

Научная статья

УДК 532.5.013.4

doi: 10.17223/19988621/95/9

Изменение области гидродинамической устойчивости в зависимости от параметра термовязкости

Надир Эрикович Муртазин¹, Регина Димовна Муртазина²,
Айгуль Айратовна Мухутдинова³, Аделина Димовна Низамова⁴

¹ Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

² Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

^{3, 4} Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра
Российской академии наук, Уфа, Россия

¹ nadir.murtazing@gmail.com

² reginaufa@yandex.ru

³ mukhutdinova23@ya.ru

⁴ adeshka@yandex.ru

Аннотация. Изучается поток несжимаемой жидкости в плоском канале, характеризующийся заданным температурным полем и перепадом давления. Полученные результаты показывают, что неоднородность температурного поля существенно влияет на устойчивость потока. Обнаружено, что при определенных значениях температурного поля поток становится неустойчивым, что может привести к турбулизации, а также то, что нейтральные кривые для случая неизотермического течения отличаются от нейтральных кривых для случая изотермического течения. Исследованы влияния параметра зависимости вязкости жидкости от температурного поля на критические характеристики потока.

Ключевые слова: критические параметры течения, нейтральные кривые, динамика возмущений поперечных скоростей

Благодарности: Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

Для цитирования: Муртазин Н.Э., Муртазина Р.Д., Мухутдинова А.А., Низамова А.Д. Изменение области гидродинамической устойчивости в зависимости от параметра термовязкости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 97–107. doi: 10.17223/19988621/95/9

Original article

Variation in the region of hydrodynamic stability depending on a thermoviscosity parameter

Nadir E. Murtazin¹, Regina D. Murtazina²,
Aygul' A. Mukhutdinova³, Adelina D. Nizamova⁴

¹ Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russian Federation

² Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation

^{3,4} *Mavlyutov Institute of Mechanics of the Ufa Federal Research Center
of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation*

¹ *nadir.murtazing@gmail.com*

² *reginaufa@yandex.ru*

³ *mukhutdinova23@ya.ru*

⁴ *adeshka@yandex.ru*

Abstract. This paper considers an incompressible fluid flow in a flat channel with a non-uniform temperature field under the pressure drop. The diagrams of the increase in the intensity of disturbances for the first eigenvalue and the decay of disturbances for the second eigenvalue are plotted. Neutral curves are presented for the flow of the fluids with constant viscosity and fluids with a linear dependence of viscosity. The critical flow parameters are shown as functions of the thermoviscosity parameter.

The obtained results show that with increasing thermoviscosity parameter, the critical Reynolds number decreases, and the region of unstable regimes expands. In this case, the critical wave number increases and always exceeds that for the isothermal fluid flow. At very small thermoviscosity parameters, the critical wave and Reynolds numbers for the thermoviscous fluid flow and isothermal fluid flow coincide.

Thus, when determining the conditions for the laminar-to-turbulent transition of the flow regime, it is necessary to take into account the dependence of the viscosity on temperature. The shape of this dependence does not have a significant effect on the critical Reynolds numbers. In this case, the important factor is the non-uniform temperature distribution over the channel cross-section and the corresponding distribution of the fluid viscosity.

Keywords: critical flow parameters, neutral curves, dynamics of transverse velocity perturbations

Acknowledgments: This study was supported by the state budget funds within the state assignment 124030400064-2 (theme No. FMRS-2024-0001).

For citation: Murtazin, N.E., Murtazina, R.D., Mukhutdinova, A.A., Nizamova, A.D. (2025) Variation in the region of hydrodynamic stability depending on a thermoviscosity parameter. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 97–107. doi: 10.17223/19988621/95/9

Введение

Ламинарный и турбулентный режимы течения могут быть предпочтительными в зависимости от конкретного технологического процесса. Ламинарный режим повышает энергосбережение, в то время как турбулентный обеспечивает эффективный тепло- и массообмен. При увеличении скорости потока могут возникать возмущения, приводящие к вторичному нелинейному режиму или турбулизации.

Выполненные ранее исследования гидродинамической устойчивости [1–5] не учитывают неоднородность температурного поля. Однако многие жидкости обладают значительной зависимостью вязкости от температуры [6], что может существенно влиять на область устойчивости ламинарного течения, особенно при наличии температурных перепадов. Устойчивость также играет важную роль при изучении несмешивающихся вытеснений, таких как вытеснение воды нефтью, нефти газом или водой при постоянном перепаде давления в ячейках Хеле–Шоу [7, 8].

