

**В Е С Т Н И К**  
**ТОМСКОГО**  
**ГОСУДАРСТВЕННОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА**  
**МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

---

***Научный журнал***

---

**2025**

**№ 96**

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.  
выдано Федеральной службой по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи  
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

### **Учредитель:**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Национальный исследовательский  
Томский государственный университет»

## **РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА**

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шермет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

### **EDITORIAL COUNCIL**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

### **EDITORIAL BOARD**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimatov, Aleksey M. Bubenichikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shragger, Ernst R. Shragger.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

**Адрес редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36  
**Электронный адрес:** <http://journals.tsu.ru/mathematics>  
**Контактный тел./факс:** (3822) 529-740  
**E-mail:** [vestnik\\_tgu\\_mm@math.tsu.ru](mailto:vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

<b>Змирева К.В.</b> Линейное представление группы кактусов .....	5
<b>Ибрагимов М.М., Арзиев А.Д.</b> Свойства геометрических Пирсовских разложений граново симметричных пространств .....	14
<b>Корытов И.В.</b> Представление линейного функционала в гильбертовом пространстве Соболева .....	28

### МЕХАНИКА

<b>Клюкин Д.А., Суфиянов В.Г., Федорова Е.А.</b> Валидация квазиодномерной модели продольно-поперечных колебаний ствола при выстреле .....	42
<b>Куприянов В.В., Кистенёв Ю.В., Кривова Н.А., Дунаевский Г.Е.</b> Разработка математического критерия для определения конфигурации бимодального спектроскопического прибора, обеспечивающей наиболее эффективную диагностику немеланомного рака кожи в зависимости от клинических параметров образцов .....	53
<b>Лепакова О.К., Шкода О.А.</b> Возможности использования порошков системы Ti–B–Fe для получения твердых сплавов с повышенными механическими характеристиками .....	66
<b>Монсева К.М., Митрофанов А.А., Чура Е.С.</b> Исследование скорости горения аэрозвеси порошка алюминия с учетом лучистого теплопереноса .....	81
<b>Пивкин П.М., Бабаев А.С., Козлов В.Н., Семёнов А.Р., Назаренко Е.С., Надыкто А.Б.</b> Методология численного моделирования резания для расчетов распределения контактных напряжений на примере фрезерования стали .....	92
<b>Промахов В.В., Матвеев А.Е., Шульц Н.А., Бахмат В.Р., Туранов Т.Э.</b> Механические свойства композиционных материалов, полученных с применением СВС-порошков Al–TiB <sub>2</sub> методом прямого лазерного выращивания .....	108
<b>Савельяев С.В.</b> Динамический анализ трехмассового кривошипно-ползунного механизма на базе его двухмассового аналога .....	118
<b>Светашков А.А., Павлов М.С., Пустовых О.С.</b> Аналитический принцип соответствия упругих и вязкоупругих задач .....	131
<b>Соломаха А.Е., Шваб А.В.</b> Моделирование аэродинамики закрученного турбулентного потока в расширяющемся канале воздушно-центробежного классификатора .....	145

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>Zimireva K.V.</b> Linear representation of cactus groups .....	5
<b>Ibragimov M.M., Arziev A.D.</b> Properties of geometric Peirce decompositions of facially symmetric spaces .....	14
<b>Korytov I.V.</b> Representation of a linear functional in a Hilbert Sobolev space .....	28

