УДК 519.8 DOI 10.17223/20710410/68/8

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ МАКСИМИННОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТОВ НА СЕТИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МИНИМАЛЬНЫЕ РАССТОЯНИЯ[1]

Г. Г. Забудский

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия

E-mail: zabudsky@ofim.oscsbras.ru

Рассматривается задача оптимального размещения объектов на неориентированной взвешенной сети, расположенной на плоскости. Вершинам приписаны положительные веса, а рёбра представлены отрезками. Вес вершины отражает требование размещать объекты как можно дальше от неё. Заданы ограничения на минимально допустимые расстояния от вершин до объектов. Необходимо найти такие точки на рёбрах сети для размещения объектов, чтобы минимальное взвешенное расстояние от вершин до объектов было максимальным. Предложен алгоритм решения задачи с заданной точностью для двух объектов.

Ключевые слова: *выпуклая оболочка, задача размещения, максиминный критерий, опасный объект, сеть.*

APPROXIMATE SOLUTION OF THE MAXIMIN PROBLEM OF LOCATING FACILITIES ON A NETWORK WITH CONSTRAINTS ON MINIMUM DISTANCES

G. G. Zabudsky

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

We consider the problem of the optimal location of facilities on an undirected weighted network located on a plane. The vertices are assigned positive weights and the edges are segments. The weight of a vertex reflects the requirement to locate the facilities as far away from it as possible. Constraints are given on the minimum admissible distances from vertices to the facilities. It is necessary to find such points on the edges of the network to locate the facilities that the minimum weighted distance from the vertices to the facilities is maximum. An algorithm for solving the problem with a given accuracy for two facilities is proposed.

Keywords: *convex hull, location problem, maximin criterion, obnoxious facility, network.*

Введение

Задачи оптимального размещения объектов различного назначения имеют много практических приложений. В общем случае задача заключается в размещении одного или нескольких объектов в заданной области с фиксированными в ней объектами (клиентами) таким образом, чтобы оптимальной была некоторая функция (функции)

[1]Работа выполнена в рамках госзадания ИМ СО РАН, проект №FWNF-2022-0020.

расстояний между клиентами и размещаемыми объектами. Обзор исследований задач оптимального размещения на сетях и плоскости можно найти в [1–5].

В теории оптимального размещения наиболее исследованы задачи, в которых объекты должны быть расположены как можно ближе к клиентам. Такие объекты называют желательными, например поликлиники, пожарные части, магазины. Достаточно хорошо изучены задачи с критериями минимизации максимального расстояния (задачи о центрах) и суммарного расстояния (задачи о медианах) от клиентов до объектов [1].

В последние годы в связи с возросшими экологическими требованиями проводятся исследования по проблемам размещения нежелательных (опасных) объектов. Они обслуживают население, но оказывают негативное влияние на него. Предполагается, что влияние уменьшается по мере увеличения расстояния до объектов. Поэтому необходимо размещать такие объекты как можно дальше от населения. При этом можно минимизировать негативное влияние на наиболее пострадавшее население или среднее влияние на всё население района. В первом случае максимизируется минимальное расстояние (максиминная задача), а во втором — суммарное расстояние (максисуммная задача) от клиентов до объектов [5–8].

На практике можно выделить следующие ситуации, в которых необходимо учитывать негативное влияние при размещении объектов:

1) угроза общественной безопасности или нарушение комфорта людей (исправительный центр);
2) ущерб окружающей среде и здоровью населения (химический завод);
3) требование чистой и здоровой среды (санаторий).

Решение задач размещения опасных объектов на сетях с расстояниями, измеряемыми по транспортной сети, может быть использовано при учёте влияния первого типа. Обоснованием этого является то, что чем больше расстояние от населённых пунктов до объектов по транспортной сети, тем они безопаснее и тем меньше неудобств доставляют обществу [6–8]. Для объектов второго и третьего типов более реальным будет применение, например, евклидовой метрики [9, 10]. Так, в случае химического завода загрязнение распространяется не по транспортной сети. Общим для всех типов объектов является то, что они не должны располагаться вблизи густонаселённых районов.