Зависимость вязкости жидкостей от температуры обычно имеет экспоненциальный характер. Однако при небольших значениях перепада температуры эту зави-

симось можно считать линейной, что вызывает особый интерес в вопросе гидродинамической устойчивости. В настоящей работе изучается поток несжимаемой жидкости в плоском канале, характеризующийся заданными температурным полем и перепадом давления. Представлены собственные значения и графики, показывающие динамику возмущений поперечных скоростей для двух собственных значений. Работа отличается от предыдущих исследований тем, что в ней учитывается неоднородность температурного поля и изучается влияние этой неоднородности на устойчивость потока. Кроме того, построены области режимов течения, ограниченные нейтральными кривыми для случая неизотермического течения, что является новым подходом в данной области исследований.

Постановка задачи

Изучается поток несжимаемой жидкости в плоском канале, в котором верхняя стенка подвергается нагреву, для возможности пренебрежения явлением конвекции. В данном случае предполагаем, что вязкость жидкости изменяется в зависимости от температуры согласно виду, который представлен на рис. 1, с помощью некоторого параметра $\alpha_L < 0.5$.

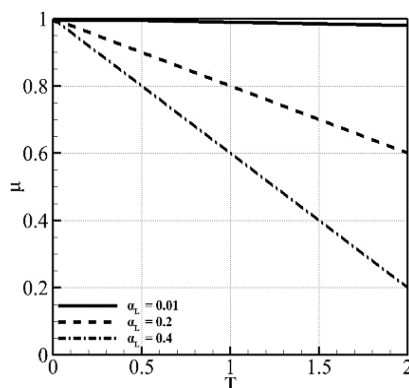


Рис. 1. Вязкость жидкости
Fig. 1. Fluid viscosity

Распределения полей температуры $T = 1 + y$, вязкости и скоростей представлены на рис. 2, где y – ширина канала. На рис. 2, с приведены эпюры продольной скорости u (слева направо): 1) при максимальной вязкости, соответствующей минимальному значению температуры; 2) при зависимости вязкости от линейного распределения температуры по сечению канала; 3) при минимальной вязкости, соответствующей максимальному значению температуры при $\alpha_L = 0.4$ (см. рис. 1). В первом и третьем случаях эпюры соответствуют пуазейлевскому симметричному относительно средней линии канала профилю. Это означает, что профиль скорости потока в этих случаях имеет максимум в центре канала и симметричен относительно средней линии. При этом во втором случае профиль несимметричен, а его максимум смещен к верхней стенке канала, на которой задано большее значение температуры. Это означает, что в этом случае профиль скорости потока имеет максимум не в центре канала, а ближе к верхней стенке, и несимметричен

относительно средней линии. Все величины в рассмотренных случаях записаны в безразмерном виде, что позволяет проводить сравнительный анализ и использовать полученные результаты для решения практических задач.

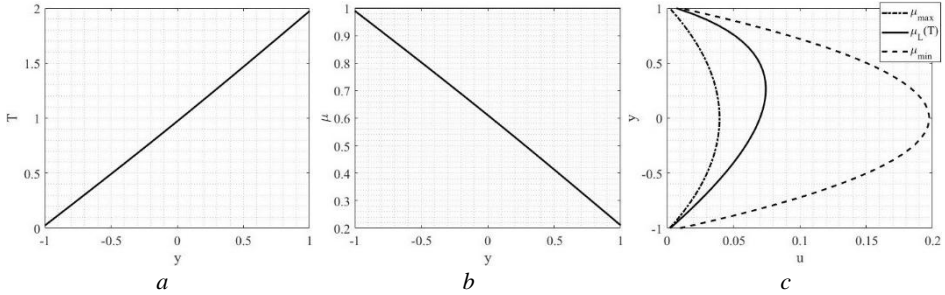


Рис. 2. Распределения полей температуры (a), вязкости (b) и скоростей (c)
Fig. 2. (a) Temperature, (b) viscosity, and (c) velocity fields

В работе [9] был проведен подробный вывод уравнения для описания процесса смены режима течения жидкости. В настоящей работе также используется это уравнение. Задача об устойчивости течения жидкости рассматривается при условии малости пульсаций температурного поля по сравнению с пульсациями полей давления и компонент вектора скорости.

