ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

УДК 519.16 DOI 10.17223/20710410/68/7

О СРЕДНЕМ ЧИСЛЕ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О РЮКЗАКЕ

М. С. А. Волков*, Э. Н. Гордеев*, В. К. Леонтьев**

**Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия*

***Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва, Россия*

E-mail: sabina-volkoff@yandex.ru, werhorn@yandex.ru, vkleontiev@yandex.ru

Анализируются характеристики решений задачи об ограниченном рюкзаке. Выведены выражения для вычисления среднего значения целевой функции среди всех допустимых решений, а также формулы, связывающие количество решений с подзадачами меньшей размерности. Для случаев, когда переменные принимают значения из множества $\{0,1\}$ или $\{0,1,2\}$, определены формулы для оценки среднего числа допустимых решений во всех задачах заданной размерности при ограниченных значениях коэффициентов весов. Рассмотрена производящая функция, описывающая количество решений рюкзачных задач фиксированной размерности, где компоненты вектора весов принадлежат заданному диапазону. Полученные результаты могут быть полезны при анализе вычислительной сложности алгоритмов решения задачи о рюкзаке.

Ключевые слова: *задача о рюкзаке, производящие функции, динамическое программирование, NP-полные задачи, метод коэффициентов*

ON THE AVERAGE NUMBER OF SOLUTIONS IN THE KNAPSACK PROBLEM

M. S. A. Volkov*, E. N. Gordeev*, V. K. Leontiev**

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

***Dorodnitsyn Computing Center of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Exact analytical expressions are derived for the average number of solutions to the bounded knapsack problem over a set of fixed-dimension instances. The average number of solutions for a set of knapsack problems with the constraint $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b$, where the coefficients a_i do not exceed a given value p, is denoted as $|\bar{V_p}|$. Formulas are obtained that relate the number of solutions to problem parameters such as the dimension n, weight limit p, and allowable variable values. For Boolean variables $x_i \in \{0,1\}$, the following formula is derived:

$$|\bar{V_b}| = \frac{1}{(b+1)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{b}{n-k} (b+2)^k.$$

For the case $x_i \in \{0, 1, 2\}$, a generalized expression is obtained:

$$|\bar{V}_b| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (b+1)^{k-n} \sum_{t=0}^{n-k} \binom{n-k}{t} 2^t \left(\binom{(n-k+t+b-1)/2}{n-k} [n-k+t+b=1 \pmod 2] + \right.$$
$$\left. + \binom{(n-k+t+b)/2}{n-k} [n-k+t+b=0 \pmod 2] \right).$$

Additionally, a formula is derived that defines the generating function for the volume of the set of solutions to problems of dimension n with components of the weight vector $(a_1, \ldots, a_n)$ taking values in the range from 0 to p. The obtained results can be applied to assess the computational complexity of knapsack problem algorithms, select optimal solution methods, develop decomposition algorithms, and analyze combinatorial structures arising in discrete optimization problems.

Keywords: *knapsack problem, generating functions, dynamic programming, NP-complete problems, coefficient method.*

Введение

Задача об ограниченном рюкзаке представляет собой обобщение классической задачи о 0-1-рюкзаке, в которой каждый предмет может быть выбран не более заданного количества раз. В данной постановке каждому предмету сопоставляются три параметра: вес, ценность и максимально допустимое число копий. Как и в базовом варианте, цель состоит в том, чтобы подобрать такой набор предметов, который максимизирует суммарную ценность, не превышая заданное ограничение на вес. Математическая модель этой задачи представлена следующими условиями [1]:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b, \tag{2}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор с целочисленными компонентами $x_i \in \{0, 1, \ldots, m\}$; $c_1, \ldots, c_n$, $a_1, \ldots, a_n$, b — неотрицательные целые числа.

Задача о рюкзаке является одной из фундаментальных проблем комбинаторной оптимизации, находя применение в различных областях науки и техники, где необходимо выбрать оптимальный набор элементов из ограниченного множества. Варианты данной задачи часто возникают при ослаблении условий задач целочисленного программирования, что обусловило её активное изучение в последние десятилетия. Это привело к появлению значительного объёма исследований, затрагивающих как алгоритмические аспекты решения задачи, так и её теоретические свойства. Детальный обзор существующих подходов представлен, в частности, в фундаментальных работах [1, 2].

Задача о рюкзаке относится к классу NP-трудных задач, что означает, что нахождение точного решения требует значительных вычислительных ресурсов даже при относительно небольших значениях n. В связи с этим широко применяются методы декомпозиции, позволяющие разбирать исходную задачу на более мелкие подзадачи, что упрощает процесс поиска оптимального решения.