Основная часть исследований задач размещения опасных объектов посвящена вариантам размещения одного объекта. Полиномиальные алгоритмы для задач на специальных сетях и общего вида предложены в [6–8].

Небольшое количество работ посвящены задачам размещения нескольких опасных объектов на сетях. В [11] представлены результаты исследования сложности их решения. Для общего случая доказано, что задачи NP-трудные, даже если сеть состоит из одного ребра. Нахождение 2/3-приближённого решения для максиминной задачи также является NP-трудным. Эвристические алгоритмы для решения задач предложены, например, в [12, 13].

В данной работе рассматривается максиминная задача размещения объектов на сети, расположенной на плоскости. Вершины сети соответствуют клиентам, а рёбра — дорогам. Вершины имеют положительные веса. Рёбра представлены отрезками с длинами в евклидовой метрике. Заданы ограничения на минимально допустимые расстояния от клиентов до объектов. Необходимо найти такое размещение объектов на сети, чтобы минимальное расстояние от них до ближайшего клиента было максимальным.

Предложен алгоритм решения задачи с заданной точностью для двух объектов. Исходная непрерывная задача решается с помощью серии дискретных задач.

1. Постановка задачи

Задана область на плоскости с населёнными пунктами, соединёнными сетью дорог, и объекты, например мусороперерабатывающие заводы, которые необходимо разместить на дорожной сети. Объекты оказывают негативное влияние на население. Влияние уменьшается с увеличением расстояния от населённых пунктов до объектов. Заданы минимально допустимые расстояния от населённых пунктов до объектов (санитарные зоны), в которых нельзя размещать объекты. Кроме того, между объектами также определено минимальное расстояние, чтобы избежать суммарного негативного влияния от них. Необходимо найти такое размещение объектов, чтобы были выполнены ограничения по минимальным расстояниям и негативное влияние было минимальным. В качестве критерия рассматривается минимизация влияния на наиболее пострадавшее население. Поэтому максимизируется минимальное расстояние от населённых пунктов до ближайшего объекта.

Введём обозначения и сформулируем математическую модель. Пусть $G = (V, E)$ — неориентированная сеть, соответствующая населенным пунктам и дорогам; $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — множество вершин, $I = \{1, \ldots, n\}$ — множество их номеров. Для каждой вершины v_i заданы координаты (a_i, b_i) и вес $\alpha_i > 0$, $i \in I$. Если $\alpha_i < \alpha_j$, то объекты должны размещаться дальше от вершины v_i, чем от вершины v_j. Вес вершины может быть величиной, обратной количеству населения в пункте, соответствующем вершине. Рёбра сети $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ с множеством номеров $J = \{1, \ldots, m\}$ представлены отрезками, длины которых определяются в евклидовой метрике $\rho(v_i, v_j)$, $i \neq j$, $i, j \in I$. Множества точек размещения объектов и их номеров обозначим через $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$ и $P = \{1, \ldots, p\}$ соответственно. Обозначим через d_i, $i \in I$, и d минимально допустимое расстояние между вершиной v_i и объектами и объектов между собой соответственно.

Множество возможных точек размещения объектов на сети (точки на рёбрах и вершины) будем обозначать как $Z(G)$. Положение объекта на ребре определяется расстоянием от его вершин. Например, точка x размещена на ребре (v_i, v_j) на расстоянии $\rho(v_i, x) = \lambda\rho(v_i, v_j)$ от вершины v_i и на расстоянии $\rho(v_j, x) = (1-\lambda)\rho(v_i, v_j)$ от вершины v_j, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Математическая модель максиминной задачи размещения на сети имеет вид

$$\min_{i \in I} \min_{j \in P} \alpha_i \rho(v_i, z_j) \to \max; \tag{1}$$

$$\rho(v_i, z_j) \geqslant d_i, \ i \in I, \ j \in P; \tag{2}$$

$$\rho(z_i, z_j) \geqslant d, \ i, j \in P, \ i \neq j; \tag{3}$$

$$z \subseteq Z(G). \tag{4}$$

Максиминная задача размещения одного объекта на сети, в которой расстояния измеряются по кратчайшим путям, рассматривается, например, в [8]. Для сети общего вида предложен полиномиальный алгоритм решения. Алгоритм основан на поиске узких рёберных точек, аналогично задаче размещения объекта на сети с максимизацией суммарного расстояния от вершин до объекта [6, 7]. В [10] предложен алгоритм поиска приближённого решения максиминной задачи для одного объекта на сети, расположенной на плоскости. Двухкритериальная задача размещения объекта на сети дорог с максисуммным и максиминным критериями рассмотрена в [9].

