

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2014

№ 4(30)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

Глазунов А.А., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Гулько С.П., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Лазарева Е.Г., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь по разделу математики); Александров И.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Биматов В.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бубенчиков А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Васенин И.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Гришин А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Ищенко А.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Крайнов А.Ю., д-р физ.-мат. наук; Крылов П.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Панько С.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Пергаменщиков С.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Сипачёва О.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Скрипняк В.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Старченко А.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Г.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Щербаков Н.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Хайруллина В.Ю. (отв. секретарь по разделу механики).

**THE EDITORIAL BOARD OF TOMSK STATE UNIVERSITY JOURNAL
OF MATHEMATICS AND MECHANICS**

Glazunov A.A., Dokt. of Phys. and Math., Prof. (Editor-in-Chief); Gul'ko S.P., Dokt. of Phys. and Math., Prof. (Deputy Editor-in-Chief); Lazareva E.G., Cand. of Phys. and Math., Assoc. Prof. (Executive Secretary under section Mathematics); Aleksandrov I.A., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Bertsun V.N., Cand. of Phys. and Math., Assoc. Prof.; Bimatov V.I., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Bubenchikov A.M., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Vasenin I.M., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Grishin A.M., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Ishchenko A.N., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Konev V.V., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Kraynov A.Yu., Dokt. of Phys. and Math.; Krylov P.A., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Pan'ko S.V., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Pergamenschikov S.M., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Sipacheva O.V., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Skripnyak V.A., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Starchenko A.V., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Shrager G.R., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Shrager E.R., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Shcherbakov N.R., Dokt. of Phys. and Math., Prof.; Khayrullina V.Yu., Cand. of Phys. and Math. (Executive Secretary under section Mechanics).

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 17.08.2014.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 8,71. Уч.-изд. л. 9,75. Тираж 300 экз. Заказ № 34.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ 545.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Богданова Р.А. Группа движений симплицальной плоскости как решение функционального уравнения.....	5
Губин В.Н., Пестов Г.Г. Об одном классе резервируемых устройств.....	14
Сорокин К.С. SP -группы с чистыми кольцами эндоморфизмов.....	24
Талиев А.А. Затыгивание потери устойчивости для сингулярно возмущенных уравнений с непрерывными правыми частями.....	36
Титова А.В. Линейные гомеоморфизмы топологических почти модулей непрерывных функций и совпадение размерностей.....	43
Чистяков Д.С. Абелевы группы с UA -кольцом эндоморфизмов и их однородные отображения.....	49

МЕХАНИКА

Бервено Е.В., Калинин А.А., Лаевский Ю.М. Фильтрация двухфазной жидкости в неоднородной среде на компьютерах с распределенной памятью.....	57
Бубенчиков М.А., Потееаев А.И., Бубенчиков А.М., Клыков И.И., Маслов А.С., Овчаренко В.В. Движение углеродных нанотрубок в поле градиента температуры.....	63
Дорогов Ю.И. Применение изопериметрического условия в задачах потери устойчивости стержня.....	71
Кусаиынов К., Танашева Н., Тургунов М., Дюсембаева А., Алибекова А. Исследование лобового сопротивления двухлопастного ветродвигателя в рабочем режиме.....	82
Рудяк В.Я., Андриющенко В.А. Молекулярно-динамическое моделирование разделения наножидкости с помощью наномембран.....	88
Саблин М.Н., Никулина А.В., Балашов В.М., Кабанов А.А., Новиков В.В., Маркелов В.А., Хохунова Т.Н., Милешкина О.Ю. Влияние структурно-фазового состояния на коррозионную стойкость труб из сплава Э635.....	95
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	107

CONTENTS

MATHEMATICS

Bogdanova R.A. Motion group of the simplicial plane as a solution of a functional equation	5
Gubin V.N., Pestov G.G. On a class of reserved devices	14
Sorokin K.S. <i>SP</i> -groups with clean endomorphism rings	24
Taliev A.A. Stability loss protraction for singularly perturbed equations with continuous right-hand sides	36
Titova A.V. Linear homeomorphisms of topological almost modules of continuous functions and coincidence of dimension	43
Chistyakov D.S. Abelian groups with UA-ring of endomorphisms and their homogeneous mappings	49

MECHANICS

Berveno E.V., Kalinkin A.A., Laevskii Yu.M. Two-phase fluid filtration in nonuniform media on clusters	57
Bubenchikov M.A., Potekayev A.I., Bubenchikov A.M., Klykov I.I., Korobitsyn V.A., Maslov A.S., Ovcharenko V.V. Motion of carbon nanotubes in the temperature gradient field	63
Dorogov Yu.I. Application of the isoperimetric condition in problems of buckling for a rod	71
Kussaiynov K., Tanasheva N.K., Turgunov M.M., Dyusembaeva A.N., Alibekova A. Studying the drag of a two-bladed wind turbine in the operating mode	82
Rudiyak V.Ya., Andryushchenko V.A. Molecular dynamics modeling of nanofluid separation in nanomembranes	88
Sablin M.N., Nikulina A.V., Balashov V.M., Kabanov A.A., Novikov V.V., Khokhulina T.N., Astrakhantsev M.S., Mileschkina O.Yu. Influence of structural phase state on corrosion resistance of tubes made from the E635 alloy	95

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	107
---	-----

МАТЕМАТИКА

УДК 517.18:514.1

Р.А. Богданова

ГРУППА ДВИЖЕНИЙ СИМПЛИЦИАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ
КАК РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Решена задача о нахождении локальной группы множества всех движений симплициальной плоскости, являющейся феноменологически симметричной двумерной геометрией. Основу работы составляют аналитические методы, применяемые в решении функционального уравнения.

Ключевые слова: феноменологическая симметрия, феноменологически симметричная двумерная геометрия, локальная группа движений, функциональное уравнение.

Метрическая точка зрения на геометрию, возникшая в XIX веке, отраженная в работах Г. Гельмгольца [1] и А. Пуанкаре [2], тесно связанная с групповой концепцией Ф. Клейна [3], позволила Ю.И. Кулакову создать достаточно общую концепцию расстояния – теорию физических структур [4], основу которой составляет так называемая *феноменологическая симметрия*. Сущность феноменологической симметрии состоит в том, что в n -мерном пространстве между всеми взаимными расстояниями для $n+2$ произвольных точек имеется функциональная связь [5]. Г.Г. Михайличенко [6, 7] установлена эквивалентность групповой и феноменологической симметрий, позволившая ему построить полную классификацию двумерных феноменологически симметричных геометрий [8]. В этой классификации наряду с хорошо известными двумерными геометриями (плоскость Евклида, плоскость Лобачевского, плоскость Минковского, симплектическая плоскость, двумерная сфера, двумерный однополосный гиперboloид) представлены плоскость Гельмгольца, в отношении которой проводились исследования В.А. Кыровым [9], псевдогельмгольцева плоскость и симплициальная плоскость, которая также была отмечена и использована геометрами А.А. Александровым [10] и Р.И. Пименовым [11].

Целью данного исследования является нахождение локальной группы множества всех движений симплициальной плоскости как решение функционального уравнения.

Определение множества всех движений плоскости, сохраняющих *метрическую функцию* [7] как функцию пары точек, приводит к разработке аналитических методов решения соответствующих функциональных уравнений, что позволит дополнить теорию функциональных уравнений, поскольку в ней известно немного общих методов их решения [12–15].

Пусть имеется множество M_2 , являющееся гладким двумерным многообразием, а также отображение некоторого множества $G_f I M_2 \times M_2$ в R , сопоставляющее каждой паре точек $(A, B) I G_f$ вещественное число $f(A, B) I R$.

Если x, y – локальные координаты двумерного многообразия M_2 , то для отображения $f(A, B)$ можно записать его локальное координатное представление (сохранив функциональный символ f):

$$f(A, B) = f(x_A, y_A, x_B, y_B), \quad (1)$$

где x_A, y_A, x_B, y_B – локальные координаты текущих точек A и B пары $(A, B) \in G_f$.

Следуя [8], будем точки многообразия M_2 обозначать i, j, k, l и соответственно их координаты x_i, y_i и т.п.

Здесь и везде далее поскольку $i = (x_i, y_i)$, $j = (x_j, y_j)$, то $f(i, j)$, согласно (1), есть некоторая функция $f(x_i, y_i, x_j, y_j)$ и, в частности

$$\frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_i, y_i, x_j, y_j)}{\partial x_i}. \quad (2)$$

В отношении метрической функции $f(A, B)$ будем предполагать выполнение следующих аксиом:

A1. Область определения G_f функции $f(A, B)$ есть открытое и плотное множество в $M_2 \times M_2$.

A2. Функция f в локальных координатах имеет гладкость того порядка, который достаточен для наших целей.

A3 (Аксиома невырожденности). Для координатного представления функции $f(A, B)$ выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\partial(f(i, j))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f(i, j))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0, \quad (3)$$

где x_i, y_i и x_j, y_j – локальные координаты текущих точек i и j пары $(i, j) \in G_f$ (следует учитывать правила обозначений, принятые нами в (2)).

Заметим, что при условии (3) ранг касательного отображения для отображения (1) равен 2, то есть максимален.

Рассмотрим гладкое отображение $F_U : U \rightarrow E \subseteq R^6$, где $U \subseteq M_2 \times M_2 \times M_2 \times M_2$, сопоставляющее четверке (i, j, k, l) точку $z = (f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(j, k), f(j, l), f(k, l)) \in R^6$, область определения которого U , очевидно, открыта и плотна в $M_2 \times M_2 \times M_2 \times M_2$. Далее, пусть имеется ещё одно гладкое отображение $\Phi : E \rightarrow S \subseteq R$, где $E \subset R^6$, которое сопоставляет точке $z \in R^6$ число $\Phi(z) \in R$.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(i, j)$ задает на гладком двумерном многообразии M_2 *двумерную феноменологически симметричную геометрию ранга 4*, если кроме аксиом **A1**, **A2**, **A3** выполняется аксиома **A4**.

A4 (Аксиома феноменологической симметрии). Существует плотное в $U \subseteq M_2 \times M_2 \times M_2 \times M_2$ подмножество, для каждой точки Ψ которого, то есть четверки (i, j, k, l) и некоторой ее окрестности $\varepsilon(\langle i, j, k, l \rangle)$, найдется такое достаточно гладкое отображение $\Phi : E \rightarrow S \subseteq R$, определенное в некоторой области $E \subset R^6$, содержащей точку $z = (F(\varepsilon(\langle i, j, k, l \rangle)))$, что в ней $\text{grad} \Phi \neq \bar{0}$ и множество $F((\varepsilon(\langle i, j, k, l \rangle)))$ является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть

$$\Phi(f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(j, k), f(j, l), f(k, l)) = 0 \quad (4)$$

для всех упорядоченных пар четверки (i, j, k, l) из $\varepsilon(\langle i, j, k, l \rangle)$.

Данные построения поясняет рис. 1:

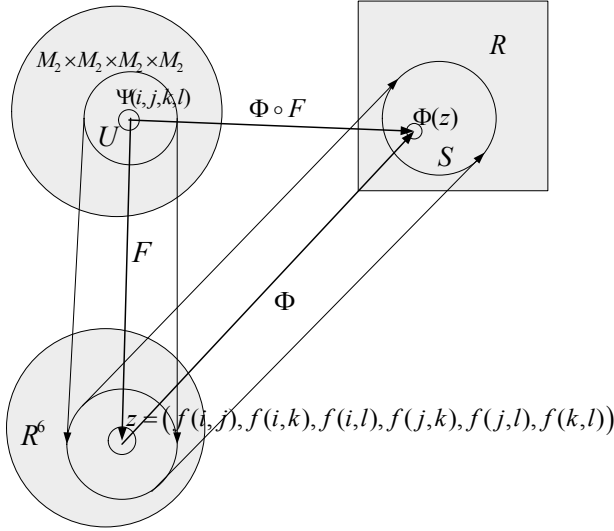


Рис. 1. Диаграмма отображений двумерной феноменологически симметричной геометрии ранга 4

Если данная аксиома выполнена для отображения

$$\Phi(f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(j, k), f(j, l), f(k, l)),$$

то на множестве E величины $f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(j, k), f(j, l), f(k, l)$ связаны независимым функциональным соотношением (4).

Функциональная матрица отображения F_U :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(i, l)}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(i, l)}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f(j, k)}{\partial x_j} & \frac{\partial f(j, l)}{\partial x_j} & 0 \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f(j, k)}{\partial y_j} & \frac{\partial f(j, l)}{\partial y_j} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f(i, k)}{\partial x_k} & 0 & \frac{\partial f(j, k)}{\partial x_k} & 0 & \frac{\partial f(k, l)}{\partial x_k} \\ 0 & \frac{\partial f(i, k)}{\partial y_k} & 0 & \frac{\partial f(j, k)}{\partial y_k} & 0 & \frac{\partial f(k, l)}{\partial y_k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f(i, l)}{\partial x_l} & 0 & \frac{\partial f(j, l)}{\partial x_l} & \frac{\partial f(k, l)}{\partial x_l} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f(i, l)}{\partial y_l} & 0 & \frac{\partial f(j, l)}{\partial y_l} & \frac{\partial f(k, l)}{\partial y_l} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

имеет 8 строк и 6 столбцов, а ранг этой матрицы есть ранг касательного отображения.

Определенная выше двумерная феноменологически симметричная геометрия ранга 4 наделена групповой симметрией [8].

Определение 2. Гладкое локальное взаимно однозначное (обратимое) отображение

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y), \quad (6)$$

удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial(\lambda(x, y), \sigma(x, y))}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad (7)$$

называется движением, если оно сохраняет метрическую функцию

$$f(\lambda(i), \lambda(j), \sigma(i), \sigma(j)) = f(i, j), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda(i) &= \lambda(x_i, y_i), \quad \lambda(j) = \lambda(x_j, y_j), \quad \sigma(i) = \sigma(x_i, y_i), \\ \sigma(j) &= \sigma(x_j, y_j), \quad f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \end{aligned}$$

Здесь и в последующем изложении материала будем использовать эти обозначения.

Рассмотрим симплицальную плоскость, которая задается на гладком двумерном многообразии метрической функцией

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n, \quad (9)$$

где m, n – отличные от нуля различные целые числа. Условия $m \neq 0, n \neq 0$ делают функцию, в которую координаты x_i, y_i и x_j, y_j точек i и j входят существенным образом в соответствие с аксиомой **A3**, невырожденной, а условием $m \neq n$ исключается двумерная геометрия плоскости Миньковского, явный вид метрической функции которой приведен в работе [8, с. 13].

Для любых четырех точек i, j, k, l симплицальной плоскости шесть взаимных расстояний связаны уравнением (4), выражающем ее феноменологическую симметрию, явный вид которого для целых чисел m, n неизвестен. Наличие связи (4) подтверждается непосредственным вычислением в программе Matlab ранга функциональной матрицы (5), который равен 5.

Преобразование (6) сохраняет метрическую функцию (9):

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^m (\sigma(i) - \sigma(j))^n = (x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n. \quad (10)$$

Равенство (10) является функциональным уравнением на множество движений (6).

Теорема. Множество всех движений симплицальной плоскости есть трехпараметрическая группа ее преобразований

$$x' = \alpha x + \gamma, \quad y' = \beta y + \delta, \quad (11)$$

где $\alpha^m \beta^n = 1$.

Доказательство. Заметим, что в отношении преобразования (6), определяющего движение, предполагается только его гладкость и обратимость, выражаемая условием (7).

Аналитический метод решения функциональных уравнений типа (10) состоит в сведении их к алгебраическим и дифференциальным уравнениям [16].

Продифференцируем функциональное уравнение по координатам x_j, y_j точки j и разделим на него результаты дифференцирования:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{\lambda(i)-\lambda(j)} \frac{\partial \lambda(j)}{\partial x_j} + \frac{n}{\sigma(i)-\sigma(j)} \frac{\partial \sigma(j)}{\partial x_j} &= \frac{m}{x_i - x_j}, \\ \frac{m}{\lambda(i)-\lambda(j)} \frac{\partial \lambda(j)}{\partial y_j} + \frac{n}{\sigma(i)-\sigma(j)} \frac{\partial \sigma(j)}{\partial y_j} &= \frac{n}{y_i - y_j} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Полученные два равенства (12) рассмотрим как систему алгебраических уравнений относительно дробей $\frac{1}{\lambda(i)-\lambda(j)}$, $\frac{1}{\sigma(i)-\sigma(j)}$.

Определитель этой системы (12)

$$\Delta(j) = \begin{vmatrix} m \frac{\partial \lambda(j)}{\partial x_j} & n \frac{\partial \sigma(j)}{\partial x_j} \\ m \frac{\partial \lambda(j)}{\partial y_j} & n \frac{\partial \sigma(j)}{\partial y_j} \end{vmatrix} = mn \frac{\partial(\lambda(j), \sigma(j))}{\partial(x_j, y_j)},$$

в котором $\Delta(j) = \Delta(x_j, y_j)$, вследствие условия (7) отличен от нуля, и поэтому она может быть решена методом Крамера:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda(i)-\lambda(j)} &= \frac{mn}{\Delta(j)} \frac{\partial \sigma(j)}{\partial y_j} \frac{1}{x_i - x_j} - \frac{n^2}{\Delta(j)} \frac{\partial \sigma(j)}{\partial x_j} \frac{1}{y_i - y_j}, \\ \frac{1}{\sigma(i)-\sigma(j)} &= -\frac{m^2}{\Delta(j)} \frac{\partial \lambda(j)}{\partial y_j} \frac{1}{x_i - x_j} + \frac{mn}{\Delta(j)} \frac{\partial \lambda(j)}{\partial x_j} \frac{1}{y_i - y_j} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Для сокращения записи последующего изложения материала представим решения (13) в виде

$$\frac{1}{\lambda(i)-\lambda(j)} = \frac{a}{u} + \frac{g}{\vartheta}, \quad \frac{1}{\sigma(i)-\sigma(j)} = \frac{b}{u} + \frac{h}{\vartheta}, \quad (14)$$

введя следующие обозначения для переменных и коэффициентов соответственно:

$$u = x_i - x_j, \quad \vartheta = y_i - y_j, \quad a = \frac{mn}{\Delta(j)} \frac{\partial \sigma(j)}{\partial y_j}, \quad b = -\frac{m^2}{\Delta(j)} \frac{\partial \lambda(j)}{\partial y_j},$$

$$g = -\frac{n^2}{\Delta(j)} \frac{\partial \sigma(j)}{\partial x_j}, \quad h = \frac{mn}{\Delta(j)} \frac{\partial \lambda(j)}{\partial x_j}.$$

Согласно этим обозначениям, переменные u, ϑ независимы, а коэффициенты a, b, g, h могут зависеть от точки j , причем в силу условия (7) $ha - bg \neq 0$.

Из решений (14) найдем разности

$$\lambda(i) - \lambda(j) = \frac{u\vartheta}{gu + a\vartheta}, \quad \sigma(i) - \sigma(j) = \frac{u\vartheta}{hu + b\vartheta} \quad (15)$$

и подставим их в исходное функциональное уравнение (10):

$$\frac{u^m \vartheta^m}{(gu + a\vartheta)^m} \frac{u^n \vartheta^n}{(hu + b\vartheta)^n} = u^m \vartheta^n, \quad (16)$$

откуда после простых преобразований получаем тождество

$$(gu + a\vartheta)^m (hu + b\vartheta)^n = u^n \vartheta^m.$$

После дифференцирования этого тождества по переменной u получим выражение

$$\frac{mg(gu + a\vartheta)^m (hu + b\vartheta)^n}{gu + a\vartheta} + \frac{nh(gu + a\vartheta)^m (hu + b\vartheta)^n}{hu + b\vartheta} = \frac{nu^n \vartheta^m}{u},$$

которое с учетом тождества $(gu + a\vartheta)^m (hu + b\vartheta)^n = u^n \vartheta^m$ примет следующий вид:

$$\frac{mg}{gu + a\vartheta} + \frac{nh}{hu + b\vartheta} = \frac{n}{u}.$$

Преобразуем последнее выражение:

$$\frac{mghu^2 + (m-n)bgu\vartheta - nab\vartheta^2}{u(gu + a\vartheta)(hu + b\vartheta)} = 0,$$

$$\text{откуда} \quad mghu^2 + (m-n)bgu\vartheta - nab\vartheta^2 = 0. \quad (17)$$

Переменные $u = x_i - x_j$, $\vartheta = y_i - y_j$ как функции координат точки i независимы. Дважды дифференцируя тождество (17) по переменным u и ϑ , получим следующие ограничения на коэффициенты выражений (15): $hg = 0$, $bg = 0$, $ab = 0$, которые имеют место одновременно с неравенством $ha - bg \neq 0$. Из того что $bg = 0$, с учетом неравенства следует, что $ha \neq 0$, откуда $h \neq 0$, $a \neq 0$, и поэтому $g = 0$, $b = 0$. Но тогда значительно упрощаются выражения (15) для разностей с учетом введенных обозначений $u = x_i - x_j$, $\vartheta = y_i - y_j$:

$$\lambda(i) - \lambda(j) = \frac{x_i - x_j}{a}, \quad \sigma(i) - \sigma(j) = \frac{y_i - y_j}{h}, \quad (18)$$

в которых, напомним, $a = a(j) \neq 0$, $h = h(j) \neq 0$.

Дифференцируя результат (18) по координатам точки i , разделяем переменные:

$$\frac{\partial \lambda(x_i, y_i)}{\partial x_i} = \frac{1}{a(x_j, y_j)} = \text{const} = \alpha, \quad \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial y_i} = \frac{1}{h(x_j, y_j)} = \text{const} = \beta.$$

Введение констант α и β позволяет в выражениях (18) осуществить дополнительное разделение переменных:

$$\begin{aligned} \lambda(x_i, y_i) - \alpha x_i &= \lambda(x_j, y_j) - \alpha x_j = \text{const} = \gamma, \\ \sigma(x_i, y_i) - \beta y_i &= \sigma(x_j, y_j) - \beta x_j = \text{const} = \delta, \end{aligned}$$

$$\text{то есть} \quad \lambda(x, y) = \alpha x + \gamma, \quad \sigma(x, y) = \beta y + \delta. \quad (19)$$

Дополнительная связь на константы выражений (19) возникает при их подстановке в исходное функциональное уравнение (10):

$$\alpha^m \beta^n = 1. \quad (20)$$

Функции (19) со связью (20) как полное решение функционального уравнения (10) по формулам (6) определяют трехпараметрическое множество всех движений

(11) симплицальной плоскости. Это множество является группой по композиции движений, причем выполнение всех аксиом группы очевидно. Теорема полностью доказана.

Дополнительно отметим, что метрическая функция симплицальной плоскости (10) является двухточечным инвариантом группы преобразований (11). С другой стороны, каждый такой инвариант $f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$ является решением функционального уравнения

$$f(\lambda(x_i, y_i), \sigma(x_i, y_i), \lambda(x_j, y_j), \sigma(x_j, y_j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$$

для группы преобразований (6), определяемой выражениями (19) функций λ и σ . Общее решение этого уравнения

$$\tilde{f}(i, j) = \chi((x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n)$$

совпадает с метрической функцией (9) с точностью до гладкого преобразования $\chi(\tilde{f}) \rightarrow f$ и замены локальных координат x, y .

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н., профессору Г.Г. Михайличенко за постановку задачи и многочисленные полезные замечания и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельмгольц Г. О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 366–388.
2. Пуанкаре А. Об основных гипотезах геометрии // Об основаниях геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 388–398.
3. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа") // Об основаниях геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 402–434.
4. Кулаков Ю.И. Теория физических структур. М.: Доминико, 2004.
5. Кулаков Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур // ДАН СССР. 1970. Т. 193. № 5. С. 985–987.
6. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // ДАН СССР. 1983. Т. 269. № 2. С. 284–288. (Michailichenko G.G. On group and phenomenological symmetries in geometry // Soviet Math. Dokl. 1983. V. 27. No. 2. P. 325–326.)
7. Михайличенко Г.Г. Полиметрические геометрии. Новосибирск: НГУ, 2001.
8. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии. Барнаул: Изд-во Барнаульского государственного педагогического университета, 2004.
9. Кыров В.А. Гельмгольцевы пространства размерности два // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46. № 6. С. 1341–1359.
10. Александров А.Д. Геометрия и приложения (Избранные труды; Т. 1). Новосибирск: Наука, 2006.
11. Пименов Р.И. Необходимые и достаточные условия линейности преобразований, сохраняющих конусы // Матем. заметки. 1969. Т. 6. № 4. С. 361–369.
12. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
13. Kuczma M. Functional equations in a single variable. Polska Akademia Nauk. Monografie matematyczne. T. 46. Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1968.
14. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
15. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974
16. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1966.

Bogdanova R.A. MOTION GROUP OF THE SIMPLICIAL PLANE AS A SOLUTION OF A FUNCTIONAL EQUATION

Proceeding from metrical viewing of geometry, which appeared in the 19th century in works of H. Helmholtz and A. Poincare and which is deeply connected with F. Klein's group conception, Yu.I. Kulakov created a general conception of distance – the physical structures' theory based on the so-called phenomenological symmetry. The essence of this symmetry is the fact that there is a functional connection between all mutual distances for $n + 2$ arbitrary points in the n -dimensional space. G.G. Mikhailichenko's works established the equivalence of the group and phenomenological symmetries, which helped him to construct a complete classification of two-dimensional phenomenologically symmetric geometries. Along with well-known two-dimensional geometries (Euclidean plane, Lobachevsky plane, Minkowski plane, symplectic plane, two-dimensional sphere, and two-dimensional one-sheet hyperboloid) this classification shows the Helmholtz plane, pseudo-Helmholtz plane, and simplicial plane which was also the object of study of such geometricians as A.A. Aleksandrov and R.I. Pimenov.

The aim of this study is to find a local group of the set of all simplicial plane motions as a solution for a functional equation.

Defining the set of plane motions preserving the metric function as a function of a pair of points leads to developing analytical methods for solving the corresponding functional equations; that allows one to complement the theory of functional equations since there are few general methods of their solution.

It has been found that any motion of a simplicial plane is defined by a linear transformation, which was not assumed beforehand and was not obvious. Nevertheless the whole set of motions turned out to be a group essentially dependent on three independent parameters. Thus, a simplicial plane is endowed with the group symmetry of the 3rd degree, i.e. it is a phenomenologically symmetric geometry with maximum mobility. It should be noted that this result is not valid for an arbitrary geometry but is typical just for phenomenologically symmetric geometries.

Keywords: phenomenological symmetry, phenomenologically symmetric two-dimensional geometry, local group of movements, functional equation.

BOGDANOVA Rada Alexandrovna

(Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, Russian Federation)

E-mail: bog-rada@yandex.ru

REFERENCES

1. Gel'mgol'ts G. O faktah, lezhashchih v osnovanii geometrii. *Ob osnovaniyah geometrii*. Moscow, GITTL Publ., 1956, pp. 366–388. (in Russian)
2. Puankare A. Ob osnovnykh gipotezakh geometrii. *Ob osnovaniyah geometrii*. Moscow, GITTL Publ., 1956, p. 388–398. (in Russian)
3. Klejn F. Sravnitel'noe obozrenie novejshih geometricheskikh issledovanij ("Jerlangenskaja programma"). *Ob osnovaniyah geometrii*. Moscow, GITTL Publ., 1956. pp. 402–434. (in Russian)
4. Kulakov Ju.I. *Teorija fizicheskikh struktur*. Moscow, Dominiko Publ., 2004. (in Russian)
5. Kulakov Ju.I. Geometrija prostranstv postojannoju krivizny kak chastnyj sluchaj teorii fizicheskikh struktur (1970) *Dokl. AN SSSR*, v. 193, no. 5, pp. 985–987. (in Russian)
6. Michailichenko G.G. On group and phenomenological simmetries in geometry (1983) *Soviet Math. Dokl.*, v. 27, no. 2, p. 325–326.
7. Mihajlichenko G.G. *Polimetricheskie geometrii*. Novosibirsk, NGU Publ., 2001. (in Russian)
8. Mihajlichenko G.G. *Dvumernye geometrii*. Barnaul, Izd-vo Barnaul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta, 2004. (in Russian)
9. Kyrov V.A. Gel'mgol'tsevy prostranstva razmernosti dva (2005) *Sib. matem. zhurn.*, v. 46, no. 6, pp. 1341–1359. (in Russian)

10. Aleksandrov A.D. *Geometrija i prilozhenija (Izbrannye trudy; V. 1)*. Novosibirsk, Nauka Publ., 2006. (in Russian)
11. Pimenov R.I. Neobhodimye i dostatochnye uslovija linejnosti preobrazovanij, sohranjajushhih konusy (1969) *Matem. zametki*, v. 6, no. 4, pp. 361 – 369. (in Russian)
12. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rahmatullina L.F. *Jelementy sovremennoj teorii funkcional'no-differencial'nyh uravnenij. Metody i prilozhenija*. Moscow, Institut komp'juternyh issledovanij Publ., 2002. (in Russian)
13. Kuczma M. *Functional equations in a single variable. Polska Akademia Nauk. Monografie matematyczne*, v. 46. Warszawa, Polish Scientific Publishers, 1968.
14. Poljanin A.D., Zajcev V.F., Zhurov A.I. *Metody reshenija nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki i mehaniki*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. (in Russian)
15. Pontrjagin L.S. *Obyknoennye differencial'nye uravnenija*. Moscow, Nauka Publ., 1974. (in Russian)
16. Arnol'd V.I. *Obyknoennye differencial'nye uravnenija*. Moscow, Nauka Publ., 1966. (in Russian)

УДК 519.873

В.Н. Губин, Г.Г. Пестов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕЗЕРВИРУЕМЫХ УСТРОЙСТВ

Рассмотрены 3 модели резервированных устройств и исследованы их общие свойства с использованием сигма-оператора.

Ключевые слова: резервирование, система, надёжность, стратегия, среднее время безотказной работы, модель, критерий оптимизации, сигма-оператор, промежутки K_0 -постоянства.

Задача повышения надёжности сложных устройств остаётся актуальной, несмотря на прогресс в технологии изготовления элементов систем. Прогресс в повышении надёжности элементов систем компенсируется растущим усложнением структуры и возрастающими требованиями к надёжности систем. Среди моделей с управляемым резервом, рассмотренных в работах Райкина [1], Герцбаха [2], Томиленко [3], Ушаковой – Пестова [4], можно выделить один класс систем с управляемым резервом. Задача, аналогичная данной, решалась другими методами в работах [5–7].

Далее мы дадим описание систем этого класса. Время в системе дискретно и может принимать значения, кратные некоторой положительной константе Δ : $\Delta, 2\Delta, 3\Delta, \dots$. В каждый из этих моментов времени производится проверка исправности всех включённых в работу элементов и принимается решение о том, какое количество исправных элементов следует включить в работу. Исправные элементы в резерве (не включённые в работу) остаются исправными. Пусть состояние системы в данный момент времени полностью характеризуется набором параметров (r, s) , где r – количество исправных элементов в данный момент времени, как включённых, так и не включённых в работу, s – некоторый конечный вектор параметров системы, задаваемый в начале работы системы. В дальнейшем исследуются системы, у которых в процессе работы вектор параметров s не изменяется. Функцию $K(r, s)$, принимающую целые значения и такую, что для каждого натурального r выполнено неравенство $1 \leq K(r, s) \leq r$, назовём *стратегией резервирования* системы. Поскольку вектор параметров s не изменяется в процессе работы системы, то в перечне аргументов различных функций мы будем его опускать. Например, вместо $K(r, s)$ всюду пишем $K(r)$. Система рассматривается на этапе нормальной работы, когда элементы не стареют (или почти не стареют).

Заметим, что через K (K прописное с индексами) будем обозначать стратегию резервирования, в отличие от k строчного, обозначающего целочисленную константу.

Функционал T , заданный на множестве пар (r, K) и принимающий неотрицательные значения, назовём *критерием оптимизации*. Таким образом, если задано количество r исправных элементов и стратегия K , то задано и значение критерия $T(r, K)$. Рассмотрим несколько моделей, где функционал T имеет уже конкретный смысл. В каждой из моделей, рассмотренных ниже, задан свой критерий оптимизации.

Модель M_1 . Система S_m функционирует на конечном промежутке $[1, n]$, где n – натуральное число. Система S_m функционирует исправно тогда и только тогда, ко-

гда количество включённых в работу исправных элементов не меньше чем m . Для вычисления характеристик системы ещё необходимо знать распределения вероятностей отказов элементов за один шаг, если в работу включено k исправных элементов. Обозначим через $f(k, i)$ вероятность следующего события: в работу включено k исправных элементов, из них за один шаг отказало ровно i . Будем считать функцию $f(k, i)$ известной. В качестве критерия оптимизации в модели M_1 используем среднее время исправной работы системы. Обозначим через $T(r)$ математическое ожидание времени работы системы при стратегии, оптимальной по критерию среднего времени работы системы, если в начальный момент имеется ровно r исправных элементов. Через $T(k, r)$ обозначим математическое ожидание времени работы системы, если в начальный момент включено в работу k элементов, а в дальнейшем используется стратегия, оптимальная по критерию среднего времени работы системы. Из определения системы S_m следует, что $k \geq m$. По формуле полного математического ожидания [8] имеем

$$T(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m} T(r-i) F(k, i). \quad (a)$$

Рассмотрим максимум величины $T(k, r)$ по k . Этот максимум существует в силу конечности модели S_m . Очевидно, что $\max_k T(k, r) = T(r)$.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что исправные элементы в резерве остаются исправными, а каждый исправный элемент, включённый в работу, отказывает за один шаг с вероятностью $q = 1-p$, независимо от состояния других элементов, и остаётся исправным с вероятностью p . Итак, если в работу включено k элементов, то количество элементов, отказавших за один шаг, подчиняется биномиальному распределению. Значит, $F(k, i) = C_k^i p^{k-i} q^i$, и также

$$T(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i). \quad (b)$$

Модель M_2 . Система функционирует на промежутке $[1, \infty)$. Как и в модели M_2 , вводим характеристики системы: $T(k, r)$ – математическое ожидание времени работы системы, если в начальный момент включено в работу k элементов, а в дальнейшем используется стратегия, оптимальная по критерию среднего времени работы системы; обозначим через $T(r)$ математическое ожидание времени работы системы при стратегии, оптимальной по критерию среднего времени работы системы, если в начальный момент имеется ровно r исправных элементов. По формуле полного математического ожидания [8] имеем

$$T(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i). \quad (c)$$

Модель M_3 . Пусть система функционирует на промежутке $[1, n]$, где n – натуральное число. Пусть K есть стратегия резервирования. Иначе, K есть функция, заданная на множестве натуральных чисел N , такая, что для каждого r из N величина $K(r)$ есть количество исправных элементов, которые следует включить в работу, если количество исправных элементов равно r . Обозначим через $T(K, r)$ вероятность того, что система не откажет на $[1, n]$ при стратегии K , если в начальный момент имеется r исправных элементов. Как и раньше, будем считать известной функцию $f(k, l)$ – вероятность такого события: если в работу включено k исправных элементов, то из них за один шаг отказало ровно l . Обозначим через $T(r)$ ма-

тематическое ожидание времени исправной работы системы при стратегии, оптимальной по времени работы системы, если в начальный момент имеется r исправных элементов.

По формуле полной вероятности имеем

$$T(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i). \quad (d)$$

В каждой модели стратегию, обеспечивающую максимум заданного в этой модели критерия оптимизации, назовём **оптимальной стратегией** (подробнее: стратегией, оптимальной по заданному критерию). Оптимальную стратегию обозначим через K_0 . Естественно, в различных моделях различны и оптимальные стратегии.

1. Некоторые свойства функций $T(r)$, $T(r, k)$

В моделях резервированных систем M_1, M_2, M_3 величины $T(r)$, $T(r, k)$ имеют различный смысл. Тем не менее для них выполнены следующие общие свойства:

1) По физическому смыслу $T(r) > 0$, $T(r)$ возрастает с ростом r .

2) Экспериментальные данные приводят к гипотезе: если $K_0(r)$ постоянна на некотором промежутке $[r_1, r_2]$ и $p > 0,5$, то имеет место неравенство

$$T(r+2) - T(r+1) \leq T(r+1) - T(r) \quad (1)$$

или

$$T(r+2) - 2T(r+1) + T(r) \leq 0, \quad (2)$$

$$r \in [r_1, r_2 - 2].$$

Геометрически (1) означает, что график функции $T(r)$ – выпуклый.

С физической стороны неравенство (2) означает, что скорость роста показателя качества уменьшается с ростом r .

3) В каждой из моделей M_1, M_2, M_3 введём оператор σ на множестве функций $\{T(r)\}$ следующим образом. Для каждого положительного r положим по определению $\sigma T(r+1) = T(r)$. Далее оператор σ продолжаем как линейный оператор на

множество функций вида $\sum_{i=0}^m a_i T(r+b_i)$, где a_i, b_i – вещественные константы.

$$\text{Таким образом, } \sigma \sum_{i=0}^m a_i T(r+b_i) = \sum_{i=0}^m a_i T(r+b_i-1).$$

$$\text{В частности, } \sigma T(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i-1) = T(k, r-1).$$

Итак, при $r > 1$ имеем

$$\sigma T(k, r) = T(k, r-1).$$

Запишем свойство 2) с помощью оператора σ :

$$(\sigma - 1)^2 T(r+2) \leq 0. \quad (1.1)$$

$$4) \text{ Так как } T(r) \text{ строго возрастает, то из 2) следует } \frac{T(r+2)}{T(r+1)} < \frac{T(r+1)}{T(r)}.$$

Итак, функция $T(r+1)/T(r)$ строго убывает с ростом r . Данное свойство в частном случае доказано в [4].

5) Из свойства 4) непосредственно следует, что функция $\ln T(r)$ выпукла.

6) Так как $T(r+1)/T(r) > 1$, строго убывает с ростом r , то по теореме Больца-но – Вейерштрасса существует $\lim_{r \rightarrow \infty} T(r+1)/T(r)$. Обозначим этот предел через l .

Докажем, что этот предел равен 1.

Теорема. При $r \rightarrow \infty$ имеет место соотношение $T(r+1)/T(r) \rightarrow 1$.

Доказательство:

По теореме возможны два случая:

1) $k_0(r+1) = k_0(r) = k$.