Одним из ключевых декомпозиционных подходов является метод ветвей и границ. Он основан на поэтапном разделении задачи на подзадачи с последующим исключением тех из них, которые не могут содержать оптимальное решение.

Особый интерес представляют исследования, посвященные анализу точной и приближённой оценок сложности метода ветвей и границ применительно к задаче о рюкзаке. Значительный вклад в эту область внесли М. А. Посыпкин и Р. М. Колпаков, которые рассматривали частные случаи применения данного метода. В работе [3] предложены две верхние оценки сложности решения задачи о рюкзаке методом ветвей и границ, выраженные через параметры исходных данных, а также выделен случай, при котором сложность метода ограничена полиномиально относительно размерности задачи. В [3] рассмотрены также оценки сложности метода для задачи о сумме подмножеств, являющейся частным случаем задачи о рюкзаке. В [4] представлена верхняя оценка сложности решения задачи о сумме подмножеств с дополнительным критерием отсечения подзадач, основанным на сравнении предельного и минимального числа предметов, которые могут быть добавлены в рюкзак.

В [5–7] рассматриваются вопросы, связанные со сложностью параллельных вычислений при решении задач оптимизации, включая задачу о рюкзаке, в распределённых вычислительных средах. Различные вариации задачи о рюкзаке и подходы к их решению исследуются в работах [8–10].

Один из результатов настоящей работы можно рассматривать как обобщение метода, предложенного в [11], где автор анализирует оптимальную стратегию применения метода ветвей и границ к частному случаю задачи о рюкзаке с равными весами предметов и двумя возможными значениями их стоимости. Это расширяет понимание эффективности метода ветвей и границ в различных сценариях задачи о рюкзаке.

Проведённые исследования, посвящённые точным и приближённым оценкам сложности метода, учитывают особенности различных вариантов задачи, что способствует более точному прогнозированию его производительности и выбору наиболее эффективной стратегии решения. В таких подходах активно используются оценки значений функционала на множестве допустимых решений, что делает задачу их вычисления актуальной.

В данной работе выведены комбинаторные формулы для оценки мощности множества решений задачи о рюкзаке в зависимости от заданных параметров. В п. 1 представлены производящие функции в виде рациональных выражений, описывающие множество допустимых решений и соответствующие значения функционала. Пункт 2 содержит оценки среднего числа допустимых решений для всех задач размерности n, где компоненты вектора весов находятся в пределах от 0 до b. Полученные результаты могут быть полезны при анализе вычислительной сложности алгоритмов решения задачи о рюкзаке. Понимание структуры пространства решений и распределения значений целевой функции на множестве допустимых решений позволяет оценить потенциальную сложность или эффективность применяемых алгоритмов.

Для получения ключевых результатов использован метод коэффициентов [12]. Этот метод является разновидностью метода производящих функций, задавая линейный функционал для множества формальных степенных рядов с конечным числом членов с отрицательными степенями. Метод соотносит каждому степенному ряду коэффициент при его члене с показателем минус первой степени. Для рядов, сходящихся в окрестности нуля, значение коэффициента совпадает с вычетом функции в точке 0. Применение метода производящих функций к задаче о рюкзаке с булевыми переменными рассмотрено в работах [13, 14]. В данной работе этот подход используется для получения формул для задачи об ограниченном рюкзаке с возможностью повторного использования предметов.

1. Вспомогательные утверждения

Определим производящие функции в виде формальных степенных рядов, которые описывают множество допустимых решений и множество возможных значений функционала задачи. Обозначим множество допустимых решений исходной задачи V_b. Оно состоит из n-мерных векторов x с $x_i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяющих неравенству (2). Объёмом V_b назовём число $|V_b|$ допустимых решений неравенства (2). Для выражения распределения точек на множестве допустимых решений используется степенной ряд

$$P_b(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{x \in V_b} z_1^{a_1 x_1} z_2^{a_2 x_2} \ldots z_n^{x_n a_n}.$$

В работе [15] при помощи производящих функций получены оценки функционала задачи о рюкзаке с булевыми переменными. Приведённые далее лемма и следствие строго доказаны в [16], они используются для получения и обоснования текущих результатов, связанных с оценкой количества решений задачи об ограниченном рюкзаке.