Таким образом, в задаче предполагается, что температурное поле меняется медленнее, чем давление и скорость потока, и его влияние на устойчивость потока незначительно. Это позволяет упростить уравнение для описания процесса смены режима течения жидкости и использовать его для проведения анализа устойчивости потока в различных условиях.

Уравнение имеет следующий вид:

$$\mu \cdot [\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi] - ik \operatorname{Re} [(u - c) \cdot (\varphi'' - k^2\varphi) - u''\varphi] + 2\mu' \cdot (\varphi''' - k^2\varphi') + \mu'' (\varphi'' + k^2\varphi) = 0,$$

со следующими условиями:

$$\varphi(-1) = 0, \quad \varphi'(-1) = 0, \quad \varphi(1) = 0, \quad \varphi'(1) = 0,$$

где μ – вязкость жидкости; k – волновые числа; c – скорость распространения возмущений (собственное значение); $\varphi = \varphi(y)$ – амплитуды возмущений поперечных скоростей (собственная функция); Re – число Рейнольдса.

Методика решения

Для анализа устойчивости потоков жидкостей часто применяют методы спектрального разложения, которые позволяют найти множество собственных значений и соответствующих им собственных функций [10]. Различные характеристики потока с экспоненциальной зависимостью вязкости жидкости представлены в работе [11]. В этой работе использовался аналогичный метод решения задачи. Было показано, что спектральный метод эффективен для решения задач, связанных с анализом устойчивости потоков жидкостей, и позволяет получить высокую точность вычислений.

Для проверки корректности работы программного кода был проведен ряд тестов. В частности, в случае малых значений параметра α_L были получены результаты, качественно схожие со случаем изотермического течения. То есть используемый метод работает корректно и может быть применен для решения задач, связанных с анализом устойчивости потоков жидкостей.

Для оценки точности вычислений, полученных с помощью используемого спектрального метода, был рассмотрен следующий пример с известными точными решениями:

$$y'' = -cy,$$

$$y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0.$$

Этот пример позволяет оценить относительную погрешность вычислений и проверить, насколько хорошо метод работает при решении задач, связанных с дифференциальными уравнениями.

На рис. 3 представлены графики относительной погрешности вычислений δ , которая показывает, насколько отличается полученное значение от точного решения в логарифмической шкале.

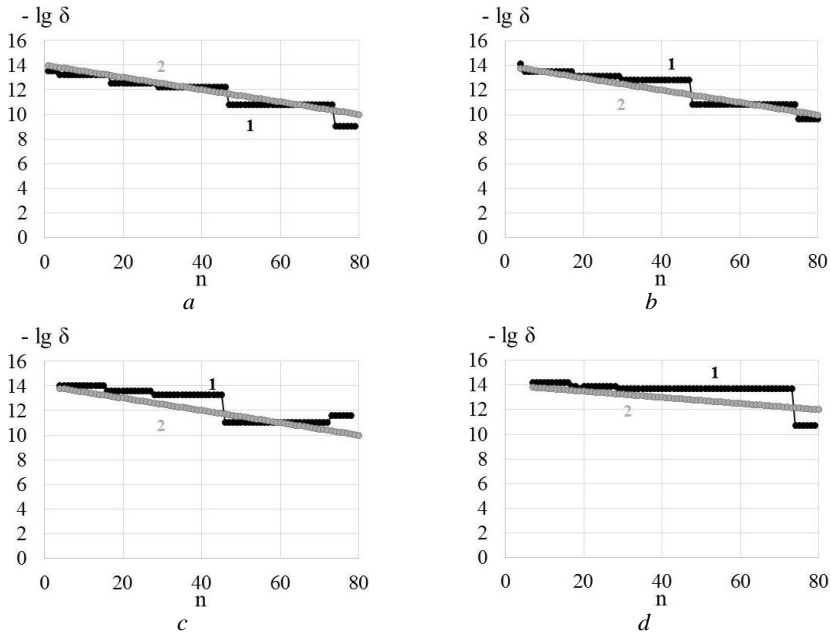


Рис. 3. Графики относительной погрешности вычислений δ : 1 – численный метод; 2 – приближение для: $c_n = 1$ (a); $c_n = 4$ (b); $c_n = 9$ (c); $c_n = 16$ (d)

Fig. 3. Diagrams of relative calculation error δ : 1, numerical method and 2, approximation at: $c_n =$ (a) 1; (b) 4; (c) 9; and (d) 16

В процессе выполнения множества вычислений было определено, что при превышении определенного значения параметра n результаты начинают изменяться и отличаются от точного решения, а точность вычисления ухудшается.