Тогда, используя сигма-оператор, получим

$$\begin{aligned} T(k, r+1) - T(k, r) &\leq T(k, r+1) - T(k-1, r) = [(p+q\sigma)^{k-1} (p+q\sigma-\sigma)]T(r+1) \\ &\quad - (q\sigma)^{k-1} (q\sigma-\sigma)T(r+1) = p(p+q\sigma)^{k-1} (1-\sigma)T(r+1) + p(q\sigma)^{k-1} T(r) = \\ &= p(p+q\sigma)^{k-1} T(r+1) - p(q\sigma)^{k-1} T(r+1) + p(q\sigma)^{k-1} T(r+1) - p(p+q\sigma)^{k-1} T(r) + p(q\sigma)^{k-1} T(r) = \\ &= p(T(k-1, r+1) - T(k-1, r) + q^{k-1} T(r-k+2)). \end{aligned}$$

Имеем $T(k, r+1) - T(k, r) \leq p(T(k-1, r+1) - T(k-1, r) + q^{k-1} T(r-k+2))$.

Продолжая неравенство, имеем

$$\begin{aligned} T(k, r+1) - T(k, r) &\leq p^2(T(k-2, r+1) - T(k-2, r) + q^{k-2} T(r-k+3)) + p q^{k-1} T(r-k+2) \leq \dots \\ &\leq p q^{k-1} T(r+1 - (k-1)) + p^2 q^{k-2} T(r+1 - (k-2)) + \dots + p^{k-1} q T(r) + p^{k-1} (T(1, r+1) - T(1, r)) \\ &\leq (p q^{k-1} + p^2 q^{k-2} + \dots + p^{k-1} q) T(r) = p q (p^{k-1} - q^{k-1}) / (p - q) \rightarrow 0, \\ &\text{при } r \rightarrow \infty \text{ по лемме 1.} \end{aligned}$$

2) $k_0(r) = k$, $k_0(r+1) = k+1$.

Доказательство проводится аналогично.

2. Возрастание $k_0(r)$ с ростом r

Обозначим через S_m модель, в которой система исправна, если и только если в работу включено не менее m исправных элементов.

Рассмотрим разность

$$T_m(k+1, r) - T_m(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m+1} C_{k+1}^i p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) - \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i).$$

Воспользуемся свойством биномиальных коэффициентов:

$$C_{k+1}^i = C_k^i + C_k^{i-1},$$

$$\begin{aligned} &T_m(k+1, r) - T_m(k, r) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-m+1} C_k^i p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) + \sum_{i=1}^{k-m+1} C_k^{i-1} p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) - \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-m+1} C_k^i p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) + \sum_{i=1}^{k-m+1} C_k^{i-1} p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) - \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i) = \\ &= -q \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i) + q \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i-1) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T_m(r-k+m-1) = \\ &= q(T_m(k, r-1) - T_m(k, r)) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T_m(r-k-i-1). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$T_m(k+1, r) - T_m(k, r) = q(\sigma-1)T_m(k, r) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T_m(r-k-i-1). \quad (2.1)$$

Так как в выражении (2.1) разность $T_m(k, r-1) - T_m(k, r)$ возрастает с ростом r , то и $T_m(k+1, r) - T_m(k, r)$ возрастает при увеличении r .

Докажем теперь, что $k_0(r)$ возрастает с увеличением параметра r .

Пусть $T_m(k, r)$ достигает максимума при $k = k_0(r)$. Тогда

$$T_m(k_0(r), r) - T_m(k_0(r)-1, r) \geq 0.$$

Отсюда в силу предыдущего свойства получаем, что

$$T_m(k_0(r), r+1) - T_m(k_0(r)-1, r+1) \geq 0.$$

Значит, $k_0(r+1) \geq k_0(r)$, то есть, $k_0(r+1) \geq k_0(r)$. Итак, в модели S_m функция $k_0(r)$ возрастает (нестрого) с ростом r .

3. Выпуклость $T(k, r)$ по k в S_m

Теорема: При $p \geq \frac{k}{2k-m+1}$ функция $T_m(k, r)$ для системы S_m имеет не более двух максимумов при фиксированном r , причем она выпукла вверх по k в области $m \leq k \leq k_0^m(r)+1$ и не возрастает при $k_0^m(r) < k \leq r$.

Доказательство:

Воспользуемся соотношением (2.1):

$$T(k+1, r) - T(k, r) = q(\sigma-1)T(k, r) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T(r-k-1+m).$$

Преобразуем с помощью него следующую разность:

$$\begin{aligned} & [T(k+1, r) - T(k, r)] - p[T(k, r) - T(k-1, r)] = \\ & = q(\sigma-1)T(k, r) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T(r-k-1+m) - pq(\sigma-1)T(k-1, r) - \\ & \quad - pC_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} T(r-k+m) = q(\sigma-1)[T(k, r) - pT(k-1, r)] + \\ & \quad + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T(r-k-1+m) - pC_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} T(r-k+m). \end{aligned}$$

Упростим выражение в квадратных скобках:

$$\begin{aligned} T(k, r) - pT(k-1, r) &= \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) - p \sum_{i=0}^{k-m-1} C_{k-1}^i p^{k-i-1} q^i T(r-i) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-m} C_{k-1}^i p^{k-i} q^i T(r-i) + \sum_{i=1}^{k-m} C_{k-1}^{i-1} p^{k-i} q^i T(r-i) - \sum_{i=0}^{k-m-1} C_{k-1}^i p^{k-i} q^i T(r-i) = \\ &= \sum_{j=0}^{k-m-1} C_{k-1}^j p^{k-j-1} q^{j+1} T(r-j-1) + C_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} T(r-k+m) = \\ &= qT(k-1, r-1) + C_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} T(r-k+m). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} & [T(k+1, r) - T(k, r)] - p[T(k, r) - T(k-1, r)] = \\ & = q(\sigma-1)[qT(k-1, r-1) + C_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} T(r-k+m)] + \\ & \quad + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T(r-k-1+m) - pC_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} T(r-k+m). \end{aligned} \quad (3.1)$$

В (3.1) слагаемое $q(\sigma-1)[qT(k-1, r-1) + C_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} T(r-k+m)] \leq 0$. Потребуем, чтобы $C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} - pC_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} \leq 0$. Это выполнено тогда и только

тогда, когда

$$k - p(2k - m + 1) \leq 0 \quad \text{или} \quad p \geq \frac{k}{2k - m + 1}.$$

Таким образом, если $T(k, r) - T(k - 1, r) > 0$ и $p \geq \frac{k}{2k - m + 1}$, то выполнено

$$T(k + 1, r) - T(k, r) \leq p[T(k, r) - T(k - 1, r)] \leq T(k, r) - T(k - 1, r). \quad (3.2)$$

Это значит, что функция $T(k, r)$ при фиксированном r выпукла по k на промежутке $m \leq k \leq k_0^m(r) + 1$, где $k_0^m(r)$ – значение параметра k , при котором функция $T(k, r)$ в системе S_m достигает максимума при фиксированном r . Также из (3.2) следует, что когда $T(k, r) - T(k - 1, r) \leq 0$, разность $T(k + 1, r) - T(k, r) < 0$, а это означает, что при $k_0^m(r) < k \leq r$ функция $T(k, r)$ убывает по k .

Свойство системы, состоящее в том, что при возрастании резерва на единицу оптимальное количество элементов, включаемых в работу, возрастает не более чем на 1, доказано в работе [1] для модели 3. Выкладки для моделей 1, 2 аналогичны, поэтому в данной работе доказательство этого свойства опустим.

4. Поведение функции $T(r)$ на скачках функции $K_0(r)$

Рассмотрим поведение функции $(\sigma - 1)^2 T(r)$ при тех r , где $K_0(r)$ возрастает на единицу. Так как $K_0(r) \leq K_0(r + 1) \leq K_0(r) + 1$, то возможны три случая:

- 1) $K_0(r - 1) = k - 1, K_0(r) = k, K_0(r + 1) = k$.
- 2) $K_0(r - 1) = k - 1, K_0(r) = k - 1, K_0(r + 1) = k$.
- 3) $K_0(r - 1) = k, K_0(r) = k, K_0(r + 1) = k$.

В случае 1 получаем

$$\begin{aligned} (\sigma - 1)^2 T(r + 1) &= T(k, r + 1) - 2T(k, r) + T(k - 1, r - 1) = \\ &= (p + q\sigma)^{k-1} (p + (q - 2p)\sigma + (p - q)\sigma^2) T(r + 1) - (q\sigma)^{k-1} (q\sigma + (p - q)\sigma^2) T(r + 1). \end{aligned}$$

Так как $\sigma T(r + 1) = \alpha T(r + 1)$, $\sigma^2 T(r + 1) = \alpha\beta T(r + 1)$, то в правой части имеем

$$(p + q\sigma)^{k-1} (p + (q - 2p)\alpha + (p - q)\alpha\beta) T(r + 1) - (q\sigma)^{k-1} (q\alpha + (p - q)\alpha\beta) T(r + 1).$$

Оценим $\Delta_1 = p + (q - 2p)\alpha + (p - q)\alpha\beta$, учитывая, что $\alpha > \beta$:

$$\Delta_1 = p + (q - 2p)\alpha + (p - q)\alpha\beta = p(1 - \alpha) + (q - p)\alpha(1 - \beta) < (1 - \alpha)(p + (q - p)\alpha).$$

Так как $\alpha \rightarrow 1$, то начиная с некоторого r , выполнено неравенство $1 - \alpha < q\alpha$. Тогда

$$\Delta_1 < 2q\alpha(1 - \alpha) < 2q(1 - \alpha).$$

Оценим

$$\Delta_2 = (q\alpha + (p - q)\alpha\beta)(q\sigma)^{k-1} T(r + 1) > p\alpha\beta(q\sigma)^{k-1} T(r + 1) > p^3(q\sigma)^{k-1} T(r + 1).$$

Используя оценку $\sigma T(r + 1) > pT(r + 1)$, имеем

$$(\sigma - 1)^2 T(r + 1) < [2q(1 - \alpha) - p^{k+2}q^{k-1}] T(r + 1). \quad (4.1)$$

Таким образом, если

$$2q(1-\alpha) < p^{k+2}q^{k-1}, \quad (4.2),$$

то из неравенства (4.1) следует, что $(\sigma-1)^2 T(r+1) < 0$.

Неравенство (4.2) выполняется, начиная с некоторого $r = r_0$, в силу того, что величина $p^{k+2}q^{k-1}$ с ростом r либо не изменяется, либо уменьшается в pq раз.

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения.

Определение. Через $\hat{r}_i$ обозначим значение r , при котором оптимальное значение $K_0(r)$ изменяется с i на $i+1$.

Изучение экспериментальных данных приводит к следующим предположениям:

1) Расстояние между соседними скачками $|\hat{r}_{i+1} - \hat{r}_i|$ увеличивается при возрастании i ;

2) функция $1 - \alpha(\hat{r}_i)$ всё быстрее убывает при увеличении i .

Случай 2. Пусть $K_0(r-1) = k-1$, $K_0(r) = k-1$, $K_0(r+1) = k$. Тогда

$$\begin{aligned} (\sigma-1)^2 T(r+1) &= T(k, r+1) - 2T(k-1, r) + T(k-1, r-1) = \\ &= (p+q\sigma)^{k-1} (p - (1+p)\sigma + \sigma^2) T(r+1) + (q\sigma)^{k-1} ((1+p)\sigma - \sigma^2) T(r+1) = \\ &= [(p+q\sigma)^{k-1} (p - (1+p)\alpha + \alpha\beta) + (q\sigma)^{k-1} ((1+p)\alpha - \alpha\beta)] T(r+1). \end{aligned}$$

Оценим каждое из слагаемых в прямых скобках. Для первого имеем

$$\begin{aligned} (p - (1+p)\alpha + \alpha\beta)(p+q\sigma)^{k-1} T(r+1) &= (p(1-\alpha) - \alpha(1-\beta))(p+q\sigma)^{k-1} T(r+1) > \\ &> -\alpha(1-\beta)(p+q\sigma)^{k-1} T(r+1) > -(1-\beta)(p+q\sigma)^{k-1} T(r+1) > -(1-\beta)T(r+1). \end{aligned}$$

Для второго слагаемого выполнено

$$\begin{aligned} (q\sigma)^{k-1} ((1+p)\alpha - \alpha\beta) T(r+1) &= (q\sigma)^{k-1} ((1-\beta) + p) T(r) > \\ &> p(q\sigma)^{k-1} T(r) = pq^{k-1} \sigma^k T(r+1). \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством: $\sigma^k T(r+1) > p^k T(r+1)$. Тогда

$$(\sigma-1)^2 T(r+1) > [p^{k+1}q^{k-1} - (1-\beta)] T(r+1). \quad (4.3)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках с ростом k уменьшается в pq раз, а второе – с возрастанием k всё быстрее стремится к нулю. Поэтому первое слагаемое, начиная с некоторого r , будет превосходить второе. Из неравенства (4.3) вытекает, что существует такое r_0 , что при $r > r_0$ первое слагаемое больше второго и, следовательно, $(\sigma-1)^2 T(r+1)$ положительно.

Введем **определение**.

Назовем максимальный промежуток $[r_1, r_2]$, на котором функция $K_0(r)$ постоянна, промежутком K_0 -постоянства.

Таким образом,

1) промежуток $[0, +\infty)$ разбивается на непересекающиеся промежутки K_0 -постоянства;

2) при входе в очередной промежуток постоянства значение функции $(\sigma-1)^2 T(r+1)$ становится положительным;

3) внутри промежутка и на выходе из него функция $(\sigma-1)^2 T(r+1)$ остается отрицательной.

Случай 3 исследуется аналогично.

5. Алгоритм вычисления оптимальной стратегии резервирования

Построим алгоритм вычисления оптимальной стратегии резервирования по заданному критерию $T(r)$ в модели S_m с помощью метода динамического программирования Беллмана [9].

Для вычисления оптимальной стратегии будем использовать равенства (b),(c),(d).

1) Пусть количество исправных элементов r равно m . По построению S_m имеем $k_0(m) = m$.

Далее для каждой модели необходимо вычислить $T(m)$. В данной работе ограничимся вычислением $T(m)$ для модели 2.

В модели 2 система S_m работает на бесконечном промежутке и в качестве критерия выступает среднее время безотказной работы системы на бесконечном промежутке. Рассмотрим события вида $A_{lm} = \{\text{система из } m \text{ элементов проработала безотказно } l \text{ шагов, а на следующем шаге отказала}\}$:

$$P(A_{lm}) = p^{ml}(1 - p^m).$$

$$\text{Тогда } T(m) = \sum_{l=1}^{\infty} l P(A_{lm}) = (1 - p^m) \sum_{l=1}^{\infty} l p^{ml}.$$

Переобозначим $p^m = x$. Используя почленное интегрирование ряда, вычисляем сумму

$$\sum_{l=1}^{\infty} l x^l = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Тогда выражение для $T(m)$ принимает вид

$$T(m) = \frac{p^m}{(1 - p^m)}.$$

Замечательно, что дальнейшие вычисления для всех рассмотренных моделей производятся одинаково.

$$2) \text{ Имеем } T(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) = p^k T(r) + \sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i); \quad (5.1)$$

а) Подставляя в (5.1) $k = k_0(r) = k_0$, получим

$$T(r) = p^{k_0} T(r) + \sum_{i=1}^{k_0-m} C_{k_0}^i p^{k_0-i} q^i T(r-i),$$

$$\text{откуда находим} \quad T(r) = \frac{1}{1 - p^{k_0}} \sum_{i=1}^{k_0-m} C_{k_0}^i p^{k_0-i} q^i T(r-i).$$

б) Подставим теперь в (5.1) значение $k_1 \neq k_0(r)$. Получим неравенство

$$T(r) \geq T(k_1, r) = \frac{1}{1 - p^{k_1}} \sum_{i=1}^{k_1-m} C_{k_1}^i p^{k_1-i} q^i T(r-i).$$

Таким образом,

$$T(r) = \max \frac{1}{1 - p^k} \sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i), \quad (5.2)$$

где максимум берётся по всем натуральным k , таким, что $k \geq m$.

$$\text{Обозначим } f(k, r) = \frac{1}{1-p^k} \sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i).$$

Пусть уже вычислены $k_0(m)$, $k_0(m+1)$, ..., $k_0(r-1)$, $T(m)$, $T(m+1)$, ..., $T(r-1)$. Вычислим $k_0(r)$ и $T(r)$. Для этого вычисляем $f(k_0(r-1), r)$ и $f(k_0(r-1)+1, r)$.

Если $f(k_0(r-1), r) \geq f(k_0(r-1)+1, r)$, то полагаем

$$k_0(r) = k_0(r-1) \text{ и } T(r) = f(k_0(r-1), r).$$

Если же $f(k_0(r-1)+1, r) \geq f(k_0(r-1), r)$, полагаем

$$k_0(r) = k_0(r-1)+1, \text{ и } T(r) = f(k_0(r-1)+1, r).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Райкин А.Л. Элементы теории надёжности технических систем. М.: Сов. радио, 1978.
2. Герцбах И.Б. Об оптимальном управлении включением резервных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1966. № 5.
3. Томиленко В.А. Об одной задаче динамического резервирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1975. № 4.
4. Пестов Г.Г., Ушакова Л.В. Исследование оптимальных стратегий в задаче динамического резервирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1973. № 5.
5. Конев В.В. Об оптимальном включении резервных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 4. С. 75–83.
6. Конев В.В. Об оптимальном программном включении резервных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1975. № 3. С. 109–117.
7. Конев В.В., Овчинников А.В. Оптимальное резервирование группы однотипных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1976. № 4. С. 75–84.
8. Renyi A. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.
9. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. 458 с.

Статья поступила 03.06.2014 г.

Gubin V.N., Pestov G.G. ON A CLASS OF RESERVED DEVICES

In this paper, we consider three models of redundancy:

- (1) By use of the mean time between system failures on a finite interval;
- (2) By use of the mean time between system failures on a infinite interval;
- (3) By use of the system reliability on a finite interval.

For all three models, the redundancy criterion has the following form:

$$T(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i). \quad (1)$$

Using the sigma-operator turns out to be an effective way for proving many properties of optimal strategies. Let $T(r) > 0$ and $T(r)$ increase.

The following properties are proved:

- (1) If $p \geq \frac{k}{2k-m+1}$, then the function $T_m(k, r)$ for the system S_m has at most two maximums

for a fixed r , it is convex on the interval $m \leq k \leq k_0^m(r)+1$ and nonincreasing on $k_0^m(r) < k \leq r$.

- (2) Since $T(r+1)/T(r) > 1$ and strictly decreases, $\lim_{r \rightarrow \infty} T(r+1)/T(r)$ exists by the Bolzano–

Weierstrass theorem and this limit is equal to 1.

From convexity of the function $T(r)$, it is easy to prove that

$$(3) \frac{T(r+2)}{T(r+1)} < \frac{T(r+1)}{T(r)}.$$

Under more restrictive conditions, this inequality was obtained in the thesis of L.V. Ushakova.

(4) The function $\ln T(r)$ is convex;

(5) $T(k+1, r) - T(k, r)$ increases with an increase in r .

To find the optimal strategy, a simplified algorithm is obtained using the properties. This algorithm is based on a modification of the Bellman dynamic programming method mentioned in V.V. Travkina's work. The essence of the algorithm is as follows.

(1) If there are m elements, then we have $k_0(m) = m$. For each model, $T(m)$ is calculated.

(2) All further calculations for the three models are similar. Then it is necessary to calculate the values of the function $T(r)$ **by means** of its previous values using the formula

$$T(k, r) = \frac{1}{1 - p^k} \sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i), \quad (2)$$

(3) Suppose that $k_0(m)$, $k_0(m+1)$, ..., $k_0(r-1)$, $T(m)$, $T(m+1)$, ..., $T(r-1)$ have already calculated.

To find $k_0(r)$, we need to calculate $k_0(r-1)$ and $k_0(r-1)+1$. Then, using (2), we calculate $T(k_0(r-1), r)$ and $T(k_0(r-1)+1, r)$ and compare them. If $T(k_0(r-1), r) \geq T(k_0(r-1)+1, r)$ then $k_0(r) = k_0(r-1)$ and $T(r) = T(k_0(r-1), r)$. If $T(k_0(r-1)+1, r) \geq T(k_0(r-1), r)$ then $k_0(r) = k_0(r-1)+1$, and $T(r) = T(k_0(r-1)+1, r)$.

Keywords: redundancy, system, reliability, strategy, mean time between failures, optimization criterion, model, sigma-operator, K_0 -constancy interval.

Gubin Vladimir Nikolaevich (M.Sc., Tomsk State University,
Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)
Email: vovantus@sibmail.com

Pestov German Gavrilovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof.,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
Email: gpestov@mail.ru

REFERENCES

1. Raykin A.L. *Elementy teorii nadezhnosti tekhnicheskikh sistem*. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1978. (in Russian)
2. Gertsbakh I.B. Ob optimal'nom upravlenii vklucheniiem rezervnykh elementov (1966) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 5. (in Russian)
3. Tomilenko V.A. Ob odnoy zadache dinamicheskogo rezervirovaniya (1975) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 4. (in Russian)
4. Pestov G.G., Ushakova L.V. Issledovanie optimal'nykh strategiy v zadache dinamicheskogo rezervirovaniya (1973) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 5. (in Russian)
5. Konev V.V. Ob optimal'nom vkluchenii rezervnykh elementov (1974) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 4, p. 75–83. (in Russian)
6. Konev V.V. Ob optimal'nom programnom vkluchenii rezervnykh elementov (1975) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 3, pp. 109–117. (in Russian)
7. Konev V.V., Ovchinnikov A.V. Optimal'noe rezervirovanie gruppy odnotipnykh elementov (1976) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 4, p. 75–84. (in Russian)
8. Renyi A. *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.
9. Bellman R., Dreyfus S. *Prikladnye zadachi dinamicheskogo programmirovaniya*. Moscow, Nauka Publ., 1965. 458 p. (in Russian)

УДК 512.541

К.С. Сорокин

SP-ГРУППЫ С ЧИСТЫМИ КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

Рассматриваются вопросы чистоты колец эндоморфизмов SP -групп – одного из известных классов смешанных абелевых групп. Доказано, что кольца эндоморфизмов самомалых SP -групп являются чистыми. Приведены достаточные условия, при которых справедливо обратное утверждение. Описано строение колец эндоморфизмов SP -групп ранга 1 с циклическими p -компонентами и доказана их чистота, найдено описание радикала Джекобсона колец эндоморфизмов данных групп. Определены достаточные условия чистоты эндоморфизмов SP -групп конечного ранга с циклическими p -компонентами.

Ключевые слова: смешанная абелева группа, SP -группа, чистое кольцо, кольцо эндоморфизмов.

Пусть R – кольцо с единицей. Элемент r кольца R называется *чистым*, если $r = u + e$, где e – идемпотент, а u – обратимый элемент кольца R . Кольцо R называется *чистым*, если всякий его элемент является чистым.

Понятие чистого кольца было предложено Николсоном в 1977 году как пример кольца, в котором идемпотенты поднимаются по модулю любого левого (правого) идеала [1], то есть каждое чистое кольцо является заменяемым кольцом. Кроме того, Николсоном было доказано [1], что кольцо с центральными идемпотентами [2] является чистым тогда и только тогда, когда оно заменяемо. В то же время имеется пример регулярного кольца, которое не является чистым [3]. Согласно [1], регулярные кольца являются заменяемыми кольцами, следовательно, класс чистых колец является собственным подклассом класса заменяемых колец.

Элемент r кольца R называется *обратимо-регулярным*, если $r = u \cdot e$, где e – идемпотент, а u – обратимый элемент кольца R . Кольцо R называется *обратимо-регулярным*, если всякий его элемент является обратимо-регулярным. Доказано, что обратимо-регулярное кольцо является чистым [4]. Так как полупростое кольцо является обратимо-регулярным и кольцо R является чистым тогда и только тогда, когда $R/J(R)$ – чистое и идемпотенты кольца R поднимаются по модулю $J(R)$ [5], полусовершенные кольца являются чистыми. Это означает, что, в частности, любое артиново (а значит, и любое конечное) кольцо является чистым. Кроме того, любое кольцо матриц над чистым кольцом является чистым [5].

В случае, когда R является кольцом эндоморфизмов некоторого модуля, появляются новые описания свойства чистоты, которые могут оказаться полезными при изучении условий чистоты кольца R . В частности, если f – чистый элемент кольца эндоморфизмов модуля M , это означает, что существует такой идемпотентный эндоморфизм e модуля M , что f совпадает на $\text{Ker}(e)$ с некоторым автоморфизмом модуля M . Эта тематика привлекла в последнее время внимание многих специалистов. Было доказано, что являются чистыми следующие кольца эндоморфизмов: проективного модуля над правым совершенным кольцом, векторного пространства над телом, непрерывного модуля [6, 7].

Поскольку абелевы группы являются $\mathbf{Z}$ -модулями, возникает естественная задача о нахождении необходимых и достаточных условий чистоты колец эндоморфизмов абелевых групп. Голдсмит и Вамош рассмотрели вопросы чистоты колец эндоморфизмов периодических абелевых групп [8]. Было показано, что кольцо эндоморфизмов totally проективной периодической группы является чистым тогда и только тогда, когда эта группа ограничена. Автором данной статьи были изучены вопросы чистоты колец эндоморфизмов вполне разложимых групп без кручения [9].

Целью настоящей работы является изучение вопросов чистоты колец эндоморфизмов SP -групп конечного ранга без кручения – одного из классов смешанных абелевых групп [10–12].

Введём обозначения:

A – SP -группа,

R – кольцо эндоморфизмов группы A ,

R_p – кольцо эндоморфизмов p -компоненты группы A ,

R_t – идеал эндоморфизмов группы A , образы которых лежат в периодической части группы A .

S – фактор-кольцо R/R_t .

1. Самомалые SP -группы

Определение 1. Редуцированная смешанная абелева группа A с бесконечным числом ненулевых p -компонент называется SP -группой, если естественное вложение $\bigoplus_p A_p \rightarrow \prod_p A_p$ продолжается до сервантного вложения $A \rightarrow \prod_p A_p$. Здесь и далее предполагается, что p пробегает множество всех простых чисел, относящихся к A , то есть таких, что $A_p \neq 0$.

Определение 2. Группа A называется самойалой, если образ каждого гомоморфизма $A \rightarrow \bigoplus_{\aleph} A$ ($\aleph$ – произвольный кардинал) содержится в сумме конечного числа слагаемых A .

В следующей лемме, как и далее в тексте, под рангом смешанной группы A понимается ранг без кручения, то есть ранг фактор-группы $A/T(A)$.

Лемма 1. Для группы A справедливы следующие утверждения:

1. $A = A_p \oplus B_p$ для всякого простого p , причём $pB_p = B_p$.

2. Если A – группа конечного ранга, то S – конечномерная $\mathcal{Q}$ -алгебра.

Доказательство данной леммы непосредственно вытекает из определения SP -группы.

Теорема 2. Пусть A – самаямалая SP -группа конечного ранга. Тогда кольцо R является чистым.

Доказательство. Пусть α – произвольный эндоморфизм группы A . Рассмотрим $\bar{\alpha} \in S$. Так как A – SP -группа конечного ранга, то по лемме 1 S – конечномерная $\mathcal{Q}$ -алгебра. Поэтому (согласно [6]) S – чистое кольцо и $\bar{\alpha} = \bar{e} + \bar{u}$, где $\bar{e}$ – идемпотентный, а $\bar{u}$ – обратимый элементы кольца S . Это означает, что найдутся такие $r_i \in R_t$ ($i = 1, 4$) и $v \in R$, что

$$\begin{aligned}\alpha &= e + u + r_1, \\ e^2 - e &= r_2, \\ uv &= vu + r_3 = 1 + r_4,\end{aligned}$$

где $\bar{v}$ – обратный к $\bar{u}$.

Так как A – сама малая SP -группа конечного ранга, то согласно [10] $R_i = \bigoplus_p R_p$. Значит, существует такое конечное подмножество простых чисел π , что $r_i A \subseteq \bigoplus_{p \in \pi} A_p$. В силу того, что A – SP -группа, по лемме 1 получаем, что $A = C \oplus B$, где $C = \bigoplus_{p \in \pi} A_p$, а B – p -делимая группа ($p \in \pi$), причём $r_i C \subseteq C$ и $r_i B = 0$ ($i = \overline{1, 4}$), поскольку $r_i \in R_i$. Следует также отметить, что C и B – вполне характеристические подгруппы.

Рассмотрим теперь сужение эндоморфизма $\alpha|_B = e|_B + u|_B$. Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}e|_B^2 - e|_B &= 0, \\ u|_B v|_B &= v|_B u|_B = 1|_B.\end{aligned}$$

Следовательно, $\alpha|_B$ – чистый элемент кольца $E(B)$.

По условию теоремы группа A – сама малая SP -группа конечного ранга, поэтому, учитывая [10], R_p – конечные кольца, а следовательно, чистые [7]. Тогда и $E(C) = \prod_{p \in \pi} R_p$ – чистое кольцо [5].

Таким образом, мы показали, что $\alpha|_B$ – чистый элемент кольца $E(B)$, а $\alpha|_C$ – чистый элемент кольца $E(C)$. Принимая во внимание тот факт, что $A = C \oplus B$ и то, что C и B – вполне характеристические подгруппы группы A , согласно [5] получим, что α – чистый элемент кольца R . ■

Рассмотрим далее некоторые следствия доказанной теоремы.

Лемма 3. Пусть у группы A существует разложение $A = B \oplus C$, где C – сама малая SP -группа конечного ранга, а B – периодическая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если B – ограниченная группа, то $E(A)$ – чистое кольцо.
2. Если B содержит в качестве прямого слагаемого бесконечную прямую сумму циклических p -групп, порядки которых не ограничены в совокупности, то $E(A)$ не является чистым кольцом.

Доказательство. 1. Согласно [8], кольцо эндоморфизмов ограниченной периодической группы является чистым. Так как C – сама малая группа конечного ранга, то, как следует из теоремы 2, кольцо эндоморфизмов C также является чистым. Поскольку $A = B \oplus C$, то, принимая во внимание [5], получаем, что $E(A)$ – чистое кольцо.

2. Согласно [8], в случае, если p -группа содержит в качестве прямого слагаемого бесконечную прямую сумму циклических групп, чьи порядки не ограничены, то кольцо эндоморфизмов такой группы не является чистым. Тем самым $E(A_p)$ не является чистым кольцом. Поскольку A_p является вполне характери-

стическим прямым слагаемым группы A , то согласно [5], $E(A)$ не является чистым кольцом. ■

Следующая лемма даёт достаточное условие чистоты элемента кольца эндоморфизмов SP -группы.

Лемма 4. Пусть f – эндоморфизм группы A и fA – ограниченная группа. Тогда f – чистый элемент кольца $E(A)$.

Доказательство. Пусть f – эндоморфизм группы A и fA – ограниченная группа. В таком случае найдётся такое конечное множество простых чисел $\Lambda \subset P$, что $fA \subseteq \bigoplus_{p \in \Lambda} A_p$. Обозначим группу $\bigoplus_{p \in \Lambda} A_p$ через C . Тогда, согласно лемме 1, группу A можно представить в виде $A = C \oplus D$, где группы C и D являются вполне характеристическими.

Согласно результатам, представленным в [5], $f|_C$ – чистый элемент $E(C)$. При этом $f|_D = 0 = 1 + (-1)$ – также чистый элемент $E(D)$. Тогда, согласно [5], f – чистый элемент кольца $E(A)$. ■

Возникает вопрос, в каких случаях справедлива импликация, обратная сформулированной в теореме 2. Другими словами, при каких условиях свойства чистоты кольца эндоморфизмов и самомалость группы совпадают? Следующий результат даёт частичный ответ на данный вопрос.

Теорема 5. Пусть A – SP -группа конечного ранга, не имеющая бесконечных периодических прямых слагаемых, и $A_p \cong \mathbb{Z}_p$ для $\forall p \in P$. Если при этом кольцо R является чистым, то A – самомалая группа.

Доказательство. Предположим противное. В этом случае, согласно [10], найдётся такой эндоморфизм $f \in R_t$, что $f(A_p) \neq 0$ для бесконечного числа простых чисел p , множество которых мы обозначим через Λ .

По условию теоремы f – чистый элемент кольца R , следовательно, найдутся такие обратимый и идемпотентный элементы u и e кольца R , что $f = e + u$, причём, поскольку $A_p \cong \mathbb{Z}_p$ для $\forall p \in P$, идемпотент e действует на A_p либо как тождественный, либо как нулевой эндоморфизм (то есть группа A_p допускает только тривиальное разложение). Пользуясь свойствами идемпотента e , можно записать

$$A = \text{Ker } e \oplus \text{Im } e,$$

причём

$$\begin{aligned} f|_{\text{Ker } e} &= (u + e)|_{\text{Ker } e} = u|_{\text{Ker } e}, \\ f|_{\text{Im } e} &= (u + e)|_{\text{Im } e} = (u + 1)|_{\text{Im } e}. \end{aligned}$$

Поскольку f совпадает на подгруппе $\text{Ker } e$ с автоморфизмом u , то

$$\text{Ker } e \cap \text{Ker } f = 0$$

и

$$\text{Ker } e = f(\text{Ker } e) \subseteq T(A).$$

В таком случае, поскольку $\text{Ker } e$ – периодическая группа, то по условию теоремы это конечная группа. Значит,

$$\text{Ker } e = \bigoplus_{p \in \pi} A_p,$$

где $\pi \subset \Lambda$ – конечное подмножество простых чисел. Тогда оставшиеся p -компоненты A_p лежат в $\text{Im } e$ для всякого $p \in \Lambda' = \Lambda \setminus \pi$.

Предположим, что существует ненулевой элемент $a \in A_p$, такой, что $fa = 0$. Поскольку $a \in \text{Im } e$, то

$$fa = (u+1)a = 0,$$

откуда следует, что $ua = -a$. Поскольку $A_p \cong Z_p$, то $uc = -c$, где c – образующий элемент группы A_p . Тогда

$$fc = (u+1)c = -c + c = 0,$$

что противоречит выбору множества Λ . Следовательно,

$$A_p \cap \text{Ker } f = 0 \quad (1)$$

для всякого $p \in \Lambda'$. С другой стороны,

$$f(A) \subseteq T(A), \quad (2)$$

откуда следует, что $A \cap \prod_{p \in \Lambda'} A_p$ не содержит бесконечных векторов из A , иначе мы получили бы противоречие с (1) или (2). Таким образом,

$$A \cap \prod_{p \in \Lambda'} A_p = \bigoplus_{p \in \Lambda'} A_p,$$

причем справедливо равенство

$$A = (A \cap \prod_{p \in \Lambda'} A_p) \oplus (A \cap \prod_{p \in P \setminus \Lambda'} A_p).$$

Действительно, обозначим $A \cap \prod_{p \in \Lambda'} A_p$ через B , а $A \cap \prod_{p \in P \setminus \Lambda'} A_p$ через C . Ясно, что $B \cap C = 0$. Покажем, что $A = B + C$. Пусть $a \in A$ и предположим, что a – конечный вектор. Тогда справедливо

$$a \in \bigoplus_{p \in P} A_p \subseteq (\bigoplus_{p \in \Lambda'} A_p) \oplus (\bigoplus_{p \in P \setminus \Lambda'} A_p) \subseteq B \oplus C.$$

Рассмотрим теперь случай, когда a – бесконечный вектор. В таком случае, только на конечном числе позиций, соответствующих $p \in \Lambda'$, вектор a отличается от нуля. Следовательно, существует такой вектор $a' \in \bigoplus_{p \in \Lambda'} A_p$, что вектор $a'' = a - a'$ на всех позициях, соответствующих $p \in \Lambda'$, равен нулю – значит, принадлежит $A \cap \prod_{p \in P \setminus \Lambda'} A_p$. Получаем, что $a = a' + a'' \in B + C$.

Таким образом, в A нашлось бесконечное периодическое прямое слагаемое, что противоречит условиям теоремы. ■

2. SP -группы ранга 1

Пусть $\tilde{a}$ – бесконечный вектор из $\prod_{p \in P} A_p$, где $A_p = \mathbf{Z}_{k_p}$, $k_p \in N$, P – некоторое бесконечное множество простых чисел. При этом $\pi_p \tilde{a} \neq 0$ для бесконечно-го множества чисел $p \in \Lambda$, где Λ – бесконечное подмножество P , например равное самому P .

Пусть для группы A выполнено условие:

$$A / \bigoplus_{p \in P} A_p \cong W, \quad (3)$$

где W – одномерное подпространство $\mathcal{Q}$ -пространства $\prod_{p \in P} A_p / \bigoplus_{p \in P} A_p$, порожденное вектором $\tilde{a} + \bigoplus_{p \in P} A_p$.

Легко показать, что группа A является SP -группой. Кроме того, из условия (3) и одномерности подпространства W следует, что ранг группы A равен 1. Ясно, что в свою очередь любая SP -группа A ранга 1 удовлетворяет условию (3), поэтому в дальнейшем изложении будем пользоваться представлением группы A , описанным выше. В данном разделе через A будем обозначать некоторую SP -группу ранга 1.

Дополнительно будем полагать, что Λ и P различаются лишь на конечном множестве элементов. Другими словами, почти все проекции вектора $\tilde{a}$ ненулевые. Из данного условия вытекает также, что группа A не содержит бесконечных периодических прямых слагаемых.

Теорема 6. Для любого эндоморфизма f группы A найдется такое конечное множество $\Omega \subset P$, что справедливо одно из условий:

- f – автоморфизм группы C (если $f \notin R_t$),
- $1-f$ – автоморфизм группы C (если $f \in R_t$),

где $A = (\bigoplus_{p \in \Omega} A_p) \oplus C$, C – дополнительное прямое слагаемое к $\bigoplus_{p \in \Omega} A_p$.

Доказательство. Пусть f – эндоморфизм группы A . Рассмотрим действие f на каждой p -компоненте группы A :

$$\pi_p f c_p = n_p c_p, \quad (4)$$

где $0 \leq n_p < p^{k_p}$, а c_p – образующие групп A_p .

Рассмотрим случай, когда $f \in R_t$. Имеем $fa \in T(A)$ для любого элемента $a \in A$, в частности для $a = \tilde{a}$. Это означает, что почти для всех $p \in P$ справедливы равенства

$$\pi_p fa = f \pi_p \tilde{a} = 0.$$

Рассмотрим проекции вектора a :

$$\pi_p \tilde{a} = \beta_p p^{k_p - s_p} c_p, \quad (5)$$

где $(\beta_p, p) = 1$, а $0 < s_p \leq k_p$. В таком случае справедливы равенства

$$0 = f(\beta_p p^{k_p - s_p} c_p) = \beta_p p^{k_p - s_p} f(c_p) = \beta_p p^{k_p - s_p} n_p c_p.$$

Поэтому $\beta_p n_p : p^{s_p}$, следовательно, $n_p : p^{s_p}$ и $n_p = \alpha_p p^{s_p}$.

Рассмотрим эндоморфизм $u = f - 1$. Покажем, что u – автоморфизм группы C , где $C = A \bigcap \prod_{p \in P \setminus \Omega} A_p$ – прямое слагаемое группы A (Ω – конечное подмножество множества P). Рассмотрим равенства для p -компонент:

$$uc_p = (\alpha_p p^{s_p} - 1)c_p.$$

Данное равенство справедливо почти для всех $p \in P$. Обозначим множество простых чисел, для которых данное равенство не выполняется, через Ω . Для начала убедимся, что u – мономорфизм группы C .