Лемма 1 [16]. Для задачи об ограниченном рюкзаке (1), (2) справедлива формула

$$\sum_{b=0}^{\infty} P_b(z_1, \ldots, z_n) u^b = \frac{(1{+}(z_1 u)^{a_1}{+}\ldots{+}(z_1 u)^{m a_1}) \ldots (1{+}(z_n u)^{a_n}{+}\ldots{+}(z_n u)^{m a_n})}{1 - u}.$$

Следствие 1 [16]. Для объёма множества допустимых решений задачи (1), (2) с $m \in \mathbb{N}$ имеет место

$$|V_b| = \operatorname*{coef}_u \left\{ \frac{(1 + u^{a_1} + \ldots + u^{m a_1}) \ldots (1 + u^{a_n} + \ldots + u^{m a_n})}{(1 - u) u^{b+1}} \right\}. \tag{3}$$

Здесь и далее $\operatorname*{coef}_u\{A(u)\} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{|u|=\rho} A(u) du = a_{-1}$, где a_{-1} — коэффициент при минус первой степени многочлена $A(u)$. Подробное описание данного функционала и его свойств приведено в [12].

2. Среднее число решений множества задач одинаковой размерности

В выражении (3) приведена формула для вычисления числа решений конкретной задачи о рюкзаке. Определим среднее число решений для некоторого множества задач о рюкзаке с фиксированными параметрами.

Обозначим через $\bar{V}_p$ среднее число решений набора задач об ограниченном рюкзаке (1), (2), где коэффициенты весов a_i, $i = 1, \ldots, n$, не превышают некоторого заданного значения p. Это число выражается следующей формулой:

$$|\bar{V}_p| = \frac{1}{(p+1)^n} \sum_{\substack{0 \leqslant a_i \leqslant p, \\ i = 1, \ldots, n}} |V_b(a_1, \ldots, a_n)|. \tag{4}$$

Рассмотрим вопрос о среднем числе допустимых решений задач о рюкзаке при различных значениях количества копий предметов m.

Пусть значение b и размерность задачи n фиксированы, а компоненты вектора весов $(a_1, \ldots, a_n)$ принимают значения в диапазоне от 0 до b. Формула для вычисления среднего числа решений по всем таким задачам в частном случае, когда $m = 1$, получена и доказана в работе [17]. Далее приводится формулировка соответствующей теоремы, которая будет обобщена на случай, когда переменные принимают значения из множества $x \in \{0, 1, 2\}^n$.

Теорема 1 [17]. При $x \in \{0,1\}^n$ справедлива формула

$$|\bar{V}_b| = \frac{1}{(b+1)^n} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_b^{n-k} (b+2)^k. \tag{5}$$

Продемонстрируем справедливость формулы на элементарном примере.

Пример 1. При $n = 2$, $b = 2$, $x \in \{0,1\}^n$ существует девять ограничений: $2x_1 + 2x_2 \leqslant 2$; $2x_1 + x_2 \leqslant 2$; $x_1 + 2x_2 \leqslant 2$; $x_1 + x_2 \leqslant 2$; $x_1 + 0x_2 \leqslant 2$; $2x_1 + 0x_2 \leqslant 2$; $0x_1 + x_2 \leqslant 2$; $0x_1 + 2x_2 \leqslant 2$; $x_1 + 0x_2 \leqslant 2$.

Очевидно, что последние шесть неравенств выполняются для всех x, т. е. имеют по четыре решения. Первые три неравенства имеют по три решения.

Таким образом, $|\bar{V}_b| = 33/9 = 11/3$. Такое же значение получается из формулы (5):

$$|\bar{V}_b| = \frac{1}{(2+1)^2} \sum_{k=0}^{2} \mathrm{C}_2^k\, \mathrm{C}_2^{2-k}\, (2+2)^k = \frac{1}{9}(\mathrm{C}_2^0\, \mathrm{C}_2^2\, 4^0 + \mathrm{C}_2^1\, \mathrm{C}_2^1\, 4^1 + \mathrm{C}_2^2\, \mathrm{C}_2^0\, 4^2) = \frac{33}{9} = \frac{11}{3}.$$

Формула (5) может быть полезна для оценки сложности алгоритмов решения задачи о 0-1-рюкзаке, поскольку позволяет определить число допустимых решений и их распределение. Это помогает прогнозировать вычислительные затраты и выбирать наиболее подходящие методы решения. Кроме того, она может использоваться для анализа структуры множества решений, что важно при разработке приближённых алгоритмов и изучении эффективности разных подходов к задаче о рюкзаке.