Кроме того, необходимо учесть не только взаимное влияние компонент разложения, но и ошибки округления и накопления погрешностей. Прямые линии (2) на

графиках получены эмпирически и характеризуют уменьшение погрешности вычислений.

В ходе проведенных вычислений была получена высокая точность результатов, что подтверждает эффективность используемого спектрального метода. Было показано, что относительная погрешность вычислений не превышает заданного уровня точности, т.е. метод может быть успешно применен для решения задач, связанных с анализом устойчивости потоков жидкостей.

Таким образом, в нашей работе используется эффективный спектральный метод для анализа устойчивости потоков жидкостей. Метод был проверен, его эффективность подтверждена.

Результаты исследования

В таблице представлены результаты исследования – десять собственных значений с наибольшей мнимой частью. Видно, что одно из представленных собственных значений имеет мнимую часть, большую нуля, т.е. поток при заданных параметрах не является устойчивым.

Собственные значения s для параметра $\alpha_L = 0.2$

$0.155671660372163 + 0.000954176990010i$
$0.610961696862313 - 0.024744542965387i$
$0.611485955842666 - 0.024965971464412i$
$0.186806686887322 - 0.034650615946688i$
$0.590866234915675 - 0.044525721499001i$
$0.591547260285365 - 0.044817086756817i$
$0.570772756937466 - 0.064304853311070i$
$0.571583868148145 - 0.064658639749481i$
$0.550672847094971 - 0.084079905105507i$
$0.551600364994774 - 0.084494932767070i$

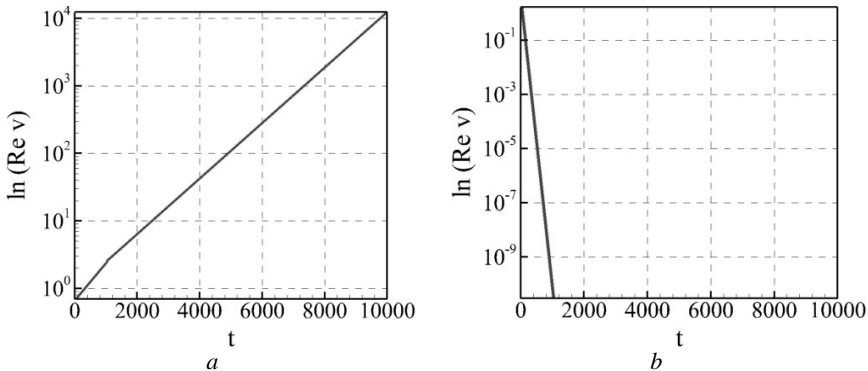


Рис. 4. Динамика возмущений поперечных скоростей:

для неустойчивого (a) и для устойчивого (b) собственных значений

Fig. 4. Dynamics of transverse velocity perturbations for: (a) unstable and (b) stable eigenvalues

На рис. 4 показана динамика возмущений поперечных скоростей для собственных значений с положительной мнимой частью (a) и с отрицательной мнимой частью (b). Как видно из рисунка, интенсивность возмущений для собственного

значения с отрицательной мнимой частью увеличивается со временем, в то время как для собственного значения с положительной мнимой частью – уменьшается. То есть поток жидкости не является устойчивым при заданных параметрах, и возмущения, соответствующие собственному значению с мнимой частью, большей нуля, будут затухать со временем.

Таким образом, спектральный метод является эффективным инструментом для анализа устойчивости потоков жидкостей. Результаты, представленные в таблице, показывают, что поток жидкости может быть неустойчив при определенных значениях параметров и что спектральный метод позволяет определить собственные значения и соответствующие им возмущения поперечных скоростей. Это важно для практических приложений, таких как разработка систем теплообмена и промышленных конденсаторов.