Поскольку $(\alpha_p p^{s_p} - 1, p) = 1$ для всякого $p \in P \setminus \Omega$, то $u|_{A_p}$ – автоморфизм группы A_p . Следовательно, u – мономорфизм группы C .

Покажем теперь, что u – эпиморфизм группы C . Пусть $a \in C$. Если $a \in T(C)$, то существует элемент $u^{-1}a \in T(C)$, поскольку $u|_{A_p}$ – автоморфизм группы A_p для всякого $p \in P \setminus \Omega$.

Рассмотрим случай, когда $a \notin T(C)$, то есть a – элемент бесконечного порядка. Покажем, что $u^{-1}a \in C$. В этом случае найдутся $a_t \in T(C)$, а также $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, такие, что $ma = n\tilde{a}_C + a_t$, где $\tilde{a}_C$ – проекция вектора $\tilde{a}$ на прямое слагаемое C .

При этом

$$u\pi_p \tilde{a}_C = (\alpha_p p^{s_p} - 1)\beta_p p^{k_p - s_p} c_p = -l\beta_p p^{k_p - s_p} c_p = -\pi_p \tilde{a}_C$$

для всякого $p \in P \setminus \Omega$. Тогда справедливы равенства

$$mu^{-1}(a) = nu^{-1}(\tilde{a}) + u^{-1}(a_t) = -n\tilde{a} + u^{-1}(a_t).$$

Согласно условию (3), $u^{-1}(a) \in C$. Следовательно, u – автоморфизм группы C .

Рассмотрим случай, когда $f \notin T(A)$. Тогда $f\tilde{a}$ – бесконечный вектор, а значит, найдутся $a_t \in T(A)$, а также $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, такие, что $mfa = n\tilde{a} + a_t$. Тогда почти для всех $p \in P$ справедливо равенство

$$\pi_p mfa = nf\pi_p \tilde{a}.$$

Подставим в последнее равенство выражения для $\tilde{a}$ и f согласно (4) и (5):

$$mn_p \beta_p p^{k_p - s_p} c_p = n \beta_p p^{k_p - s_p} c_p.$$

Получим $\beta_p p^{k_p - s_p} (mn_p - n)c_p = 0$ почти для всех $p \in P$. Отсюда следует, что

$$(mn_p - n) : p^{s_p}. \quad (6)$$

Поскольку разложениям m и n в произведения степеней простых чисел соответствуют конечные наборы простых чисел, то $(m, p) = 1$ и $(n, p) = 1$ почти для всех $p \in P$. Обозначим множество простых чисел, для которых данные равенства не выполняются, через Ω' . Тогда для любого $p \in P \setminus \Omega'$ справедливы равенства

$$(n_p, p) = 1.$$

Действительно, в противном случае, согласно (6), $n : p$.

Рассмотрим эндоморфизм $u = f$. Доказательство того, что u – мономорфизм группы C , где $C = A \prod_{p \in P \setminus \Omega} A_p$, в точности повторяет рассуждения, приведённые выше для случая, когда $fA \subseteq T(A)$.

Покажем теперь, что u – эпиморфизм группы C . Пусть $a \in C$. Если $a \in T(C)$, то существует $u^{-1}a \in T(C)$, поскольку $u|_{A_p}$ – автоморфизм группы A_p для всякого $p \in P \setminus \Omega'$.

Рассмотрим случай, когда $a \notin T(C)$, то есть a – элемент бесконечного порядка. Покажем, что $u^{-1}a \in C$. В этом случае найдутся $a'_i \in T(C)$, а также $m', n' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, такие, что $m'a = n'\tilde{a}_C + a'_i$, где $\tilde{a}_C$ – проекция вектора $\tilde{a}$ на прямое слагаемое C . При этом

$$m\tilde{a}_C = m\tilde{f}\tilde{a}_C = n\tilde{a}_C.$$

В силу выбора множества Ω' в группе C существует элемент c , такой, что $nc = \tilde{a}_C$. Поэтому

$$nu(mc) = m\tilde{a}_C = n\tilde{a}_C.$$

Следовательно, $n(u(mc) - \tilde{a}_C) = 0$, а значит, $u(mc) - \tilde{a}_C \in \bigoplus_{p \in \Omega} A_p$. Поскольку $c, \tilde{a}_C \in C$, то $u(mc) - \tilde{a}_C = 0$.

Тогда справедливы равенства

$$nm'u^{-1}(\tilde{a}_C) = mn'u^{-1}(\tilde{a}_C) + u^{-1}(ma_i) = n'\tilde{a}_C + u^{-1}(a_i).$$

Согласно условию (3), $u^{-1}(a) \in C$. Поэтому u – автоморфизм группы C . ■

Пусть группа A такая, как в теореме 6. Тогда справедлив следующий результат.

Следствие 7. Кольцо эндоморфизмов группы A является чистым.

Доказательство. Поскольку условия теоремы 6 выполнены, то для произвольного эндоморфизма f группы A имеет место разложение

$$A = B \oplus C,$$

где

$$B = \prod_{p \in \Omega} A_p, \text{ а } C = A \cap \prod_{p \in P \setminus \Omega} A_p.$$

Причем на C либо f , либо $1 - f$ является автоморфизмом. В таком случае $f|_C$ является чистым элементом $E(C)$. Поскольку B – конечная группа, тогда кольцо $E(B)$ – чистое (см. [8]).

Таким образом, мы показали, что $f|_B$ – чистый элемент кольца $E(B)$ и $f|_C$ – чистый элемент кольца $E(C)$. Принимая во внимание тот факт, что $A = C \oplus B$, и то, что C и B – вполне характеристические подгруппы группы A , получим, что f – чистый элемент кольца $E(A)$. ■

Напомним определение идеала Пирса p -группы A :

$$H(A) = \{\alpha \in E(A) \mid x \in A[p], h(x) < \infty \Rightarrow h(x) < h(\alpha x)\}.$$

Для SP -группы имеется определение аналога идеала Пирса, предложенное П.А. Крыловым в [11]. Если A – SP -группа, то

$$H(A) = \{\alpha \in E(A) \mid \alpha|_{A[p]} \in H(A_p) \text{ для каждого } p \in P\}.$$

Пусть группа A такая, как в теореме 7. Тогда справедлив следующий результат.

Теорема 8. $J(E(A)) = H(A)$.

Доказательство. П.А. Крылов доказал [11], что $J(E(A)) \subseteq H(A)$. Поэтому для завершения доказательства необходимо убедиться в справедливости обратного включения $H(A) \subseteq J(E(A))$. Последнее условие равносильно следующему: для любого эндоморфизма $\alpha \in H(A)$ следует, что $1 - \alpha$ – автоморфизм группы A .

Покажем, что $\alpha A \subseteq T(A)$. Действительно, предположим противное. Тогда, согласно теореме 2, α является автоморфизмом на прямом слагаемом группы A , содержащем почти все p -компоненты, что невозможно, поскольку $\alpha \in H(A)$.

Итак, $\alpha A \subseteq T(A)$. Тогда по теореме 6 $1 - \alpha$ является автоморфизмом на прямом слагаемом группы A , содержащем почти все p -компоненты.

Рассмотрим конечную прямую сумму оставшихся p -компонент. Отметим, что в силу определения $H(A)$ для SP -группы сужение α на каждую из указанных p -компонент будет принадлежать идеалу Пирса этой p -компоненты, а значит, и её радикалу Джекобсона, поскольку это ограниченная группа. Следовательно, для данных p -компонент $1 - \alpha$ также является автоморфизмом. ■

3. SP -группы конечного ранга

Рассмотрим теперь случай, когда группа A удовлетворяет условию

$$A / \bigoplus_{p \in P} A_p \cong W, \quad (3)$$

где W – конечномерное подпространство $\mathcal{Q}$ -пространства $\prod_{p \in P} A_p / \bigoplus_{p \in P} A_p$, порожденное конечным множеством линейно независимых векторов $\tilde{a}_i + \bigoplus_{p \in P} A_p$, $i = \overline{1, n}$.

Считаем, что $\tilde{a}_i$ – бесконечные векторы из $\prod_{p \in P} A_p$, где $A_p = \mathbf{Z}_p^{k_p}$, $k_p \in N$, P – некоторое бесконечное множество простых чисел. При этом $\pi_p \tilde{a}_i \neq 0$ для бесконечного множества чисел $p \in \Lambda_i$, где Λ_i – бесконечные подмножества P .

Используя рассуждения, аналогичные изложенным в доказательстве предложения 1, легко показать, что A – SP -группа конечного ранга.

Ясно, что в свою очередь любая SP -группа A конечного ранга удовлетворяет условию (3), поэтому в дальнейшем изложении будем пользоваться представлением группы A , описанным выше.

Здесь и далее через A будем обозначать SP -группу конечного ранга. Кроме того, будем полагать, что $\bigcup_{i=1}^n \Lambda_i$ и P различаются лишь на конечном множестве элементов. Другими словами, почти все проекции векторов $\tilde{a}_i$ ненулевые. Из данного условия, аналогично предыдущему случаю, вытекает также, что группа A не содержит бесконечных периодических прямых слагаемых.

Теорема 9. Для любого эндоморфизма $f \in R_l$ группы A найдётся такое конечное множество $\Omega \subset P$, что $1-f$ – автоморфизм группы C , где $A = (\bigoplus_{p \in \Omega} A_p) \oplus C$, C – дополнительное прямое слагаемое к $\bigoplus_{p \in \Omega} A_p$.

Доказательство. Пусть f – эндоморфизм группы A . Рассмотрим действие f на каждой p -компоненте группы A :

$$\pi_p f c_p = n_p c_p, \quad (7)$$

где $0 \leq n_p < p^{k_p}$, а c_p – образующие групп A_p .

Пусть $fA \subseteq T(A)$, тогда $f\tilde{a}_i \in T(A)$ для любого $i = \overline{1, n}$. Это означает, что почти для всех $p \in \Lambda_i$ справедливы равенства

$$\pi_p f \tilde{a}_i = f \pi_p \tilde{a}_i = 0.$$

Рассмотрим проекции векторов $\tilde{a}_i$:

$$\pi_p \tilde{a}_i = \beta_p^i p^{k_p - s_p^i} c_p, \quad (8)$$

где $(\beta_p^i, p) = 1$, а $0 < s_p^i \leq k_p$.

С учётом равенств (8) можно записать почти для всех $p \in P$ следующие равенства:

$$0 = f(\beta_p^i p^{k_p - s_p^i} c_p) = \beta_p^i p^{k_p - s_p^i} f(c_p) = \beta_p^i p^{k_p - s_p^i} n_p c_p.$$

Поэтому $\beta_p^i n_p : p^{s_p^i}$, следовательно, $n_p : p^{s_p^i}$ для всех $i = \overline{1, \dots, n}$ и $n_p = \alpha_p^i p^{s_p^i}$,

где $p^{s_p^i}$ соответствует максимальному из n значений.

Рассмотрим эндоморфизм $u = f - 1$. Покажем, что u – автоморфизм группы C , где $C = A \cap \prod_{p \in P \setminus \Omega} A_p$ – прямое слагаемое группы A (Ω – конечное подмножество множества P). Запишем равенства для p -компонент:

$$u c_p = (\alpha_p^i p^{s_p^i} - 1) c_p.$$

Данное равенство справедливо почти для всех $p \in P$. Обозначим множество простых чисел, для которых данное равенство не выполняется, через Ω . Для начала убедимся, что u – мономорфизм группы C .

Поскольку $(\alpha_p^i p^{s_p^i} - 1, p) = 1$ для всякого $p \in P \setminus \Omega$, то $u|_{A_p}$ – автоморфизм группы A_p . Следовательно, u – мономорфизм группы C .

Покажем теперь, что u – эпиморфизм группы C . Пусть $a \in C$. Если $a \in T(C)$, то существует $u^{-1}a \in T(C)$, поскольку $u|_{A_p}$ – автоморфизм группы A_p для всякого $p \in P \setminus \Omega$.

Рассмотрим случай, когда $a \notin T(C)$, то есть a – элемент бесконечного порядка. Покажем, что $u^{-1}a \in C$. В этом случае найдутся $a_i \in T(C)$, а также $m, m_i \in \mathbb{Z}$

(при этом $m_i \neq 0$ хотя бы для одного i и $m \neq 0$), такие, что

$$ma = \sum_{i=1}^n m_i \tilde{a}_C^i + a_t,$$

где $\tilde{a}_C^i$ – проекция вектора $\tilde{a}_i$ на прямое слагаемое C .

При этом

$$u \pi_p \tilde{a}_C^i = (\alpha_p^i p^{s_p^i} - 1) \beta_p^i p^{k_p - s_p^i} c_p = -1 \beta_p^i p^{k_p - s_p^i} c_p = -\pi_p \tilde{a}_C^i$$

для всякого $p \in P \setminus \Omega$.

Справедливы также равенства

$$mu^{-1}(a) = \sum_{i=1}^n m_i u^{-1}(\tilde{a}) + u^{-1}(a_t) = -\sum_{i=1}^n m_i \tilde{a}_i + u^{-1}(a_t).$$

Согласно условию (3), $u^{-1}(a) \in C$. Следовательно, u – автоморфизм группы C . ■

Пусть группа A обладает свойствами, перечисленными в теореме 9. Тогда справедлив следующий результат.

Следствие 10. Любой эндоморфизм $f \in R_t$ группы A является чистым.

Доказательство. Доказательство данного утверждения в точности повторяет доказательство, изложенное в следствии 7, если ввести обозначение $\bigcup_{i=1}^n \Lambda_i = \Lambda$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Nicholson W.K. Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. No. 229. P. 269–278.
2. Чехлов А.Р. Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48. № 4 С. 520–539.
3. Handelman D. Perspectivity and cancellation in regular rings // J. Algebra. 1977. No. 48. P. 1–16.
4. Camillo V.P., Khurana D. A characterization of unit-regular rings // Commun. Algebra. 2001. V. 29. No. 6. P. 2293–2295.
5. Han J., Nicholson W.K. Extension of clean rings // Commun. Algebra. 2001. V. 29. No. 6. P. 2589–2595.
6. Nicholson W.K., Varadarajan K., Zhou Y. Clean endomorphism rings // Arch. Math. 2004. No. 83. P. 340–343.
7. Camillo V.P., Khurana D., Lam T.Y., Nicholson W.K., Zhou Y. Continuous modules are clean // J. Algebra. 2006. No. 304. P. 94–111.
8. Goldsmith B., Vámos P. A note on clean abelian groups // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 2007. No. 117. P. 181–191.
9. Сорокин К.С. Вполне разложимые абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Т. 17. № 8. С. 105–108.
10. Крылов П.А. Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. 2000. Т. 269. С. 29–34.
11. Крылов П.А. Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы // Алгебра и логика. 2004. Т. 43. № 1. С. 60–76.
12. Крылов П.А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 17–27.
13. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов М.: Факториал Пресс, 2006.

Sorokin K.S. SP-GROUPS WITH CLEAN ENDOMORPHISM RINGS

The notion of a clean ring was introduced by W.K. Nicholson in 1977 as an example of a ring with idempotents, that can be lifted modulo any left (right) ideal [1]. The class of clean rings is a proper subclass of the class of exchange rings [1, 2].

In the case when R is an endomorphism ring of some module, new descriptions of the cleanness property appear. They can be useful for the study of conditions for cleanness of a ring R . This subject recently attracted attention of many specialists [5, 6].

In this work, some aspects of cleanness of endomorphism rings of SP -groups are considered. These groups are one of classes of mixed Abelian groups [7, 8]. The cleanness of endomorphism rings of self-small SP -groups is proved. Some sufficient conditions are found for the converse proposition to hold. The structure of endomorphism rings of rank one SP -groups with cyclic p -groups is described and their cleanness is proved, the description of Jacobson radical of endomorphism rings of such groups is found. Some sufficient conditions of cleanness for endomorphisms of finite rank SP -groups with cyclic p -groups are obtained.

Keywords: mixed Abelian group, SP -group, clean ring, endomorphism ring.

SOROKIN Konstantin Sergeevich (M. Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: Sorokin_k@list.ru

REFERENCES

1. Nicholson W.K. Lifting idempotents and exchange rings (1977) *Trans. Amer. Math. Soc.*, no. 229, pp. 269–278.
2. Chekhlov A.R. Ob abelevykh gruppakh s normal'nym kol'tsom endomorfizmov (2009) *Algebra i logika*, v. 48, no. 4, pp. 520–539. (in Russian)
3. Handelman D. Perspectivity and cancellation in regular rings (1977) *J. Algebra*, no. 48, pp. 1–16.
4. Camillo V.P., Khurana D.A characterization of unit-regular rings (2001) *Commun. Algebra*, v. 29, no. 6, pp. 2293–2295.
5. Han J., Nicholson W.K. Extension of clean rings (2001) *Commun. Algebra*, v. 29, no. 6, pp. 2589–2595.
6. Nicholson W.K., Varadarajan K., Zhou Y. Clean endomorphism rings (2004) *Arch. Math.*, no. 83, pp. 340–343.
7. Camillo V.P., Khurana D., Lam T.Y., Nicholson W.K., Zhou Y. Continuous modules are clean (2006) *J. Algebra*, no. 304, pp. 94–111.
8. Goldsmith B., Vámos P. A note on clean abelian groups (2007) *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, no. 117, pp. 181–191.
9. Sorokin K.S. Vpolne razlozhimye abelevy gruppy s chistymi kol'tsami endomorfizmov (2011/2012) *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, v. 17, no. 8, pp. 105–108. (in Russian)
10. Krylov P.A. Ob odnom klasse smeshannykh abelevykh grupp (2000) *Vestnik TGU*, v. 269, pp. 29–34. (in Russian)
11. Krylov P.A. Radikal Dzhekobsona kol'tsa endomorfizmov abelevoy gruppy (2004) *Algebra i logika*, v. 43, no. 1, pp. 60–76. (in Russian)
12. Krylov P.A. Radikaly kolets endomorfizmov abelevykh grupp (2007) *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, no. 1, pp. 17–27. (in Russian)
13. Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A. *Abelevy gruppy i ikh kol'tsa endomorfizmov*. Moscow: Faktorial Press Publ., 2006. (in Russian)

УДК 517.928

А.А. Талиев

ЗАТЯГИВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Рассмотрено сингулярно возмущенное уравнение с непрерывными правыми частями, для которых не выполняется условие устойчивости точки покоя присоединенного уравнения на рассматриваемом промежутке. Доказана теорема существования и единственности решения. Приведен пример.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, вырожденное присоединенное уравнение, точка покоя, устойчивость и неустойчивость точки покоя, непрерывные функции.

Пусть рассматривается задача

$$\varepsilon \cdot \dot{x}(t, \varepsilon) = f(\varepsilon, t, x(t, \varepsilon)); \quad (1)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ – малый параметр; $x^0 = \text{const}$; $t \in [t_0, T]$, $[t_0, T]$ – отрезок действительной оси, $t_0 < T$.

Уравнения вида (1) называются сингулярно возмущенными уравнениями [1, 2]. Системы уравнений гораздо более общего вида исследованы в [2].

Центральной проблемой в теории сингулярно возмущенных уравнений является близость решения рассматриваемой задачи, если она существует, к решению вырожденного уравнения, (которая получается из (1) при $\varepsilon = 0$), т.е.

$$f(0, t, \tilde{x}(t)) = 0. \quad (3)$$

Предположим, что уравнение (3) имеет изолированное решение $\tilde{x}(t) = \varphi(t)$ [2].

В [2] данная задача решена в терминах присоединенной системы.

Для (1) присоединенным уравнением будет

$$\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = f(0, t, \xi(\tau)), \quad (4)$$

где $0 \leq \tau < +\infty$, t рассматривается как параметр и $t \in [t_0, T]$.

При решении данной проблемы одним из основных условий является устойчивость точки покоя для (4). Если учесть (3), то $\xi(\tau) = \varphi(t)$ будет точкой покоя для (4).

В [1] исследованы сингулярно возмущенные уравнения при нарушении данного условия. При этом задача решена для уравнений с аналитическими правыми частями в некоторой области $H \subset C$ – комплексная плоскость.

В данной работе рассматривается задача

$$\varepsilon \cdot \dot{x}(t, \varepsilon) = \lambda(t) \cdot x(t, \varepsilon) + \varepsilon \cdot g(t, x(t, \varepsilon)); \quad (5)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \quad (6)$$

где $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ – малый параметр; $x^0 - \text{const}$; $t \in [t_0, T]$, $[t_0, T]$ – отрезок действительной оси, $t_0 < T$, x – скаляр.

От правых частей уравнения (5) потребуем выполнения следующих условий:

У.И. 1. $\lambda(t) < 0$, $t_0 \leq t < T_0$; $\lambda(T_0) = 0$;

$\lambda(t) > 0$, $T_0 < t \leq T$; $\lambda(t) \in C[t_0, T]$,

где $C[t_0, T]$ – множество непрерывных функций на промежутке $[t_0, T]$.

2. $F_1(t) = \int_{t_0}^t \lambda(s) ds$. $F_1(t) \leq 0$,

при $t_0 \leq t \leq T$, причем $F_1(t_0) = 0$ и $F_1(T) < 0$.

У.П. $\forall (t, x) \in \Omega = \{(t, x) | t_0 \leq t \leq T, |x| \leq \delta\}$, $0 < \delta$ – некоторая постоянная:

1. $|x^0| \leq \delta$;

2. $g(t, 0) \equiv 0$

3. $|g(t, \tilde{x}) - g(t, \tilde{\tilde{x}})| \leq M |\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}|$, где $0 < M$ – некоторая постоянная.

Решение задачи $x(t, \varepsilon)$ будем искать в классе $C^1[t_0, T]$ – пространстве функций, имеющих непрерывные производные первого порядка по t .

При $\varepsilon = 0$ из уравнения (5) получим вырожденное уравнение

$$\lambda(t) \cdot \bar{x}(t) = 0,$$

которое имеет решение $\bar{x}(t) = 0$.

Присоединенное уравнение

$$\frac{d\tilde{x}(\omega)}{d\omega} = \lambda(t) \cdot \tilde{x}(\omega),$$

где t – рассматривается как параметр; $\omega \geq 0$, имеет точку покоя $\tilde{x} \equiv 0$, которая устойчива при $t \in [t_0, T_0)$ и неустойчива при $t \in (T_0, T]$.

Постановка задачи. Исследовать асимптотическое поведение решения $x(t, \varepsilon)$, если оно существует, при $\varepsilon \rightarrow 0$ на всем промежутке $[t_0, T]$.

Аналогичные задачи рассмотрены в [1]. При этом поставленные задачи решены в некоторой области $H \subset C$ – комплексная плоскость. Причем правые части являются аналитическими по всем переменным, за исключением ε , если она входит в правую часть. В данной работе от правых частей требуется только выполнимость У.И, У.П, т.е. не требуется аналитичность правых частей.

Теорема. Пусть выполнены условия У.И, У.П. Тогда $x(t, \varepsilon)$ – решение задачи (5), (6) существует, единственно и для него справедлива оценка

$$|x(t, \varepsilon)| \leq |x^0| e^{\frac{1}{\varepsilon} F_1(t) + M(t-t_0)}. \quad (7)$$

Доказательство. Задачу (5), (6) заменим следующим интегральным уравнением:

$$x(t, \varepsilon) = x^0 e^{\frac{1}{\varepsilon} F_1(t)} + \int_{t_0}^t e^{\frac{1}{\varepsilon} [F_1(t) - F_1(\tau)]} g(\tau, x(\tau, \varepsilon)) d\tau, \quad (8)$$

где $F_1(t) = \int_{t_0}^t \lambda(s) ds$.

Из условия $\lambda(t) \in C[t_0, T]$ следует, что $F_1(t) \in C^1[t_0, T]$.

Для доказательства существования решения уравнения (8) применим метод последовательных приближений.

Последовательные приближения определим следующим образом:

$$\begin{aligned} x_0(t, \varepsilon) &= 0, \\ x_m(t, \varepsilon) &= x^0 e^{\frac{1}{\varepsilon} F_1(t)} + \int_{t_0}^t e^{\frac{1}{\varepsilon} [F_1(t) - F_1(\tau)]} g(\tau, x_{m-1}(\tau, \varepsilon)) d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Проведем оценку последовательных приближений (9). Доказательство проведем, применяя метод математической индукции.

Докажем справедливость следующей оценки:

$$|x_m| \leq |x_1| \left(1 + M(t - t_0) + \frac{M^2}{2!} (t - t_0)^2 + \dots + \frac{M^{m-1}}{(m-1)!} (t - t_0)^{m-1} \right). \quad (10)$$

Предполагая, что верно (10), докажем $(t, x_m) \in \Omega$. Для этого рассмотрим следующие случаи:

$$1) \ t_0 \leq t < t_0 + \frac{\varepsilon^\gamma}{M} \quad \text{и} \quad 2) \ t_0 + \frac{\varepsilon^\gamma}{M} \leq t \leq T,$$

где γ – произвольная постоянная, не зависящая от ε и $0 < \gamma < 1$.

Пусть
$$1) \ t_0 \leq t < t_0 + \frac{\varepsilon^\gamma}{M}.$$

Из (10), учитывая У.П.1, имеем

$$|x_m| \leq |x_1| e^{M(t-t_0)} \leq |x_1| e^{\varepsilon^\gamma} \leq |x_1| \leq |x^0| e^{\frac{1}{\varepsilon} F_1(t)} \leq |x^0| \leq \delta.$$

Пусть
$$2) \ t_0 + \frac{\varepsilon^\gamma}{M} \leq t \leq T, \text{ тогда } F_1(t) < 0,$$

следовательно, $e^{\frac{1}{\varepsilon} F_1(t) + M(T-t_0)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. $e^{\frac{F_1(t) + \varepsilon M(T-t_0)}{\varepsilon}} < 1$.

Учитывая это, из (10) получим

$$|x_m| \leq |x_1| e^{M(t-t_0)} \leq |x_1| e^{M(T-t_0)} = |x^0| e^{\frac{1}{\varepsilon} F_1(t) + M(T-t_0)} < |x^0| \leq \delta.$$

Таким образом, если верно (10), то $(t, x_m) \in \Omega$.

Переходим к доказательству (10).

Пусть оценка (10) верна при $m = k$:

$$|x_k| \leq |x_1| \left(1 + M(t - t_0) + \frac{M^2}{2!} (t - t_0)^2 + \dots + \frac{M^{k-1}}{(k-1)!} (t - t_0)^{k-1} \right), \quad (11)$$

причем $(t, x_k) \in \Omega$.

Докажем справедливость оценки для $m = k + 1$.

Из (9) имеем

$$|x_{k+1}| \leq |x^0| e^{\frac{1}{\varepsilon} F_1(t)} + \int_{t_0}^t e^{\frac{1}{\varepsilon} [F_1(t) - F_1(\tau)]} |g(\tau, x_k)| d\tau.$$

Так как $(t, x_k) \in \Omega$, то выполняется неравенство

$$|g(\tau, x_k)| \leq M |x_k(\tau, \varepsilon)|.$$

Таким образом,

$$|x_{k+1}(t, \varepsilon)| \leq |x_1| + M \int_{t_0}^t e^{\frac{1}{\varepsilon} [F_1(t) - F_1(\tau)]} |x_k(\tau, \varepsilon)| d\tau \quad (12)$$

Используя оценку (11), из (12) получим

$$|x_{k+1}(\tau, \varepsilon)| \leq |x_1| + M \int_{t_0}^t e^{\frac{1}{\varepsilon} [F_1(t) - F_1(\tau)]} |x_1(\tau, \varepsilon)| \sum_{p=0}^k \frac{M^p}{p!} (\tau - t_0)^p d\tau.$$

Отсюда, используя оценку

$$|x_1(\tau, \varepsilon)| = |x^0| e^{\frac{1}{\varepsilon} F_1(\tau)},$$

имеем

$$\begin{aligned} |x_{k+1}(\tau, \varepsilon)| &\leq |x_1| + M \int_{t_0}^t e^{\frac{1}{\varepsilon} [F_1(t) - F_1(\tau)]} |x^0| e^{\frac{1}{\varepsilon} F_1(\tau)} \sum_{p=0}^k \frac{M^p}{p!} (\tau - t_0)^p d\tau = \\ &= |x_1| + M |x^0| e^{\frac{1}{\varepsilon} F_1(t)} \int_{t_0}^t \sum_{p=0}^k \frac{M^p}{p!} (\tau - t_0)^p d\tau = \\ &= |x_1| + M |x_1| \sum_{p=0}^k \frac{M^p}{p!} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^p d\tau = |x_1| \left[1 + \sum_{p=0}^k \frac{M^{p+1}}{(p+1)!} (t - t_0)^{p+1} \right] \end{aligned}$$

или

$$|x_{k+1}| \leq |x_1| \left[1 + \sum_{p=0}^k \frac{M^{p+1}}{(p+1)!} (t - t_0)^{p+1} \right] = |x_1| \sum_{p=0}^{k+1} \frac{M^p}{p!} (t - t_0)^p.$$

Полученная оценка показывает справедливость оценки (10) при $m = k + 1$.

Из (10) следует, что $\forall t \in [t_0, T] \wedge \forall m \in N : |x_m| \leq |x_1| e^{M \cdot (t - t_0)}$.

Теперь докажем сходимость последовательности $\{x_m\}$. Для этого x_m представим в виде

$$x_m = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_m - x_{m-1}).$$

Пусть $x_0(t, \varepsilon) \equiv 0$.

При $m = 1$ имеем $|x_1| = |x^0| e^{\frac{1}{\varepsilon} F_1(t)}$. Так как, $\forall k \in N : (t, x_k) \in \Omega$, то выполняется условие У.П.3.

Далее, учитывая U.II.3., получим

$$|x_2 - x_1| \leq \int_{t_0}^t e^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} [F_1(t) - F_1(\tau)] |g(\tau, x_1) - g(\tau, 0)| d\tau \leq M |x^0| e^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} (t - t_0) = |x_1| M (t - t_0).$$

Пусть
$$|x_k - x_{k-1}| \leq |x_1| \frac{M^{k-1} (t - t_0)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Для $m = k + 1$ имеем

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_k| &\leq \int_{t_0}^t e^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} [F_1(t) - F_1(\tau)] |g(\tau, x_k) - g(\tau, x_{k-1})| d\tau \leq \\ &\leq M \int_{t_0}^t e^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} [F_1(t) - F_1(\tau)] |x_k - x_{k-1}| d\tau \leq M \int_{t_0}^t e^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} [F_1(t) - F_1(\tau)] |x_1| \frac{M^{k-1} (\tau - t_0)^{k-1}}{(k-1)!} d\tau = \\ &= \frac{M^k}{(k-1)!} |x^0| e^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{k-1} d\tau = |x_1| \frac{M^k}{k!} (t - t_0)^k. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |x_m| &\leq |x_1| + |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_m - x_{m-1}| \leq \\ &\leq |x_1| + |x_1| M (t - t_0) + |x_1| \frac{M^2 (t - t_0)^2}{2!} + \dots + |x_1| \frac{M^m (t - t_0)^m}{m!} \leq \\ &\leq |x_1| \left(1 + M (t - t_0) + \dots + \frac{M^m (t - t_0)^m}{m!} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) следует, что $\{x_m(t, \varepsilon)\}$ сходится к некоторой функции $x(t, \varepsilon)$, которая является решением уравнения (8).

Если учесть (10), то для этого решения получим оценку

$$|x(t, \varepsilon)| \leq |x_1| e^{M(T-t_0)}.$$

Таким образом, оценка (7) доказана.

Докажем единственность решения.

Допустим, что существует другое решение $y(t, \varepsilon)$ задачи (5), (6). Причем $(t, y(t, \varepsilon)) \in \Omega$.

Тогда это решение можно представить в следующем виде:

$$y(t, \varepsilon) = x^0 e^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} F(t) + \int_{t_0}^t e^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} [F(t) - F(\tau)] g(\tau, y(\tau, \varepsilon)) d\tau.$$

Следуя [3], имеем

$$|x_m - y| \leq \int_{t_0}^t e^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} [F_1(t) - F_1(\tau)] |g(\tau, x_{m-1}) - g(\tau, y)| d\tau, \quad (14)$$

где
$$x_m(t, \varepsilon) = x^0 e^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} F(t) + \int_{t_0}^t e^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} [F(t) - F(\tau)] g(\tau, x_{m-1}(\tau, \varepsilon)) d\tau.$$

Так как $\forall m \in N : (t, x_m) \in \Omega$ и $(t, y) \in \Omega$, то выполняется У.П.3. Учитывая сказанное, из (14) при $m = 1, 2$ имеем

$$\begin{aligned} |x_1 - y| &\leq \int_{t_0}^t e^{\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} |g(\tau, y)| d\tau \leq \int_{t_0}^t e^{\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} M |y| d\tau \leq \\ &\leq M \int_{t_0}^t e^{\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} e^{M(T-t_0)} |x_1| d\tau \leq M e^{M(T-t_0)} |x^0| e^{\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} F_1(t)} (t - t_0); \\ |x_2 - y| &\leq \int_{t_0}^t e^{\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} |g(\tau, x_1) - g(\tau, y)| d\tau \leq \int_{t_0}^t e^{\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} M |x_1 - y| d\tau \leq \\ &\leq M \int_{t_0}^t e^{\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} M e^{M(T-t_0)} |x^0| e^{\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} F_1(\tau)} (\tau - t_0) d\tau \leq M^2 e^{M(T-t_0)} |x^0| e^{\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} F_1(t)} \frac{(t - t_0)^2}{2!}. \end{aligned}$$

Предположим, что

$$|x_m - y| \leq |x_1| \frac{M^m e^{M(T-t_0)} (t - t_0)^m}{m!}. \quad (15)$$

Для $|x_{m+1} - y|$, учитывая (15), из (14) имеем

$$\begin{aligned} |x_{m+1} - y| &\leq \int_{t_0}^t e^{\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} |g(\tau, x_m) - g(\tau, y)| d\tau \leq \int_{t_0}^t e^{\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} M |x_m - y| d\tau \leq \\ &\leq M \int_{t_0}^t e^{\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))} |x_1| \frac{M^m e^{M(T-t_0)} (\tau - t_0)^m}{m!} d\tau = \\ &= \frac{M^{m+1} e^{M(T-t_0)}}{m!} |x^0| e^{\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} F_1(t)} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^m d\tau = |x_1| \frac{M^{m+1} e^{M(T-t_0)} (t - t_0)^{m+1}}{(m+1)!}. \end{aligned}$$

Таким образом, (15) верна для любого $m \in N$. Из (15) при $m \rightarrow \infty$ имеем $|x - y| \leq 0$.

Из этого следует, что $x = y$. Единственность решения доказана.

Теорема доказана полностью.

Приведем пример: $\lambda(t) = t$, $t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$,

$$F_1(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1), \quad F_1(-1) = 0, \quad F_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0.$$

$g(t, x) = a(t) \frac{x}{x^2 + 1}$, где $\forall t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] : a(t)$ – произвольная монотонно воз-

растающая функция, причем $|a(t)| \leq M$; $\Omega = \left\{ (t, x) \mid t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right], |x| < 1 \right\}$.

Для данного примера выполняются условия У.І. и У.ІІ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. Сер. 3. 2001. Вып. 6. С.190–200.
2. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 575–586.
3. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.

Статья поступила 10.12.2013 г.

Taliev A. A. STABILITY LOSS PROTRACTION FOR SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS WITH CONTINUOUS RIGHT-HAND SIDES

Since the middle of the last century, mathematicians' attention was attracted by differential equations with small parameters at highest derivatives. Such equations are called singularly perturbed. The central problem in the theory of singularly perturbed equations is solving the problem about the asymptotic proximity of solutions of singularly perturbed equations and degenerate equation. First, this problem was solved by A.N. Tikhonov. In works by A.N. Tikhonov, one of the conditions is the stability of the rest point. It is proved that under these conditions (restrictions), there is a limit transition. The limit transition is not uniform over the whole interval. In a vicinity of the point, there appears so-called boundary layer. In works by A.B. Vasilyeva, solutions' asymptotic expansions by the small parameter of ordinary differential equations were constructed. M.I. Imanaliev developed a method for expanding solutions of singularly perturbed and integro-differential equations. The first work in which the stability condition is violated and nevertheless there exists the transition limit is M.A. Shishkova's work. The phenomenon that is described in the works of M.A. Shishkova was called the loss stability protraction. In those works, the posed problems were solved in the space of analytic functions, i.e., right-hand sides of the equations were supposed to be analytic in a certain region of the complex plane.

In this paper, we consider singularly perturbed equations with continuous right-hand sides such that the stability condition for the rest point of the adjoint equation is not satisfied on the considered interval. We prove the existence and uniqueness of the solution. The existence of the solution is proved using the method of successive approximations. An example is presented.

Keywords: singularly perturbed equation, degenerate ajoint equation, rest point, stability and instability of a rest point, continuous functions.

TALIEV Aidarbek Abdurazakovich

(The senior teacher of the Osh State University, Osh, Kyrgyzstan)

E-mail: aidartaliev@mail.ru

REFERENCES

1. Alybaev K.S. Metod linij urovnja issledovanija singuljarno vozmushhennyh uravnenij pri narushenii uslovija ustojchivosti (2001) *Vestnik KGNU*, ser. 3, no. 6., pp. 190–200. (in Russian)
2. Tihonov A.N. Sistemy differencial'nyh uravnenij soderzhashhie malye parametry pri proizvodnyh (1952) *Mat. sb.*, v. 31(73), no. 3, pp. 575–586. (in Russian)
3. Bellman R. *Teorija ustojchivosti reshenij differencial'nyh uravnenij*. Moscow, Izd-vo inostranoj literatury, 1954. (in Russian)

УДК 515.127

А.В. Титова

ЛИНЕЙНЫЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЧТИ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И СОВПАДЕНИЕ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Рассматривается пространство всех непрерывных функций $C_p(X, G)$, где G – некоторое топологическое пространство. Если множество G наделено структурой почти кольца, то множество $C_p(X, G)$ является топологическим почти модулем. Доказано, что размерность $\dim$ топологического пространства X является изоморфным инвариантом его топологического почти модуля $C_p(X, I)$, где $I = [0, 1)$ – естественно определенное почти кольцо.

Ключевые слова: почти кольцо, топологический почти модуль, непрерывный гомоморфизм, пространство непрерывных функций, топология поточечной сходимости.

Все неопределенные в статье понятия можно найти в [1].