Рассмотрим теперь вопрос о среднем значении мощности множества допустимых решений в более общем случае. Следующая формула выражает число решений каждой задачи размерности n с компонентами вектора весов $(a_1, \ldots, a_n)$, принимающими значения в диапазоне от 0 до p:

$$R_p(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\substack{0 \leqslant a_i \leqslant p,\\ i=1,\ldots,n}} z_1^{a_1}, \ldots, z_n^{a_n} |V_b(a_1, \ldots, a_n)|. \tag{6}$$

Теорема 2. Справедлива формула

$$R_p(z_1, \ldots, z_n) = \\ = \operatorname*{coef}_u \left\{ \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - z_k^{p+1}}{1 - z_k} + \frac{1 - (z_k u)^{p+1}}{1 - z_k u} + \ldots + \frac{1 - (z_k u^m)^{p+1}}{1 - z_k u^m} \right) \Big/ \big(u^{b+1}(1-u)\big) \right\}. \tag{7}$$

Доказательство. Подставим в (6) выражение для числа решений из (3):

$$R_p(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\substack{0 \leqslant a_i \leqslant p,\\ i=1,\ldots,n}} z_1^{a_1}, \ldots, z_n^{a_n} \operatorname*{coef}_u \left\{ \frac{(1 + u^{a_1} + \ldots + u^{ma_1}) \ldots (1 + u^{a_n} + \ldots + u^{ma_n})}{(1-u)u^{b+1}} \right\}.$$

Объединим выражения, в которых суммирование производится по одинаковому компоненту a_i:

$$R_p(z_1, \ldots, z_n) = \operatorname*{coef}_u \left\{ \frac{1}{(1-u)u^{b+1}} \left(\sum_{a_1=1}^{p} z_1^{a_1} (1 + u^{a_1} + \ldots + u^{ma_1}) \ldots \sum_{a_n=1}^{p} z_n^{a_n} (1 + u^{a_n} + \ldots + u^{ma_n}) \right) \right\}.$$

Теперь заметим, что каждое выражение под знаком суммы можно разложить в $p+1$ сумму геометрической прогрессии:

$$\sum_{a_k=1}^{p} z_k^{a_k}(1+u^{a_k}+\ldots+u^{ma_k}) = \sum_{a_k=1}^{p} z_k^{a_k} + \sum_{a_k=1}^{p} z_k^{a_k}u_k^{a_k} + \ldots + \sum_{a_k=1}^{p} z_k^{a_k}u_k^{ma_k} =$$
$$= \frac{1-z_k^{p+1}}{1-z_k} + \frac{1-(z_k u)^{p+1}}{1-z_k u} + \ldots + \frac{1-(z_k u^m)^{p+1}}{1-z_k u^m}.$$

Подставляя полученное выражение в исходную формулу, получим (7). ■

Заменив все аргументы левой части формулы (7) значением z, получим производящую функцию, выражающую общее число решений задач с одинаковой суммой коэффициентов:

$$R_p(z) = \operatorname*{coef}_u\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-z^{p+1}}{1-z} + \frac{1-(zu)^{p+1}}{1-zu} + \ldots + \frac{1-(zu^m)^{p+1}}{1-zu^m}\right)\Big/\big(u^{b+1}(1-u)\big)\right\}.$$

Данная производящая функция может быть адаптирована для решения задач, связанных с использованием специфичных комбинаторных моделей, отражающих особенности конкретной области.

Теорема 3. При $x \in \{0,1,2\}^n$ справедлива формула

$$|\bar{V}_b| = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (b+1)^{k-n} \sum_{t=0}^{n-k} \mathrm{C}_{n-k}^t 2^t \Big(\mathrm{C}_{(n-k+t+b-1)/2}^{n-k}\big[n-k+t+b = 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\big] + \mathrm{C}_{(n-k+t+b)/2}^{n-k}\big[n-k+t+b = 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)\big]\Big). \tag{8}$$

Здесь $[P]$ — скобка Айверсона, равная 1, если условие P выполняется, и 0 в противном случае.

Доказательство. Подставляя значение из формулы (3) при $m = 2$ в выражение (4), получаем

$$|\bar{V}_b| = \frac{1}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{\sum\limits_{a_1=0}^{b}(1+u^{a_1}+u^{2a_1})\ldots\sum\limits_{a_n=0}^{b}(1+u^{a_n}+u^{2a_n})}{(1-u)u^{b+1}}\right\}.$$

Заметим, что каждую сумму в числителе под знаком коэффициента можно разложить, а степени u собрать в две суммы геометрических прогрессий:

$$\sum_{a_i=0}^{b}(1+u^{a_i}+u^{2a_i}) = b+3+\sum_{a_i=1}^{b}u^{a_i}+\sum_{a_i=1}^{b}u^{2a_i} = b+3+\frac{(1-u^b)u}{1-u}+\frac{(1-u^{2b})u^2}{1-u^2}.$$