Далее рассмотрим вариант максиминной задачи для размещения двух объектов — z_1 и z_2.

2. Область допустимых решений задачи (1)–(4)

Проверка существования допустимого решения задачи (1)–(4) включает два этапа. На первом этапе находится область S, в которой выполняются ограничения на минимально допустимые расстояния между вершинами и объектами. На втором этапе проверяется возможность размещения объектов в области S с ограничением (3).

2.1. Этап 1

Область S последовательно определяется на рёбрах сети. Опишем алгоритм для произвольного ребра (v_h, v_q).

Шаг 1. От исходной системы координат переходим к системе, в которой ребро будет расположено на оси абсцисс. Вершина v_h — в начале координат, а вершина v_q — на расстоянии $\rho(v_h, v_q)$ от начала координат.

Шаг 2. Для каждой вершины находим отрезки на ребре, в которых выполняются ограничения (2).

Шаг 3. Находим множество непересекающихся отрезков.

Шаг 4. Определяем область S в исходной системе координат.

На шаге 1 обозначим координаты вершины v_i в новой системе как (a'_i, b'_i), $i \in I$, которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} a'_i &= (a_i - a_h)\cos\varphi + (b_i - b_h)\sin\varphi, \\ b'_i &= -(a_i - a_h)\sin\varphi + (b_i - b_h)\cos\varphi, \end{aligned}$$

где φ — угол наклона прямой, проведённой через вершины v_h и v_q (точки с координатами (a_h, b_h) и (a_q, b_q)). Вершины v_h и v_q в новой системе имеют координаты $(0, 0)$ и $(\rho(v_h, v_q), 0)$ соответственно.

На шаге 2 для текущей вершины v_k определяем расстояние ρ_k от неё до ребра (v_h, v_q). Значение ρ_k вычисляется следующим образом:

$$\rho_k = \begin{cases} b'_k, & 0 \leqslant a'_k \leqslant \rho(v_h, v_q), \\ \sqrt{a'^2_k + b'^2_k}, & a'_k < 0, \\ \sqrt{(a'_k - \rho(v_h, v_q))^2 + b'^2_k}, & a'_k > \rho(v_h, v_q). \end{cases}$$

Если $\rho_k > d_k$, то переходим к другой вершине. В противном случае для $y = 0$ решаем уравнение

$$\sqrt{(x - a'_k)^2 + (y - b'_k)^2} = d_k.$$

Если r^k_1, r^k_2 — действительные корни уравнения, то область на ребре, в которой не выполняется ограничение (2) относительно вершины v_k, представляет интервал (r^k_1, r^k_2). Область, в которой выполняется ограничение, образована объединением двух отрезков $[0, r^k_1]$ и $[r^k_2, \rho(v_h, v_q)]$. После просмотра всех вершин сети получаем набор не более $2n$ отрезков на ребре (v_h, v_q), в которых выполняются ограничения (2) для всех вершин. Обозначим их как $[s^i_1, s^i_2]$, $i \in I^{2n} = \{1, \ldots, 2n\}$. Отрезки могут пересекаться. Если объединение интервалов, в которых не выполняются ограничения (2), покрывает всё ребро, то оно не принадлежит области S.