В статье В.Г. Пестова [2] было доказано, что из линейной гомеоморфности пространств непрерывных функций $C_p(X, \mathbf{R})$ и $C_p(Y, \mathbf{R})$ следует совпадение размерностей $\dim X = \dim Y$, где $\dim X$ обозначает обычную лебегову размерность [1]. В данной статье вместо поля $\mathbf{R}$ рассматривается почти кольцо $I = \langle [0, 1), +, \cdot \rangle$ и вместо топологического векторного пространства $C_p(X, \mathbf{R})$ – топологический почти модуль $C_p(X, I)$ и доказывается аналогичный результат о совпадении размерностей.

Под почти кольцом G понимается абелева группа по сложению и полугруппа по умножению $\langle G, +, \cdot \rangle$, причем существование единицы в G не предполагается (и закон дистрибутивности, вообще говоря, не имеет места). Если G наделено топологией и обе операции в G непрерывны, то G называется топологическим почти кольцом.

Будем называть непустое множество A почти модулем над почти кольцом G , если выполнены следующие условия:

- 1) $\langle A, + \rangle$ является абелевой группой;
- 2) для любых $\alpha, \beta \in K$, $x \in A$, выполнено $(x\alpha)\beta = x(\alpha\beta)$ и $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

Пусть X – вполне регулярное T_1 -пространство и G – произвольное топологическое почти кольцо. Рассмотрим пространство всех непрерывных функций $\{f \mid f: X \rightarrow G\}$, наделённое топологией поточечной сходимости. введём на этом пространстве две операции: операцию сложения, в которой для любых $g, h \in \{f \mid f: X \rightarrow G\}$ положим $(g + h)(x) = g(x) + h(x)$ и внешнюю операцию умножения $(\alpha, g) \rightarrow \alpha \cdot g(x)$ на число α из $[0, 1)$ соответственно. Получаем топологический почти модуль, который будем обозначать $C_p(X, G)$.

Определение 1. Топологические пространства X и Y называются G -эквивалентными, если топологические почти модули $C_p(X, G)$ и $C_p(Y, G)$ топологически линейно гомеоморфны.

Далее в качестве G будем рассматривать топологическое почти кольцо $I = \langle [0, 1), +, \cdot \rangle$, где умножение определяется стандартным образом, а сложение – следующим образом: для любых $x, y \in I$ положим

$$x + y = \begin{cases} x + y, & \text{если } x + y < 1; \\ x + y - 1, & \text{если } x + y \geq 1. \end{cases}$$

Далее рассматривается только I -эквивалентность.

Перейдем к изложению нашей модификации упомянутой выше теоремы В.Г. Пестова [2]. Отметим, что теорема Пестова являлась обобщением ряда предшествующих результатов [3–5] и была обобщена на случай равномерных гомеоморфизмов в [6].

Рассмотрим множество линейных непрерывных гомоморфизмов $L_p(X, I) = \{f \mid f : C_p(X, I) \rightarrow I\}$, которое наделено топологией поточечной сходимости. Аналогично известной теореме об общем виде функционала на пространстве $C_p(X, \mathbf{R})$ [7] сформулируем следующее утверждение.

Лемма 1. Если $f : C_p(X, I) \rightarrow I$ – непрерывный гомоморфизм, то $f(\varphi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(x_i)$ для всякого $\varphi \in C_p(X, I)$ и для некоторых $x_i \in X, \alpha_i \in I, i = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Возьмем $g \equiv 0 \in C_p(X, I)$. Тогда $f(g) = 0$ (в силу линейности f), и, так как f непрерывно, то существуют $x_1, x_2, \dots, x_n \in X, \varepsilon > 0$, такие, что $f(O(g, x_1, \dots, x_n, \varepsilon)) \subseteq [0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1)$, где $O(g, x_1, \dots, x_n, \varepsilon)$ – окрестность функции g в $C_p(X, I)$. Можно считать, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Возьмем теперь $\varphi \in C_p(X, I)$ так, что $\varphi(x_i) = 0, i = 1, \dots, n$. Покажем, что тогда $f(\varphi) = 0$. Ясно, что $f(\varphi) \subseteq [0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1)$.

Если $k \in \mathbb{N}$, то $k\varphi \in O(g, x_1, \dots, x_n, \varepsilon)$ для любого k , и поэтому $|f(k\varphi)| < \frac{1}{3}$.

Если предположить, что $f(\varphi) \neq 0$, то для некоторого k : $f(k\varphi) \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Получаем противоречие.

Таким образом, $f(\varphi) = 0$.

Выберем $\varphi_i \in C_p(X, I)$ так, чтобы было $\varphi_i(x_i) = \frac{1}{2}, \varphi_i(x_j) = 0$ при $i \neq j, i = 1, \dots, n$, и положим $\alpha_i = 2f(\varphi_i)$.

Покажем, что для всякой функции $\varphi \in C_p(X, I)$, $f(\varphi) = \alpha_1 \cdot \varphi(x_1) + \dots + \alpha_n \cdot \varphi(x_n)$. Положим $\psi = \frac{1}{2}\varphi - \varphi(x_1)\varphi_1 - \dots - \varphi(x_n)\varphi_n$. Очевидно, что $\psi \in C_p(X, I)$ и $\psi(x_i) = 0$ при всех $i = 1, \dots, n$. Действительно,

$$\psi(x_i) = \frac{1}{2}\varphi(x_i) - \varphi(x_1)\varphi_1(x_i) - \dots - \varphi(x_n)\varphi_n(x_i) = \frac{1}{2}\varphi(x_i) - \varphi(x_i)\frac{1}{2} = 0.$$

Тогда
$$0 = f(\psi) = \frac{1}{2} f(\varphi) - \varphi(x_1)f(\varphi_1) - \dots - \varphi(x_n)f(\varphi_n),$$

получаем $f(\varphi) = \sum_{i=1}^n 2\varphi(x_i)f(\varphi_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(x_i)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим следующее множество линейных непрерывных гомоморфизмов:

$$L_p(X, I) = \{f \mid f : C_p(X, I) \rightarrow I\}.$$

Это множество является абелевой топологической группой относительно операции сложения над почти кольцом I , то есть топологическим почти модулем. Назовем его сопряженным к $C_p(X, I)$. Ясно, что если $C_p(X, I) \cong C_p(Y, I)$, то $L_p(X, I) \cong L_p(Y, I)$.

Пусть теперь пространства X и Y являются I -эквивалентными. Введем следующее обозначение: $L = L_p(X, I)$ (или $L_p(Y, I)$). Тогда X – максимальная линейно независимая система элементов в L . Отметим, что элементы из $L_p(X, I)$ и $L_p(Y, I)$ будем обозначать как $\hat{x}$ и $\hat{y}$ соответственно. Для элементов из X или Y «крышку» сверху мы будем просто опускать.

Обозначим теперь через

$$B_n(X) = \{\hat{x} \mid \hat{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in L, \alpha_i \in I, x_i \in X, i = 1, \dots, n\}.$$

Заметим, что система ненулевых элементов $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ группы L называется линейно независимой, если из равенства $k_1 x_1 + \dots + k_n x_n = 0$ ($k_i \in I$) следует, что $k_1 x_1 = \dots = k_n x_n = 0$. Точнее, это означает, что $k_i = 0$, если порядок элемента $o(x_i) = \infty$, или $o(x_i)$ делит k_i , если порядок $o(x_i)$ элемента x_i конечен.

Далее положим

$$l_X(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : \hat{x} \in B_n(X)\}, A_n(X) = \{\hat{x} \in L : l_X(\hat{x}) = n\}.$$

Определение 2. Пространство X назовем максимальной топологической системой образующих в L (или кратко максимальной ТСО), если X есть максимальная линейно независимая система элементов в L и для всех $n \in \mathbb{N}$ базу открытых окрестностей каждой точки $\hat{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in A_n(X)$ образуют в $B_n(X)$ множества вида $\sum_{i=1}^n A_i U_i$, где $\alpha_i \in A_i$, A_i открыты в $I \setminus \{0\}$, $x_i \in U_i$, U_i открыты в X и $U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Лемма 2. Если X есть максимальная ТСО в L , то каждое $B_n(X)$ замкнуто в L , $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $\hat{x} \in L \setminus B_n(X)$, тогда $\hat{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in I \setminus \{0\}$, $x_i \in X$, $i = 1, \dots, k$, $k \neq n$. Так как X есть максимальная ТСО, то $O_x = \sum_{i=1}^k A_i U_i$, $k \neq n$, A_i открыты в $I \setminus \{0\}$, U_i открыты в X и $U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, k$. Следовательно, $O_x \subset L \setminus B_n(X)$.

Определение 3. Пространства X и Y назовем L^* -эквивалентными, если X и Y вкладываются в некоторый топологический почти модуль L в качестве максимальных топологических систем образующих.

Пусть теперь X и Y вложены в топологический почти модуль L как максимальные ТСО, $n \in \mathbb{N}$, $\delta = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$.

Через L_δ обозначим множество

$$\{\hat{x} \in L : l_X(\hat{x}) = n, \hat{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \alpha_i \in I \setminus \{0\}, x_i \in X, l_Y(x_i) = m_i, i = 1, \dots, n\}$$

Лемма 3. $L = \cup \{L_\delta : n \in \mathbb{N}, \delta \in \mathbb{N}^n\}$.

Доказательство. Докажем, что $L \subset \cup \{L_\delta : n \in \mathbb{N}, \delta \in \mathbb{N}^n\}$. Так как X есть максимальная ТСО в L , то для всякого $\hat{x} \in L$ выбираем минимальное разложение $l_X(\hat{x}) = n$, $\hat{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in I \setminus \{0\}$, $x_i \in X, i = 1, \dots, n$. Так как Y есть ТСО в L , разложим x_i : для каждого x_i существует m_i , такой, что $l_Y(x_i) = m_i$, $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} \beta_j y_j$, $\beta_j \in I \setminus \{0\}$, $y_j \in Y, j = 1, \dots, m_i, i = 1, \dots, n$. Тогда в качестве δ возьмем $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$. Следовательно, $\hat{x} \in L_\delta$ и $\hat{x} \in \cup \{L_\delta : n \in \mathbb{N}, \delta \in \mathbb{N}^n\}$.

Лемма 4. Если X имеет счетную базу, то каждое L_δ имеет тип F_σ в L .

Доказательство. Рассмотрим множества

$$F_1 = \{\hat{x} \in L : l_X(\hat{x}) \leq n, \hat{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \alpha_i \in I \setminus \{0\}, x_i \in X, l_Y(x_i) = m_i, i = 1, \dots, n\}$$

и

$$F_2 = \{\hat{x} \in L : l_X(\hat{x}) \leq n-1, \hat{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \alpha_i \in I \setminus \{0\}, x_i \in X, l_Y(x_i) = m_i, i = 1, \dots, n-1\}.$$

Рассмотрим их разность

$$F_1 \setminus F_2 = \{\hat{x} \in L : l_X(\hat{x}) = n, \hat{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \alpha_i \in I \setminus \{0\}, x_i \in X, l_Y(x_i) = m_i, i = 1, \dots, n\} = L_\delta.$$

Тогда, учитывая, что X имеет счетную базу и что F_1, F_2 замкнуты в L , имеем

$$L_\delta = F_1 \setminus F_2 = F_1 \cap (X \setminus F_2) = F_1 \cap (\cup_{n=1}^\infty M_n) = \cup_{n=1}^\infty (F_1 \cap M_n) \in F_\sigma,$$

где $X \setminus F_2 = \cup_{n=1}^\infty M_n$, M_n замкнуто в $X \setminus F_2$.

Предложение 1. Пусть топологические пространства X и Y являются L^* -эквивалентными. Тогда Y является объединением счетного множества своих подпространств $Y_\delta, \delta \in A$, причем для каждого $\delta \in A$ и $y \in Y_\delta$ существует открытая в Y_δ окрестность O точки y , являющаяся объединением конечного семейства своих замкнутых подмножеств, каждое из которых гомеоморфно некоторому подпространству X . Если X имеет счетную базу, то каждое $Y_\delta, \delta \in A$, есть множество типа F_σ в Y .

Доказательство. Вложим X и Y в топологический почти модуль L в качестве максимальной ТСО. Положим $A = \cup \{\mathbb{N}^n : n \in \mathbb{N}\}$ и $Y_\delta = Y \cap L_\delta, \delta \in A$. Пусть

$$\hat{y} \in Y_\delta, \hat{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \alpha_i \in I \setminus \{0\}, x_i \in X, x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j.$$

Фиксируем дизъюнктное семейство $U_1, U_2, \dots, U_n$, открытых в X окрестностей соответственно точек $x_1, x_2, \dots, x_n$. Множество $U = \sum_{i=1}^n I \setminus \{0\} U_i$ – окрестность $\hat{y}$

в $A_n(X)$. Каждый элемент $y' \in U$ имеет единственное представление вида $y' = \sum_{i=1}^n \alpha'_i y'_i$, $\alpha'_i \in I \setminus \{0\}$, $y'_i \in U_i$; определим для $i = 1, 2, \dots, n$ отображения $\pi_i : U \rightarrow U_i$, положив $\pi_i(y') = y'_i$. По определению непрерывности π_i непрерывно.

Пусть при $1 \leq i \leq n$ $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} \beta_{ij} y_{ij}$, $\beta_{ij} \in I \setminus \{0\}$, $y_{ij} \in Y$, $j = 1, \dots, m_i$, $i = 1, \dots, n$.

Для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ фиксируем открытые, попарно не пересекающиеся множества V_{ij} , $j = 1, 2, \dots, m_i$, в Y и такие, что $y_{ij} \in V_{ij}$, и, если обозначить

$$V_i = \sum_{j=1}^{m_i} I \setminus \{0\} \cdot V_{ij}, \text{ то } x_i \in X \cap V_i \subset U_i.$$

Определим естественные непрерывные отображения $\omega_{ij} : V_i \rightarrow V_{ij}$ аналогично отображениям π_i . Пусть при $1 \leq i \leq n$ W_i открыто в X , $W_i \subset U_i$ и $W_i \cap A_{m_i}(Y) = V_i \cap U_i$.

Положим $O = Y_\delta \cap \sum_{i=1}^n I \setminus \{0\} W_i$, где $\sum_{i=1}^n I \setminus \{0\} W_i$ открыто, тогда O открыто в Y_δ и непусто: $O \ni \hat{y}$.

Пусть $y' \in O$, $y' = \sum_{i=1}^n \alpha'_i x'_i$, $x'_i \in X$ и для каждого i : $x'_i = \sum_{j=1}^{m_i} \beta'_{ij} y'_{ij}$, $y'_{ij} \in Y$, тогда

$$y' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \alpha'_i \beta'_{ij} y'_{ij} = y'_{ij}$$

для некоторых i, j .

Итак, $\forall y' \in O \exists i, j : \omega_{ij}(\pi_i|_O(y')) = \omega_{ij}(y'_i) = y'_{ij} = y'$, обозначим через A_{ij} – множество всех неподвижных точек отображения $\omega_{ij} \circ \pi_i|_O$. В силу произвольности выбора y' имеем $O = \cup_{i,j} A_{ij}$. Каждое A_{ij} , замкнутое в O как множество неподвижных точек, а отображение π_i на A_{ij} есть гомеоморфизм (так как композиция $\omega_{ij} \circ \pi_i|_O$ есть гомеоморфизм.)

Из леммы 4 следует, что каждое $Y_\delta, \delta \in A$, есть множество типа F_σ в Y .

Теорема 1. Пусть X и Y – пространства со счетной базой являются L^* -эквивалентными.

Тогда $\dim X = \dim Y$.

Доказательство. Следует из предложения 1 и теоремы суммы для размерности $\dim$, учитывая, что для пространств со счетной базой размерность наследственна [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
2. *Пестов В.Г.* Совпадение размерностей $\dim$ l -эквивалентных топологических пространств // ДАН СССР. 1982. Т. 266. № 3. С. 553–556.
3. *Павловский Д.С.* О пространствах непрерывных функций // ДАН СССР. 1980. Т. 253. № 1. С. 38–41.
4. *Архангельский А.В.* Принцип τ -аппроксимации и признак равенства размерности бикомпактов // ДАН СССР. 1980. Т. 252. № 4. С. 777–780.

5. Замбахидзе Л.Г. О соотношениях между размерностями и кардинальнозначными функциями пространств, погружаемых в пространства специального вида // Сообщ. АН ГССР. 1980. Т. 100. № 3. С. 557–560.
6. Гулько С.П. О равномерных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций // Труды Математического института РАН. 1992. Т. 193. С. 82–88.
7. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 25.

Статья поступила 15.05.2014 г.

Titova A.V. LINEAR HOMEOMORPHISMS OF TOPOLOGICAL ALMOST MODULES OF CONTINUOUS FUNCTIONS AND COINCIDENCE OF DIMENSION

In this paper, the space of continuous functions $C_p(X, G)$, where G is a topological space, is considered. If the set G is endowed with an almost ring structure, the set $C_p(X, G)$ is a topological almost module. It is proved that the dimension $\dim$ of the topological space X is an isomorphic invariant of its topological almost module $C_p(X, I)$, where $I = [0, 1)$ is a naturally defined almost ring.

This statement is based on ideas of G.G. Pestov's work «The coincidence of dimension $\dim$ of l -equivalent topological spaces», where the following theorem was formulated: if $C_p(X, \mathbf{R})$ and $C_p(Y, \mathbf{R})$ are linearly homeomorphic spaces, then $\dim X = \dim Y$. Here, X and Y are arbitrary totally regular spaces, and $C_p(X, \mathbf{R})$ is the space of all continuous real functions on X with the pointwise convergence topology. Note that Pestov's theorem was generalized to the case of uniform homeomorphisms by S. P. Gul'ko.

Keywords: almost ring, topological almost module, continuous homomorphism, space of continuous functions, pointwise convergence topology.

A.V. Titova (M. Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: asya_mis@mail.ru

REFERENCES

1. Engel'king R. *Obshchaya topologiya*. Moscow, Mir Publ., 1986. (in Russian)
2. Pestov V.G. Sovpadenie razmernostey dim l -ekvivalentnykh topologicheskikh prostranstv (1982) *DAN SSSR*, v. 266, no. 3, pp. 553 – 556. (in Russian)
3. Pavlovskiy D.S. O prostranstvakh nepreryvnykh funktsiy (1980) *DAN SSSR*, v. 253, no. 1, pp. 38–41. (in Russian)
4. Arkhangel'skiy A.V. Printsip τ -approximatsii i priznak ravenstva razmernosti bikompaktov (1980) *DAN SSSR*, v. 252, no. 4, pp. 777–780. (in Russian)
5. Zambakhidze L.G. O sootnosheniyakh mezhdru razmernostyami i kardinal'noznachnymi funktsiyami prostranstv, pogruzhaemykh v prostranstva spetsial'nogo vida (1980) *Soobshch. AN GSSSR*, v. 100, no. 3, pp. 557–560. (in Russian)
6. Gul'ko S.P. O ravnomernykh gomeomorfizmakh prostranstv nepreryvnykh funktsiy (1992) *Trudy Matematicheskogo instituta RAN*, v. 193, pp. 82–88. (in Russian)
7. Arkhangel'skiy A.V. *Topologicheskie prostranstva funktsiy*. Moscow, MGU Publ., 1989, p. 25. (in Russian)

УДК 512.541

Д.С. Чистяков

**АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С UA-КОЛЬЦОМ ЭНДОМОРФИЗМОВ
И ИХ ОДНОРОДНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ¹**

Мультипликативные свойства колец играют важную роль в структурной теории колец. Под мультипликативными свойствами понимаются свойства мультипликативной полугруппы кольца. Прежде всего это касается свойств элементов, идеалов и самих колец. Следующий вопрос вызывает особый интерес: когда каждый мультипликативный изоморфизм полугрупп является изоморфизмом колец? Кольца, обладающие данным свойством, называют кольцами с однозначным сложением. В работе изучаются абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов, решаются близкие вопросы.

Ключевые слова: кольцо с однозначным сложением, однородное отображение.

Идея данной работы возникла на основе статьи [1]. Заключается она в следующем: исследовать UA-свойства абелевых групп и их колец эндоморфизмов, используя данные о почтикольце однородных отображений [2–5]. Таким образом, мы обобщаем понятие «обобщенной эндопримальности» абелевой группы, введенное и исследованное У. Альбрехтом, С. Бреазом, У. Уиклессом [1]. В то же время мы по-новому определяем эндоморфные модули [2]. Это позволяет рассматривать обобщенно эндопримальные абелевы группы и эндоморфные модули с единых позиций. Вначале сформулируем необходимые для дальнейшего изложения определения.

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, A и B – левые унитарные модули над кольцом R . Введем обозначение $M_R(A, B) = \{f: A \rightarrow B \mid f(ra) = rf(a), r \in R, a \in A\}$. Элементы множества $M_R(A, B)$ называются однородными отображениями. Множество

$$M_R(A) = \{f: A \rightarrow A \mid f(ra) = rf(a), r \in R, a \in A\}$$

образует почтикольцо относительно операций сложения и композиции отображений. Всегда имеет место включение $\text{End}_R(A) \subseteq M_R(A)$.

Определение 1. Пусть n – натуральное число. R -модуль A называется n -эндоморфным, если

$$M_R(A^n) = \text{End}_R(A^n).$$

Определение 2. R -модуль A называется эндоморфным, если он n -эндоморфен для всех $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, обобщенно эндопримальная абелева группа [1, определение 3] – это абелева группа, которая является эндоморфным модулем над своим кольцом эндоморфизмов. Исследованию абелевых групп как 1-эндоморфных модулей над своим кольцом эндоморфизмов посвящены работы [3–5].

¹ Работа выполнена при поддержке совместной программы «Михаил Ломоносов III» Министерства образования и науки Российской Федерации и DAAD: научно-исследовательские стипендии и научные стажировки (Michail Lomonosov III – Forschungsstipendien und Aufenthalte).

Лемма 3. Следующие условия эквивалентны:

- 1) A – n -эндоморфный R -модуль;
- 2) каждое отображение $f \in M_R(A^n, A)$ аддитивно;
- 3) каждое отображение $f \in M_R(A^n, A)$ может быть представлено в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n, \text{ где } u_1, \dots, u_n \in \text{End}_R(A).$$

Доказательство. Полагаем $B = \bigoplus_{i=1}^n A_i$, $A_i \cong A$, $e_i: B \rightarrow A$ – соответствующие проекции. Z -модульный изоморфизм

$$\Phi: M_R(B) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_R(B, A_i), f \rightarrow (e_1 f, \dots, e_n f)$$

дает равносильность первых двух условий леммы.

3) $\Rightarrow$ 2) Для $f(x_1, \dots, x_n) = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n \in M_R(A^n, A)$, где $u_1, \dots, u_n \in \text{End}_R(A)$ и $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n \in A$, имеем

$$\begin{aligned} f(a_1 + a'_1, \dots, a_n + a'_n) &= u_1(a_1 + a'_1) + \dots + u_n(a_n + a'_n) = \\ &= u_1 a_1 + \dots + u_n a_n + u_1 a'_1 + \dots + u_n a'_n = f(a_1, \dots, a_n) + f(a'_1, \dots, a'_n). \end{aligned}$$

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) следует из изоморфизма

$$M_R(A^n, A) = \text{Hom}_R(A^n, A) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}_R(A, A) = \bigoplus_{i=1}^n \text{End}_R(A).$$

Лемма доказана.

Заметим, что конечная прямая сумма копий эндоморфного модуля будет эндоморфным модулем.

Определение 4. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей. Кольцо R называется *кольцом с однозначным сложением* (UA-кольцом), если на его мультипликативной полугруппе $(R, *)$ можно задать единственную бинарную операцию $+$, превращающую ее в кольцо $(R, *, +)$.

Определение 5. Кольцо R называется UA-кольцом, если любой изоморфизм мультипликативных полугрупп колец $\alpha: R \rightarrow S$ является изоморфизмом колец.

Покажем равносильность определений 4 и 5. Если $\alpha: R \rightarrow S$ – мультипликативный, но не аддитивный изоморфизм колец, то новое сложение на полугруппе $(R, *)$ можно определить по правилу

$$x +' y = \alpha^{-1}(\alpha(x) + \alpha(y)).$$

Выполнение аксиом кольца проверяется непосредственно. С другой стороны, предположим, что на мультипликативной полугруппе $(R, *)$ можно определить две различные бинарные операции $+$ и $+'$ так, что тройки $(R, *, +)$ и $(R, *, +')$ образуют кольца. Тогда тождественное отображение $(R, *, +) \rightarrow (R, *, +')$ не является изоморфизмом колец.

Приведем некоторые примеры. Периодическая p -группа, имеющая прямое слагаемое $Z(p^\infty) \oplus Z(p^\infty)$, эндоморфна как модуль над своим кольцом эндоморфизмов [1, следствие 19]. Также p -группа, имеющая неограниченную базисную подгруппу, эндоморфна как модуль над своим кольцом эндоморфизмов [1, лемма 22]. Указанные группы имеют UA-кольцо эндоморфизмов [9]. Абелева группа $A = Z(p^\infty) \oplus B$, где $p^k B = 0$ для некоторого целого числа k , не является эндоморфным модулем над своим кольцом эндоморфизмов [1, лемма 20], ее кольцо эндоморфизмов не обладает свойством однозначности сложения [9].

Определение 6. R -модуль A называется *модулем с однозначным сложением* (UA-модулем), если на множестве A нельзя задать новое сложение, не изменяя действия кольца R на A .

Определение 7. R -модуль A называется UA-модулем, если каждая биекция из $M_R(A, B)$ является изоморфизмом для любого R -модуля B .

Покажем равносильность определений 6 и 7. Если $f: A \rightarrow B$ – R -однородное биективное отображение из R -модуля A в R -модуль B , не сохраняющее сложение, то новое сложение на множестве A можно определить по правилу

$$x + ' y = f^{-1}(f(x) + f(y)).$$

Легко видеть, что для $(A, +')$ выполняются все аксиомы модуля. При этом кольцо R действует на $(A, +)$ и $(A, +')$ одним и тем же образом. С другой стороны, если мы имеем два R -модуля $(A, +)$ и $(A, +')$ с одинаковым действием кольца R и различными операциями $+$ и $+$ ', то тождественное отображение из $(A, +)$ в $(A, +')$ не является изоморфизмом.

Кольцам с однозначным сложением посвящены работы [6 – 9]. Модули с однозначным сложением изучаются в [10 – 12]. В книгах [13] и [14] можно найти факты и понятия, используемые в данной статье.

Предложение 8. Каждый эндоморфный модуль является UA-модулем.

Доказательство. Пусть $(A, +)$ – эндоморфный модуль над кольцом R . Предположим, что существует другая бинарная операция $+$ ', такая, что $(A, +')$ – R -модуль с тем же действием кольца R на A . Рассмотрим отображение $f: A \rightarrow A$, действующее по правилу $f(x, y) = x + ' y$. В силу предположения, $f(x, y) = ux + vy$ для некоторых эндоморфизмов u и v . Заметим, что группы $(A, +)$ и $(A, +')$ имеют один и тот же нейтральный элемент 0 , поскольку кольцо R действует на них одним и тем же образом. Отсюда

$$x = x + ' 0 = f(x, 0) = ux, \quad x = 0 + ' x = f(0, x) = vx$$

для всех $x \in A$. Таким образом, u и v суть тождественные отображения, сложения $+$ и $+$ ' совпадают. Предложение доказано.

Заметим, что кольцо $Z(2)$ является UA-кольцом, однако векторное пространство $Z(2) \oplus Z(2)$ не является 1-эндоморфным модулем. Отображение $f: Z(2) \oplus Z(2) \rightarrow Z(2) \oplus Z(2)$, действующее по правилу $f(1, 1) = (1, 1)$ и $f(x) = (0, 0)$ во всех остальных случаях, не сохраняет сложение.

Во многих случаях абелевы группы, эндоморфные как модули над своим кольцом эндоморфизмов, имеют UA-кольцо эндоморфизмов.

Предложение 9. Пусть A – периодическая группа, такая, что ее 2-компонента не изоморфна группе $Z(2)$, а 3-компонента не изоморфна группе $Z(3)$. Следующие условия равносильны:

1. A – эндоморфный модуль над кольцом $End(A)$;
2. $End(A)$ – UA-кольцо.

Доказательство следует из результатов работ [1, §3; 9].

Хорошо известен класс $\mathbf{g}$, состоящий из самых смешанных редуцированных абелевых групп, часть без кручения которых является делимой группой конечного ранга.

Предложение 10. Пусть группа A принадлежит классу $\mathbf{g}$ и ее 2-компонента не изоморфна группе $Z(2)$, а 3-компонента не изоморфна группе $Z(3)$. Следующие условия эквивалентны:

1. A – эндоморфный модуль над кольцом $End(A)$;
2. $End(A)$ – UA-кольцо;
3. Если p -компонента $t_p(A)$ группы A отлична от нуля, то она содержит прямое слагаемое $Z(p^k) \oplus Z(p^k)$, где p^k – наибольший из порядков элементов группы $t_p(A)$.

Для доказательства данного факта нам понадобится следующее утверждение [8, лемма 1].

Лемма 11. Предположим, что кольцо K обладает такой системой идемпотентов $F = \{e_i \mid i \in I\}$, что

- 1) для любого $0 \neq k \in K$ найдется идемпотент $e_i \in F$, для которого $ke_i \neq 0$;
- 2) для всякого идемпотента $e_i \in F$ существует ортогональный ему идемпотент $e_j \in F$, такой, что для $x \in K$ из $e_i x e_i K e_j = 0 = e_j K e_i x e_i$ следует, что $e_i x e_i = 0$.

Тогда K – УА-кольцо.

Доказательство предложения 10. Эквивалентность условий 1 и 3 следует из [1, теорема 40].

Пусть $End(A)$ – УА-кольцо. Предположим, что некоторая ненулевая p -компонента $t_p(A)$ не содержит слагаемое $Z(p^k) \oplus Z(p^k)$, где p^k – наибольший из порядков элементов группы $t_p(A)$. В этом случае кольцо $End(t_p(A))$ не является УА-кольцом [9]. Имеет место прямое разложение $A \cong t_p(A) \oplus B$, где B – некоторая p -делимая группа. Откуда

$$End(A) \cong End(t_p(A)) \times End(B).$$

Построим отображение

$$\beta: End(t_p(A)) \times End(B) \rightarrow End(t_p(A)) \times End(B), (r, s) \rightarrow (\alpha(r), s),$$

где $\alpha: End(t_p(A)) \rightarrow End(t_p(A))$ – мультипликативный, но не аддитивный автоморфизм. Легко видеть, что отображение β является мультипликативным автоморфизмом, не сохраняющим сложение. Противоречие.

Пусть выполнено условие 3. Каждая ненулевая p -компонента группы A имеет вид

$$t_p(A) \cong Z(p^k) \oplus Z(p^k) \oplus A'_p$$

для некоторой p -группы A'_p , не содержащей элементы, порядок которых превосходит p^k . Пусть F – множество всех примитивных идемпотентов кольца $End(A)$. Для любого $0 \neq \varphi \in End(A)$ выполнено условие 1) леммы 11. В противном случае эндоморфизм φ аннулирует периодическую часть $t(A)$ группы A и, следовательно, существует ненулевой гомоморфизм $A/t(A) \rightarrow A$, что невозможно, поскольку группа A – редуцированная, а группа $A/t(A)$ – делимая.

Для любого $e \in F$ группа $e(A)$ изоморфна группе $Z(p^k)$ для некоторых p и k . Далее, $A \cong e(A) \oplus A'$. Группа A' содержит прямое слагаемое $e'(A)$, изоморфное $Z(p^m)$, где $m \geq k$ и $e' \in F$. Заметим, что

$$eEnd(A)e' \cong Hom(Z(p^m), Z(p^k)), eEnd(A)e \cong Z(p^k).$$

В силу точности $Z(p^k)$ -модуля $Hom(Z(p^m), Z(p^k))$ условие 2) леммы 11 выполнено, $End(A)$ – УА-кольцо. Предложение доказано.

Пусть A – абелева группа без кручения ранга 1. Согласно [2, теорема 3.5; 8], $End(A)$ -модуль A не является эндоморфным, а кольцо $End(A)$ не обладает свойством однозначности сложения.

Пусть A – сепарабельная абелева группа без кручения. Прямое слагаемое B ранга 1 группы A назовем *полусвязанным*, если в его дополнительном прямом слагаемом найдется прямое слагаемое ранга 1, тип которого сравним с типом B . Группу G назовем *полусвязанной*, если всякое ее прямое слагаемое ранга 1 полусвязанно.

Предложение 12. Пусть A – сепарабельная абелева группа без кручения. Следующие условия эквивалентны:

1. A – эндоморфный модуль над кольцом $End(A)$;
2. $End(A)$ – УА-кольцо;
3. A – полусвязанная группа.

Доказательство следует из результатов работ [1, предложение 29; 8].

Будем говорить, что группа A квазиравна группе B ($A \approx B$), если A квазисодержится в B и B квазисодержится в A (т.е. если $nA \subseteq B$, $mB \subseteq A$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$). Квазиравенство $A \approx \bigoplus_{i \in I} A_i$, где I – конечное множество, называется квазиразложением или квазипрямым разложением группы A . При этом подгруппы A_i называются квазислагаемыми группы A [14, §4].

Абелеву группу без кручения A можно естественным образом вложить в $\mathcal{Q}$ -пространство $\mathcal{Q} \otimes A = \mathcal{Q}A$, которое является делимой оболочкой группы A . Естественный образ вложения подразумевает отождествление элемента $a \in A$ с элементом $1 \otimes a \in \mathcal{Q}A$. Каждый эндоморфизм $\alpha \in \text{End}(A)$ единственным образом продолжается до линейного преобразования $1 \otimes \alpha$ $\mathcal{Q}$ -пространства $\mathcal{Q}A$. Кольцо $\text{End}(A)$ содержится в $\text{End}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q}A)$ [14, §5].

Таким образом, $\text{End}(A) = \{\alpha \in \text{End}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q}A) \mid \alpha A \subseteq A\}$. $\mathcal{Q}$ -алгебра $\mathcal{Q} \otimes \text{End}(A) = \mathcal{Q} \text{End}(A)$ называется кольцом квазиэндоморфизмов группы A .

Далее речь пойдет о сильно неразложимых абелевых группах без кручения конечного ранга. Факты, касающиеся этого класса групп и используемые в работе, могут быть найдены в книге [14].

Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, такая, что $N(\text{End}(A)) = 0$. В этой ситуации группа A квазиравна прямой сумме $\bigoplus_{i=1}^l A_i^{n(i)}$ сильно неразложимых групп A_i , при этом каждое из колец $\mathcal{Q} \text{End}(A_i)$ является телом и группы $A_1, \dots, A_l$ образуют жесткую систему [14, теорема 7.3].

Предложение 13. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга и $N(\text{End}(A)) = 0$.

1. $\text{End}(A)$ -модуль A эндоморфен тогда и только тогда, когда $n(i) > 1$ для всех $i = 1, \dots, l$.

2. Если $\text{End}(A)$ -модуль A не является эндоморфным, то кольцо $\mathcal{Q} \text{End}(A)$ не обладает свойством однозначности сложения.

Доказательство. Первое утверждение доказано в [1, теорема 32]. Предположим, что $n(k) = 1$ для некоторого $k \in \{1, \dots, l\}$. Тогда $\mathcal{Q} \text{End}(A) \cong \mathcal{Q} \text{End}(A_k) \times T$. Кольцо $\mathcal{Q} \text{End}(A_k)$ не является кольцом с однозначным сложением, поскольку тело является UA-кольцом тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет полиномиальному тождеству $x(x+1)(x^2+x+1) = 0$ [7, теорема 5.2]. Следовательно, кольцо $\mathcal{Q} \text{End}(A)$ не обладает свойством однозначности сложения. Предложение доказано.

Теорема 14. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, такая, что

$$\mathcal{Q} \text{End}(A) / \mathcal{Q}N(\text{End}(A)) \cong \mathcal{Q}.$$

Тогда $\mathcal{Q} \text{End}(A)$ не является UA-кольцом и группа A не является эндоморфным модулем над своим кольцом эндоморфизмов.

Доказательство. Напомним, что из условий теоремы непосредственно вытекает, что кольцо $\mathcal{Q} \text{End}(A)$ артиново и не содержит нетривиальных идемпотентов [14, замечание перед леммой 5.1, следствие 5.12]. Кроме того, данное кольцо является локальным с единственным максимальным идеалом $\mathcal{Q}N(\text{End}(A))$. На основании [14, теорема 5.18, следствие 5.19] заключаем, что ниль-радикал $N(\text{End}(A))$ нильпотентен. Следовательно, $\mathcal{Q}N(\text{End}(A))^k = 0$ для некоторого натурального числа k .

Кроме того, имеется прямое разложение аддитивной группы $\mathcal{Q} \text{End}(A) = R \oplus \mathcal{Q} \text{End}(A)$, где R – подкольцо кольца $\mathcal{Q} \text{End}(A)$, состоящее из всех квазиэндоморфизмов вида $q \otimes 1$. Каждый квазиэндоморфизм $u \in \mathcal{Q} \text{End}(A)$ представим в виде $u = a + b$, где $a \in R$, $b \in \mathcal{Q}N(\text{End}(A))$. Заметим, что кольцо R содержится в центре кольца $\mathcal{Q} \text{End}(A)$.

В случае, когда $\mathbf{QN}(\text{End}(A)) = 0$, получаем $\mathbf{QEnd}(A) \cong \mathbf{Q}$. Но поле рациональных чисел не является UA-кольцом [7, теорема 5.2].

Пусть $\mathbf{QN}(\text{End}(A)) \neq 0$ и $\mathbf{QN}(\text{End}(A))^2 = 0$. Определим биекцию $t: \mathbf{QEnd}(A) \rightarrow \mathbf{QEnd}(A)$ по правилу

$$t(x) = x, \text{ если } x \in \mathbf{QEnd}(A) \setminus \mathbf{QN}(\text{End}(A)), \text{ и } t(x) = -x \text{ в противном случае.}$$

Покажем, что отображение t сохраняет умножение.

Зафиксируем обозначения: $u = a_1 + b_1$, $v = a_2 + b_2$, где $a_1, a_2 \in R$, $b_1, b_2 \in \mathbf{QN}(\text{End}(A))$. Тогда

$$1) \text{ если } a_1, a_2 \neq 0, \text{ то } uv - \text{ обратимый элемент и } t(uv) = uv = t(u)t(v);$$

$$2) \text{ если } a_1 = 0, a_2 \neq 0, \text{ то } t(uv) = -uv = t(u)t(v);$$

$$3) \text{ если } a_2 = 0, a_1 \neq 0, \text{ то } t(uv) = -uv = t(u)t(v);$$

$$4) \text{ если } a_1, a_2 = 0, \text{ то } t(uv) = t(0) = 0 = (-u)(-v) = t(u)t(v).$$

$$\text{Однако } t(1+x) = 1+x \neq 1-x = t(1)+t(x), 0 \neq x \in \mathbf{QN}(\text{End}(A)).$$

Пусть $\mathbf{QN}(\text{End}(A))^k = 0$, $k > 2$, причем k – наименьшее натуральное число с таким условием. В этом случае найдется элемент $d \in \mathbf{QN}(\text{End}(A))$, такой, что $d = c_1 \dots c_{k-1} \neq 0$, где $c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbf{QN}(\text{End}(A))$.