Подставим полученное выражение вместо сумм по a_i для каждого $i = 1,\ldots,n$:

$$|\bar{V}_b| = \frac{1}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{\left(b+3+\frac{(1-u^b)u}{1-u}\left(1+\frac{(1+u^b)u}{1+u}\right)\right)^n}{(1-u)u^{b+1}}\right\}.$$

Разложим числитель по формуле бинома Ньютона:

$$|\bar{V}_b| = \frac{1}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(b+3)^k\left(\frac{u(1-u^b)}{1-u}\right)^{n-k}\left(1+\frac{(1+u^b)u}{1+u}\right)^{n-k}\right\}.$$

Получившуюся сумму разложим на слагаемые с $k < n$ и $k = n$:

$$|\bar{V}_b| = \frac{1}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_n^k(b+3)^k\Big(\frac{u(1-u^b)}{1-u}\Big)^{n-k}\Big(1+\frac{(1+u^b)u}{1+u}\Big)^{n-k}\right\}+ \\ +\frac{(b+3)^n}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\right\}. \tag{9}$$

Теперь разложим множитель $(1-u^b)^{n-k}$ из числителя первого слагаемого по формуле бинома Ньютона:

$$(1-u^b)^{n-k} = 1 - \mathrm{C}_{n-k}^1 u^b + \mathrm{C}_{n-k}^2 u^{2b} - \ldots + (-1)^{n-k}\mathrm{C}_{n-k}^{n-k}u^{(n-k)b} = \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\mathrm{C}_{n-k}^i u^{ib}. \tag{10}$$

Подставляя в формулу (9) разложение (10), получаем

$$|\bar{V}_b| = \frac{1}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\Big(\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_n^k(b+3)^k\Big(\frac{u}{1-u}\Big)^{n-k}\Big(1+\frac{(1+u^b)u}{1+u}\Big)^{n-k}\times \\ \times\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\mathrm{C}_{n-k}^i u^{ib}\Big)\right\}+\frac{(b+3)^n}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\right\}.$$

Из свойств коэффициента следует, что данное выражение принимает нулевое значение, когда степень u в числителе больше или равна степени u с положительным знаком в знаменателе. Поскольку в первом слагаемом $k < n$, данное выражение обращается в нуль для всех $i > 0$. Таким образом, получаем

$$|\bar{V}_b| = \frac{1}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_n^k(b+3)^k\Big(\frac{u}{1-u}\Big)^{n-k}\Big(1+\frac{(1+u^b)u}{1+u}\Big)^{n-k}\right\}+ \\ +\frac{(b+3)^n}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\right\}.$$

Разложим множитель $\left(1+\dfrac{(1+u^b)u}{1+u}\right)^{n-k}$ в первом слагаемом по формуле бинома Ньютона:

$$|\bar{V}_b| = \frac{1}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_n^k(b+3)^k\Big(\frac{u}{1-u}\Big)^{n-k}\sum_{t=0}^{n-k}\mathrm{C}_{n-k}^t\Big(\frac{(1+u^b)u}{1+u}\Big)^{t}\right\}+ \\ +\frac{(b+3)^n}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\right\}. \tag{11}$$

Разложим теперь первый коэффициент по множителю $(1+u^b)^t$ аналогично (10):

$$(1+u^b)^t = 1 + \mathrm{C}_t^1 u^b + \mathrm{C}_t^2 u^{2b} + \ldots + \mathrm{C}_t^t u^{tb} = \sum_{i=0}^{t}(-1)^i\mathrm{C}_t^i u^{ib}.$$

Подставляя это разложение в выражение (11) и проводя аналогичные рассуждения, получаем

$$|\bar{V}_b| = \frac{1}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_n^k(b+3)^k\left(\frac{u}{1-u}\right)^{n-k}\sum_{t=0}^{n-k}\mathrm{C}_{n-k}^t\left(\frac{u}{1+u}\right)^t\right\}+$$
$$+\frac{(b+3)^n}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\right\}.$$

Преобразуем обратно в бином последнюю сумму в первом слагаемом:

$$|\bar{V}_b| = \frac{1}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_n^k(b+3)^k\left(\frac{u}{1-u}\right)^{n-k}\left(\frac{u}{1+u}+1\right)^{n-k}\right\}+$$
$$+\frac{(b+3)^n}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\right\}.$$