Опишем алгоритм построения непересекающихся отрезков области S на ребре (v_h, v_q) (шаг 3). Пусть отрезки перенумерованы так, что имеют место неравенства

$$s^1_1 < s^2_1 \ldots < s^{2n}_1.$$

Формируем множество номеров отрезков, левая граница которых приналежит $[s_1^1, s_2^1]$:

$$I_1^1 = \{i \in I^{2n} : s_1^1 \leqslant s_1^i \leqslant s_2^1\}.$$

Если $I_1^1 = \varnothing$, полагаем $o_1^1 = s_1^1$ и $o_2^1 = s_2^1$. Иначе находим номер i_1, такой, что

$$\max_{i \in I^{2n}} s_2^i = s_2^{i_1}.$$

Формируем множество номеров отрезков I_2^1, $I_2^1 \cap I_1^1 = \varnothing$. Полагаем $I^{2n} = I^{2n} \setminus I_1^1$,

$$I_2^1 = \{i \in I^{2n} : s_2^1 \leqslant s_1^i \leqslant s_2^{i_1}\}.$$

Если $I_2^1 = \varnothing$, то полагаем $o_1^1 = s_1^1$ и $o_2^1 = s_2^{i_1}$. Иначе находим номер i_2, такой, что

$$\max_{i \in I_1^2} s_2^i = s_2^{i_2}.$$

Формируем множество I_3^1 и так далее. В итоге получим первый отрезок $[o_1^1, o_2^1]$ области S на ребре, который не пересекается с другими отрезками.

Для построения следующего отрезка находим минимальный номер k, для которого $s_1^k > o_2^1$. Формируем множество номеров отрезков

$$I_1^2 = \{i \in I^{2n} : s_1^k \leqslant s_1^i \leqslant s_2^k\}$$

и повторяем процесс построения отрезка.

В результате находим область S на ребре (v_h, v_q) в виде множества непересекающихся отрезков $[o_1^1, o_2^1], [o_1^2, o_2^2], \ldots, [o_1^k, o_2^k]$, $k \leqslant 2n$. Трудоёмкость построения непересекающихся отрезков не превосходит $O(n)$.

На шаге 4 определяем координаты границ отрезков области S на ребре (v_h, v_q) в исходной системе координат. Для отрезка с номером i имеют место следующие формулы:

$$x_1^i = a_h + o_1^i \cos\varphi, \quad y_1^i = b_h + o_1^i \sin\varphi,$$
$$x_2^i = a_h + o_2^i \cos\varphi, \quad y_2^i = b_h + o_2^i \sin\varphi.$$

После выполнения шагов 1–4 для всех рёбер сети G получим набор $O(n^3)$ отрезков области S: $[(x_1^i, y_1^i), (x_2^i, y_2^i)]$, $i \in I^{n^3} = \{1, \ldots, n^3\}$.

2.2. Этап 2

На этом этапе проверяется возможность размещения объектов z_1 и z_2 в области S на расстоянии не менее d друг от друга.

Утверждение 1. Максимальное расстояние между двумя отрезками на плоскости достигается в их граничных точках.

Доказательство. Максимальное расстояние между точкой t и отрезком достигается в одной из граничных точек отрезка. Это следует из того, что можно считать, что точка t находится на оси ординат, а отрезок — на оси абсцисс. Расстояние от точки t до любой точки s отрезка — это диагональ в треугольнике, один катет которого — ордината точки t, он общий для всех точек отрезка, а другой — координата точки s. Диагональ треугольника максимальна, когда второй катет имеет максимальную длину. Это достигается в одной из граничных точках отрезка. Фиксируя точку в одном из концов одного отрезка, аналогично можно показать, что максимальное расстояние от неё до другого отрезка достигается в его граничной точке. ■

В рассуждениях можно было использовать свойство, что максимальное расстояние между точкой на плоскости и выпуклым многоугольником достигается в одной из вершин многоугольника [3].

Обозначим через $S1$ множество граничных точек отрезков области S, ближайших к вершинам соответствующих рёбер.

Следствие 1. Максимальное расстояние между точками множества S достигается в точках множества $S1$.

Доказательство. Отрезки области S на ребре вложены в отрезок с граничными точками, ближайшими к вершинам ребра. Максимальное расстояние между двумя такими отрезками для различных рёбер сети достигается в их граничных точках, т. е. в точках множества $S1$. ■

Если число отрезков области S на ребре (v_p, v_q) равно k, то для выполнения этапа 2 достаточно рассматривать две точки с координатами (x_1^1, y_1^1) и (x_2^k, y_2^k). В множестве $S1$, состоящем из $O(n^2)$ точек, необходимо найти наиболее удалённые друг от друга точки — диаметр множества $S1$. Если диаметр $S1$ больше либо равен d, то исходная задача имеет допустимое решение. Нахождение диаметра множества точек перебором пар имеет трудоёмкость $O(n^4)$.