Полагаем $c = c_1 \dots c_{k-2}$. Рассмотрим биективное отображение $t: \mathbf{QEnd}(A) \rightarrow \mathbf{QEnd}(A)$, определяемое правилом

$$t(x) = x, \text{ если } x \in \mathbf{QEnd}(A) \setminus \mathbf{QN}(\text{End}(A)),$$

$$\text{и } t(x) = (c+1)x \text{ в противном случае.}$$

Покажем, что отображение t сохраняет умножение. Так же, как и выше:

$$1) \text{ если } a_1, a_2 \neq 0, \text{ то } uv - \text{ обратимый элемент и } t(uv) = uv = t(u)t(v);$$

$$2) \text{ если } a_1 = 0, a_2 \neq 0, \text{ то } t(uv) = (c+1)b_1(a_2+b_2) = t(u)t(v);$$

$$3) \text{ если } a_1 \neq 0, a_2 = 0, \text{ то } t(uv) = (c+1)(a_1+b_1)b_2 = c a_1 b_2 + a_1 b_2 + b_1 b_2 = t(u)t(v);$$

$$4) \text{ если } a_1, a_2 = 0, \text{ то } t(uv) = (c+1) b_1 b_2 = b_1 b_2 = t(u)t(v).$$

Остается заметить, что

$$t(1+c_{k-1}) = 1+c_{k-1} \neq 1+d+c_{k-1} = t(1)+t(c_{k-1}).$$

Кольцо $\mathbf{QEnd}(A)$ не обладает свойством однозначности сложения. Второе утверждение следует из [1, теорема 33]. Теорема доказана.

Заметим, что условиям теоремы 14 удовлетворяют сильно неразложимые абелевы группы без кручения A конечного ранга p , где p – простое число и $N(\text{End}(A)) \neq 0$ [16, теорема 4.4.12].

Автор благодарен коллективу кафедры алгебры Томского государственного университета за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Albrecht U., Breaz S., Wickless W. Generalized endoprimal abelian groups // J. Alg. and Its Appl. 2006. V. 5. No. 1. P. 1–17.
2. Hausen J. and Johnson J.A. Centralizer near-rings that are rings // J. Austr. Math. Soc. 1995. V. 59. P. 173–183.
3. Чистяков Д.С. Эндопримальные абелевы группы и модули // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 3(19). С. 31–34.
4. Чистяков Д.С., Любимцев О.В. Абелевы группы как эндоморфные модули над своим кольцом эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Т. 13. № 1. С. 229–233.
5. Чистяков Д.С. Однородные отображения абелевых групп // Изв. вузов. Математика. 2014. № 2. С. 61–68.
6. Stephenson W. Unique addition rings // Can. J. Math. 1969. V. 21. No. 6. P. 1455–1461.
7. Михалев А.В. Мультипликативная классификация ассоциативных колец // Мат. сб. 1988. Т. 135 (177). № 2. С. 210–224.

8. Любимцев О.В. Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов // *Фундамент. и прикл. матем.* 1998. Т. 4. № 4. С. 1419–1422.
9. Любимцев О.В. Периодические абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов // *Матем. заметки*. 2001. Т. 70. № 5. С. 736–741.
10. B. van der Merwe. Unique addition modules // *Communications in Algebra*. 1999. 27(9). P. 4103–4115.
11. Любимцев О.В., Чистяков Д.С. Абелевы группы как UA-модули над кольцом $\mathbb{Z}$ // *Матем. заметки*. 2010. Т. 87. № 3. С. 412–416.
12. Чистяков Д.С. Абелевы группы как UA-модули над своим кольцом эндоморфизмов // *Матем. заметки*. 2012. Т. 91. № 6. С. 934–941.
13. Туганбаев А.А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009.
14. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал пресс, 2006.
15. Чистяков Д.С., Любимцев О.В. Об абелевых группах без кручения с UA-кольцом эндоморфизмов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2011. № 2. С. 55–58.
16. Faticoni T. Direct Sum Decompositions of Torsion-Free Finite Rank Groups, Taylor&Francis Group, 2007.

Статья поступила 11.03.2014 г.

Chistyakov D.S. ABELIAN GROUPS WITH UA-RING OF ENDOMORPHISMS AND THEIR HOMOGENEOUS MAPPINGS

A ring R is said to be a unique addition ring (UA-ring) if a multiplicative semigroup isomorphism $(R, *) \cong (S, *)$ is a ring isomorphism for any ring S . Moreover, a semigroup $(R, *)$ is said to be a UA-ring if there exists a unique binary operation $+$ turning $(R, *, +)$ into a ring. An R -module A is called an n -endomorphical if any R -homogeneous mapping from A^n to itself is linear. An R -module A is called endomorphical if it is n -endomorphical for each positive integer n . In this paper, we consider the following classes of Abelian groups: torsion groups, torsion-free separable groups, and some indecomposable torsion-free groups of finite rank. We show that if an Abelian group is an endomorphical module over its endomorphism ring, then this ring is a UA-ring, and vice versa.

Keywords: unique addition ring, homogeneous mapping.

CHISTYAKOV Denis Sergeevich (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russian Federation)

E-mail: chistyakovds@yandex.ru

REFERENCES

1. Albrecht U., Breaz S., Wickless W. Generalized endoprimal abelian groups (2006) *J. Alg. and Its Appl.*, v. 5, no. 1, pp. 1–17.
2. Hausen J. and Johnson J.A. Centralizer near-rings that are rings (1995) *J. Austr. Math. Soc.*, v. 59., pp. 173–183.
3. Chistyakov D.S. Endoprimal'nye abelevy gruppy i moduli (2012) *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, no. 3(19), pp. 31–34. (in Russian)
4. Chistyakov D.S., Lyubimtsev O.V. Abelevy gruppy kak endomorfnye moduli nad svoim kol'tsom endomorfizmov (2007) *Fundament. i prikl. matem.*, v. 13, no. 1, pp. 229–233. (in Russian)
5. Chistyakov D.S., Odnorodnye otobrazheniya abelevykh grupp (2014) *Izv. vuzov. Matematika*, no. 2, pp. 61–68. (in Russian)
6. Stephenson W. Unique addition rings (1969) *Can. J. Math.*, v. 21, no. 6, pp. 1455–1461.
7. Mikhalev A.V. Mul'tiplikativnaya klassifikatsiya assotsiativnykh kolets (1988) *Mat. sb.*, v. 135 (177), no. 2, pp. 210–224. (in Russian)

8. Lyubimtsev O.V. Separabel'nye abelevy gruppy bez krucheniya s UA-kol'tsami endomorfizmov (1998) *Fundament. i prikl. matem.*, v. 4, no. 4, pp. 1419–1422. (in Russian)
9. Lyubimtsev O.V., Periodicheskie abelevy gruppy s UA-kol'tsami endomorfizmov (2001) *Matem. zametki*, v. 70, no. 5, pp. 736–741. (in Russian)
10. B. van der Merwe. Unique addition modules (1999) *Communications in Algebra*, v. 27(9), pp. 4103–4115.
11. Lyubimtsev O.V., Chistyakov D.S. Abelevy gruppy kak UA-moduli nad kol'tsom $\mathbb{Z}$ (2010) *Matem. zametki*, v. 87, no. 3, pp. 412–416. (in Russian)
12. Chistyakov D.S. Abelevy gruppy kak UA-moduli nad svoim kol'tsom endomorfizmov (2012) *Matem. zametki*, v. 91, no. 6, pp. 934–941. (in Russian)
13. Tuganbaev A.A. *Teoriya kolets. Arifmeticheskie moduli i kol'tsa*. Moscow, MTsNMO Publ., 2009. (in Russian)
14. Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A. *Abelevy gruppy i ikh kol'tsa endomorfizmov*. Moscow, Faktorial press Publ., 2006. (in Russian)
15. Chistyakov D.S., Lyubimtsev O.V. Ob abelevykh gruppakh bez krucheniya s UA-kol'tsom endomorfizmov (2011) *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, no. 2, pp. 55–58. (in Russian)
16. Faticoni T. *Direct Sum Decompositions of Torsion-Free Finite Rank Groups*. Taylor&Francis Group, 2007.

МЕХАНИКА

УДК 519.688

Е.В. Бервено, А.А. Калинин, Ю.М. Лаевский

**ФИЛЬТРАЦИЯ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ
НА КОМПЬЮТЕРАХ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПАМЯТЬЮ¹**

Рассматривается математическая модель фильтрации двухфазной жидкости и её программная реализация на кластерах, состоящих из сотен узлов, с использованием MPI-технологии. Переход к сеточной задаче осуществлен с помощью смешанного метода конечных элементов. Приведенный в работе алгоритм для программной реализации задачи обладает высокой масштабируемостью и эффективностью с точки зрения операций и обмена данными на многопроцессорных системах. При проведении ряда тестов были получены численные результаты, демонстрирующие значительное варьирование времени прорыва воды в добывающие скважины в зависимости от местоположения неоднородностей. Также приведены результаты работы MPI-версии программы на сетке $256 \times 512 \times 64$, вплоть до 64 процессов, демонстрирующие ускорение в 33 раза.

Ключевые слова: *двухфазная фильтрация, насыщенность, метод конечных элементов, параллельное программирование.*

На сегодняшний день методы математического моделирования широко используются в практике проектирования и оптимизации разработки месторождений и решения задач фильтрации. Создание моделей, адекватно описывающих строение пластов, а также происходящие в них фильтрационные процессы, является актуальной задачей.

Ранее в рамках данной тематики авторами статей [1, 2] на основе монографии [3] исследовались модели фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости в однородной среде. Данное исследование является продолжением этого цикла работ, и теперь акцент ставится на изучение того, как неоднородности в почве могут влиять на процесс фильтрации.

1. Модель двухфазной фильтрации

Математическая постановка модели включает в себя закон сохранения массы компонент двухфазной несжимаемой жидкости и закон Дарси:

$$\frac{1}{k(s)} v + \nabla \psi = G(s),$$

$$\nabla v = 0,$$

¹ Работа поддержана проектами РФФИ №13-01-00019 и №12-01-31046.

$$\frac{1}{k(s)} w = \nabla \sigma(s),$$

$$v_2 - \frac{k_2(s)}{k(s)} (v - w) = -k_2(s) G(s),$$

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla v_2 = 0,$$

где v_i – векторы скоростей фильтрации фаз; $v = v_1 + v_2$; ψ – обобщенное давление; k_i – проницаемость фаз; $k = k_1 + k_2$; s – насыщенность второй фазы; $G(s)$ – вектор гравитации; m – пористость; t – время. Здесь и далее подстрочный индекс i означает номер фазы, где $i = 1$ соответствует вытесняемой фазе (нефть), $i = 2$ вытесняющей фазе (вода).

Приведённые выше соотношения характеризуют процесс фильтрации (рис. 1). Система замыкается путем задания условий непротекания на границе области и задания удельного потока на границах нагнетательной и добывающей скважин.



Рис. 1. Процесс фильтрации

2. Программная реализация задачи

Задача была реализована с применением высокопроизводительных кластерных вычислений, что обусловлено сложностью и большим объемом задачи. Вычисления производились в Сибирском СуперКомпьютерном Центре (ССКЦ) на кластере НКС-30Т, содержащем 60 вычислительных узлов, каждый из которых содержит 2 процессора Intel®Xeon®E5540 с 8Gb RAM. В итоге алгоритм продемонстрировал эффективную работу на компьютерах с распределенной памятью и высокую масштабируемость до 128 процессов.

Для построения дискретной модели в соответствии с [4] используется смешанный метод конечных элементов. Скалярные функции (давление и насыщенность) ищутся в пространстве кусочно-постоянных функций, а векторные поля скоростей аппроксимируются элементами Равьяра-Тома минимальной степени. Для эффективного решения седловой задачи согласно [2] используется метод сопряженных градиентов для дополнения Шура с переобуславливателем, допускающим разделение переменных. В качестве разностной схемы по времени используется явная схема типа предиктор – корректор, что позволяет свести распараллеливание к параллельной реализации вычислений правых частей. Данная схема, предложенная в [5], продемонстрировала высокую эффективность.

Основным преимуществом этого алгоритма является хорошая масштабируемость на компьютерах с распределенной памятью: каждый процесс делает работу независимо от других, и все процессы обмениваются данными с помощью процедуры MPI_Alltoall. Распределение данных между процессами происходит, как указано на рис. 2.

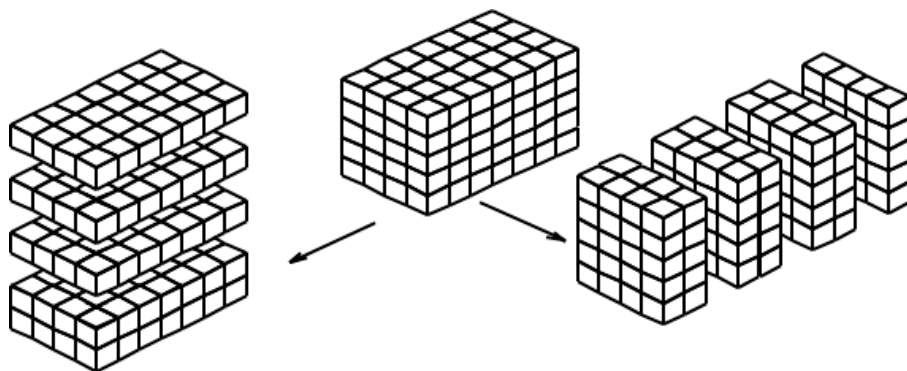


Рис. 2. Распределение данных между процессами

Для решения задачи на каждом шаге необходимо сделать лишь несколько итераций переобусловленного метода сопряженных градиентов. В процессе реализации переобуславливателя требуется выполнить огромное количество дискретных разложений Фурье малой размерности. В итоге, благодаря тому, что каждый рабочий массив делится поровну между процессами, мы смогли решать задачи достаточно большого размера, которые не могут быть рассчитаны на последовательных машинах ввиду естественных ограничений доступной памяти.

3. Результаты численных экспериментов

С целью изучения движения водяного фронта был проведен ряд вычислительных экспериментов для модели нефтеносного пласта, где неоднородные блоки задавались геометрически при помощи параметров пористости и проницаемости.

На рис. 3 приведена визуализация процесса фильтрации нефти водой в случае включения в нефтеносный слой блоков с различными параметрами пористости m . В верхнем и нижнем пунктирных блоках значение пористости $m = 0,1$, в среднем значение $m = 0,9$, а в остальном объеме $m = 0,375$ (соответствует пористости нефти).

На рис. 4 изображены результаты эксперимента, где в качестве варьируемого параметра неоднородности среды задается абсолютная проницаемость k_0 . В верхнем и нижнем пунктирных блоках значение проницаемости $k_0 = 3,06 \cdot 10^{-11}$, в среднем значение $k_0 = 3,06 \cdot 10^{-13}$, а в остальном объеме $k_0 = 3,06 \cdot 10^{-12}$.

Интересно, что если задавать неоднородности разными способами – либо используя параметр пористости, либо параметр проницаемости, то при одном и том же положении неоднородностей в пластах скорость вытеснения нефти водой во всём объеме будет значительно отличаться. Это объясняется тем, что проницае-

мость входит в уравнение множителем при членах первого порядка малости, а изменения пористости – с множителем порядка единицы. Зависимость проницаемости от давления может быть существенной для процессов, происходящих в призабойной зоне, где велики перепады давления, или для весьма длительных процессов. Таким образом, проиллюстрирована важность точных моделей и исходных данных о структуре нефтяного коллектора.

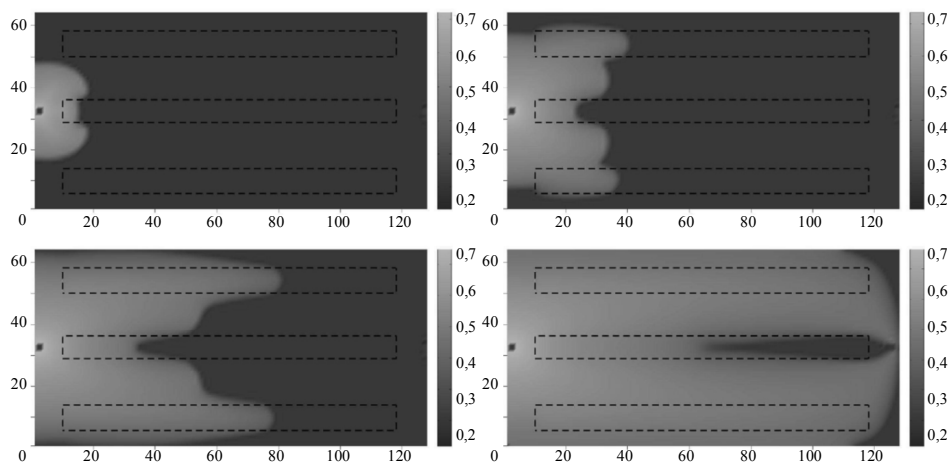


Рис. 3. Фильтрация с неоднородной пористостью

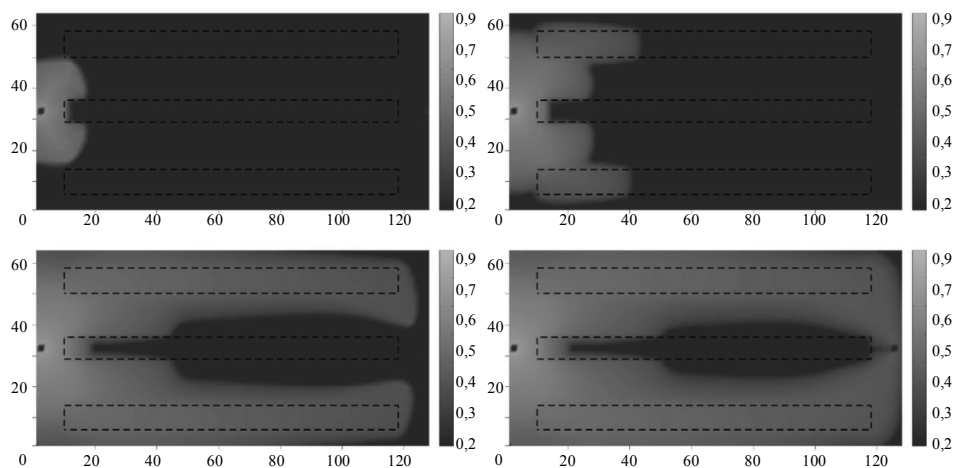


Рис. 4. Фильтрация с неоднородной проницаемостью k_0

Полученный алгоритм эффективно работает на компьютерах с распределенной памятью. Результаты работы MPI-версии программы на сетке $256 \times 512 \times 64$, демонстрирующие ускорение, представлены на рис. 5.

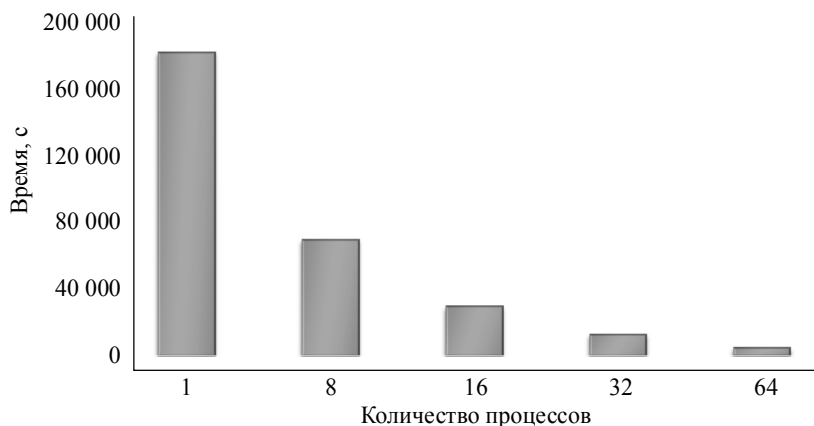


Рис. 5. Ускорение вычислений в зависимости от количества процессов

Заключение

Одной из главных целей данного исследования являлось изучение влияния введения неоднородностей на процесс двухфазной фильтрации. Благодаря построенной модели и проведенным в этом направлении экспериментам, выявлена необходимость работы над адекватным заданием среды реального нефтяного пласта, поскольку алгоритм демонстрирует зависимость движения фронта воды от изменения параметров среды. Приведены результаты расчетов, показана хорошая масштабируемость на компьютерах с распределенной памятью.

Следующим этапом нашего исследования планируется построение модели фильтрации в трещиновато-пористой среде, что сделает доступным более корректное воспроизведение процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Laevsky Yu.M., Popov P.E., Kalinkin A.A.* Simulation of two-phase fluid filtration by mixed finite element method // *Matem. Mod.* 2010. V. 22. No. 3. P. 74–90.
2. *Popov P.E., Kalinkin A.A.* The method of separation of variables in a problem with a saddle point // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* 2008. V. 23. No. 1. P. 97–106.
3. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. С. 104–112, 147–149.
4. *Brezi F. and Fortin M.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods. New York: Springer-Verlag, 1991.
5. *Демидов Г.В., Новиков Е.А.* Экономичный алгоритм интегрирования нежестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Численные методы в математической физике.* Новосибирск: ВЦ СО СССР, 1979. С. 69–83.

Статья поступила 29.05.2014 г.

Berveno E.V., Kalinkin A.A., Laevskii Yu.M. TWO-PHASE FLUID FILTRATION IN NONUNIFORM MEDIA ON CLUSTERS

This work is related to the simulation of oil recovery. At the same time, it is an attempt to come closer to a correct model that describes the flow of a fluid through a porous medium. To examine the effect of porosity and permeability on the motion of fluids in rocks, an algorithm and its program realization has been constructed.

The key point within the scope of this work is the implementation of the problem on clusters which consist of hundreds or thousands of nodes using the MPI technology. The algorithm shows high scalability and efficiency from the standpoint operations and data exchange on multiprocessor systems. We also present numerical results that show the efficiency of the implemented algorithm on a cluster with several hundreds of cores.

It follows from the results that the time of water breakthrough in production wells varies depending on the location of the inhomogeneities. Therefore, this work is of great practical importance.

Keywords: two-phase fluid filtration, saturation, finite element method, parallel computing.

BERVENO Ekaterina Viktorovna (Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia)
E-mail: ekaterina.berveno@gmail.com

KALINKIN Alexander Aleksandrovich (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)
E-mail: alexander.a.kalinkin@intel.com

LAEVSKY Yuri Mironovich (Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia)
E-mail: laev@labchem.sccc.ru

REFERENCES

1. Laevsky Yu.M., Popov P.E., Kalinkin A.A. Simulation of two-phase fluid filtration by mixed finite element method (2010) *Matem. Mod.* v. 22, no. 3, pp. 74–90.
2. Popov P.E., Kalinkin A.A. The method of separation of variables in a problem with a saddle point (2008) *Russian J. Numer. Anal. Math. Model.*, v. 23, no. 1, pp. 97–106.
3. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Dvizhenie zhidkostey i gazov v prirodnykh plastakh*. Moscow, Nedra Publ., 1984, pp. 104–112, 147–149. (in Russian)
4. Brezi F. and Fortin M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. New York, Springer-Verlag Publ., 1991.
5. Demidov G.V., Novikov E.A. *Ekonomichnyy algoritm integrirvaniya nezhestkikh sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy. Chislennye metody v matematicheskoy fizike*. Novosibirsk, VTs SO SSSR Publ., 1979, pp. 69–83. (in Russian)

УДК 531.351

М.А. Бубенчиков, А.И. Потекаев, А.М. Бубенчиков,
И.И. Клыков, А.С. Маслов, В.В. Овчаренко

ДВИЖЕНИЕ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК В ПОЛЕ ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ¹

Показано, что для расчета движения углеродных нанотрубок (термофореза) может быть использована модель идеального газа, более того, монокинетическое приближение Р. Клаузиуса. Использование классического подхода позволяет определить и скорость частиц, и силу воздействия со стороны газовой фазы в случае наличия в ней градиента температуры. Предложенная схема простейшего расчета термофореза основана на теореме об изменении импульса системы для системы наночастица – молекулы в λ -слое. Рассчитан термофорез углеродных нанотрубок.

Ключевые слова: углеродная нанотрубка, идеальный газ, квазиоднородное распределение скоростей, схема скомпенсированных воздействий, среднестатистический угол контрпары, скорость и сила термофореза.

Термофорезу мелких, но не наноразмерных частиц посвящено значительное количество работ, среди которых можно указать следующие работы обзорного характера [1–5].

В настоящей статье используется подход, изложенный в [6, 7], с помощью которого мы определяем скорость термофоретического перемещения наночастицы в градиентном поле температур, а также силу термофоретического давления на перемещающуюся пробную частицу, которая в равновесном режиме сбалансирована силой сопротивления частицы.

Скорость термофореза частиц

Как и в случае определения сопротивления наночастиц [6], при расчете скорости термофореза будет достаточно рассмотреть процессы обмена импульсом между частицей и молекулами, находящимися в слое толщиной λ (где λ – средняя длина свободного пробега молекул). Примем, что в одном из выделенных направлений реализуется изменение температуры. На длине равной λ это небольшие изменения, однако они полностью определяют процессы термофоретического движения частиц. Заселяем λ -слой молекулами газовой среды, добываясь при этом их статистически однородного распределения в пространстве.

Таким образом, в нашей теории мы постулируем ступенчатое изменение температуры, причем размер ступеньки в этом распределении также равен λ .

На рис. 1 для примера показаны восемь температурных слоев, при этом нанотрубка укладывается в шесть слоев. Два торцевых слоя также содержат молекулы, входящие в полную сумму молекул, ударившихся о углеродную нанотрубку. Для

¹ Работа выполнена в рамках Программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 14-01-31365.

предлагаемой технологии расчетов не важно через сколько температурных слоев проходит нанотрубка. Их может быть два, четыре, шесть и т.д.

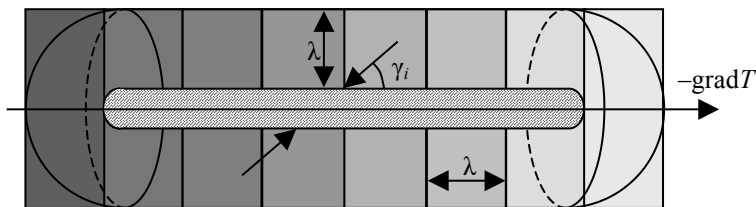


Рис. 1. λ -слой, окружающий закрытую нанотрубку, заключенную в шести температурных λ -слоях

Ориентируем нанотрубку по градиенту температуры и определим её скорость под действием силы термофореза. Кинетическая энергия поступательного движения распределена по трем степеням свободы, поэтому

$$\frac{3}{2} kT = \frac{mv^2(T)}{2}. \quad (1)$$

Из последнего соотношения, предполагая, что все молекулы одного сорта, найдем

$$v(T) = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (2)$$

Пусть вектор $\text{grad } T$ направлен против оси Oz . Возьмем производную по z -координате от обеих частей (2), получим

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{dT} \frac{dT}{dz} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3k}{mT}} \frac{dT}{dz}. \quad (3)$$

Естественно принять, что в окрестности нанотрубки характер изменения температуры является линейным:

$$-\frac{dT}{dz} = q = \text{const}. \quad (4)$$

Левую часть (3) заменим разностями, отвечающими изменению скорости при переходе от одного изотермического слоя к другому. Таким образом, вместо (3) приближенно можем записать

$$\Delta v = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{3k}{mT}} q. \quad (5)$$

При определении воздействия молекул на частицу применим схему скомпенсированных воздействий [6]. Для этого всю совокупность молекул, находящихся в λ -слое, разбиваем на контрперемещающиеся пары. Это позволит существенно упростить расчеты процессов обмена импульсом между частицей и молекулами. Однако при этом, как будет видно из дальнейшего, среднестатистический результат останется неизменно верным.

Заметим, что в настоящей модели распределение по скорости в максвелловском понимании отсутствует. В своей основе представленная здесь модель является монокинетической (моноскоростной).

Поскольку на длине, меньшей λ , столкновения молекул отсутствуют, то будем полагать, что каждый из выделенных слоев имеет одинаковую температуру и одинаковую скорость теплового движения $v(T)$.

Мы ограничили число молекул окружения их количеством в λ -слое. Однако для простейшего расчета скорости термофореza этого не достаточно. Из массы взаимодействующих с частицей молекул выделим элементарный фрагмент взаимодействия, состоящий из частицы и контрперемещающейся пары. Таким образом, все реальные двойные столкновения мы заменяем модельными тройными, не вызывающими броуновских движений. Если при этом предположить, что реализуется зеркальное отражение молекул, то окончательный результат будет простой суммой актов взаимодействия контрпар с частицей.

Баланс проекции количества движения на ось Oz

На рис. 2, в верхней его части, показаны проекции на ось Oz скоростей молекул контрпары до момента встречи с частицей. В нижней части рисунка проекции скоростей после фронтального упругого и регулярного отражения от частицы.

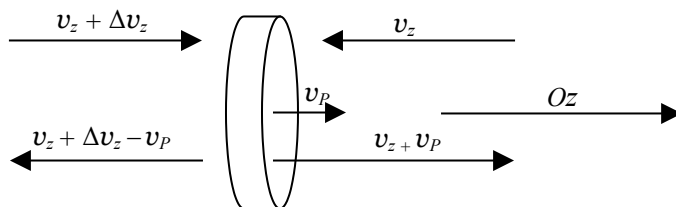


Рис. 2. Контактное упругое взаимодействие контрпары с перемещающейся частицей

Баланс проекции количества движения на ось Oz , рассматриваемый в лабораторной системе отсчета, для случая регулярного отражения будет следующим:

$$mv_z + m\Delta v_z - mv_z + Mv_p = Mv'_p + m(v_z + v_p) - m(v_z + \Delta v_z - v_p). \quad (6)$$

Откуда для i -й контрпары получим

$$M\Delta v_{pi} = M(v'_{pi} - v_{pi}) = 2m\Delta v_{zi} - 2mv_{pi}. \quad (7)$$

Здесь m , M – масса молекулы и частицы, v_{pi} , v'_{pi} – скорость частицы до и после удара i -й контрпары,

$$\Delta v_{zi} = \Delta v \cos \gamma_i. \quad (8)$$

Проводя суммирование в (8) по всем контрпарам, получим

$$M(v'_p - v_p) = nm\Delta v \sigma - nmv_p, \quad (9)$$

Здесь n – число ударившихся о частицу молекул, v_p – средняя скорость термофореza нанотрубки до ударов контрпар, находящихся в λ -слое, $v'_p = \sum_{i=1}^{n/2} v'_{pi} / (n/2)$ – средняя скорость термофореza нанотрубки после ударов контрпар, которая в равновесном случае совпадает в v_p .

Отсюда с учетом того, что левая часть (9) равна нулю, получим

$$v_p = \sigma \Delta v. \quad (10)$$

Эта скорость и будет скоростью термофореза частиц.

В соотношении (10) σ определятся выражением

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n/2} \cos \gamma_i}{n/2}. \quad (11)$$

В практических расчетах мы используем следующую формулу для σ :

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n |\cos \gamma_i|}{n}. \quad (12)$$

Таким образом, σ есть среднеарифметическое значение модулей косинусов углов наклона контрпар. Подставляя в (10) Δv из (5), окончательно получим

$$v_p = \frac{\lambda \sigma}{2} \sqrt{\frac{3k}{mT}} q. \quad (13)$$

Статистика вычислений

Введенный в рассмотрение λ -слой заключен между эффективной поверхностью нанотрубки и отстоящей от нее на λ эквидистантной поверхностью. Около внешней поверхности λ -слоя описываем параллелепипед. С помощью датчика случайных чисел, который используем три раза для каждой из молекул для задания ее пространственных координат, заселяем этот параллелепипед молекулами окружающего частицу газа. Вокруг каждой молекулы строим единичный куб и помещаем в него случайным образом пробную частицу, то есть используем датчик случайных чисел еще три раза. Соединяем эту частицу с молекулой, получившаяся прямая определяет направление движения молекул в пространстве. После этого определяем N – количество молекул, изначально находящихся в λ -слое (рис. 1). На промежутке времени $\tau = \lambda/v$ находим n – число столкновений молекул с частицей. Тогда доля столкнувшихся с частицей молекул определяется соотношением $\delta = n/N$. Эта величина входит в формулы, определяющие сопротивление частиц.

Величина σ , определяющая термофорез, находится как среднее арифметическое значение модулей косинусов углов наклонов траекторий молекул к направлению градиента температуры. Вычислением δ и σ заканчивается одно испытание. Таких испытаний делается 150, после чего значения δ и σ усредняются.

Ориентация перемещающихся нанотрубок

Движение углеродных нанотрубок в газе регламентируется принципом наименьшего действия или наименьшего принуждения, что в равновесном случае одно и то же. Оба эти принципа фиксируют тот факт, что в градиентной среде молекул нанотрубка фиксируется по направлению $\text{grad} T$, то есть испытывает при этом наименьшее сопротивление.

Скорость термофореза

Скорость частицы, найденная из (13), и будет скоростью термофореза. Как видим, она не зависит от числа ударов молекул (при этом их должно быть достаточно, чтобы обеспечить статистику в отношении определения σ) и слабо зависит от их массы. В диапазоне по числам Кнудсена $\text{Kn} = \lambda/r_p \in [10, 100]$, что соответствует собственно наночастицам, скорость термофореза не зависит и от размеров частицы, и определяется лишь атомностью газа, величиной градиента температуры и значением геометрического параметра σ (см. (11)).

Ю.В. Вальциферов, С.М. Мурадян [2] приводят следующую формулу для скорости частиц, обусловленной термофорезом:

$$v_p = f \frac{v}{T} q, \quad (14)$$

где f – безразмерный коэффициент, зависящий от числа Кнудсена и изменяющийся в диапазоне 0,05–1,56, v – коэффициент кинематической вязкости газа.

Сопоставляя (13) и (14), находим

$$f = \frac{\lambda \sigma}{2v} \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (15)$$

Сила термофореза

Сила термофореза может быть определена на основе третьего закона Ньютона. Другими словами, в условиях динамического равновесия

$$F_{\text{тф}} = \zeta v_p, \quad (16)$$

где v_p находится по (14), а коэффициент сопротивления ζ определен в [6, 7]:

$$\zeta = \frac{2}{3} \pi L \lambda v m N_L \frac{(\text{Kn} + 2)}{\text{Kn}(\text{Kn} + 5)}, \quad (17)$$

$$\text{Kn} \in [10, 100].$$

Здесь v – скорость теплового движения молекул, λ – длина свободного пробега молекул, Kn – число Кнудсена, N_L – число Лошмидта, отвечающее нормальным условиям, m – масса молекулы.

Результаты расчетов

Радиус нанотрубки можно оценить по числу Кнудсена: $\text{Kn} = \lambda/r_p$. Длины нанотрубок, для которых проведены расчеты, представленные на рис. 3: $L = 0,5\lambda$ (мелкий пунктир), $L = \lambda$ (пунктир), $L = 2\lambda$ (штрих-пунктир), $L = 6\lambda$ (сплошная линия).

Таким образом, при $L > 0,5 \lambda$ нам не удалось выявить влияния ни длины углеродных нанотрубок, ни их диаметра на σ , а значит, и на скорость термофореза. Оказалось, что в расчетном диапазоне изменения параметров $\sigma = 0,455$, что соответствует значению безразмерной скорости термофореза углеродных нанотрубок $f = 0,48$.

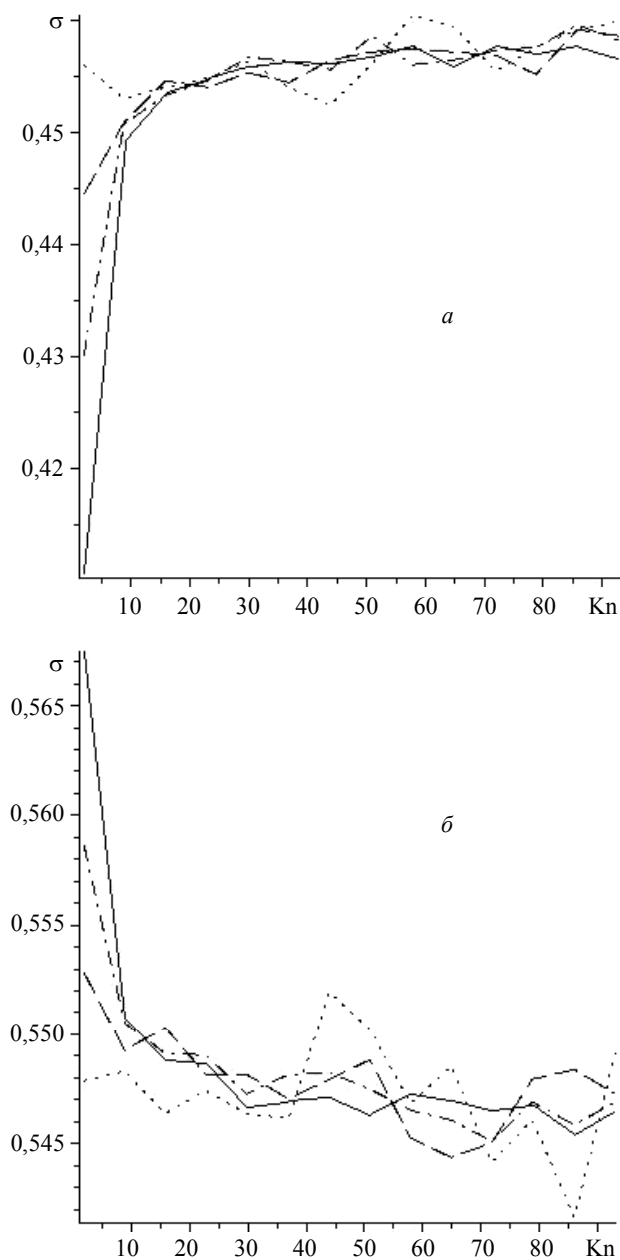


Рис. 3. Распределения геометрического параметра σ для нанотрубок, ориентированных по полю градиента температуры (а) и перпендикулярно этому полю (б)

Заключение

В работе показано, что скорость термофореза углеродных нанотрубок не зависит от их размеров ($10 < Kn < 100$), а зависит лишь от количества атомов в молекулах газового окружения и от градиента температуры в нем. При этом сила термофоретического воздействия на частицу зависит от всех упомянутых параметров. Расчетами установлено, что для углеродных нанотрубок, ориентированных по полю градиента температуры, безразмерный коэффициент в линейной зависимости скорости термофореза от градиента температуры $f = 0,48$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбис З.Р. Физическая модель и математическое описание процесса движения мелких частиц в турбулентном потоке газозвеси / З.Р. Горбис, Ф.Е. Спокойный // Теплофизика высоких температур. 1977. Т. 15. № 2. С. 399–408.
2. Вальциферов Ю.В. Численный расчет процессов тепломассопереноса при течении газа с частицами в прямолинейном цилиндрическом канале / Ю.В. Вальциферов, С.М. Мурадян // Теплофизика высоких температур. 1984. Т. 22. № 6. С. 1152–1157.
3. Баканов С.П. Термофорез в газах при малых числах Кнудсена / С.П. Баканов // УФН. 1992. Т. 162. № 9. С. 133–152.
4. Редчиц В.П. Термофорез несферической частицы в гидродинамическом режиме / В.П. Редчиц, Ю.И. Яламов // Вестник Московского государственного областного университета. Сер. Физика – математика. 2008. № 1. С. 3–8.
5. Баканов С.П. О термофорезе в газах / С.П. Баканов // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. № 5. С. 855–860.
6. Потекаев А.И. Новые физические представления и метод описания и расчета сопротивления движению малых частиц в газообразной среде / А.И. Потекаев, А.М. Бубенчиков, М.А. Бубенчиков // Изв. вузов. Физика. 2012. № 12. С. 54–61.
7. Бубенчиков М.А. Три фундаментальные задачи молекулярной статистики / М.А. Бубенчиков, А.И. Потекаев, А.М. Бубенчиков // Изв. вузов. Физика. 2013. № 3. С. 94–100.

