po analiticheskoy mekhanike* [Lectures on analytical mechanics]. Moscow: Mir.
19. Markeev A.P. (1999) *Teoreticheskaya mekhanika: Uchebnik dlya universitetov* [Theoretical mechanics: textbook for universities]. Moscow: CheRo.
20. Kittel Ch. (2005) *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons Inc., Appendix G.
21. Arnold V.I. (1992) *Ordinary Differential Equations*. Berlin–Heidelberg: Springer.
22. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1975) *Theoretical Physics. Volume 2. The Classical Theory of Fields*. Oxford: Butterworth-Heinemann, Reed Educational and Professional Publishing Ltd.

***Сведения об авторе*:**
Войтик Виталий Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры медицинской физики и информатики Башкирского государственного медицинского университета (Уфа, Россия). E-mail: vvvojtik@bashgmu.ru

***Information about the author*:**
Voytik Vitaliy V. (Candidate of Physics and Mathematics, Bashkir State Medical University, Ufa, Russian Federation). E-mail: vvvojtik@bashgmu.ru

Статья поступила в редакцию 01.10.2024; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 01.10.2024; accepted for publication 09.06.2025