В работах [14, 15] описан алгоритм нахождения диаметра множества из k точек на плоскости. Алгоритм основан на том, что диаметр множества точек равен диаметру их выпуклой оболочки. Алгоритм построения выпуклой оболочки k точек имеет трудоёмкость $O(k \log k)$ [16]. Диаметр выпуклой оболочки находится за линейное от количества точек время. Поэтому сложность определения диаметра множества $S1$ оценивается как $O(n^2 \log n)$ операций.

Приведём необходимые понятия и кратко опишем эффективный алгоритм нахождения диаметра множества точек на плоскости при условии, что выпуклая оболочка построена [14, 15]. Алгоритм построения выпуклой оболочки широко известен и его можно найти, например, в [16].

Определение 1. Опорной прямой выпуклого многоугольника называют прямую, проходящую через его вершину и обладающую тем свойством, что многоугольник лежит по одну сторону от неё.

Определение 2. Пара точек многоугольника, через которые можно провести параллельные опорные прямые, называется противолежащей парой.

Теорема 1. Диаметр выпуклой фигуры равен наибольшему из расстояний между двумя параллельными опорными прямыми этой фигуры.

Из теоремы 1 следует, что для нахождения диаметра множества точек необходимо рассматривать только противолежащие пары. Сделать это можно за линейное от количества точек $O(n^2)$ в множестве $S1$ время с помощью метода, который называется «вращающиеся калиперы» (англ. rotating calipers).

На рис. 1 опорные параллельные прямые L и M проведены через вершины A и D, эти вершины образуют противолежащую пару. Если вращать прямые L и M против часовой стрелки вокруг вершин, они будут опорными до тех пор, пока одна из них не совпадёт со стороной многоугольника. Угол поворота до ребра (E, D) меньше, чем до ребра (A, B), поэтому вершины A и E будут следующей противолежащей парой. Далее M будет вращаться вокруг вершины E. Продолжая процесс вращения, получим все пары противолежащих вершин. При этом для получения новой противолежащей пары необходимо сравнить углы между опорными прямыми и рёбрами многогранника. Трудоёмкость нахождения всех противолежащих пар для $S1$ составляет $O(n^2)$.

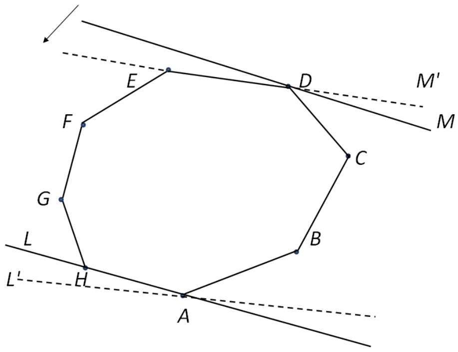

Рис. 1. Формирование противолежащих пар

3. Алгоритм решения задачи (1)–(4)

Модель (1)–(4) для двух объектов может быть представлена следующим образом:

$$T \to \max; \tag{5}$$

$$\rho(v_i, z_j) \geqslant \max_{i \in I}(d_i, T/\alpha_i), \ i \in I, \ j = 1, 2; \tag{6}$$

$$\rho(z_1, z_2) \geqslant d; \tag{7}$$

$$z \subset Z(G). \tag{8}$$

Идея алгоритма нахождения приближённого решения задачи (5)–(8) состоит в переборе значений параметра T и проверке существования допустимого решения для них. Через $S(T)$ обозначим область, в которой выполняются ограничения (6) для фиксированного T. Область $S(T)$ находится аналогично области S. В этом случае минимальное расстояние от вершины сети v_i до объектов равно $\max(d_i, T/\alpha_i)$ для $i \in I$. Значения T выбираются из определённого отрезка с применением метода дихотомии. Аналогично $S1$ определим область $S1(T)$. Для очередного значения T решается вспомогательная задача — задача распознавания (ЗР) в области $S1(T)$.