Статья поступила 26.06.2014 г.

Bubenchikov M.A., Potekayev A.I., Bubenichikov A.M., Klykov I.I., Korobitsyn V. A., Maslov A.S., Ovcharenko V.V. MOTION OF CARBON NANOTUBES IN THE TEMPERATURE GRADIENT FIELD

The motion of carbon nanotubes in the process of thermophoresis is calculated using the model of an ideal gas with the monokinetic approximation of R. Clausius. The proposed scheme of a simple calculation of thermophoresis is based on the theorem of the momentum change for the nanoparticle–molecule system in the λ -layer. The calculation involves the partition into eight temperature layers the size of which is equal to the free path length, and the nanotube is placed in six layers. In the vicinity of a nanotube, the temperature variation is assumed to be linear. In determining the effects of molecules on the tube, the scheme of compensated impacts is applied. This substantially simplifies calculating the process of the momentum exchange between particles and molecules. Thus, all real double collisions were modeled by triple ones causing no Brownian motions. Under the assumption of the specular reflection of molecules, the final result is a mere sum of interactions between counter-moving pairs and nanotube. It is shown that the speed of thermophoresis of carbon nanotubes does not depend on their sizes within the values of the Knudsen number ($10 < Kn < 100$) and depends only on the number of atoms in molecules of the gas environment and on the temperature gradient in it.

Keywords: carbon nanotubes, ideal gas, quasi-uniform velocity distribution, scheme of compensated impacts, statistically average angle of the counter-moving pair, rate and force of thermophoresis.

BUBENCHIKOV Aleksey Mikhaylovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: alexy121@mail.ru

BUBENCHIKOV Mikhail Alekseevich
(Gazprom Transgaz Tomsk Ltd., Tomsk, Russian Federation)
E-mail: m.bubenchikov@gtt.gazprom.ru

POTEKAEV Aleksandr Ivanovich (Siberian Physical-Technical Institute, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: kanc@spti.tsu.ru

KLYKOV Ivan Ivanovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: ykar@hotmail.ru

MASLOV Aleksey Stanislavovich
(Gazprom Transgaz Tomsk Ltd., Tomsk, Russian Federation)
E-mail: a.maslov@gtt.gazprom.ru

OVCHARENKO Vladimir Vladimirovich
(Gazprom Transgaz Tomsk Ltd., Tomsk, Russian Federation)
E-mail: v.ovcharenko@gtt.gazprom.ru

REFERENCES

1. Gorbis Z.R., Spokoynyy F.E., Fizicheskaya model' i matematicheskoe opisanie protsessa dvizheniya melkikh chastits v turbulentnom potoke gazovzvesi (1977) *Teplofizika vysokikh temperatur*, v. 15, no. 2, pp. 399–408. (in Russian)
2. Val'tsiferov Yu.V., Muradyan S.M. Chislenny raschet protsessov teplomassoperenosa pri techenii gaza s chastitsami v pryamolineynom tsilindricheskom kanale (1984) *Teplofizika vysokikh temperatur*, v. 22, no. 6, pp. 1152–1157. (in Russian)
3. Bakanov S.P. Termoforez v gazakh pri malykh chislakh Knudsen (1992) *Uspekhi fizicheskikh nauk*, v. 162, no. 9, p. 133–152. (in Russian)
4. Redchits V.P., Yalamov Yu.I. Termoforez nesfericheskoy chastitsy v gidrodinamicheskom rezhime (2008) *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Ser. Fizika – matematika*, no. 1, pp. 3–8. (in Russian)
5. Bakanov S.P. O termofereze v gazakh (2005) *Prikladnaya matematika i mekhanika*, v. 69, no. 5, pp. 855–860. (in Russian)
6. Potekaev A.I., Bubenichikov A.M., Bubenichikov M.A. Novye fizicheskie predstavleniya i metod opisaniya i rascheta soprotivleniya dvizheniyu malykh chastits v gazoobraznoy srede (2012) *Izv. vyssh. uchebn. zav. Fizika*, v. 55, no. 12, pp. 54–61. (in Russian)
7. Bubenichikov M.A., Potekaev A.I., Bubenichikov A.M. Tri fundamental'nye zadachi molekulyarnoy statistiki (2013) *Izv. vyssh. uchebn. zav. Fizika*, v. 56, no. 3, p. 94–100. (in Russian)

УДК 539.384.4

Ю.И. Дорогов

ПРИМЕНЕНИЕ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ

Исследуется потеря устойчивости прямолинейного упругого стержня при условии неизменности его длины. Рассматриваются различные способы закрепления концов стержня при помощи жёстких и упругих опор. Исследуется влияние коэффициента упругости опор на процесс потери устойчивости и конфигурацию изогнутой оси стержня.

Ключевые слова: *устойчивость стержня, изопериметрическое условие, упругая опора, потеря устойчивости, длина стержня.*

1. Введение

В традиционной линеаризованной модели потери устойчивости прямолинейного стержня допускается, что в процессе выпучивания концы стержня не смещаются в направлении сжимающей нагрузки и либо остаются неподвижными, либо перемещаются в направлении перпендикулярном линии действия сжимающей силы [1–3]. Длина проекции изогнутого стержня на его первоначально прямолинейную ось предполагается постоянной и равной начальной длине стержня. Из этого допущения следует парадоксальный вывод об увеличении длины сжимаемого стержня в процессе его выпучивания.

Указанное допущение в постановке краевой задачи приводит, в конечном итоге, к выводу о безразличном состоянии равновесия стержня и возможности бесконечных прогибов при критическом значении нагрузки. При таких условиях стержень должен бы испытывать неограниченное удлинение в процессе своего сжатия. На самом деле, длина стержня изменяется несущественно, в сравнении с изменением длины проекции стержня на первоначально прямолинейную ось, так что этим изменением можно пренебречь и принять длину стержня постоянной.

Кроме того, принципиальная невозможность определения прогибов стержня при значении нагрузки, равной или превосходящей критическую, исключает возможность исследования поведения стержня после потери устойчивости прямолинейной формы равновесия.

Традиционно описанные результаты, противоречащие опыту, интерпретируют как следствие применения линеаризованного выражения для кривизны. Применение точного выражения для кривизны приводит к дифференциальному уравнению, интеграл которого непрерывно зависит от продольной нагрузки. При этом каждому значению нагрузки соответствует единственная форма равновесия стержня, а прогибы оси стержня являются конечными. Однако получающееся нелинейное дифференциальное уравнение довольно сложно поддаётся интегрированию [4–7].

2. Постановка задачи

В данной работе исследуется процесс потери устойчивости упругого прямолинейного стержня, сжимаемого силой P . Задача решается в эйлеровой постановке,

то есть исследуется возможность существования изогнутых форм равновесия стержня, смежных с прямолинейной формой. Рассматривается линеаризованная модель изгиба стержня, при которой кривизна оси стержня принимается равной второй производной функции прогиба. Во избежание неопределённости решения, на уравнение, описывающее изогнутую ось стержня, накладывается дополнительное изопериметрическое условие, выражающее постоянство длины оси. Один конец стержня предполагается неподвижным, а другой смещается. Расстояние между концами стержня l равно длине проекции изогнутой оси стержня на его первоначально прямолинейную ось. Граничные условия устанавливаются в соответствии с этим смещением.

3. Построение решения

Центр выбранной системы координат помещён в неподвижном конце стержня. Ось Ox направлена вдоль первоначально прямолинейной оси стержня в сторону его подвижного конца, а ось Oy направлена в сторону выпуклости стержня и перпендикулярна оси Ox .

Исследование возможности существования изогнутой формы равновесия сжимаемого стержня приводит к краевой задаче для линейного однородного дифференциального уравнения четвёртого порядка с постоянными коэффициентами и однородными граничными условиями. В частности, для шарнирно закреплённого стержня данная краевая задача выглядит следующим образом:

$$y^{(4)} + \alpha^2 y'' = 0, \quad (3.1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0. \quad (3.2)$$

Здесь $y(x)$ – ордината точек упругой оси изогнутого стержня; $\alpha = \sqrt{P/EJ}$; E – модуль упругости материала стержня; J – момент инерции поперечного сечения стержня.

Неизменность длины стержня в процессе его изгиба накладывает на кривую прогиба оси стержня дополнительное изопериметрическое условие

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + (y')^2} dx = \text{const}. \quad (3.3)$$

Здесь y' – тангенс угла наклона касательной к оси стержня; L – длина стержня.

Поставленная краевая задача имеет нетривиальные решения, только при определённых значениях коэффициента α , которые называются собственными значениями. Собственные значения данной краевой задачи равны $\alpha_n = \pi n/l$. Минимальное собственное значение $\alpha_1 = \pi/l$ соответствует сжимающей силе $P = \pi^2 EJ/l^2$.

Вначале процесса изгиба длина проекции l равна длине стержня L , но с увеличением прогибов величина l уменьшается. Критическое значение $P_e = \pi^2 EJ/L^2$, называемое эйлеровой силой, соответствует потере устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня и началу процесса изгиба. По мере увеличения нагрузки $P > P_e$, стержень изгибается, а расстояние между его концами l уменьшается.

Продольная сила и длина проекции связаны соотношением $P = \pi^2 EJ/l^2 = P_e (L/l)^2$, из которого получаем выражение зависимости длины проекции стержня от сжимающей силы

$$l = L \sqrt{\frac{P_e}{P}}.$$

Обозначим $\eta = P/P_e$. Тогда $l = L/\sqrt{\eta}$.

Уравнение изогнутой оси стержня, удовлетворяющее дифференциальному уравнению (3.1) и граничным условиям (3.2), определяется с точностью до произвольного коэффициента и имеет вид

$$y(x) = C \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) определяет однопараметрическое семейство кривых, удовлетворяющих краевой задаче (1), (2). Только одна кривая из этого семейства соответствует реальной изогнутой оси стержня. Это та кривая, которая удовлетворяет изопериметрическому условию (3.3). Как и при выборе дифференциального уравнения, ограничимся рассмотрением только начального этапа изгиба стержня, для которого можно считать $y'(x) \ll 1$. Тогда условие (3.3), с учётом разложения подинтегрального выражения в ряд Маклорена с двумя первыми членами, можно заменить приближённым равенством

$$L \approx \int_0^l \left[1 + \frac{(y')^2}{2} \right] dx.$$

Для определения параметра C , соответствующего искомой кривой, выразим из выражения (3.4) первую производную и подставим в полученное приближённое равенство. Получим

$$L \approx \int_0^l \left[1 + \frac{\pi^2 C^2}{2l^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right] dx = l + \frac{\pi^2 C^2}{4l}.$$

Из последнего равенства выразим зависимость коэффициента C от длины проекции l :

$$C(l) = \frac{2}{\pi} \sqrt{l(L-l)}. \quad (3.5)$$

В силу вышеизложенного для линии прогиба получаем уравнение

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{l(L-l)} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (3.6)$$

В начале, когда продольная сила достигает критического значения и $l = L$, ось стержня прямолинейна, так как $y(x) = 0$.

С учётом выражения для длины проекции l , уравнение изогнутой оси (3.6) запишется в виде функции, зависящей от параметра продольной нагрузки η :

$$y(x) = \frac{2L}{\pi} \frac{\sqrt{\sqrt{\eta}-1}}{\sqrt{\eta}} \sin\left(\frac{\pi x \sqrt{\eta}}{L}\right).$$

Из последнего уравнения следует, что каждому значению сжимающей силы P соответствует одна, вполне определённая кривая прогибов стержня. При $\eta = 1$ ось стержня будет прямой. По мере увеличения $\eta > 1$ прогибы увеличиваются. В срединном сечении, для которого $x = l/2$, прогиб будет максимальным:

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{2L}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{\eta}-1}}{\sqrt{\eta}}.$$

Найденная изогнутая ось стержня отличается от эластики Эйлера [4], полученной при помощи точного дифференциального уравнения. Однако при малых значениях угла наклона оси, заданных на концах стержня, и заданном значении нагрузки прогиб рассматриваемой кривой в срединном сечении равен прогибу эластики.

4. Другие способы закрепления

Повторим выкладки, изложенные выше для шарнирно опёртого стержня, применительно к другим способам закрепления.

Стержень с двумя заделанными концами теряет устойчивость прямолинейной формы равновесия при значении сжимающей силы $P = 4P_e$. По мере увеличения сжимающей силы прогибы увеличиваются. Уравнение изогнутой оси стержня имеет вид

$$y(x) = C(l) \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right].$$

Значение коэффициента $C(l)$, полученное из условия постоянства длины стержня, равно

$$C(l) = \frac{1}{\pi} \sqrt{l(L-l)}.$$

Для стержня с одним свободным и одним заделанным концами функция прогибов принимает вид

$$y(x) = C(l) \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right),$$

где $C(l) = (4/\pi) \sqrt{l(L-l)}$ и $P > P_e/4$.

Для стержня с одним шарнирно опёртым и одним заделанным концами функция прогибов принимает вид

$$y(x) = C(l) \left[\frac{x}{l} - \frac{\sin(\nu x/l)}{\sin \nu} \right],$$

где $C(l) = (2/\nu) \sqrt{l(L-l)}$, $\nu = 4,4934$ и $P > (\nu/\pi)^2 P_e$.

5. Потеря устойчивости стержня с упругой опорой на конце

В [8–10] исследовалась потеря устойчивости стержней с разрушающимися опорами или заделками. В данном пункте рассматривается стержень с двумя шарнирными опорами. Одна опора жёсткая, а другая – упругая с коэффициентом уп-

ругости k (рис. 1). При данных условиях закрепления возможны два способа потери устойчивости равновесия стержня.

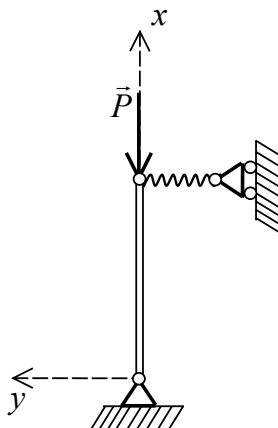


Рис. 1

Во-первых, стержень может потерять устойчивость равновесия и оказаться в состоянии безразличного равновесия, оставаясь прямолинейным или почти прямолинейным [11]. Это произойдёт, если сжимающая сила достигнет значения $P = kL$. Когда сжимающая сила P превысит критическое значение kL , стержень ускоренно поворачивается и равновесие становится невозможным.

Во-вторых, стержень может потерять устойчивость прямолинейной формы равновесия, когда $P > P_e$. В этом случае стержень изгибается, но не поворачивается как целое.

Если $kL < P_e$, то по мере увеличения сжимающей силы до значений, превосходящих величину $P = kL$, первоначальное положение равновесия стержня становится неустойчивым. Незначительные случайные возмущения приведут к тому, что стержень начнёт ускоренно отклоняться от первоначального положения. Равновесие стержня становится невозможным.

Если $kL = P_e$, то при достижении нагрузкой значения $P = kL = P_e$, первоначальное положение равновесия стержня оказывается безразличным. При этом стержень остаётся прямолинейным. По мере увеличения нагрузки случайные возмущения вызовут изгиб стержня и его ускоренный поворот. Равновесие стержня становится невозможным.

Если $kL > P_e$, то при достижении сжимающей силой значений из интервала $(P_e; kL)$, прямолинейная форма равновесия стержня становится невозможной. Стержень изгибается.

Уравнение равновесия момента нормальных напряжений в поперечном сечении стержня и момента внешних сил запишется как

$$EJy'' + Py - Fx = 0.$$

Здесь $F = ky_1$ — сила упругости, возникающая в упругой опоре; y_1 — удлинение упругой опоры, равное перемещению подвижного конца стержня.

Дифференцируя уравнение моментов дважды, приведём его к виду (3.1).

Граничные условия запишутся

$$y(0) = 0, \quad y(l) = y_1, \quad y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0.$$

Нетривиальное решение дифференциального уравнения (3.1), удовлетворяющее данным граничным условиям возможно, если $\alpha l = \pi$. Это решение имеет вид:

$$y(x) = \frac{y_1}{l}x + C \sin \alpha x.$$

С другой стороны, рассматривая вращение стержня вокруг неподвижной опоры, получим уравнение динамики:

$$\sum m_i = Py_1 - Fl = I\varepsilon.$$

Здесь I – момент инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через шарнир у жёсткой опоры; ε – угловое ускорение вращения стержня.

Учитывая значение F , последнее уравнение можно переписать в виде

$$y_1(P - kl) = I\varepsilon.$$

Из полученного равенства видно, что если $P < kl$, то знаки углового ускорения ε и отклонения y_1 противоположны. Следовательно, внешние силы препятствуют возникновению отклонения y_1 , и кривая прогиба имеет вид (3.4) или (3.6).

Таким образом, коэффициент упругости опоры k влияет на характер потери устойчивости стержня. Значение

$$k_* = \frac{P_e}{L} = \frac{\pi^2 EJ}{L^3},$$

определяемое из равенства $kL = P_e$, является критериальным значением.

При $k < k_*$ стержень не будет терять устойчивость прямолинейной формы равновесия в процессе сжатия. Он будет поворачиваться, когда значения нагрузки превзойдут величину $P = kl$.

При $k > k_*$ потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня начнётся раньше, чем поворот стержня как целого.

При $k = k_*$ оба вида потери устойчивости начнутся одновременно.

С увеличением значения сжимающей силы $P > P_e$ длина проекции l уменьшается. В определённый момент сжимающая сила принимает значение $P = kl$. По мере увеличения нагрузки стержень начинает поворачиваться. Равновесие становится невозможным.

Учитывая, что $l = L/\sqrt{\eta}$, из последнего равенства получим

$$P_e \eta = k \frac{L}{\sqrt{\eta}}.$$

Отсюда

$$\eta = \left(\frac{kL}{P_e} \right)^{2/3} = \left(\frac{k}{k_*} \right)^{2/3}.$$

Тогда значение критической силы равно

$$P_{кр} = P_e \eta = \sqrt[3]{\pi^2 k^2 EJ}.$$

Пока $P \leq P_e$ стержень сохраняет устойчивую прямолинейную форму. Каждому значению нагрузки из интервала $P \in (P_e; P_{кр}]$, соответствует устойчивая изогнутая форма равновесия. При $P > P_{кр}$ стержень не имеет устойчивых форм равновесия.

Заметим, что рассматриваемая критическая сила не зависит от длины стержня.

6. Потеря устойчивости стержня с упругой опорой посредине.

Рассмотрим стержень с двумя жёсткими шарнирными опорами на концах и упругой промежуточной опорой посредине стержня (рис. 2).

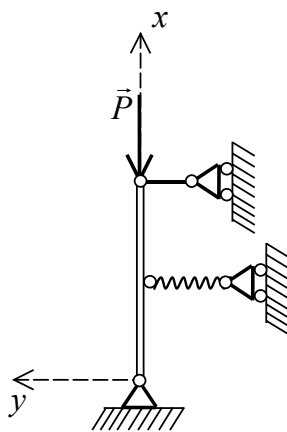


Рис. 2

Вероятно, коэффициент упругости опоры повлияет на конфигурацию изогнутой оси стержня при потере устойчивости. Незначительному коэффициенту упругости срединной опоры будет соответствовать линия прогиба с односторонней выпуклостью. Срединная опора с большим коэффициентом упругости способствует изгибу оси стержня по линии двоякой выпуклости.

Составим уравнение равновесия моментов, действующих на поперечное сечение стержня. Для сечения, расположенного на участке $0 \leq x \leq l/2$:

$$EJy'' + Py - Rx = 0;$$

для сечения, расположенного на участке $l/2 < x \leq l$:

$$EJy'' + Py - Rx + F\left(x - \frac{l}{2}\right) = 0.$$

Здесь $F = ky(l/2)$ – сила упругости, возникающая в промежуточной опоре; $R = 0, 5F = 0, 5ky(l/2)$ – реакции концевых шарнирных опор.

Дифференцируем оба уравнения дважды и преобразуем их к единому виду (3.1). При этом справедливы граничные условия (3.2), выражающие отсутствие прогибов и моментов на концах стержня.

Нетривиальное решение дифференциального уравнения (3.1), удовлетворяющее граничным условиям (3.2), возможно, если $\alpha = \pi n/l$ ($n = 1, 2, \dots$). Это решение имеет вид

$$y(x) = C \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Множитель C не может быть определён из граничных условий. Полагая, что C зависит от длины проекции оси стержня на координатную ось Ox , применим для его определения изложенный выше метод.

Если упругая промежуточная опора отсутствует, то натуральное число n принимается равным 1, и линия прогиба представляет собой одну полуволну синусоиды. Если посередине жёсткая опора, то принимают $n = 2$, и линия прогиба представляет собой одну полную волну синусоиды. В рассматриваемом случае представляются возможными обе конфигурации линии прогиба оси стержня.

При $n = 1$ линия прогиба стержня определяется формулами (3.4). Очевидно, что в этом случае константа C представляет собой величину прогиба в срединном сечении, равную удлинению упругой промежуточной опоры. То есть $C = y(l/2)$. Повторяя рассуждения, изложенные выше для случая шарнирно опёртого стержня, получим для C выражение (3.5). Тогда уравнение изогнутой оси стержня определяется формулой (3.6).

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии изгиба стержня и упругой энергии, накапливающейся в срединной опоре:

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx + \frac{ky^2(l/2)}{2}.$$

Подставляя в последнее выражение значение прогиба в срединном сечении и вторую производную от функции прогибов (3.6), после интегрирования и преобразования получим

$$U = C^2 \left(\frac{\pi^4 EJ}{4l^3} + \frac{k}{2} \right) = \frac{4}{\pi^2} l(L-l) \left(\frac{\pi^4 EJ}{4l^3} + \frac{k}{2} \right). \quad (6.1)$$

Работа сжимающей силы

$$A = \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx = P(L-l).$$

Приравняв работу к потенциальной энергии и преобразовывая полученное равенство, найдём значение критической силы, при которой стержень теряет устойчивость:

$$P = P_e + \frac{2}{\pi^2} kl.$$

Это значение совпадает с одним из значений критической силы, найденных в [12].

При $n = 2$ конфигурация линии прогиба оси стержня представляет собой одну полную волну синусоиды и её уравнение

$$y(x) = C(l) \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right).$$

Из условия постоянства длины стержня для коэффициента $C(l)$ получим

$$C(l) = \frac{1}{\pi} \sqrt{l(L-l)}.$$

В этом случае упругая опора не деформируется. Потенциальная энергия изгиба стержня принимает вид

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{4\pi^4 EJ}{l^3} C^2 = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} (L-l). \quad (6.2)$$

Как было замечено ранее, форма линии прогиба оси стержня при продольном изгибе, последующем за потерей устойчивости прямолинейной формы, зависит от коэффициента упругости срединной опоры k . Из двух возможных конфигураций линии прогиба соответствовать приложенной нагрузке будет та, которая даёт наименьшее значение потенциальной энергии рассматриваемой конструкции. Приравняв выражения потенциальной энергии, определяемые формулами (6.1) и (6.2), получим равенство для определения критического значения коэффициента упругости опоры k_* . Из него находим

$$k_* = \frac{3\pi^4 EJ}{2l^3}.$$

В частности, когда $l = L$, критическое значение коэффициента упругости

$$k_* = 1,5\pi^2 \frac{P_e}{L} = 1,5\pi^4 \frac{k_0}{\lambda^2}. \quad (6.3)$$

Здесь k_0 – коэффициент упругости стержня при растяжении; λ – гибкость стержня.

Значение (6.3) мало отличается от значения критической жёсткости, найденного в [12].

При $k < k_*$ конфигурация линии прогиба стержня представляет собой одну полуволну синусоиды, как и в случае отсутствия упругой опоры посередине. При $k > k_*$ конфигурация линии прогиба стержня представляет собой одну полную волну синусоиды, как в случае стержня, жёстко закрепленного посередине при помощи шарнирной опоры.

Заключение

На основании проведённого исследования можно сделать следующие выводы.

1. Учёт смещения концов стержня и условия неизменности его длины в линеаризованной модели потери устойчивости позволяет получить вполне определённое уравнение изогнутой оси стержня. Каждому значению нагрузки, превышающему критическое, соответствует единственная кривая прогиба, которая является устойчивой.

2. Использование изопериметрического условия позволяет исследовать поведение стержня после потери криволинейной формы равновесия.

3. Потеря устойчивости стержня с упругой опорой на одном конце может иметь различный характер в зависимости от коэффициента упругости этой опоры. Если значение коэффициента упругости относительно небольшое $k < k_*$, то стержень не теряет устойчивость прямолинейной формы равновесия в процессе сжатия, а поворачивается как твёрдое тело вокруг неподвижного шарнира. При больших значениях коэффициента упругости $k > k_*$, потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня начнётся раньше, чем поворот стержня как целого.

4. При потере устойчивости шарнирно опёртого стержня, имеющего упругую дополнительную опору посередине, возможны две конфигурации изогнутой оси стержня. В зависимости от коэффициента упругости дополнительной опоры изогнутая ось может быть односторонне выпуклой или двояко выпуклой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. 808 с.
2. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.
3. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. М.: Машиностроение, 1968. Т. 3. 831 с.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
5. Dorogov Yu.I. The stability of the shape of an unattached elastic rod with stiff flanges on its ends // J. Applied Mathematics and Mechanics. 2013. № 3. P. 338–345.
6. Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня с жёсткими окончаниями // Строительная механика и расчёт сооружений. 2013. № 3 С.16–21.
7. Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня с искривлёнными торцами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. № 2. С. 255–266.
8. Дорогов Ю.И. Устойчивость упругого стержня с разрушающейся опорой // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. № 1. С. 84–96.
9. Дорогов Ю.И. Продольный изгиб стержня с разрушающимися заделками // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. № 4. С. 575–586.
10. Дорогов Ю.И. О несущей способности стержня с инородной прослойкой // Изв. вузов. Машиностроение. 2001. № 5. С. 11–15.
11. Дорогов Ю.И. О потере устойчивости абсолютно жёсткого стержня с разрушающейся опорой // Механика композиционных материалов и конструкций. 2006. № 3. С. 300–311.
12. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 988 с.

Статья поступила 10.06.2014 г.

Dorogov Yu. I. APPLICATION OF THE ISOPERIMETRIC CONDITION IN PROBLEMS OF BUCKLING FOR A ROD

When studying buckling of a rectilinear elastic rod, the so-called linearized differential equation in which the first derivative of deflection is neglected in the expression for the curvature is considered together with the exact differential equation. The linearized equation is a linear differential equation of the second order with constant coefficients; it can be reduced to a uniform differential equation of the fourth order. Conditions under which it is possible to solve the boundary value problem for this equation allow one to obtain an exact value of the critical force. In this case, the solution of the boundary value problem is defined only with an accuracy of up to an unknown coefficient which cannot be determined from the boundary conditions. This unknown coefficient can be found from an additional condition expressing the invariance of the rod length.

In this work, buckling of a rectilinear rod squeezed by a longitudinal force is investigated. The problem is solved in the Euler formulation, i.e., the possibility of the existence of curved balance forms adjacent to the rectilinear form is investigated. Solutions of the boundary value problem for the linearized differential equation of the curved rod axis are constructed using an additional condition of the invariance of the rod length. Various ways of fixing of the rod ends by means of a rigid and elastic supports are considered. The influence of the elasticity coefficient of the support on the buckling process and configuration of a curved axis of the rod is investigated.

Keywords: stability of a rod, isoperimetric condition, elastic support, buckling loss, rod length.

DOROGOV Yury Ivanovich

(Candidate of Technical Sciences, Branch of Moscow Power Engineering Institute
(National Research University) in Volzhskiy, Volzhskiy, Russian Federation)

E-mail: ydorogov@yandex.ru

REFERENCES

1. Timoshenko S.P. *Ustoychivost' sterzhney, plastin i obolochek*. Moscow, Nauka Publ., 1971, 808 p. (in Russian)
2. Panovko Ya. G., Gubanova I. I. *Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh system*. Moscow, Nauka Publ., 1987. 352 p. (in Russian)
3. Birger I.A., Panovko Ya.G. *Prochnost', ustoychivost', kolebaniya*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968. V. 3. 831 p. (in Russian)
4. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela*. Moscow, Nauka Publ., 1988. 712 p. (in Russian)
5. Dorogov Yu.I. The stability of the shape of an unattached elastic rod with stiff flanges on its ends (2013) *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, no. 3, pp. 338–345. (in Russian)
6. Dorogov Yu.I. Ustoychivost' sterzhnya s zhestkimi okonchaniyami (2013) *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, no. 3, pp. 16–21. (in Russian)
7. Dorogov Yu.I. Ustoychivost' sterzhnya s iskrivlennymi tortsami (2012) *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy*, no. 2, pp. 255–266. (in Russian)
8. Dorogov Yu.I. Ustoychivost' uprugogo sterzhnya s razrushayushcheysya oporoy (2010) *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy*, no. 1, pp. 84–96. (in Russian)
9. Dorogov Yu.I. Prodol'nyy izgib sterzhnya s razrushayushchimisya zadelkami (2010) *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy*, no. 4, pp. 575–586. (in Russian)
10. Dorogov Yu.I. O nesushchey sposobnosti sterzhnya s inorodnoy prosloykoy (2001) *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie*, no. 5, pp. 11–15. (in Russian)
11. Dorogov Yu.I. O potere ustoychivosti absolyutno zhestkogo sterzhnya s razrushayushcheysya oporoy (2006) *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy*, no. 3, pp. 300–311. (in Russian)
12. Vol'mir A.S. *Ustoychivost' deformiruemyykh system*. Moscow, Nauka Publ., 1967. 988 p. (in Russian)

УДК 533.682

К. Кусаинов, Н. Танашева, М. Тургунов, А. Дюсембаева, А. Алибекова**ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ДВУХЛОПАСТНОГО
ВЕТРОДВИГАТЕЛЯ В РАБОЧЕМ РЕЖИМЕ**

Приведены результаты экспериментальных исследований по определению силы лобового сопротивления и коэффициента лобового сопротивления двухлопастного ветродвигателя на основе эффекта Магнуса с гладкими вращающимися цилиндрами в диапазоне скоростей воздушного потока 4–13 м/с ($Re = 26800–105000$) при постоянном числе вращения цилиндра вокруг собственной оси. Результаты показали, что увеличение числа Рейнольдса приводит к уменьшению коэффициента лобового сопротивления, так как коэффициент лобового сопротивления прямо пропорционален силе лобового сопротивления, однако обратно пропорционален квадрату скорости.

Ключевые слова: эффект Магнуса, сила лобового сопротивления, число Рейнольдса, ветродвигатель, подъёмная сила.

Интерес альтернативных источников энергии в мире стал особенно актуален в последнее время. Для экономии топливно-энергетических ресурсов, снижения негативного влияния на окружающую среду, а также обеспечения электроэнергией регионов требуется развитие возобновляемых источников энергии. Одним из наиболее развивающихся типов возобновляемых источников энергии в мире выступает ветроэнергетика.

Из возобновляемых источников энергии наиболее эффективной является ветроэнергия, хотя ее использование связано с определенными климатическими условиями [1]. Ветер является одним из наиболее мощных энергетических источников и может быть утилизирован в народном хозяйстве в значительно больших масштабах, чем в настоящее время. Потенциальные возможности использования энергии ветра практически неограничены в большинстве зон. Однако эти возможности постоянно меняются в зависимости от совершенствования технических средств.

Актуальной задачей является разработка ветродвигателя, который может эффективно работать даже при низких значениях скорости ветра. Особый интерес представляет ветродвигатель на основе вращающихся цилиндров постоянного сечения, который эффективно работает при низких значениях скорости ветра. Для повышения эффективности работы такого ветродвигателя необходимо изучение аэродинамических характеристик вращающихся цилиндров [2]. За цилиндрами при обтекании потоком воздуха появляется вихревая зона обратных течений, которая является причиной появления области пониженного давления в следе за цилиндром. Таким образом, данная задача является актуальной как в научном плане, так и с точки зрения практического использования.

Цель работы – исследование силы лобового сопротивления и коэффициента лобового сопротивления двухлопастного ветродвигателя на основе эффекта Магнуса.

Для достижения поставленной цели авторами статьи в лаборатории аэродинамических измерений кафедры инженерной теплофизики им. проф. Ж.С. Акылбаева собран лабораторный макет из двух вращающихся цилиндров.

Экспериментальная установка относится к ветроэнергетическим установкам с использованием эффекта Магнуса. Основной частью экспериментальной модели являются гладкие цилиндры противоположного вращения при диаметрах 5 и 10 см и длинах каждого цилиндра 20 см. Цилиндры крепятся на горизонтальном валу, который поддерживается двумя металлическими стойками с каждого конца вала. Стойки установлены на платформе. На главной оси (вал) крепятся гладкие цилиндры, двигатель, коллекторно-щеточная система и в конце вала – шкив.

Методика эксперимента

Для того чтобы привести в действие вращения цилиндров, к двигателю через щеточно-коллекторный механизм подается электроток (напряжение). Коллектор установлен на валу и изолирован от него с помощью изоляционного материала. После коллектора ток направляется к генератору, который приводит во вращение цилиндрические лопасти.

Ниже приведена схема вращения цилиндров ветродвигателя.

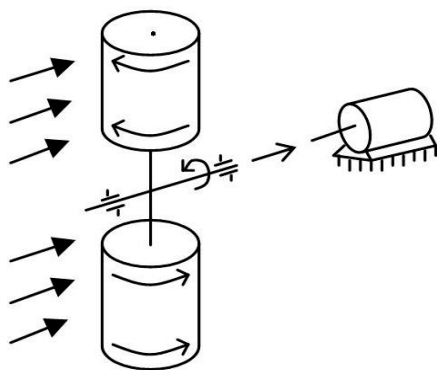


Рис. 1. Схема вращения цилиндров ветродвигателя

Силу лобового сопротивления и подъемную силу измеряли динамическими весами, установленными в рабочей части аэродинамической трубы. Экспериментальный макет обтекался поперечным воздушным потоком, создаваемым в рабочей части аэродинамической трубы. Цилиндры приводились во вращение с помощью электромотора [3].

Погрешность измерения силы лобового сопротивления составляет 5–6 %.

Результаты эксперимента

Исследование лобового сопротивления гладких цилиндров проводилось при диаметрах 5 и 10 см и длинах каждого цилиндра 20 см.

На рис. 2 и 3 приведены зависимости силы лобового сопротивления двухлопастного ветродвигателя от скорости ветра при диаметрах цилиндров 5 и 10 см. Цилиндры имели следующие угловые скорости вращения: 400, 357 и 315 об/мин.

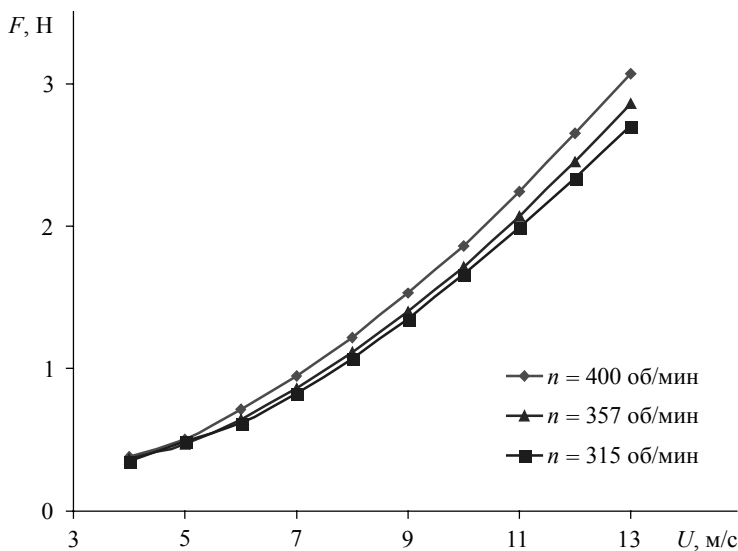


Рис. 2. График зависимости силы лобового сопротивления от скорости потока двухлопастного ветродвигателя с вращающимися гладкими цилиндрами. Диаметр цилиндров 5 см, длина каждого цилиндра 20 см

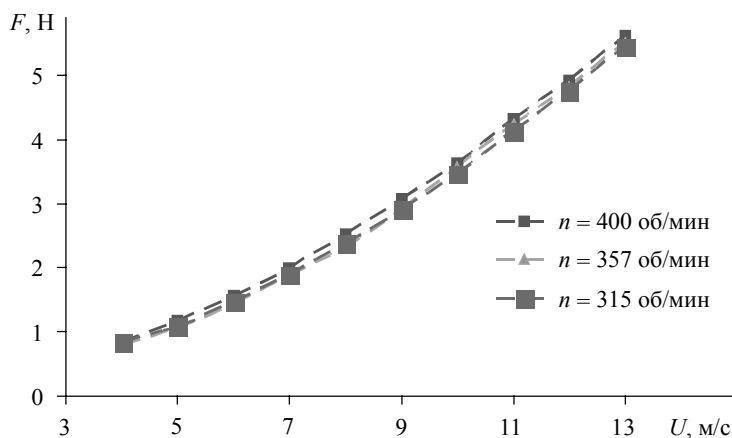


Рис. 3. График зависимости силы лобового сопротивления от скорости потока двухлопастного ветродвигателя с вращающимися гладкими цилиндрами. Диаметр цилиндров 10 см, длина каждого цилиндра 20 см

Из рис. 2 и 3 видно, что силы лобового сопротивления увеличивается с увеличением скорости ветра при числе вращения 400, 357 и 315 об/мин. Сравнивая графики зависимости (рис. 2 и 3), можно увидеть, что при большем диаметре равном 10 см лобовое сопротивление больше. Это связано с тем, что при увеличении диаметра цилиндра увеличивается миделовое сечение, которое противодействует движению потока. Также с ростом количества оборотов лобовое сопротивление увеличивается. Это объясняется тем, что при увеличении скорости ветра увеличивается напорное давление потока, действующие на переднюю часть вра-

щающегося цилиндра. Таким образом, при увеличении скорости потока будет увеличиваться лобовое сопротивление двухлопастного ветродвигателя.