Заметим, что $\mathrm{C}_n^n\left(\frac{u}{1-u}\right)^{n-n}\left(\frac{u}{1+u}+1\right)^{n-n} = 1$, и занесём второе слагаемое под знак суммы первого:

$$|\bar{V}_b| = \frac{1}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(b+3)^k\left(\frac{u}{1-u}\right)^{n-k}\left(\frac{u}{1+u}+1\right)^{n-k}\right\}.$$

И снова соберём получившуюся сумму в бином:

$$|\bar{V}_b| = \frac{1}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\left(b+3+\frac{2u^2+u}{1-u^2}\right)^n\right\}.$$

Теперь разложим по формуле бинома Ньютона, оставляя 2 во втором слагаемом:

$$|\bar{V}_b| = \frac{1}{(b+1)^n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{b+1}(1-u)}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(b+1)^k\left(\frac{u+2}{1-u^2}\right)^{n-k}\right\}.$$

Вынесем множители, не зависящие от u, за знак коэффициента, разложим выражение по последнему множителю и сгруппируем получившиеся множители:

$$|\bar{V}_b| = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(b+1)^{k-n}\operatorname*{coef}_u\left\{\sum_{t=0}^{n-k}\mathrm{C}_{n-k}^t 2^t u^{n-k-t-b-1}(1-u^2)^{k-n-1}(1+u)\right\}.$$

Разложив последнее выражение по множителю $(1+u)$ на два слагаемых и преобразовав получившиеся выражения в биномиальные коэффициенты в соответствии с правилом $\operatorname*{coef}_u\left\{(1-v)^n v^{-k-1}\right\} = (-1)^k\mathrm{C}_n^k$ метода коэффициентов для u^2, получим

$$|\bar{V}_b| = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(b+1)^{k-n}\sum_{t=0}^{n-k}\mathrm{C}_{n-k}^t 2^t\Big(\mathrm{C}_{k-n-1}^{(k-n+t+b-1)/2}(-1)^{(k-n+t+b-1)/2}\big[n-k+t+b = 1 \,(\mathrm{mod}\ 2)\big]+$$
$$+\mathrm{C}_{k-n-1}^{(k-n+t+b)/2}(-1)^{(k-n+t+b)/2}\big[n-k+t+b = 0\ (\mathrm{mod}\ 2)\big]\Big).$$

Наконец, преобразуя биномиальные коэффициенты по правилу $(-1)^{n-m}\mathrm{C}_{-(m+1)}^{n-m} = \mathrm{C}_n^m$ [18, с. 89], получим искомое выражение (8). ■

Пример 2. При $n = 2$, $b = 2$, $x \in \{0,1,2\}^n$ существует девять ограничений: $2x_1{+}2x_2{\leqslant}2$; $2x_1 + x_2 \leqslant 2$; $x_1 + 2x_2 \leqslant 2$; $x_1 + x_2 \leqslant 2$; $2x_1 + 0x_2 \leqslant 2$; $0x_1 + 2x_2 \leqslant 2$; $x_1 + 0x_2 \leqslant 2$; $0x_1 + x_2 \leqslant 2$; $0x_1 + 0x_2 \leqslant 2$. Очевидно, что последние три неравенства выполняются для всех x, т. е. имеют девять решений. Остальные имеют соответственно 3, 4, 4, 6, 6 и 6 решений. Таким образом, $|\bar{V_b}| = 56/9$. Такое же значение получается из формулы (8):

$$|\bar{V_b}| = \sum_{k=0}^{2} \mathrm{C}_2^k (b+1)^{k-2} \sum_{t=0}^{2-k} \mathrm{C}_{2-k}^t 2^t \Big(\mathrm{C}^{2-k}_{(2-k+t+b-1)/2} \big[n-k+t+b = 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\big] + \\ + \mathrm{C}^{2-k}_{(2-k+t+b)/2} \big[n-k+t+b = 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)\big] \Big) = \mathrm{C}_2^0\, 3^{-2} (\mathrm{C}_2^0\, 2^0 \mathrm{C}_2^2 + \\ + \mathrm{C}_2^1\, 2^1 \mathrm{C}_2^2 + \mathrm{C}_2^2\, 2^2 \mathrm{C}_3^2) + \mathrm{C}_2^1\, 3^{-1} (\mathrm{C}_1^0\, 2^0 \mathrm{C}_1^1 + \mathrm{C}_1^1\, 2^1 \mathrm{C}_2^1) + \mathrm{C}_2^2\, 3^0 (\mathrm{C}_0^0\, 2^0 \mathrm{C}_2^2) = 56/9.$$

Таким образом, используя полученные формулы, можно оценить количество возможных решений в зависимости от размера множества предметов и ограничений на их вес. Данные формулы могут быть полезны для выбора оптимального подхода к решению задач, определения вероятности их успешного решения, а также для исследования свойств задач и оптимизации процесса поиска их решений.