Границы области неустойчивости потока жидкости являются важным аспектом при разработке систем теплообмена и промышленных конденсаторов. Нейтральные кривые, которые представлены на рис. 5, позволяют определить эти границы для потока.

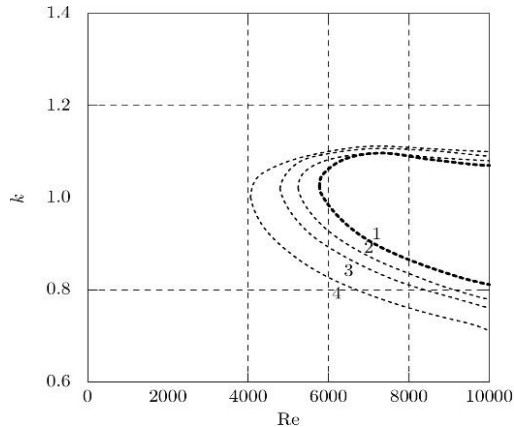


Рис. 5. Области режимов течения: изотермическое течение (1); для параметров $\alpha_L = 0.05$ (2); $\alpha_L = 0.1$ (3); $\alpha_L = 0.2$ (4)

Fig. 5. Areas of flow modes: (1) isothermal flow and the flow at $\alpha_L =$ (2) 0.05; (3) 0.1; and (4) 0.2

Нейтральная кривая – это такая кривая, на которой отмечены все вещественные собственные значения. То есть изменение вязкости влияет на устойчивость потока и может привести к его неустойчивости.

Отметим, что с увеличением параметра α_L область неустойчивости расширяется и всегда включает в себя область неустойчивости потока с постоянной вязкостью. Это означает, что изменение вязкости влияет на устойчивость потока и может привести к его неустойчивости. Кроме того, при проектировании систем теплообмена и промышленных конденсаторов необходимо учитывать изменение вязкости жидкости и выбирать такие параметры, при которых поток будет устойчивым.

Результаты свидетельствуют, что критическое число Рейнольдса подвержено изменению в зависимости от параметра α_L термовязкости. Это означает, что изменение вязкости жидкости в зависимости от температуры влияет на устойчивость потока и может привести к его неустойчивости. Из рис. 6 видно, что с увеличением

значений параметра α_L критическое число Рейнольдса уменьшается, что приводит к неустойчивости потока. Это подтверждает необходимость учета температурной зависимости вязкости при анализе устойчивости потоков жидкостей.

На рис. 7 демонстрируется изменение критического волнового числа в зависимости от параметра α_L . Из графика видно, что с ростом значений параметра α_L критическое волновое число также увеличивается и всегда превышает критическое волновое число для изотермического потока жидкости. Таким образом, изменение вязкости жидкости влияет на волновые характеристики потока и может привести к его неустойчивости.

Обобщенный график зависимости критических параметров течения от параметра α_L представлен на рис. 8.