На рис. 4 и 5 представлены графики зависимости коэффициента лобового сопротивления двухлопастного ветродвигателя от числа Рейнольдса.

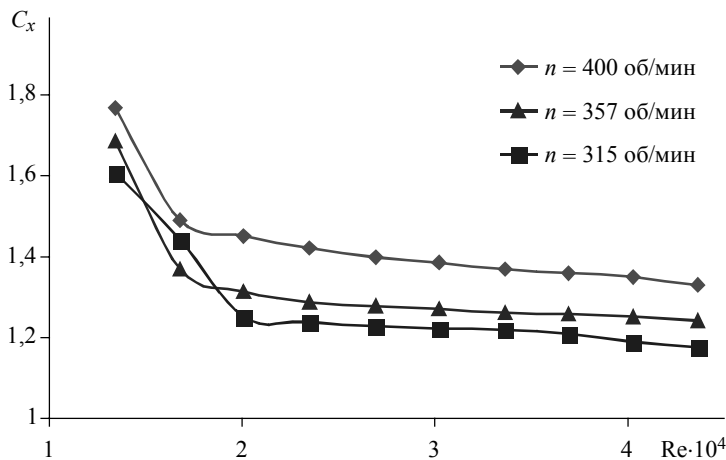


Рис. 4. График зависимости коэффициентов лобового сопротивления от числа Рейнольдса. Диаметр цилиндров 5 см, длина каждого цилиндра 20 см

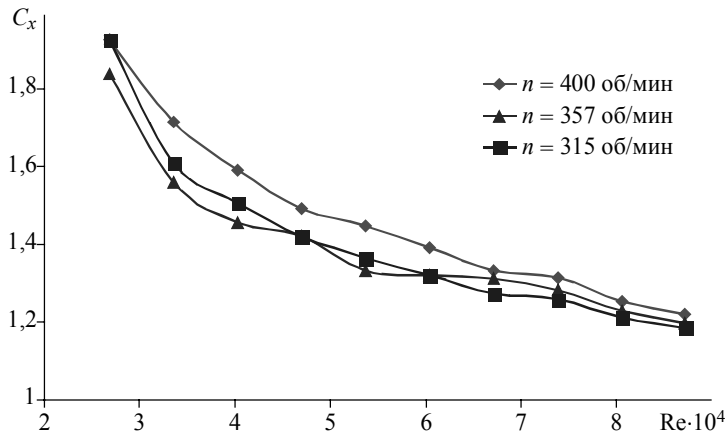


Рис. 5. График зависимости коэффициентов лобового сопротивления от числа Рейнольдса. Диаметр цилиндров 10 см, длина каждого цилиндра 20 см

Из рис. 4 и 5 видно, что при увеличении числа Рейнольдса уменьшается коэффициент лобового сопротивления.

Такой характер поведения кривых объясняет физическую картину обтекания вращающихся цилиндров потоком воздуха. Как известно, за цилиндрами при обтекании потоком воздуха появляется вихревая зона обратных течений, которая является основной причиной образования лобового сопротивления цилиндров. Вращающиеся движения цилиндров приводят к образованию за цилиндрами доста-

точно объемной вихревой зоны обратных течений, размеры которые зависят от скорости набегающего потока.

Заключение

Таким образом, при малых скоростях потока, соответствующих малым числам Рейнольдса ($2 \cdot 10^4 - 6 \cdot 10^4$), увеличение скорости потока приводит к интенсивному перемешиванию и уменьшению объема вихревой зоны обратных течений. Мы наблюдаем относительно резкое уменьшение коэффициента лобового сопротивления вращающихся цилиндров.

При достаточно больших скоростях потока, соответствующих числам Рейнольдса $8 \cdot 10^4$ и выше, за цилиндрами образуется достаточно сильная интенсивно турбулизованная вихревая зона обратных течений, на размер которой увеличение скорости потока практически не влияет, и как следствие этого, коэффициент лобового сопротивления цилиндров остается практически постоянным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бычков Н.М. Ветродвижитель с эффектом Магнуса. 2. Характеристики вращающегося цилиндра // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12. № 1. С. 159–175.
2. Акылбаев Ж.С., Кусаинов К., Сакипова С.Е., Никитина Л.А., Миньков Л.Л. Исследование подъемной силы вращающегося цилиндра при поперечном обтекании турбулентным потоком газа // Современные достижения физики и фундаментальное физическое образование. Алматы: Изд. КазНУ, 2003. С. 78–83.
3. Dusembaeva A.N., Kussaiynov K., Sakipova S.E., Tansykbaeva N.K. Experimental research of aerodynamics of the system of the revolved cylinders in a turbulent stream // Turbulence, Heat and Mass Transfer: 7th International Symposium (September 24–27). Italy, 2012. P. 125–128.

Статья поступила 15.05.2014 г.

Kussaiynov K., Tanasheva N.K., Turgunov M.M., Dyusembaeva A.N., Alibekova A. STUDYING THE DRAG OF A TWO-BLADED WIND TURBINE IN THE OPERATING MODE

In this paper, we consider aerodynamic characteristics of two rotating cylinders transversely streamlined by an air flow. The paper presents the results of experimental studies on determining the force of drag and drag coefficient of a two-bladed wind turbine based on the Magnus effect with smooth rotating cylinders in the range of air flow velocities from 4 to 13 m/s ($Re = 26800 - 105000$) at a constant number of the cylinder rotation around its own axis. From the experimental data, the optimum value for the development of wind turbines operating based on the Magnus effect is determined. The results showed that an increase in the Reynolds number leads to a decrease in the drag coefficient since the drag coefficient is proportional to the force of drag but inversely proportional to the square of the speed value. It is shown that the coefficient of drag and the coefficient of lift depend on the Reynolds number and the number of revolutions of the cylinder. Conditions under which the Magnus effect helps to maximize the lifting force and, consequently, to increase the efficiency of the wind turbine are experimentally determined.

Keywords: Magnus effect, drag force, Reynolds number, wind turbine lift.

KUSSAIYNOV Kappas (Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan)
E-mail: kappas090108@mail.ru

TURGUNOV Muratzhan Miryusupovich (Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan)
E-mail: turgun@mail.ru

TANASHEVA Nazgul Kadyralievna (Buketov Karaganda State University,
Karaganda, Kazakhstan)
E-mail: nazgulya_tans@mail.ru

DYUSEMBAEVA Ainura Nurtaevna (Buketov Karaganda State University,
Karaganda, Kazakhstan)
E-mail: aikabesoba88@mail.ru

REFERENCES

1. Bychkov N.M. Vetrodvigatel' s эффектом Magnusa. 2.Kharakteristiki vrashchayushchegosya tsilindra (2005) *Teplofizika i aeromekhanika*, v. 12, no. 1, pp. 159–175. (in Russian)
2. Akyibaev Zh.S, Kusaibayev K., Sakipova S.E., Nikitina L.A., Min'kov L.L. Issledovanie pod'emnoy sily vrashchayushchegosya tsilindra pri poperechnom obtekanii turbulentnym potokom gaza. *Sovremennye dostizheniya fiziki i fundamental'noe fizicheskoe obrazovanie*. Almaty, KazNU Publ., 2003, pp.78–83. (in Russian)
3. Dusembaeva A.N., Kusaibayev K., Sakipova S.E., Tansykbayeva N.K. Experimental research of aerodynamics of the system of the revolved cylinders in a turbulent stream (2012) *Turbulence, Heat and Mass Transfer, 7th International Symposium* (September 24–27, 2012), Italy, pp.125–128.

УДК 532.546.2+533.15 + 533.27

В.Я. Рудяк, В.А. Андриющенко

**МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РАЗДЕЛЕНИЯ НАНОЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ НАНОМЕМБРАН¹**

Методом молекулярной динамики изучены процессы разделения наножидкостей в наномембранах. Исследовано влияние пористости мембран, типа укладки гранул мембран, характерных размеров пор и диаметров наночастиц, а также плотности несущего флюида на скорость разделения смесей. Показано, что варьируя параметры фильтруемой наножидкости и мембраны можно управлять скоростью разделения.

Ключевые слова: наночастицы, пористая среда, мембрана, наножидкость, молекулярная динамика, разделение наножидкости.

В последние годы активно обсуждается возможность использования нанопористых мембран для разделения смесей газов [1–3]. И здесь для изучения процессов переноса, наряду с экспериментом, активно применяется метод молекулярной динамики (МД) [4–6]. Так, в [7] мембрана моделировалась трехмерной сетью пор. Изучался перенос и адсорбция молекул газов, была найдена оптимальная конфигурация пористой структуры для обеспечения наиболее эффективного разделения газов. В работе [8] исследована эффективность разделения смесей газов O_2/N_2 , CO_2/N_2 в трех цеолитовых мембранах. Было установлено, что газы, имеющие сходные адсорбционные характеристики и размеры молекул, плохо разделяются. При изучении разделения смеси H_2/CO [9] в нанопористых углеродных мембранах показано, что наибольшее влияние на скорость разделения смеси оказывает характерный размер поры. Наконец, стоит упомянуть работу [10], где изучено разделение выхлопных газов в нанопористых углеродных мембранах при больших температурах. В частности, была найдена оптимальная плотность смеси для эффективного разделения газов при температуре 673К.

Одновременно в связи с бурным развитием микроэлектромеханических систем и нанотехнологий различного назначения быстро растет интерес к процессам переноса в наножидкостях [11–13]. Разделение наножидкостей с помощью наномембран также представляет большой интерес. В качестве примера использования такого разделения можно привести системы очистки воздуха и воды от вирусов, которые по размерам являются наночастицами. С другой стороны, нанопористые мембраны – типичный инструмент разделения различных веществ в живых организмах.

Целью данной работы является выявление основных факторов, влияющих на эффективность разделения наножидкости при ее прохождении через нанопористую мембрану. Изучено влияние пористости мембраны, типа укладки гранул мембраны, отношения размеров наночастиц к размерам гранул, отношения масс и размеров компонентов флюида, а также плотности несущего флюида на скорость разделения смесей. Для моделирования использовался алгоритм метода МД, являвшийся обобщением алгоритма для системы твердых сфер [14–17]. Пористые

¹ Работа выполнена при поддержке РНФ (соглашение № 14-19-00312).

мембраны моделировались регулярными укладками твердых частиц (гранул). В данной работе представлены результаты моделирования системы, в которой гранулы имели диаметр $4d$, а наночастицы – $5d$, где d – диаметр молекулы несущего флюида.

Схематическая иллюстрация моделируемой системы представлена на рис. 1. Система представляла собой ячейку-параллелепипед с твердыми стенками. Ее левая часть (область 1) в начальный момент заполнялась наножидкостью. Несущим компонентом могли быть и жидкость, и газ. В данной работе представлены результаты для случая, когда несущим являлся плотный газ. В типичном расчете участвовало порядка десяти тысяч молекул. Проводились расчеты и с существенно большим числом молекул, полученные результаты при этом практически не менялись. Объемная концентрация наночастиц изменялась в пределах от одного до двадцати процентов. Естественно, в данной постановке можно изучать и транспорт бинарной смеси газов.

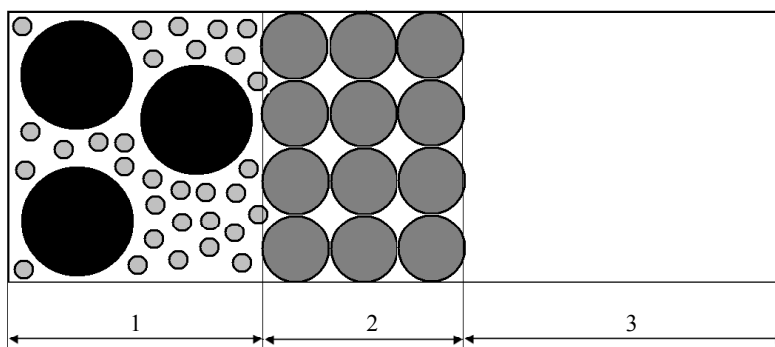


Рис. 1. Схематическая иллюстрация расчетной области

В области 2 ячейки (см. рис. 1) из сфер одинакового диаметра формировалась мембрана. Были рассмотрены простая кубическая, кубическая гранецентрированная и кубическая объемно-центрированная укладки частиц. Кроме того, можно было варьировать пористость упаковок ϕ . Она изменялась в пределах от 0,3 до 0,6. Увеличение пористости осуществлялось путем изменения всех расстояний между узлами упаковок в одинаковое количество раз. В начальный момент времени, в ячейке справа от мембраны (область 3) концентрация молекул флюида равнялась нулю. Объем этой области был много большим (в сто раз), чем объем области 1.

В начальный момент скорости молекул и наночастиц в области 1 задавались согласно распределению Максвелла при заданной температуре. Наличие перепада давления между областями 1 и 3 приводило к тому, что появлялось направленное движений наножидкости (слева направо). Поскольку наночастицы имели диаметр больше характерного размера пор, то в процессе эволюции лишь молекулы несущего газа перемещались в область, занятую мембраной (область 2 на рис. 1), а затем и в область 3, из которой молекулы практически не возвращались в области 1, 2.

Эффективность разделения наножидкости определялась по скорости переноса молекул через пористую мембрану. Эта скорость находилась следующим образом. Сначала отслеживалось заполнение мембраны молекулами газа. После заполнения мембраны молекулами, наблюдался некоторый квазистационарный режим транспорта молекул, при котором их концентрация в мембране флуктуирова-

ла у некоторой постоянной величины. В этом режиме уменьшение числа молекул в области 1 практически равно увеличению числа молекул в области 3. В результате скорость переноса молекул определяется как скорость изменения массы несущего газа в единице объема области 3, которое за время dt равно $Q' = m(dN/dt)$, где m – масса молекулы газа, dN – число молекул, появившихся за это время в области 3. Чтобы данная величина не зависела от поперечного размера ячейки, ее нужно разделить на площадь поперечного сечения S канала. Таким образом, скорость переноса молекул равна $Q = m(dN/dt)S^{-1}$. Эволюция системы рассматривалась на временах, за которые объемная концентрация молекул в области 1 изменялась не более чем на три–пять процентов. Именно в этом случае процесс переноса можно было считать квазистационарным.

Во всех рассмотренных случаях скорость разделения наножидкости была пропорциональна градиенту плотности несущего флюида вдоль всего канала: $Q = a(dn/dx)$, где a – некоторый коэффициент, а n – числовая плотность. Полный поток массы являлся суммой диффузионного Q_d и конвективного Q_c потоков: $Q = Q_c + Q_d$. Полный поток вычислялся в процессе МД-моделирования. Диффузионный же поток оценивался так: $Q_d = -D(dn/dx)$, где D – коэффициент диффузии молекул в пористой среде. Методом молекулярной динамики для различных режимов он моделировался в работах авторов ранее [16, 17]. С использованием полученных там данных было установлено, что конвективный поток превосходил диффузионный на два порядка во всех рассмотренных случаях. Таким образом, можно констатировать, что процесс переноса молекул через мембрану идет главным образом в конвективном режиме.

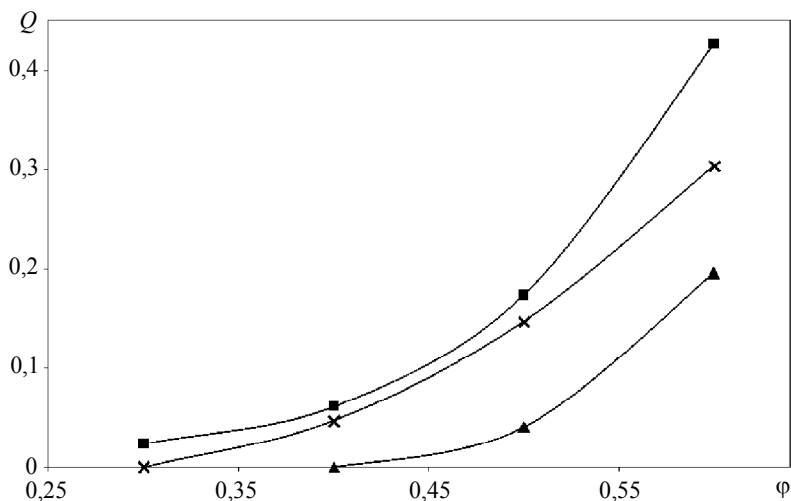


Рис. 2. Зависимость скорости разделения смеси от пористости мембран. Здесь кресты соответствуют простой кубической, квадраты – кубической объемноцентрированной, а треугольники – кубической гранецентрированной укладке гранул мембраны

Пропорциональность потока массы фильтруемого газа градиенту его концентрации физически вполне естественна и ожидаема. Однако коэффициент a (см. предыдущий абзац), определяющий эту пропорциональность, должен зависеть от ряда факторов. Прежде всего, следует отметить, что если объем области 1 (рис. 1)

достаточно велик, так что в ячейке формируется устойчивый и практически постоянный градиент концентрации несущего газа, то скорость фильтрации не должна зависеть от объемной концентрации наночастиц. В ходе систематического моделирования такого влияния действительно не наблюдалось.

Если при заданном объеме ячейки моделирования (см. рис. 1) увеличивать толщину мембраны H , то скорость фильтрации будет снижаться, обратно пропорционально толщине мембраны. При моделировании толщины мембраны варьировалась от единицы до десяти диаметров частиц пористого скелета, и, действительно, было установлено, что $Q \sim 1/H$. Уменьшение скорости фильтрации в этом случае связано фактически со снижением градиента плотности, который также обратно пропорционален толщине мембраны.

Конечно, скорость фильтрации должна существенно зависеть и от пористости ϕ мембраны. Пример этой зависимости для случая, когда численная концентрация молекул несущего газа в объеме 1 равна $nd^3 = 0,177$, а объемная концентрация частиц составляла двадцать процентов, представлен на рис. 2. Кроме того, здесь приведены данные для трех различных типов укладок гранул мембраны: простой кубической, кубической объемноцентрированной и кубической гранецентрированной укладок. Во всех трех случаях толщины и поперечные сечения мембран были одинаковы. Зависимость скорости разделения от пористости оказывается нелинейной и, во всех случаях, неплохо описывается квадратичной функцией от ϕ . Наибольшую скорость разделения обеспечивает мембрана с кубической объемноцентрированной укладкой гранул. При минимально рассмотренной пористости скорость фильтрации для простой кубической и кубической гранецентрированной укладок гранул мембраны равна нулю, т.е. фильтрация отсутствует.

Зависимость от типа укладки связана с различием поперечных сечений пористых сред для разных типов укладки гранул, что приводит к разной эффективной пропускной способности мембран даже при одинаковой пористости. Поскольку моделируемая здесь фильтрация это так называемой механической фильтрация [18], то важнейшим параметром, ее характеризующим, является соотношение размера фильтруемых молекул и гранул пористой среды d/D_p . Горловины же пор, в свою очередь, фактически определяют характерный размер каналов, по которым происходит движение молекул. Размеры горловин пор для сред с разным типом укладки гранул существенно различаются. Например, при пористости равной 0,5 размер горловин пор для кубической гранецентрированной укладки равен $1,12d$, для простой кубической – $1,68d$ и для кубической объемноцентрированной – $2,12d$. Таким образом, максимальную скорость фильтрации должна обеспечивать объемноцентрированная укладка, а минимальную – гранецентрированная, что расчеты (см. рис. 2) и показывают.

Размер горловин пор определяет и порог, с которого начинается разделение. Этот порог также связан с соотношением размера фильтруемых молекул и гранул пористой среды (экспериментально он изучался в [18]). Для того чтобы его установить, было проведено моделирование фильтрации частиц различного размера d сквозь фильтр с размером гранул D_p . Полученный результат представлен на рис. 3. Здесь пористость мембраны равнялась 0,6, а укладка являлась кубической объемноцентрированной. Скорость разделения уменьшалась с ростом диаметра фильтруемых молекул, а при значении $d = 1,8$ фильтрация прекращалась. Для данной мембраны диаметр горловины поры был равен 1,81. Таким образом, фильтрация прекращается лишь в том случае, когда размеры фильтруемых молекул становятся порядка размера горловин пористой среды.

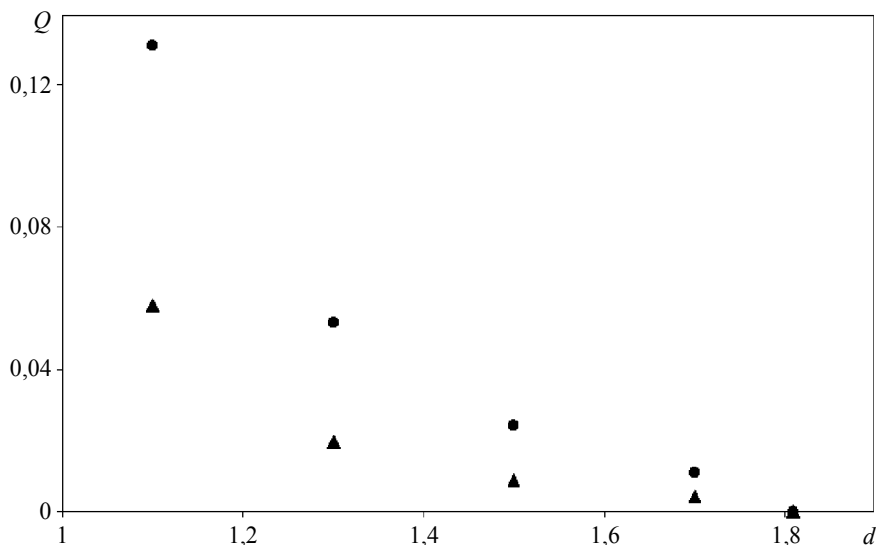


Рис. 3. Зависимость скорости разделения смеси от диаметра молекул несущей компоненты смеси для разных толщин мембраны. Окружности соответствуют толщине мембраны $3D_p$, треугольники $7D_p$

Подводя итог, можно отметить, что варьируя параметры наножидкости и мембраны можно управлять процессом разделения. В частности, при заданной плотности несущего газа в области 1, увеличивая толщину мембраны, мы тем самым будем снижать градиент концентрации, а значит, и скорость разделения. Определяющую роль в увеличении скорости фильтрации играет способ укладки гранул в фильтре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bernardo P., Drioli E., Golemme G. Membrane Gas Separation: A Review/State of the Art // Ind. Eng. Chem. Res. 2009. V. 48. P. 638–4663.
2. Chen F., Mourhatch R., Tsotsis T.T., Sahimi M. Pore network model of transport and separation of binary gas mixture in nanoporous membranes // J. Membrane Science. 2008. V. 315. P. 48–57.
3. Rajabbeigi N., Tsotsis T.T., Sahimi M. Molecular pore-network model for nanoporous materials. II: Application to transport and separation of gaseous mixtures in silicon-carbide membranes // J. Membrane Science. 2009. V. 345. P. 323–330.
4. Норман Г.Э., Стегайлов В.В. Стохастическая теория метода классической молекулярной динамики // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 6. С. 3–44.
5. Норман Г.Э., Писарев В.В. Молекулярно-динамический анализ кристаллизации переохлажденного расплава алюминия // Журнал физической химии. 2012. Т. 86. № 9. С. 1578–1583.
6. Бубенчиков М.А., Потеекаев А.И., Бубенчиков А.М. Три фундаментальные задачи молекулярной статистики // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56 (3). С. 94–100.
7. Xu L., Sahimi M., Tsotsis T.T. Nonequilibrium molecular dynamics simulation of transport and separation of gas mixtures in nanoporous materials // Physical Review E. 2000. V. 62. № 5. P. 6942–6948.
8. Jia W., Murad S. Separation of gas mixtures using a range of zeolite membranes: A molecular-dynamics study // J. Chemical Physics. 2005. V. 122, 234708. P. 1–11.

9. Wu Z., Liu Z., Wang W., Fan Y., Xu N. Non-equilibrium molecular dynamics simulation on permeation and separation of H₂/CO in nanoporous carbon membranes // Separation and Purification Technology. 2008. V. 64. P. 71–77.
10. Kozachok M.V. Equilibrium molecular dynamics and mean first passage time analysis of the separation of exhaust gases at high temperatures by silica nanoporous membranes // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. 2010. V. 18, 025009. P. 1–11.
11. Рудяк В.Я., Белкин А.А. Моделирование коэффициентов переноса // Наносистемы: Физика, Химия, Математика. 2010. Т. 1. № 1. С. 156–177.
12. Rudyak V.Ya., Belkin A.A. Transport processes of nanoparticles in gases and liquids // Advanced Structured Materials. 2013. V. 4. P. 135–168.
13. Rudyak V.Ya. Viscosity of nanofluids. Why it is not described by the classical theories // Advances in Nanoparticles. 2013. V. 2. P. 266–279.
14. Рудяк В.Я., Харламов Г.В., Белкин А.А. Автокорреляционная функция скорости наночастицы в молекулярной системе твердых сфер // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. № 13. С. 29–36.
15. Рудяк В.Я., Харламов Г.В., Белкин А.А. Диффузия наночастиц и макромолекул в плотных газах и жидкостях // ТБТ. 2001. Т. 31, № 2. С. 283–291.
16. Андриященко В.А., Рудяк В.Я. Моделирование самодиффузии молекул флюида в пористых средах // Докл. АН ВШ РФ. 2010. Т. 15. № 2. С. 6–13.
17. Andryushchenko V.A., Rudyak V.Ya. Media self-diffusion coefficient of molecular fluid in porous media // Defect and Diffusion Forum. 2011. V. 312–315. P. 417–422.
18. Димов С.В., Кузнецов В.В., Рудяк В.Я., Тропин Н.М. Экспериментальное изучение фильтрации микросуспензии в высокопроницаемой пористой среде // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 2. С. 52–61.

Статья поступила 26.11.2013 г.

Rudyak V.Ya., Andryushchenko V.A. MOLECULAR DYNAMICS MODELING OF NANOFUID SEPARATION IN NANOMEMBRANES. Nanofluids separation processes in nanomembranes have been simulated by the molecular dynamics method. The porous membrane was modeled by regular packing of hard spheres of the same radius. In this paper, the modeling results are presented for a system in which the grains and nanoparticles have diameters of $4d$ and $5d$, respectively, where d is the diameter of the carrier fluid molecule. The impact of the membrane porosity, their granule packing type, pore sizes, nanoparticle diameters, and density of the carrier gas on the separation rate was studied. The nanofluid separation efficiency was determined by the speed of molecule transport through the porous membrane. The total mass flux is the sum of the diffusion and convective fluxes. It was established that the convective flux exceeds the diffusion one by two orders of magnitude. Thus molecule transport through the membrane is basically determined by the convective transport. The dependence of the separation rate on the porosity is nonlinear and it is described well by the quadratic function of the volume concentration of the nanoparticles. The greatest separation rate is provided by the membrane with the body-centered cubic packing of the grains. The filtration is stopped only in the case where the size of the porous media throats is on the order of the size of filtered molecules. It is shown that the separation rate can be controlled by varying parameters of the filtered nanofluid and membrane.

Keywords: nanoparticles, porous medium, nanofluid separation, membrane, nanofluid, molecular dynamics, nanofluid separation.

ANDRYUSHCHENKO Vladimir Andreevich (The Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russian Federation)
E-mail: vladimir.andryushchenko@gmail.com

RUDYAK Valery Yakovlevich (The Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russian Federation)
E-mail: valery.rudyak@mail.ru

REFERENCES

1. Bernardo P., Drioli E., Golemme G. Membrane Gas Separation: A Review (2009) *State of the Art, Ind. Eng. Chem. Res.*, v. 48, pp. 638–663.
2. Chen F., Mourhatch R., Tsotsis T.T., Sahimi M. Pore network model of transport and separation of binary gas mixture in nanoporous membranes (2008) *Journal of Membrane Science*, v. 315, pp. 48–57.
3. Rajabbeigi N., Tsotsis T.T., Sahimi M. Molecular pore-network model for nanoporous materials. II: Application to transport and separation of gaseous mixtures in silicon-carbide membranes (2009) *Journal of Membrane Science*, v. 345, pp. 323–330.
4. Norman G.E., Stegaylov V.V. Stokhasticheskaya teoriya metoda klassicheskoy molekulyarnoy dinamiki (2012) *Matematicheskoe modelirovanie*, v. 24, no. 6, pp. 3–44. (in Russian)
5. Norman G.E., Pisarev V.V. Molekulyarno-dinamicheskiy analiz kristallizatsii pereokhlazhdennogo raspava alyuminiya (2012) *Zhurnal fizicheskoy khimii*, v. 86, no. 9, pp. 1578–1583. (in Russian)
6. Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Bubenchikov A.M. Tri fundamental'nye zadachi molekulyarnoy stati-stiki (2013) *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika*, v. 56, no. 3, pp. 94–100. (in Russian)
7. Xu L., Sahimi M., Tsotsis T.T. Nonequilibrium molecular dynamics simulation of transport and separation of gas mixtures in nanoporous materials (2000) *Physical Review E*, v. 62, no. 5, pp. 6942–6948.
8. Jia W., Murad S. Separation of gas mixtures using a range of zeolite membranes: A molecular-dynamics study (2005) *Journal of Chemical Physics*, v. 122, 234708, pp. 1–11.
9. Wu Z., Liu Z., Wang W., Fan Y., Xu N. Non-equilibrium molecular dynamics simulation on permeation and separation of H₂/CO in nanoporous carbon membranes (2008) *Separation and Purification Technology*, v. 64, pp. 71–77.
10. Kozachok M.V. Equilibrium molecular dynamics and mean first passage time analysis of the separation of exhaust gases at high temperatures by silica nanoporous membranes (2010) *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, v. 18, 025009, pp. 1–11.
11. Rudyak V.Ya., Belkin A.A. Modelirovanie koeffitsientov perenosa (2010) *Nanosistemy: Fizika, Khimiya, Matematika*, v. 1, no. 1, pp. 156–177. (in Russian)
12. Rudyak V.Ya., Belkin A.A. Transport processes of nanoparticles in gases and liquids (2013) *Advanced Structured Materials*, v. 4, pp. 135–168.
13. Rudyak V.Ya. Viscosity of nanofluids. Why it is not described by the classical theories (2013) *Advances in Nano-particles*, v. 2, pp. 266–279.
14. Rudyak V.Ya., Kharlamov G.V., Belkin A.A. The velocity autocorrelation function of nanoparticles in hard-sphere molecular system (2000) *Tech. Phys. Lett.*, v. 26, no. 7, pp. 553–556.
15. Rudyak V.Ya., Harlamov G.V., Belkin A.A. Diffusion of nanoparticles and macromolecules in dense gases and liquids (2001) *High Temperature*, v. 39, no. 2, pp. 264–271.
16. Andryushchenko V.A., Rudyak V.Ya. Modelirovanie samodiffuzii molekul flyuida v poristyykh sredakh (2010) *Doklady AN VSh RF*, v. 15, no. 2, pp. 6–13. (in Russian)
17. Andryushchenko V.A., Rudyak V.Ya. Self-Diffusion Coefficient of Molecular Fluid in Porous Media (2011) *Defect and Diffusion Forum*, v. 312–315, pp. 417–422.
18. Dimov S.V., Kuznetsov V.V., Rudyak V.Ya., and Tropin N.M. Experimental investigation of micro-suspension filtration in a highly-permeable porous medium (2012) *Fluid Dynamics*, v. 47, no. 2, pp. 178–185.

УДК 620.193:621.039.5

**М.Н. Саблин, А.В. Никулина, В.М. Балашов, А.А. Кабанов,
В.В. Новиков, В.А. Маркелов, Т.Н. Хохунова, О.Ю. Милешкина**

ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРНО-ФАЗОВОГО СОСТОЯНИЯ НА КОРРОЗИОННУЮ СТОЙКОСТЬ ТРУБ ИЗ СПЛАВА Э635

В структуре изделий из циркониевого сплава Э635 ($Zr - 1,2 \% Sn - 1,0 \% Nb - 0,35 \% Fe$) наблюдаются выделения частиц интерметаллидов двух типов (L- и T-фазы), имеющие различный размер, состав и кристаллическую решетку. В статье представлены результаты структурных и автоклавных коррозионных исследований модельных и промышленных образцов полос и труб из сплава Э635, изготовленных по различным технологическим вариантам и имеющих в структуре частицы интерметаллидов различного типа. Показано влияние размера, состава и распределения частиц интерметаллидов на коррозионную стойкость сплава Э635.

Ключевые слова: циркониевый сплав Э635, коррозия, микроструктура, интерметаллиды, степень рекристаллизации, автоклавные испытания.

Увеличение длительности и ужесточение условий эксплуатации активных зон реакторов типа ВВЭР приводит к необходимости ужесточения требований к свойствам и изготовлению циркониевых комплектующих тепловыделяющих сборок (ТВС) [1].

В качестве материала элементов силового каркаса (направляющие каналы, центральные трубы, уголки силового каркаса) ТВС реакторов ВВЭР – 440 (РК – 3) и ВВЭР – 1000 (ТВСА и ТВС – 2) серийно используется циркониевый сплав Э635 ($Zr - 1 \% Nb - 1,2 \% Sn - 0,35 \% Fe$) [2,3,4].

Коррозионная стойкость изделий из сплава Э635 во многом определяется размером частиц интерметаллидов [5,6]. Наличие в структуре сплава крупных частиц интерметаллидов снижает его коррозионную стойкость. В соответствии с тройной фазовой диаграммой $Zr - Nb - Fe$, усовершенствованной в ОАО «ВНИИНМ» применительно к составу сплава Э635, при штатном содержании легирующих элементов в этом сплаве его структура представляет собой $\alpha - Zr$ -матрицу с выделениями частиц интерметаллидов типа фазы Лавеса ($Zr(Nb,Fe)_2$, ГПУ-решетка, средним размером 100 нм) [7]. В структуре промышленных изделий из сплава Э635 (трубы, листы, прутки), помимо фазы Лавеса, наблюдаются более крупные выделения частиц T-фазы ($(Zr,Nb)_2Fe$, ГЦК-решетка) размером до 1 мкм, что связано с деформационно-термическими параметрами технологии изготовления изделий [5–10]. Количество и концентрация T-фазы, наблюдаемой в изделиях из сплава Э635, значительно меньше, чем L-фазы, поэтому средний размер выделений в сплаве Э635 определяется, главным образом, размером частиц L-фазы. Поэтому анализ влияния среднего размера частиц интерметаллидов на коррозию сплава, в структуре которого сосуществуют интерметаллиды двух типов, не является достаточным для эффективной оценки роли структурно-фазового состояния сплава Э635 в его коррозионной стойкости.

Целью настоящей работы являлась оценка влияния типа частиц интерметаллидов, их размера и распределения на коррозионную стойкость изделий из сплава Э635.

В настоящей статье представлены результаты структурных и коррозионных исследований модельных плоских образцов из сплава Э635, изготовленных по различным схемам и режимам и имеющих различное структурно-фазовое состояние. На основании выполненных исследований разработан технологический процесс изготовления труб направляющих каналов из сплава Э635, позволивший увеличить их коррозионную стойкость на 10 %.

1. Модельные пластинчатые образцы из сплава Э635

1.1. Схемы изготовления модельных образцов

Формирование структурно-фазового состояния изделий из сплава Э635 зависит от температурно-деформационных параметров их изготовления [5, 11, 12].

Ранее было установлено, что частицы Т-фазы зарождаются и формируются при нахождении сплава в нижней части $(\alpha+\beta)$ -области в процессе охлаждения слитка, а также послековки или горячей обработки в двухфазной области [5, 11, 12]. Строчки мелких выделений частиц фазы Лавеса образуются в результате распада β – Zr-прослойки при отжиге сплава в α -области [11, 12].

Уменьшение размера интерметаллидных частиц в структуре сплава может быть достигнуто путем проведения операции β -закалки непосредственно перед холоднопрокатным переделом и снижения температуры промежуточных отжигов (до температуры $\sim (540\text{--}560)^\circ\text{C}$) [5, 11]. В работах [9, 10] было показано, что полное растворение частиц фазы Лавеса завершается после нагрева до температур $\sim 750^\circ\text{C}$, а частиц Т-фазы – до $\sim 800^\circ\text{C}$, что соответствует существованию двухфазной $(\alpha+\beta)$ -области фазовой диаграммы.

При этом не ясна роль степени холодной деформации на стадиях холоднопрокатного передела, а также возможности использования гомогенизирующего отжига при температуре, превышающей температуру ($\sim 800^\circ\text{C}$) растворения частиц интерметаллидов двух возможных типов в сплаве Э635.

На основании вышеизложенного, для проведения настоящей работы были разработаны шесть вариантов изготовления модельных пластинчатых образцов, которые различались между собой температурами отжигов после закалки, количеством стадий и степенями деформации холодной прокатки и температурами отжигов между ними (табл. 1). Заготовки для изготовления модельных образцов перед холоднопрокатным переделом были подвергнуты β -закалке с температур ($960\text{--}1070$) $^\circ\text{C}$.

Вариант 1 был использован как референсный и близкий к штатному технологическому процессу изготовления труб. Вариант 2 (по деформационной схеме аналогичен варианту 1, но температура промежуточных отжигов снижена на 60°C), применен для оценки влияния снижения температуры промежуточных отжигов на рост частиц интерметаллидов. В варианте 3 процесс распада пересыщенного твердого раствора $\alpha' - \text{Zr}$ ускорен за счет применения высокотемпературного отжига при 800°C после закалки, температуры промежуточных отжигов соответствовали варианту 2. Варианты 4 и 5, со степенью холодной деформации на каждом переделе 40 и 60 %, соответственно, были использованы для оценки влияния степени деформации на холоднопрокатном переделе на процесс формирования частиц интерметаллидов. В варианте 6 (степень холодной деформации на каждом переделе 60 %) количество стадий холодной деформации было снижено до трех в сравнении с вариантом 5. Окончательный отжиг образцов для всех вариантов изготовления был проведен при температуре 530°C (3 часа).