Заключение

Рассмотрены методы вычисления и оценки количества допустимых решений задачи об ограниченном рюкзаке. Исследование основано на анализе комбинаторных свойств задачи, что позволило получить новые формулы для вычисления среднего числа допустимых решений для случаев $x \in \{0,1\}^n$ и $x \in \{0,1,2\}^n$, где компоненты вектора весов $(a_1, \ldots, a_n)$ принадлежат диапазону от 0 до b. В частности, в одном из общих случаев найдена производящая функция, определяющая объём множества допустимых решений для задач размерности n, в которых компоненты вектора весов принимают значения в пределах от 0 до фиксированного числа p.

Полученные результаты могут стать основой для дальнейшего изучения свойств множества допустимых решений задачи о рюкзаке. Найденные формулы также могут применяться в вычислительных процедурах для оценки оптимальности алгоритмов решения различных типов подобных задач, а также в декомпозиционных и эвристических алгоритмах их решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kellerer H., Pferschy U., and Pisinger D.* Knapsack Problems. Berlin: Springer, 2004. 548 p.
2. *Martello S. and Toth P.* Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations. N.Y.: John Wiley & Sons, 1990. 308 p.
3. *Колпаков Р. М., Посыпкин М. А.* Верхняя и нижняя оценки трудоемкости метода ветвей и границ для задачи о ранце // Дискретная математика. 2010. Т. 22. Вып. 1. С. 58–73.
4. *Колпаков Р. М., Посыпкин М. А., Си Ту Тант Син.* Верхняя оценка сложности одного из вариантов метода ветвей и границ для задачи о сумме подмножеств // Intern. J. Open Inform. Technol. 2016. V. 4. No. 2. P. 1–6.
5. *Колпаков Р. М., Посыпкин М. А., Сигал И. Х.* О нижней оценке вычислительной сложности одной параллельной реализации метода ветвей и границ // Автоматика и телемеханика. 2010. №10. С. 156–166.
6. *Колпаков Р. М., Посыпкин М. А.* О масштабируемости и эффективности одного метода решения задачи о ранце в распределенной вычислительной среде // Труды ИСА РАН. 2009. Т. 46. С. 164–174.

7. *Колпаков Р. М., Посыпкин М. А.* Об эффективной стратегии распараллеливания при решении задач о сумме подмножеств методом ветвей и границ // Дискретная математика. 2019. Т. 31. № 4. С. 20–37.
8. *Колпаков Р. М., Посыпкин М. А., Си Ту Тант Син.* Сложность решения задачи о сумме подмножеств методом ветвей и границ с доминированием и мощностным отсевом // Автоматика и телемеханика. 2017. № 3. С. 96–110.
9. *Колпаков Р. М., Посыпкин М. А.* Асимптотическая оценка сложности метода ветвей и границ с ветвлением по дробной переменной для задачи о ранце // Дискретн. анализ исслед. опер. 2008. Т. 15. № 1. С. 58–81.
10. *Колпаков Р. М., Посыпкин М. А.* О наилучшем выборе переменной ветвления в задаче о сумме подмножеств // Дискретная математика. 2017. Т. 29. № 1. С. 51–58.
11. *Колпаков Р. М.* Оптимальная стратегия решения частного случая задачи о ранце методом ветвей и границ // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 13–22.
12. *Егорычев Г. П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск: Наука, 1977. 285 с.
13. *Леонтьев В. К., Гордеев Э. Н.* Производящие функции в задаче о ранце // Доклады АН. 2018. Т. 481. № 5. С. 478–480.
14. *Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К.* О некоторых комбинаторных свойствах задачи о рюкзаке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 8. С. 1439–1447.
15. *Леонтьев В. К., Гордеев Э. Н.* О числе решений системы булевых уравнений // Автоматика и телемеханика. 2021. № 9. С. 150–168.
16. *Волков М. С. А.* Комбинаторные свойства задачи об ограниченном рюкзаке // Прикладная дискретная математика. 2024. № 63. С. 117–130.
17. *Леонтьев В. К., Гордеев Э. Н.* Зависимость среднего числа решений в задаче о ранце от параметров области ограничений // Безопасные информационные технологии: Сб. трудов 11-й Междунар. науч.-технич. конф. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021. С. 85–90.
18. *Кнут Д. Э.* Искусство программирования. Т. 1: Основные алгоритмы. 3-е изд. М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. 720 с.