Задача 1 (ЗР). Можно или нет разместить два объекта z_1 и z_2 в области $S1(T)$ так, чтобы выполнялось ограничение на минимальное расстояние между ними?

Если в результате решения ЗР получаем ответ «да», то на следующей итерации происходит увеличение недопустимых для размещения областей пропорционально весам вершин сети. Если ответ «нет» — пропорциональное уменьшение. Это происходит до тех пор, пока не найдётся допустимое значение параметра T, удовлетворяющее заданной точности решения задачи.

Определим отрезок, содержащий оптимальное значение T^* параметра T. Вычислим значения $H = \max_{i \in I} a_i - \min_{i \in I} a_i$ и $U = \max_{i \in I} b_i - \min_{i \in I} b_i$.

Утверждение 2. Если $S1(T) \neq \varnothing$, то для оптимального значения T^* справедливы следующие неравенства:

$$\min_{i \in I} \alpha_i d_i \leqslant T^* \leqslant \max_{i \in I} \alpha_i \sqrt{H^2 + U^2}.$$

Доказательство. Справедливость левого неравенства следует из того, что рассматривается задача максимизации и для неё существует допустимое решение.

Поэтому $T^* \geqslant \min\limits_{i \in I} \alpha_i d_i$. Правое неравенство следует из того, что $\max(d_i, T/\alpha_i) \leqslant \leqslant \alpha_i \max\limits_{j=1,2} \rho(v_i, z_j) \leqslant \max\limits_{i \in I} \alpha_i \sqrt{H^2 + U^2}$. ■

Замечание 1. При решении ЗР находится размещение z_1 и z_2, так как диаметр множества определяется с помощью нахождения вершин выпуклой оболочки, на которых он достигается.

Приведём описание алгоритма решения ЗР для фиксированного T_k.

Обозначим через $O_k = [l_k, r_k]$ отрезок, рассматриваемый на шаге k, где $l_1 = = \min\limits_{i \in I}(\alpha_i d_i)$, $r_1 = \max\limits_{i \in I} \alpha_i \sqrt{H^2 + U^2}$. На шаге k выбирается T_k — середина отрезка O_k и решается ЗР. Если ответ в ЗР «да», то полагаем $O_{k+1} = [T_k, r_k]$, иначе — $O_{k+1} = [l_k, T_k]$.

Количество итераций (решения ЗР) равно $\log((r_1 - l_1)/\varepsilon)$, где ε — точность, с которой находится решение. Трудоёмкость решения ЗР оценивается как $O(n^2 \log n)$ операций. Общая трудоёмкость алгоритма решения исходной задачи не превышает $O\big(n^2 \log n \log((r_1 - l_1)/\varepsilon)\big)$.

Заключение

Рассмотрена максиминная задача размещения двух объектов на сети, расположенной на плоскости. Заданы положительные веса вершин и минимальные расстояния от вершин до объектов. Предложен алгоритм нахождения приближённого решения задачи с заданной точностью.

Сетью может быть транспортная сеть, соединяющая населенные пункты. Объекты должны быть размещены так, чтобы их негативное влияние на наиболее пострадавшее население было минимальным. Решение задачи может быть полезным при выборе мест расположения, например, мусороперерабатывающих предприятий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 432 с.
2. *Drezner Z.* Facility Location. A Survey of Applications and Methods. N.Y.: Springer, 1995. 571 p.
3. *Nickel S.* Location Theory. A Unified Approach. Berlin: Springer Verlag, 2005. 437 p.
4. *Farani R. Z. and Hekmatfar M.* Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies. Berlin: Springer Verlag, 2009. 549 p.
5. *Eiselt H. A. and Marianov V.* Foundations of Location Analysis. N.Y.: Springer, 2011. 509 p.
6. *Church R. L. and Garfinkel R. S.* Locating an obnoxious facility on a network // Trans. Sci. 1978. V. 12. No. 2. P. 107–118.
7. *Забудский Г. Г.* Решение макси-суммной задачи размещения на сети с ограничениями на транспортные затраты // Прикладная дискретная математика. 2023. № 60. С. 120–127.
8. *Melachrinoudis E. and Zhang G.* An $O(mn)$ algorithm for the 1-maximin problem on a network // Comput. & Oper. Res. 1999. V. 26. No. 9. P. 849–869.
9. *Heydari R. and Melachrinoudis E.* Location of a semi-obnoxious facility with elliptic maxmin and network minisum objectives // Eur. J. Oper. Res. 2012. V. 223. No. 2. P. 452–460.
10. *Zabudsky G. and Lisina M.* Approximately algorithm for maximin location problem on network // Proc. XII Intern. Conf. “Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines”. 13–15 November 2018, Omsk, Russia. P. 1–6.
11. *Tamir A.* Obnoxious facility location on graphs // SIAM J. Discrete Math. 1991. V. 4. No. 4. P. 550–567.