Таблица 1

Принципиальные схемы изготовления модельных образцов из сплава Э635

Вариант изготовления	Схема обработки	Степени деформации на переделе
1	β -закалка + отпуск ($620\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч) + 4 стадии х/д (отжиг $620\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч) + финишный отжиг $530\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч	(40–60) %
2	β -закалка + отпуск ($480\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч) + 4 стадии х/д (отжиг $560\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч) + финишный отжиг $530\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч	(40–60) %
3	β -закалка + отжиг $800\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч + 4 стадии х/д (отжиг $560\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч) + финишный отжиг $530\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч	(40–60) %
4	β -закалка + отпуск ($480\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч) + 4 стадии х/д (отжиг $560\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч) + финишный отжиг $530\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч	40 %
5	β -закалка + отпуск ($480\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч) + 4 стадии х/д (отжиг $560\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч) + финишный отжиг $530\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч	60 %
6	β -закалка + (отпуск $480\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч) + 3 стадии х/д (отжиг $560\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч) + финишный отжиг $530\text{ }^{\circ}\text{C}$, 3 ч	60 %

1.2 Структура модельных образцов

Структура образцов, полученная методом электронной микроскопии (ТЭМ), показана на рис. 1, а ее характеристики представлены в табл. 2. После финишной термообработки при $T = 530\text{ }^{\circ}\text{C}$ (выдержка 3 часа) все образцы, вне зависимости от варианта изготовления, находились в частично-рекристаллизованном структурном состоянии. Степень рекристаллизации составила $\sim 60\%$ (рис. 1).

Выполненные исследования позволили установить, что изменение температуры промежуточных отжигов и параметров (степень и количество стадий) холодной деформации привело к изменению характеристик структурно-фазового состояния модельных образцов, а именно, размера, однородности распределения и типа выделений частиц интерметаллидов.

Наибольший средний размер интерметаллидов (69 нм) наблюдается в образцах, изготовленных по варианту № 1, при котором промежуточные отжиги проводились при температуре $620\text{ }^{\circ}\text{C}$. Кроме того, в структуре таких образцов были выявлены более крупные частицы размером $\sim 300\text{ нм}$, которые были идентифицированы как выделения Т-фазы ($(\text{Zr}, \text{Nb})_2\text{Fe}$).

Снижение температуры промежуточных отжигов с 620 до $560\text{ }^{\circ}\text{C}$ (вариант 2), при сохранении деформационной схемы варианта 1, привело к образованию частиц интерметаллидов одного типа и уменьшению их размера. Для образцов этого варианта средний размер частиц интерметаллидов, идентифицированных как фаза Лавеса, составил 55 нм, максимальный размер частиц составил менее 200 нм. Наличия Т-фазы в образцах, изготовленных по варианту 2, не выявлено.

Повышение температуры отжига после закалки до $800\text{ }^{\circ}\text{C}$ (вариант 3, табл. 2) оказало отрицательное влияние на равномерность распределения интерметаллидов. Структура неоднородна, наблюдались протяженные строчки частиц фазы Лавеса средним размером 88 нм. При этом выделения Т-фазы отсутствовали.

Увеличение степени деформации на холоднопрокатных переделах (с 40 до 60 %) одновременно со снижением температуры промежуточных отжигов с 620 до $560\text{ }^{\circ}\text{C}$ оказало положительное влияние на снижение размера частиц интерметаллидов. Для вариантов 4 (степень деформации по переделам 40 %) и 5 (степень деформации по переделам 60 %) средний размер интерметаллидов составил 62 и

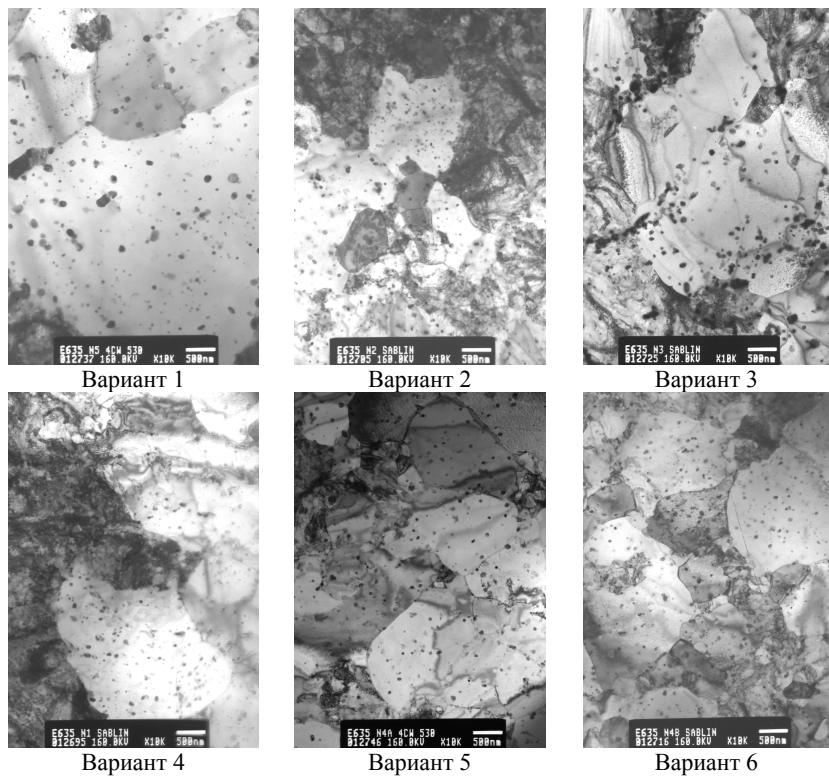


Рис. 1. Структура модельных пластинчатых образцов из сплава Э635 (ТЭМ)

Таблица 2

Характеристики микроструктуры модельных пластинчатых образцов из сплава Э635

Вариант изготовления	Фазовый состав	Средний размер выделений, нм	Степень рекристаллизации, %	Плотность выделений $\rho \cdot 10^{-19}, \text{м}^{-3}$	Объемная доля выделений $V, \%$
1	$\alpha + L + T$	69	~ 60	5,9	1,01
2	$\alpha + L$	55	~ 60	14,5	1,03
3	$\alpha + L$	88	~ 60	4,05	1,35
4	$\alpha + L$	62	~ 60	8,8	0,98
5	$\alpha + L$	51	~ 60	10,2	0,68
6	$\alpha + L$	49	~ 60	5,9	1,01

51 нм соответственно. Наличие Т-фазы в образцах, изготовленных по вариантам 4 и 5, не выявлено. При этом снижение количества стадий холодной деформации до трех (вариант 6) привело к незначительному уменьшению размера частиц фазы Лавеса в сравнении с вариантом 5 (4 стадии холодной деформации), средний размер которых составил 49 нм.

Выполненные исследования показали, что размер и тип частиц интерметаллидов в структуре изделий из сплава Э635 определяется не только температурой промежуточных отжигов, но и деформационной схемой изготовления. Снижение

температуры промежуточных отжигов и повышение степени деформации на стадиях холоднопрокатного передела приводит к образованию более мелкодисперсных частиц интерметаллидов в структуре изделий из сплава Э635. При использовании операции закалки непосредственно перед холоднопрокатным переделом, образование частиц Т-фазы наблюдается после холодной деформации с отжигом в верхней части α -области ($T = (620 - 640) ^\circ\text{C}$), а не только в нижней части $(\alpha + \beta)$ -области, как было показано ранее [5, 11, 12]. Отжиг закаленных образцов в $(\alpha + \beta)$ -области при температурах, превышающих температуру растворения частиц L и Т-фаз ($T \approx 800 ^\circ\text{C}$), с последующими холодными деформациями и промежуточными отжигами при температурах ниже $620 ^\circ\text{C}$ не приводит к появлению частиц Т-фазы, однако способствует формированию неравномерного распределения частиц фазы Лавеса.

Кроме того, при повышении степени деформации на холоднопрокатном переделе происходит более раннее формирование равновесных частиц интерметаллидов, что приводит к возможности уменьшения стадий холоднопрокатного передела при обеспечении высокой коррозионной стойкости материала.

1.3. Коррозия модельных образцов

Результаты автоклавных испытаний в деаэрированной воде ($T = 360 ^\circ\text{C}$, $P = 18,6 \text{ МПа}$) и в деаэрированном паре ($T = 400 ^\circ\text{C}$, $P = 10,3 \text{ МПа}$) модельных пластинчатых образцов представлены в табл. 3 и на рис. 2. Длительность автоклавных испытаний в воде и паре достигла 300 суток.

Таблица 3

**Коррозионная стойкость модельных плоских образцов из сплава Э635
(300 суток испытаний)**

Вариант изготовления	Толщина оксидной пленки, мкм	
	Деаэрированная вода ($T = 360 ^\circ\text{C}$)	Деаэрированный пар ($T = 400 ^\circ\text{C}$)
1	6,7	36,0
2	4,6	27,6
3	5,5	30,0
4	4,6	29,0
5	4,5	27,8
6	4,5	26,4

За 300 суток автоклавных испытаний в воде и паре более толстой оксидной пленкой обладают образцы варианта изготовления 1, в структуре которых помимо частиц фазы Лавеса обнаружены выделения Т-фазы (толщина оксидной пленки составила 6,7 и 36,0 мкм при испытании в воде и паре соответственно) (табл. 3, рис. 2).

Толщина оксидных пленок на образцах, изготовленных по остальным технологическим вариантам, была заметно ниже, чем у образцов варианта 1, и зависела от размера частиц фазы Лавеса. Увеличение размера частиц фазы Лавеса приводило к увеличению толщины образующихся оксидных пленок, что наиболее явно проявилось при испытаниях в паре (при $400 ^\circ\text{C}$). Толщина оксидной пленки составила 26,4 и 30,0 мкм при увеличении среднего размера частиц фазы Лавеса с 49 до 88 нм соответственно (табл. 3). Наиболее высокие значения толщины

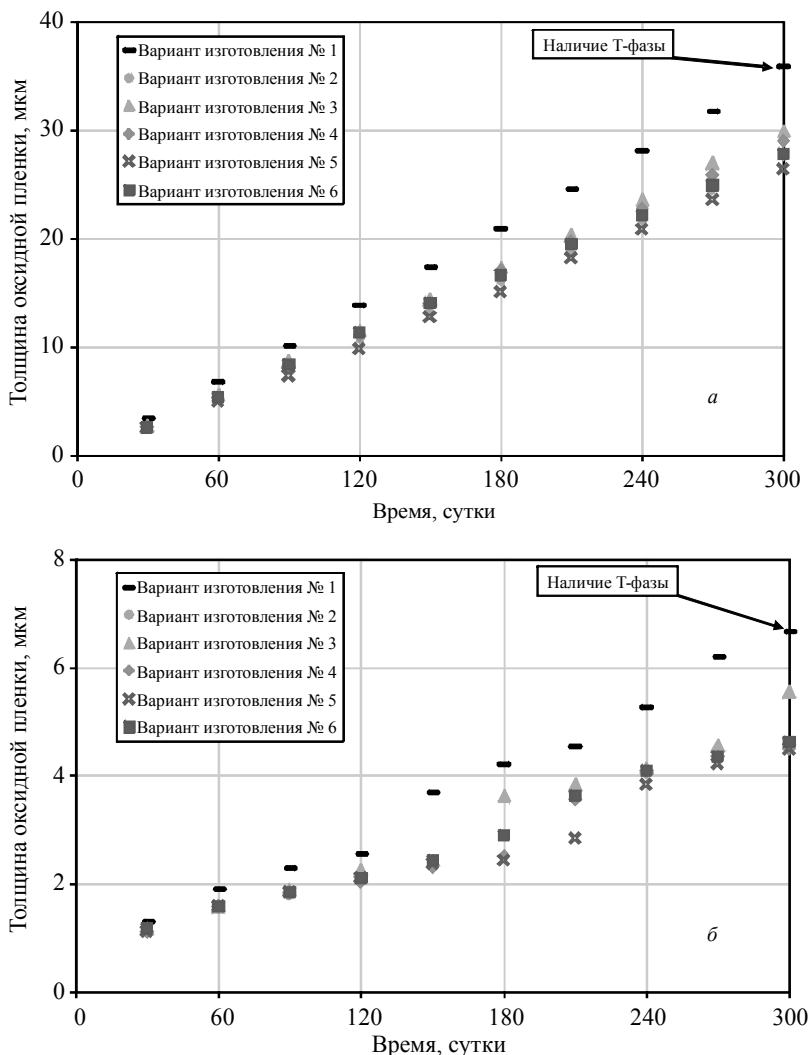


Рис. 3. Кинетика коррозии модельных плоских образцов из сплава Э635: а – деаэрированный пар, $T = 400^\circ\text{C}$, 300 сут; б – деаэрированная вода, $T = 360^\circ\text{C}$, 300 сут

оксидных пленок среди образцов, в структуре которых отсутствовала Т-фаза, соответствовали образцам, изготовленным по варианту 3, где в структуре была выявлена неравномерность распределения частиц фазы Лавеса (табл. 2, 3). Наиболее коррозионностойкими оказались образцы варианта 6, где размер частиц интерметаллидов в структуре был наименьшим (табл. 2 – 3).

Выполненные автоклавные испытания позволили выявить зависимость коррозионной стойкости сплава Э635 от типа, размера и распределения частиц интерметаллидов в его структуре. Присутствие в структуре изделий из сплава Э635 частиц Т-фазы, обедненной ниобием, ухудшает его коррозионную стойкость, а уменьшение размера фазы Лавеса при условии ее однородного распределения по-

вышает коррозионную стойкость сплава. Формирование конгломератов фазы Лавеса ухудшает коррозионную стойкость сплава.

Таким образом, повышение коррозионной стойкости сплава Э635 может быть обеспечено не только за счет уменьшения среднего размера частиц интерметаллидов, но и за счет исключения присутствия Т-фазы в структуре изделий из этого сплава. Кроме того, наблюдается тенденция снижения коррозионной стойкости сплава Э635 при увеличении числа холодных деформаций с меньшими степенями обжатий.

2. Промышленные образцы труб из сплава Э635

На основании выполненных исследований в промышленных условиях был опробован оптимизированный технологический процесс изготовления труб направляющих каналов из сплава Э635, в котором были изменены параметры прессования, холодной обработки и промежуточных отжигов. В оптимизированном процессе изготовления труб были снижены температуры отпуска (на 140 °С) и температуры промежуточных отжигов (на 60 °С) при одновременном увеличении степени деформации на холоднопрокатном переделе.

2.1. Структура труб

ТЭМ-структура труб, изготовленных по оптимизированному процессу, приведена на рис. 5, а ее характеристики, в сравнении с трубами, изготовленными по штатному процессу, в табл. 4.

Таблица 4

Структурные характеристики труб направляющих каналов из сплава Э635

Вариант изготовления	Степень рекристаллизации, %	Средний размер выделений, нм	Фазовый состав	Диапазон размеров выделений, нм	Концентрация выделений, $10^{19}, \text{м}^{-3}$
Оптимизированный	70	80	$\alpha + L$	14–246	4,7
Штатный	70	100	$\alpha + L+T$	15–297 (Т-фаза до 369 нм)	4,5

ТЭМ-исследования показали, что структурное состояние всех исследованных образцов частично-рекристаллизованное (степень рекристаллизации ~ 70 %). Частицы интерметаллидов, вне зависимости от варианта изготовления, имеют преимущественно глобулярную форму и распределены равномерно по телу и границам зерен. Средний размер интерметаллидов в структуре труб, изготовленных по оптимизированному варианту, составил 80 нм, для труб, изготовленных по штатному варианту, 100 нм. При этом, ТЭМ-исследования выявили в структуре труб, изготовленных по штатному варианту, наличие отдельных выделений Т-фазы размером примерно 370 нм. В структуре труб, изготовленных по оптимизированному варианту, частицы Т-фазы отсутствовали.

Таким образом, оптимизация технологического процесса изготовления труб в промышленных условиях привела к формированию более мелкодисперсной структуры, с меньшим средним размером интерметаллидных частиц и отсутствием выделений частиц Т-фазы.

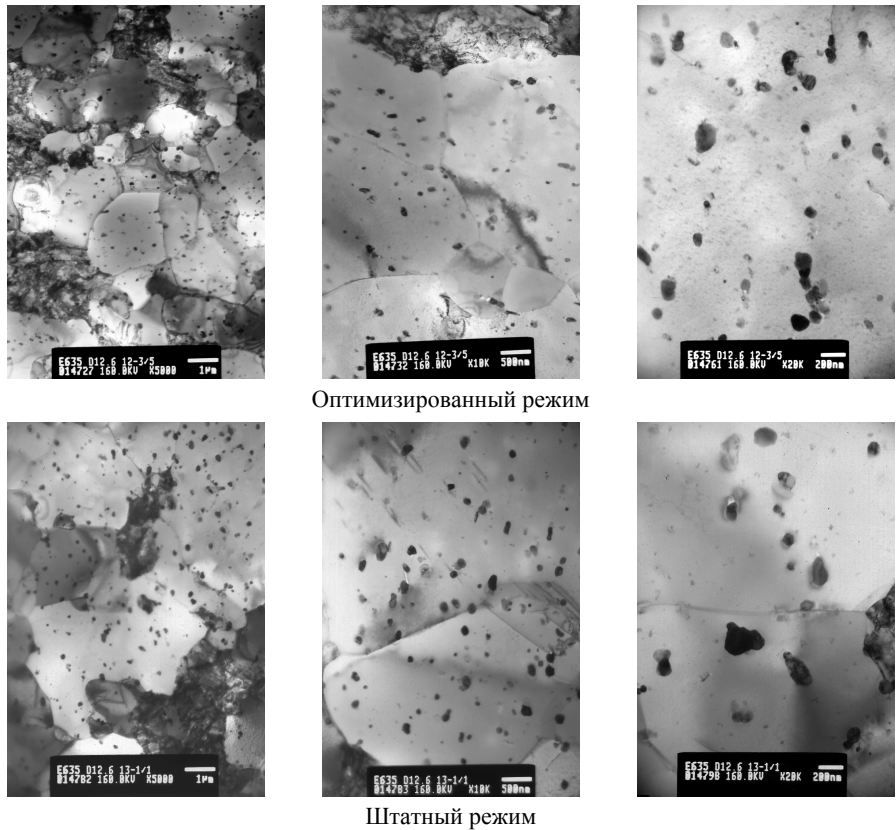


Рис. 5. ТЭМ-структура труб направляющих каналов из сплава Э635

2.2. Механические свойства труб

Механические свойства труб НК, изготовленных по новому и штатному вариантам, из сплава Э635 состава представлены в табл. 5.

Таблица 5

Механические свойства труб из сплава Э635

Вариант изготовления	Продольное направление				Поперечное направление			
	$T_{исп} = 20^{+15}_{-10} \text{ }^{\circ}\text{C}$		$T_{исп} = (350 \pm 5) \text{ }^{\circ}\text{C}$		$T_{исп} = 20^{+15}_{-10} \text{ }^{\circ}\text{C}$		$T_{исп} = (350 \pm 5) \text{ }^{\circ}\text{C}$	
	$\sigma_{0,2}$, кгс/мм ²	δ , %	$\sigma_{0,2}$, кгс/мм ²	δ , %	$\sigma_{0,2}$, кгс/мм ²	δ , %	$\sigma_{0,2}$, кгс/мм ²	δ , %
Оптимизированный	44	35	22	42	48	26	26	28
Штатный	42	34	22	41	45	25	25	27
Требования, не менее	33	24	15	21	36	15	22	12

Представленные результаты показывают, что в состоянии поставки трубы НК, изготовленные по оптимизированному технологическому варианту, полностью соответствуют выставленным требованиям. Сравнительный анализ характеристик ме-

ханических свойств труб, изготовленных по штатному и оптимизированному технологическим вариантам, не выявил существенных различий. При этом для труб, изготовленных по оптимизированному варианту, наблюдаются более высокие значения предела текучести при комнатной и повышенной температурах (табл. 5).

2.3. Коррозионная стойкость труб

Результаты автоклавных испытаний труб из сплава Э635, изготовленных по штатному и оптимизированному процессам, при температуре 400 °С ($P = 10,3$ МПа, пар) представлены на рис. 6.

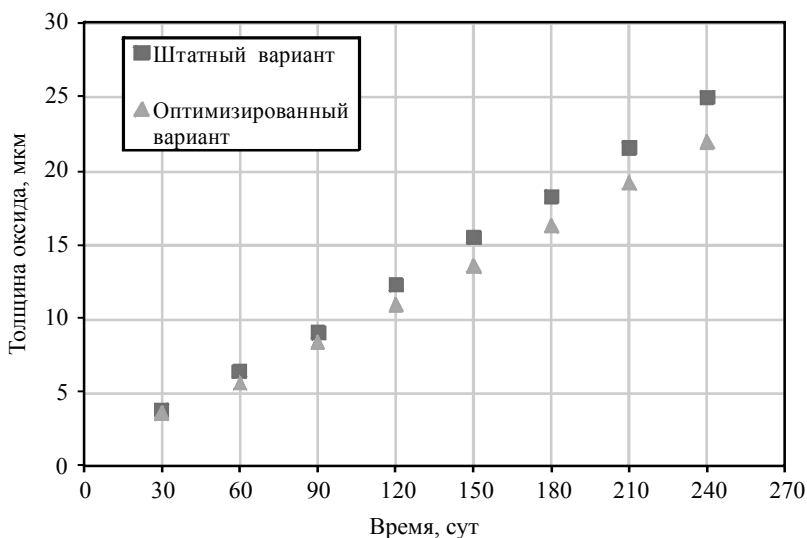


Рис. 6. Коррозионная стойкость труб из сплава Э635, изготовленных по штатному и оптимизированному процессам ($T = 400$ °С, $P = 10,3$ МПа, пар)

Результаты автоклавных коррозионных испытаний показали, что оптимизация процесса изготовления труб НК из сплава Э635, направленная на диспергирование их структуры и исключение частиц Т-фазы в них, привела к улучшению коррозионных свойств. За достигнутое время испытаний (210 суток) толщина оксидных пленок, образовавшихся на трубах, изготовленных по оптимизированному варианту, снизилась примерно на 10 % в сравнении с результатами испытаний штатных труб.

Заключение

1. Выполненные исследования показали принципиальную возможность дальнейшего повышения коррозионной стойкости сплава Э635 за счет оптимизации типа, размера и распределения образующихся частиц интерметаллидов в структуре готовых изделий. Повышение коррозионной стойкости сплава Э635 может быть обеспечено не только за счет уменьшения среднего размера частиц фазы Лавеса, но и за счет исключения присутствия Т-фазы в структуре изделий из этого сплава.

2. Тип, размер и распределение частиц интерметаллидов в структуре изделий из сплава Э635 определяется не только температурами промежуточных отжигов,

но и деформационной схемой изготовления. Снижение температур промежуточных отжигов и повышение степени деформации на стадиях холоднопрокатного передела приводит к образованию более мелкодисперсных и равномерно распределенных частиц интерметаллидов фазы Лавеса в структуре изделий из сплава Э635. Для исключения образования частиц Т-фазы температура промежуточного отжига после холодной деформации должна быть ниже 620 °С.

3. На основании выполненных исследований разработан технологический процесс изготовления труб направляющих каналов из сплава Э635, позволивший повысить их коррозионную стойкость на 10 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Семченков Ю.М. Современные и перспективные топливные циклы реакторов ВВЭР // Тез. докл. конф. НТК-2008 «Ядерное топливо нового поколения для АЭС. Результаты разработки, опыт эксплуатации и направления развития». М., 2008. С. 16
2. Маракулин А.В., Нигоренко Н.В., Симонов А.Н. Опыт внедрения и опытной эксплуатации рабочих кассет третьего поколения на блоке 4 Кольской АЭС с реактором ВВЭР-440 (В-213) // Тез. докл. конф. НТК-2012 «Ядерное топливо нового поколения для АЭС». М., 2012. С. 22.
3. Васильченко И.Н., Кобелев С.Н., Вьялицын В.В., Медведев В.С. Разработка, внедрение на ВВЭР-1000 и дальнейшая модернизация ТВС-2. Преимущество требований и решений по конструкции ТВС ВВЭР-1500 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Материаловедение и новые материалы. 2006. Вып. 2 (67). С. 53–62.
4. Самойлов О.Б., Кууль В.С., Преображенский Д.Г. Результаты создания и развития ТВС альтернативной конструкции для реактора ВВЭР-1000 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Материаловедение и новые материалы. 2005. Вып. 1 (64). С. 126–131.
5. Маркелов В.А., Шишов В.Н., Желтковская Т.Н., Хошунова Т.Н. Влияние деформационно-термических параметров холодной прокатки на структуру, механические свойства и сопротивление коррозии сплава Э635 // Сб. докл. Четвертой межотраслевой конференции по реакторному материаловедению. Димитровград, 1996. Т. 2. С. 27–38.
6. Nikulin S.A., Goncharov V.I., Markelov V.A., Shishov V.N. Effects of microstructure on ductility and fracture resistance of Zr – 1.2 Sn – 1 Nb – 0.4 Fe alloy // ASTM STP 1295. 1996. P. 695–709.
7. Никулина А.В. Цирконий-ниобиевые сплавы для элементов активных зон реакторов с водой под давлением // Вопросы атомной науки и техники. Серия материаловедение и новые материалы. 1993. Вып. 1(48). С. 190–199.
8. Nikulina A.V., Markelov V.A., Peregud M.M. et al. Zirconium Alloy E635 as a Material for Fuel Rod Cladding and Other Components of VVER and RBMK Cores // Zirconium in the Nuclear Industry: Eleventh International Symposium, ASTM STP 1295. 1996. P. 785–803.
9. Шишов В.Н. Закономерности и механизмы формирования микроструктуры сплавов Zr-Nb-(Fe-Sn-O) и ее эволюции при нейтронном облучении: дис. ... докт. техн. наук. М., 2012.
10. Шишов В.Н. Фазовые превращения в сплавах системы Zr – Nb – Fe – Sn // Тез. докл. научно-практической конференции материаловедческих обществ России «Цирконий: металлургия, свойства, применение», 24–28 ноября 2008 г., Ершово.
11. Маркелов В.А., Рафиков В.З., Никулин С.А. и др. Изменение микроструктуры сплава циркония с оловом, ниобием и железом при деформационно-термической обработке // Физика металлов и материаловедение. 1994. Т. 77. Вып. 4. С. 70–79.
12. Маркелов В.А., Шишов В.Н., Саблин М.Н., Актуганова Е.Н., Кропачев С.Ю. Повышение пластичности и вязкости сплава Э635 для силовых элементов ТВС ВВЭР-1000 // Цветные металлы. 2010. № 1. С. 73–78.

Sablin M.N., Nikulina A.V., Balashov V.M., Kabanov A.A., Novikov V.V., Khokhunova T.N., As-trakhtantsev M.S., Mileshekina O.Yu. INFLUENCE OF STRUCTURAL PHASE STATE ON CORROSION RESISTANCE OF TUBES MADE FROM THE E635 ALLOY

An increase in the duration and tightening operating conditions for cores of VVER-type reactors leads to the need in tightening the requirements for properties and production of zirconium components for fuel assemblies (FA).

As a material of force framework elements (guide thimbles, central tubes, bearing frame angles) in serial production, the E635 zirconium alloy (Zr–1% Nb–1.2% Sn–0.35% Fe) is used. The E635 alloy was also tested in fuel claddings of VVER-1000 reactors. The deterrent factor for expanding its use is enhanced corrosion in comparison with the E110 zirconium alloy (Zr–1 % Nb), which is the basic material for VVER fuel claddings.

Corrosion resistance of products made from the E635 alloy, among other factors, is determined by the size of second-phase particles (SPPs). The presence of large SPPs in the alloy structure reduces its corrosion resistance. Conducting of the quenching operation immediately before cold-rolling stages is the main way to reduce the SPP size but this is not applicable in industrial conditions due to low workability of the alloy in the quenched state.

In correspondence with the Zr–Nb–Fe ternary phase diagram, the alloy E635 structure in regular composition is an α -Zr-matrix with precipitates of intermetallic particles of the Laves phase type $(\text{Zr}(\text{Nb}, \text{Fe})_2)$ with an average size of 100 nm. In the structure of industrial products from the E635 alloy (claddings, sheets, and rods), in addition to the Laves phase, there are observed larger precipitates of T-phase particles $((\text{Zr}, \text{Nb})_2\text{Fe})$ with a size of up to 1 μm , which is connected with the thermal-deformation conditions of their production.

The aim of this work was to estimate the influence of size, distribution, and type of second-phase particles on the corrosion resistance of the E635 alloy.

The report presents the results of structural and corrosion researches of model specimens from the E635 alloy produced by different modes and with different structural-phase state. It has been shown that the presence of the T-phase within the structure of the alloy lowers the corrosion resistance of products from the E635 alloy to a larger extent than an increase in the size of the Laves phase.

A manufacturing process for guide thimble tubes from the E635 alloy was developed based on the conducted researches, which allowed one to increase their corrosion resistance by 10%.

Keywords: E635 zirconium alloy, corrosion, microstructure, intermetallic particles, degree of recrystallization, autoclave testing.

SABLIN Michail Nikolaevich (Joint Stock Company A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow, Russian Federation)
E-mail: sablin@bochvar.ru

NIKULINA Antonina Vasil'evna (Joint Stock Company A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow, Russian Federation)
E-mail: nikulina@bochvar.ru

BALASHOV Vasilii Michailovich (Joint Stock Company A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow, Russian Federation)
E-mail: shishov@bochvar.ru

KABANOV Aleksandr Anatol'evich (Joint Stock Company A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow, Russian Federation)
E-mail: kabanov@bochvar.ru

NOVIKOV Vladimir Vladimirovich (Joint Stock Company A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow, Russian Federation)
E-mail: novikov@bochvar.ru

MARKELOV Vladimir Andreevich (Joint Stock Company A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow, Russian Federation)
E-mail: markelov@bochvar.ru

HOHUNOVA Tatiana Nikolaevna (Joint Stock Company A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow, Russian Federation)
E-mail: o_mil@bochvar.ru

MILESHKINA Olga Yur'evna (Joint Stock Company A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials, Moscow, Russian Federation)
E-mail: o_mil@bochvar.ru

REFERENCES

1. Semchenkov Yu.M. Sovremennye i perspektivnye toplivnye tsikly reaktorov VVER (2008) *Tezisy dokladov NTK-2008. Yadernoe toplivo novogo pokoleniya dlya AES. Rezul'taty razrabotki, opyt ekspluatatsii i napravleniya razvitiya*, pp.16. (in Russian)
2. Marakulin A.V., Nigorenko N.V., Simonov A.N. Opyt vnedreniya i opytnoy ekspluatatsii rabochikh kasset tret'ego pokoleniya na bloke 4 Kol'skoy AES s reaktorom VVER-440 (V-213) (2012) *Tezisy dokladov NTK-2012. Yadernoe toplivo novogo pokoleniya dlya AES*, pp. 22. (in Russian)
3. Vasil'chenko I.N., Kobelev S.N., V'yalitsyn V.V., Medvedev V.S. Razrabotka, vnedrenie na VVER-1000 i dal'neyshaya modernizatsiya TVS-2. Preemstvennost' trebovaniy i resheniy po konstruktsii TVS VVER-1500 (2006) *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Materialovedenie i novye materialy*, no. 2 (67), pp. 53–62. (in Russian)
4. Samoylov O.B., Kuul' V.S., Preobrazhenskiy D.G. Rezul'taty sozdaniya i razvitiya TVS al'ternativnoy konstruktsii dlya reaktora VVER-1000 (2005) *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Materialovedenie i novye materialy*, no. 1 (64), pp. 126–131. (in Russian)
5. Markelov V.A., Shishov V.N., Zheltkovskaya T.N., Khokhunova T.N., Vliyanie deformatsionno-termicheskikh parametrov kholodnoy prokatki na strukturu, mekhanicheskie svoystva i soprotivlenie korrozii splava E635. *Sbornik dokladov chetvertoy mezhotraslevoy konferentsii po reaktornomu materialovedeniyu*. Dimitrovgrad, 1996, v.2, pp. 27–38. (in Russian)
6. Nikulin S.A., Goncharov V.I., Markelov V.A., Shishov V.N. Effects of microstructure on ductility and fracture resistance of Zr – 1.2 Sn – 1 Nb – 0.4 Fe alloy (1996) *ASTM STP 1295*, pp. 695 – 709.
7. Nikulina A.V. Tsirkoniy-niobievye splavy dlya elementov aktivnykh zon reaktorov s vodoy pod davleniem (1993) *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya materialovedenie i novye materialy*, no. 1(48), pp. 190–199. (in Russian)
8. Nikulina A.V., Markelov V.A., Peregud M.M., Bibilashvili Y.K., Kotrekhev V.A., A.F. Lositski, Kuzmenko N.V., Shevnin Y.P., Shamardin V.K., Kobylansky G.P., Novoselov A.E. Zirconium Alloy E635 as a Material for Fuel Rod Cladding and Other Components of VVER and RBMK Cores. (1996) *Zirconium in the Nuclear Industry: Eleventh International Symposium, ASTM STP 1295*, pp. 785–803.
9. Shishov V.N. *Zakonomernosti i mekhanizmy formirovaniya mikrostruktury splavov Zr-Nb-(Fe-Sn-O) i ee evolyutsii pri neytronnom obluchenii*. Doct. Diss., Moscow, 2012. (in Russian)
10. Shishov V.N. Fazovye prevrashcheniya v splavakh sistemy Zr – Nb – Fe – Sn (2008) *Tezisy dokladov nauchno-prakticheskoy konferentsii materialovedcheskikh obshchestv Rossii «Tsirkoniy: metallurgiya, svoystva, primeneniye»*, 24–28 noyabrya 2008, Ershovo. (in Russian)
11. Markelov V.A., Rafikov V.Z., Nikulin S.A., Goncharov V.I., Shishov V.N., Gusev A.Yu., Chesnokova E.K. Izmenenie mikrostruktury splava tsirkoniya s olovom, niobiem i zhelezom pri deformatsionno-termicheskoy obrabotke (1994) *Fizika metallov i metallovedenie*, v. 77, no. 4, pp. 70–79. (in Russian)
12. Markelov V.A., Shishov V.N., Sablin M.N., Aktuganova E.N., Kropachev S.Yu. Povyshenie plastichnosti i vyazkosti splava E635 dlya silovykh elementov TVS VVER-1000 (2010) *Tsvetnye metally*, no. 1, pp. 73–78. (in Russian)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛИБЕКОВА Асем – аспирант кафедры инженерной теплофизики физико-технического факультета Карагандинского государственного университета им. Е.А.Букетова. E-mail: asem.alibekova@inbox.ru

АНДРЮЩЕНКО Владимир Андреевич – магистр по направлению «теплофизика», научный сотрудник Российского технологического центра компании Бейкер Хьюз. E-mail: vladimir.andrushenko@gmail.com

БАЛАШОВ Василий Михайлович – младший научный сотрудник ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: shishov@bochvar.ru

БЕРВЕНО Екатерина Викторовна – аспирантка Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук. E-mail: ekaterina.berveno@gmail.com

БОГДАНОВА Рада Александровна – старший преподаватель кафедры математики и информатики Горно-Алтайского государственного университета. E-mail: bog-rada@yandex.ru

БУБЕНЧИКОВ Алексей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: alexy121@mail.ru

БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич – кандидат физико-математических наук, специалист первой категории отдела инновационного развития и интеллектуальной собственности производственно-технического управления ООО «Газпром Трансгаз Томск». E-mail: michael121@mail.ru

ГУБИН Владимир Николаевич – аспирант кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, ассистент кафедры высшей математики и математической физики Томского политехнического университета. E-mail: vovantus@sibmail.com

ДОРОГОВ Юрий Иванович – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики филиала ГОУВПО «Московский энергетический институт (технический университет)» в г. Волжском. E-mail: ydorogov@yandex.ru

ДЮСЕМБАЕВА Айнура Нуртаевна – преподаватель кафедры инженерной теплофизики имени профессора Ж.С. Акылбаева Карагандинского государственного университета имени академика Е.А. Букетова. E-mail: aikabesoba88@mail.ru

КАБАНОВ Александр Анатольевич – начальник отдела ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: kabanov@bochvar.ru

КАЛИНКИН Александр Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент лаборатории математических задач химии Новосибирского государственного университета. E-mail: alexander.a.kalinkin@intel.com

КЛЫКОВ Иван Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и экспериментальной физики физического факультета Томского государственного университета. E-mail: ykar@hotbox.ru

КУСАИЫНОВ Каппас – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой инженерной теплофизики имени профессора Ж.С. Акылбаева Карагандинского государственного университета имени академика Е.А. Букетова. E-mail: kappas090108@mail.ru

ЛАЕВСКИЙ Юрий Миронович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математических задач химии Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук. E-mail: laev@labchem.sccc.ru

МАРКЕЛОВ Владимир Андреевич – доктор технических наук, начальник отдела ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: markelov@bochvar.ru

МАСЛОВ Алексей Станиславович – кандидат технических наук, начальник производственно-технического управления ООО «Газпром Трансгаз Томск». E-mail: a.maslov@gtt.gazprom.ru

МИЛЕШКИНА Ольга Юрьевна – инженер ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: o_mil@bochvar.ru

НИКУЛИНА Антонина Васильевна – доктор технических наук, главный специалист ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: nikulina@bochvar.ru

НОВИКОВ Владимир Владимирович – кандидат технических наук, заместитель генерального директора ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: novikov@bochvar.ru

ОВЧАРЕНКО Владимир Владимирович – кандидат физико-математических наук, начальник отдела интегрированной системы менеджмента производственно-технического управления ООО «Газпром Трансгаз Томск». E-mail: v.ovcharenko@gtt.gazprom.ru

ПЕСТОВ Герман Гаврилович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа Томского государственного университета. E-mail: gpestov@mail.ru

ПОТЕКАЕВ Александр Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, директор СФТИ. E-mail: kanc@spti.tsu.ru

РУДЯК Валерий Яковлевич – доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической механики Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин). E-mail: valery.rudyak@mail.ru

САБЛИН Михаил Николаевич – главный специалист ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: sablin@bochvar.ru

СОРОКИН Константин Сергеевич – аспирант кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: Sorokin_k@list.ru

ТАЛИЕВ Айдарбек Абдыразакович – старший преподаватель Ошского государственного университета, г. Ош, Кыргызстан. E-mail: aidartaliev@mail.ru

ТАНАШЕВА Назгуль Кадыралиевна – докторант физико-технического факультета Карагандинского государственного университета имени академика Е.А. Букетова. E-mail: nazgulya_tans@mail.ru

ТИТОВА Анастасия Викторовна – аспирантка кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: asya_mis@mail.ru

ТУРГУНОВ Муратжан Мирюсупович – магистрант 2-го курса физико-технического факультета Карагандинского государственного университета имени академика Е.А. Букетова. E-mail: turgun@mail.ru

ХОХУНОВА Татьяна Николаевна – старший научный сотрудник ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: o_mil@bochvar.ru

ЧИСТЯКОВ Денис Сергеевич – кандидат физико-математических наук, докторант кафедры алгебры Московского педагогического государственного университета. E-mail: chistyakovds@yandex.ru