REFERENCES

1. *Kellerer H., Pferschy U., and Pisinger D.* Knapsack Problems. Berlin, Springer, 2004. 548 p.
2. *Martello S. and Toth P.* Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations. N.Y., John Wiley & Sons, 1990. 308 p.
3. *Kolpakov R. M. and Posypkin M. A.* Upper and lower bounds for the complexity of the branch and bound method for the knapsack problem. Discrete Math. Appl., 2010, vol. 20, no. 1, pp. 95–112.
4. *Kolpakov R. M., Posypkin M. A., and Si Tu Tant Sin.* Verkhnyaya otsenka slozhnosti odnogo iz variantov metoda vetvey i granits dlya zadachi o summe podmnozhestv [Upper bound for the complexity of one of the variants of the branch and bound method for the subset sum problem]. Intern. J. Open Inform. Technol., 2016, vol. 4, no. 2, pp. 1–6. (in Russian)
5. *Kolpakov R. M., Posypkin M. A., and Sigal I. K.* On a lower bound on the computational complexity of a parallel implementation of the branch-and-bound method. Autom. Remote Control, 2010, vol. 71, no. 10, pp. 2152–2161.
6. *Kolpakov R. M. and Posypkin M. A.* O masshtabiruemosti i effektivnosti odnogo metoda resheniya zadachi o rantse v raspredelennoy vychislitel'noy srede [On the scalability and efficiency of a method for solving the knapsack problem in a distributed computing environment]. Proc. ISA RAN, 2009, vol. 46, pp. 164–174. (in Russian)

7. *Kolpakov R. M. and Posypkin M. A.* Effective parallelization strategy for the solution of subset sum problems by the branch-and-bound method. Discrete Math. Appl., 2020, vol. 30, no. 5, pp. 313–325.
8. *Kolpakov R. M., Posypkin M. A., and Sin S. T. T.* Complexity of solving the Subset Sum problem with the branch-and-bound method with domination and cardinality filtering. Autom. Remote Control, 2017, vol. 78, no. 3, pp. 463–474.
9. *Kolpakov R. M. and Posypkin M. A.* Asimptoticheskaya otsenka slozhnosti metoda vetvey i granits s vetvleniem po drobnoy peremennoy dlya zadachi o rantse [Asymptotic estimate on the complexity of the branch-and-bound method with branching by a fractional variable for the knapsack problem]. Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii, 2008, vol. 15, no. 1, pp. 58–81. (in Russian)
10. *Kolpakov R. M. and Posypkin M. A.* On the best choice of a branching variable in the subset sum problem. Discrete Math. Appl., 2018, vol. 28, no. 1, pp. 29–34.
11. *Kolpakov R. M.* Optimal strategy for solving a special case of the knapsack problem by the branch and bound method. Moscow University Mathematics Bulletin, 2021, vol. 76, no. 3, pp. 97–106.
12. *Egorychev G. P.* Integral'noe predstavlenie i vychislenie kombinatornykh summ [Integral Representation and the Computation of Combinatorial Sums]. Novosibirsk, Nauka, 1977. 285 p. (in Russian)
13. *Leont'ev V. K. and Gordeev E. N.* Proizvodyashchie funktsii v zadache o rantse [The generating functions in the knapsack problem]. Doklady Akademii Nauk, 2018, vol. 481, no. 5, pp. 478–480. (in Russian)
14. *Gordeev E. N. and Leont'ev V. K.* On combinatorial properties of the knapsack problem. Comput. Math. Math. Phys., 2019, vol. 59, no. 8, pp. 1380–1388.
15. *Leontiev V. K. and Gordeev E. N.* On the number of solutions to a system of Boolean equations. Autom. Remote Control, 2021, vol. 82, no. 9, pp. 1581–1596.
16. *Volkov M. S. A.* Kombinatornye svoystva zadachi ob ogranichennom ryukzake [Combinatorial properties of the bounded knapsack problem]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2024, no. 63, pp. 117–130. (in Russian)
17. *Leont'ev V. K. and Gordeev E. N.* Zavisimost' srednego chisla resheniy v zadache o rantse ot parametrov oblasti ogranicheniy [Dependence of the average number of solutions in the knapsack problem on the parameters of the constraint domain]. Proc. 11th Intern. Conf. "Secure Information Technologies", Moscow, Bauman Moscow Technical University, 2021, pp. 85–90. (in Russian)
18. *Knuth D. E.* The Art of Computer Programming. Vol. 1: Fundamental Algorithms. Third Edition. Massachusetts, Addison-Wesley, 1997. 672 p.