### MECHANICS

<b>Klyukin D.A., Sufiyarov V.G., Fyodorova E.A.</b> Validation of a quasi-one-dimensional model of longitudinal and transverse vibrations of the barrel on firing .....	42
<b>Kupriyanov V.V., Kistenyov Yu.V., Krivova N.A., Dunaevskiy G.E.</b> Development of a mathematical criterion for determining the configuration of a bimodal spectroscopic device providing the most effective diagnosis of non-melanoma skin cancer based on the clinical parameters of samples .....	53
<b>Lepakova O.K., Shkoda O.A.</b> Possibilities of using Ti–B–Fe system powders in producing hard alloys with improved mechanical properties .....	66
<b>Moiseeva K.M., Mitrofanov A.A., Chura E.S.</b> A study of the burning rate of an air suspension of the aluminum powder with allowance for radiant heat transfer .....	81
<b>Pivkin P.M., Babaev A.S., Kozlov V.N., Semyonov A.R., Nazarenko E.S., Nadykto A.B.</b> Methodology of the numerical modeling of cutting for calculating the contact stress distribution: a case study on steel milling .....	92
<b>Promakhov V.V., Matveev A.E., Schulz N.A., Bakhmat V.R., Turanov T.E.</b> Mechanical properties of composite materials produced with the use of Al–TiB <sub>2</sub> SHS powders by direct laser deposition .....	108
<b>Savel'kaev S.V.</b> Dynamic analysis of a three-mass crank-slider mechanism based on its two-mass analog .....	118
<b>Svetashkov A.A., Pavlov M.S., Pustovykh O.S.</b> Analytical correspondence principle for the elastic and viscoelastic problems .....	131
<b>Solomakha A.E., Shvab A.V.</b> Simulation of aerodynamics of a swirling turbulent flow in the expanding channel of an air-centrifugal classifier .....	145

## МАТЕМАТИКА

## MATHEMATICS

Научная статья

УДК 512.54

doi: 10.17223/19988621/96/1

MSC: 20C99

## Линейное представление группы кактусов

Ксения Вячеславовна Зимирева

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия, k.zimireva@gsnu.ru*

**Аннотация.** Группа кактусов  $J_n$ ,  $n \geq 2$ , может быть порождена  $n - 1$  элементами. В предлагаемой работе, используя представление в этих порождающих, строится линейное представление группы кактусов. Доказано, что образ полученного представления изоморфен группе подстановок  $S_n$  и при всех  $n \geq 3$  это представление не является точным.

**Ключевые слова:** группа кактусов, группа подстановок, представление порождающими и соотношениями, линейное представление, точное представление

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 24-21-00102, <https://rscf.ru/project/24-21-00102/>

**Для цитирования:** Зимирева К.В. Линейное представление группы кактусов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 5–13. doi: 10.17223/19988621/96/1

Original article

## Linear representation of cactus groups

Ksenia V. Zimireva

*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation, k.zimireva@gsnu.ru*

**Abstract.** Braid groups have various applications in algebra and topology, and the cactus group can be considered as its analogue. A cactus group  $J_n$ ,  $n \geq 2$ , is generated by the elements  $a_i := s_{1,i}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , and defined by the relations

$$a_i^2 = 1,$$

$$(a_i a_k a_j a_k)^2 = 1, \quad i \leq j, i + j \leq k,$$

$$a_i a_k a_j a_k = a_{i+j-k} a_j a_{i+j-k} a_i,$$

$$(1) 4 \leq j + 2 \leq i \leq n; \quad (2) j < k < i; \quad (3) 2 \leq i + j - k \leq n; \quad (4) 2k \leq i + j.$$

In the current work we apply this presentation to construct a linear representation of  $J_n$ . So, the main result of the current work is as follows: there exists a linear representation of the cactus group in the group of automorphisms of a free left module over the ring  $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_{n-1}^{\pm 1}]$ . It is proved that the image of the group  $J_n$  under the map  $f$  is isomorphic to the symmetric group  $S_n$ . In particular,  $f$  is not faithful for any  $n \geq 3$ .

**Keywords:** cactus group, symmetric group, presentation by generators and relations, linear representation, faithful representation

**Acknowledgments:** This work has been supported by the grant the Russian Science Foundation, RSF 24-21-00102, <https://rscf.ru/project/24-21-00102/>

**For citation:** Zimireva, K.V. (2025) Linear representation of cactus groups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 5–13. doi: 10.17223/19988621/96/1

## 1. Введение

Группа кактусов появилась в работах С.Л. Девадосса [1] и М. Дэвисса, Т. Янушкевича, Р. Скотта [2] при изучении мозаичной операды и группы отражений соответственно. Сам термин «группа кактусов» был введен в работе А. Энрикеса, Д. Камницера [3] при изучении структуры кограничных категорий.