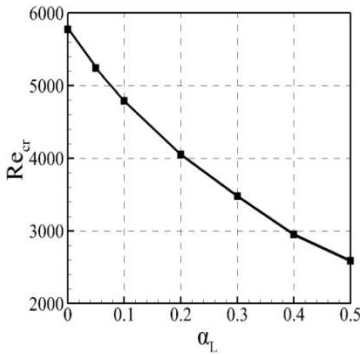


Рис. 6. Зависимость критического Re от α_L

Fig. 6. Critical Re as a function of α_L

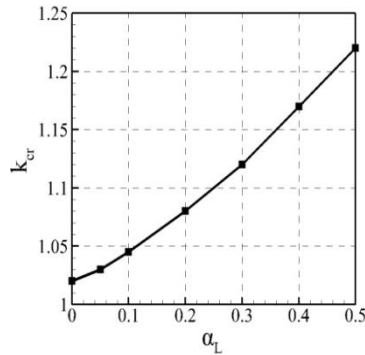


Рис. 7. Зависимость критического параметра k от α_L

Fig. 7. Critical parameter k as a function of α_L

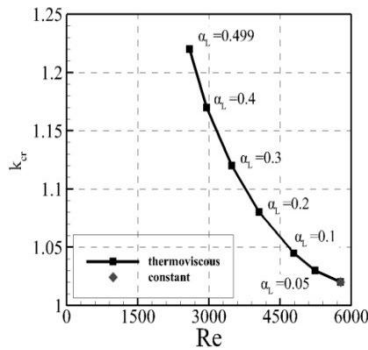


Рис. 8. Зависимости критических параметров для различных значений α_L

Fig. 8. Dependences of the critical parameters at various α_L

Таким образом, проведенный анализ показывает, что температурная зависимость вязкости играет важную роль в определении критических параметров течения. При анализе устойчивости потоков жидкостей необходимо учитывать влияние параметра α_L на критические значения потока. Для более точного анализа необходимо проводить дополнительные исследования, учитывающие другие факторы, такие как турбулентность, влияние поверхностных свойств канала и т.д.

Стоит отметить, что в дальнейших исследованиях планируется выполнить экспериментальные исследования для сопоставления полученных результатов с численными на основе экспериментальной установки, реализованной авторами настоящей работы [12]. В настоящее время установка имеет форму кольцевого канала, но может быть модифицирована для других форм каналов. Параметр α_L может быть подобран для различных жидкостей теплоносителей и в зависимости от заданного диапазона температуры. Это важно для практических приложений, таких как разработка систем теплообмена и промышленных конденсаторов.

Заключение

Полученные результаты показывают, что неоднородность температурного поля существенно влияет на устойчивость потока. Обнаружено, что при определенных значениях температурного поля поток становится неустойчивым, и это может привести к турбулизации, а также то, что нейтральные кривые для случая неизотермического течения отличаются от нейтральных кривых для случая изотермического течения.

Выполненные исследования имеют важное практическое значение для разработки систем теплообмена и промышленных конденсаторов. Они позволяют понять, как неоднородность температурного поля влияет на устойчивость потока и как это влияние можно учитывать при проектировании систем теплообмена. Полученные результаты также могут быть использованы для оптимизации режимов работы существующих систем теплообмена, чтобы повысить их эффективность и снизить энергозатраты.

В заключение стоит отметить, что выполненная работа представляет собой фундаментальное исследование влияния неоднородности температурного поля на устойчивость потока жидкости. Наши результаты имеют важное практическое значение для разработки систем теплообмена и промышленных конденсаторов, а также будут полезны для инженеров и исследователей, работающих в этой области.

Список источников

1. *Drazin P.G.* Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
2. *Petukhov B.S.* Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // *Advances in Heat Transfer*. 1970. V. 6. P. 503–564. doi: 10.1016/S0065-2717(08)70153-9
3. *Orszag S.A.* Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // *J. of Fluid Mech.* 1971. V. 50. P. 689–703. doi: 10.1017/S0022112071002842
4. *Шкаликов А.А.* Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2003. Т. 3. С. 89–112. URL: <http://mi.mathnet.ru/cmfd17>
5. *Скорыходов С.Л., Кузьмина Н.П.* Аналитико-численный метод решения задачи типа Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в океане // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2018. Т. 58, № 6. С. 1022–1039. doi: 10.7868/S0044466918060133
6. *Урманчеев С.Ф., Киреев В.Н.* Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // *Доклады академии наук*. 2004. Т. 396, № 2. С. 204–207. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17352428>
7. *Рахимов А.А., Валиев А.А.* Особенности экспериментального изучения устойчивого и неустойчивого вытеснения в ячейке Хеле–Шоу, заполненной стеклянными шариками //

- Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 140–157. doi: 10.17223/19988621/77/11
8. Рахимов А.А., Валиев А.А. Экспериментальное изучение влияния ультразвука на движение стеклянных шариков в ячейках Хеле–Шоу // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 117–132. doi: 10.17223/19988621/80/11
 9. Киреев В.Н., Низамова А.Д., Урманчиев С.Ф. Некоторые особенности гидродинамической неустойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 3. С. 454–459. doi: 10.1134/S003282351903007X
 10. Melenk J.M., Kirchner N.P., Schwab C. Spectral Galerkin discretization for hydrodynamic stability problems // Computing. 2000. V. 65. P. 97–118. doi: 10.1007/s006070070014
 11. Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmanceev S.F. Features of laminar-turbulent transition for the coolant flow in a plane heat-exchanger channel // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. P. 2211–2215. doi: 10.1134/S1995080221090249
 12. Мухутдинова А.А., Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф. Экспериментальная установка для исследования устойчивости течения жидкости // Многофазные системы. 2024. Т. 19, № 1. С. 35–39. doi: 10.21662/mfs2024.1.005