12. *Welch S. B. and Wesolowsky S.* The obnoxious p facility network location problem with facility interaction // Eur. J. Oper. Res. 1997. V. 102. No. 2. P. 302–319.
13. *Tamir A.* Locating two obnoxious facilities using the weighted maximin criterion // Oper. Res. Let. 2006. V. 34. No. 1. P. 97–105.
14. *Яглом И. М., Болтянский И. М.* Выпуклые фигуры. М.: Технико-теоретическая литература, 1951. 344 с.
15. *Shamos M. I.* Computational Geometry. PhD Thesis. New Haven, Yele University, 1978. 236 p.
16. *Прерарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989. 478 с.

REFERENCES

1. *Christofides N.* Graph Theory: An algorithmic approach. N.Y., Academic Press, 1975. 400 p.
2. *Drezner Z.* Facility Location. A Survey of Applications and Methods. N.Y., Springer, 1995. 571 p.
3. *Nickel S.* Location Theory. A Unified Approach. Berlin, Springer Verlag, 2005. 437 p.
4. *Farani R. Z. and Hekmatfar M.* Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies. Berlin, Springer Verlag, 2009. 549 p.
5. *Eiselt H. A. and Marianov V.* Foundations of Location Analysis. N.Y., Springer, 2011. 509 p.
6. *Church R. L. and Garfinkel R. S.* Locating an obnoxious facility on a network. Trans. Sci., 1978, vol. 12, no. 2, pp. 107–118.
7. *Zabudskiy G. G.* Reshenie maksi-summnoy zadachi razmeshcheniya na seti s ogranicheniyami na transportnye zatraty [Solving of the maxisum location problem on network with a restriction on transport costs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2023, no. 60, pp. 120–127. (in Russian)
8. *Melachrinoudis E. and Zhang G.* An $O(mn)$ algorithm for the 1-maximin problem on a network. Comput. & Oper. Res., 1999, vol. 26, no. 9, pp. 849–869.
9. *Heydari R. and Melachrinoudis E.* Location of a semi-obnoxious facility with elliptic maxmin and network minisum objectives. Eur. J. Oper. Res., 2012, vol. 223, no. 2, pp. 452–460.
10. *Zabudsky G. and Lisina M.* Approximately algorithm for maximin location problem on network. Proc. XII Intern. Conf. “Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines”, 13–15 November 2018, Omsk, Russia, pp. 1–6.
11. *Tamir A.* Obnoxious facility location on graphs. SIAM J. Discrete Math., 1991, vol. 4, no. 4, pp. 550–567.
12. *Welch S. B. and Wesolowsky S.* The obnoxious p facility network location problem with facility interaction. Eur. J. Oper. Res., 1997, vol. 102, no. 2, pp. 302–319.
13. *Tamir A.* Locating two obnoxious facilities using the weighted maximin criterion. Oper. Res. Let., 2006, vol. 34, no. 1, pp. 97–105.
14. *Yaglom I. M. and Boltyanskiy I. M.* Vypuklye figury [Convex Figures]. Moscow, Tekhniko-teoreticheskaya literatura, 1951. 344 p. (in Russian)
15. *Shamos M. I.* Computational Geometry. PhD Thesis. New Haven, Yele University, 1978. 236 p.
16. *Prerarata F. and Sheimos M.* Computational Geometry: Introduction. N.Y., Springer Verlag, 1985. 478 p.