References

1. Drazin P.G. (2002) *Introduction to Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.
2. Petukhov B.S. (1970) Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties. *Advances in Heat Transfer*. 6. pp. 503–564. doi: 10.1016/S0065-2717(08)70153-9
3. Orszag S.A. (1971) Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation. *Journal of Fluid Mechanics*. 50. pp. 689–703. doi: 10.1017/S0022112071002842
4. Shkalikov A.A. (2004) Spectral portraits of the Orr–Sommerfeld operator for large Reynolds numbers. *Journal of Mathematical Sciences*. 124(6). pp. 5417–5441. doi: 10.1023/B:JOTH.0000047362.09147.c7
5. Skorohodov S.L., Kuzmina N.P. (2018) Analytical-numerical method for solving an Orr-Sommerfeld-type problem for analysis of instability of ocean currents. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 58(6). pp. 976–992. doi: 10.7868/S0044466918060133
6. Urmanceev S.F., Kireev V.N. (2004) Steady flow of a fluid with an anomalous temperature dependence of viscosity. *Doklady Physics*. 49(5). pp. 328–331. doi: 10.1134/1.1763627
7. Rakhimov A.A., Valiev A.A. (2022) Osobennosti eksperimental'nogo izucheniya ustoychivogo i neustoychivogo vytesneniya v yacheyke Khele-Shou, zapolnennoy steklyannymi sharikami [Features of an experimental study of the stable and unstable displacement in the Hele-Shaw cell filled with glass balls]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 140–157. doi: 10.17223/19988621/77/11
8. Rakhimov A.A., Valiev A.A. (2022) Eksperimental'noe izuchenie vliyaniya ul'trazvuka na dvizhenie steklyannykh sharikov v yacheykakh Khele-Shou [An experimental study of the ultrasound effect on the motion of glass spherules in Hele-Shaw cells]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 117–132. doi: 10.17223/19988621/80/11
9. Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmanceev S.F. (2019) Some features of the hydrodynamic instability of the flow of a thermally viscous fluid in a flat channel. *Fluid Dynamics*. 54. pp. 978–982. doi: 10.1134/S003282351903007X
10. Melenk J.M., Kirchner N.P., Schwab C. (2000) Spectral Galerkin discretization for hydrodynamic stability problems. *Computing*. 65. pp. 97–118. doi: 10.1007/s006070070014
11. Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmanceev S.F. (2021) Features of laminar-turbulent transition for the coolant flow in a plane heat-exchanger channel. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 42. pp. 2211–2215. doi: 10.1134/S1995080221090249

12. Mukhutdinova A.A., Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. (2024) Experimental setup for researching the stability of fluid flow. *Multiphase Systems*. 19(1). pp. 35–39. doi: 10.21662/mfs2024.1.005

Сведения об авторах:

Муртазин Надир Эрикович – студент Уфимского государственного нефтяного технического университета (Уфа, Россия). E-mail: nadir.murtazing@gmail.com

Муртазина Регина Димовна – кандидат физико-математических наук, доцент Уфимского университета науки и технологий (Уфа, Россия). E-mail: reginaufa@yandex.ru

Мухутдинова Айгуль Айратовна – аспирант, младший научный сотрудник Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра Российской академии наук (Уфа, Россия). E-mail: mukhutdinova23@ya.ru

Низамова Аделина Димовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра Российской академии наук (Уфа, Россия). E-mail: adeshka@yandex.ru

Information about the authors:

Murtazin Nadir E. (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russian Federation). E-mail: nadir.murtazing@gmail.com

Murtazina Regina D. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation). E-mail: reginaufa@yandex.ru

Mukhutdinova Aygul' A. (Junior Researcher, Mavlyutov Institute of Mechanics of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation). E-mail: mukhutdinova23@ya.ru

Nizamova Adelina D. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Mavlyutov Institute of Mechanics of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation). E-mail: adeshka@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 27.04.2024; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 27.04.2024; accepted for publication 09.06.2025