Группы кактусов исследовались в контексте геометрической теории групп в работе [4]. В [5] П. Беллинджери, Х. Чемин и В. Лебедь решили проблему равенства слов, описали кручение и нашли центр группы кактусов. Также ими было получено представление групп кактусов  $J_n$ ,  $n \leq 4$ , в порождающих, число которых нельзя уменьшить. Кроме того, они изучали связь группы кактусов с прямоугольными группами Кокстера, группами твинов и группами диаграмм Гаусса–Мостового.

Известно [7], что группа  $J_n$  может быть порождена  $n - 1$  элементами, и это число уменьшить нельзя [7]. Возникает естественный вопрос о записи системы соотношений в этих порождающих. Во втором разделе настоящей работы будет выписана такая система соотношений (см. теорему 2.1). Данная система соотношений была найдена в [6]. В начале 2024 г. эта же система соотношений с полным доказательством появилась в работе [7].

Я. Мостовой [8] показал, что группа крашенных кактусов вкладывается в прямоугольную группу Кокстера.

Р. Ю [9] определил обобщенные группы кактусов, имеющие своим гомоморфным образом некоторую группу Кокстера. В частности,  $J_n$  является обобщенной группой кактусов, имеющей своим образом группу  $S_n$ . Р. Ю показал, что всякая обобщенная группа кактусов линейна, построив точное линейное представление в явном виде.

В настоящей работе строится линейное представление  $f : J_n \rightarrow \text{Aut}(V)$  группы кактусов  $J_n$  в группе автоморфизмов свободного левого модуля  $V$  над кольцом Лорановых многочленов  $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_{n-1}^{\pm 1}]$ . Доказано, что образ группы  $J_n$  при отображении  $f$  изоморфен группе  $S_n$ . Установлено, что построенное представление не является точным при  $n \geq 3$ .

## 2. Группы кактусов

Группа кактусов  $J_n$ ,  $n \geq 2$ , порождается элементами  $s_{p,q}$ ,  $1 \leq p < q \leq n$ , и определяется соотношениями

$$s_{p,q}^2 = 1,$$

$$s_{p,q}s_{m,r} = s_{m,r}s_{p,q}, \text{ при } [p,q] \cap [m,r] = \emptyset,$$

$$s_{p,q}s_{m,r} = s_{p+q-r,p+q-m}s_{p,q}, \text{ при } [m,r] \subset [p,q].$$

Здесь мы пользуемся обозначением  $[p,q] = \{p, p+1, \dots, q-1, q\}$ .

Существует следующая геометрическая интерпретация элементов группы кактусов. Порождающий  $s_{p,q}$  изображается набором  $n$  нитей, среди которых нити с номерами  $p, p+1, \dots, q$  пересекаются в одной точке, меняя свой порядок на обратный (рис. 1). Произведение элементов в группе кактусов определяется так же, как и в группе кос. Рассматриваем два кактуса с одинаковым числом нитей, помещаем один кактус над другим и соединяем концы нитей.

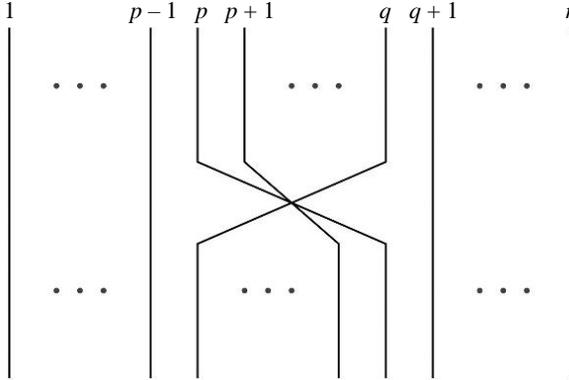


Рис. 1. Интерпретация элемента  $s_{p,q}$

Fig. 1. Interpretation of the element  $s_{p,q}$

Можно заметить, что часть порождающих группы кактусов можно выразить через другие. Тогда получим представление группы  $J_n$ , заданное следующим образом:

**Теорема 2.1** ([6], [7]). *Группа кактусов  $J_n$ ,  $n \geq 2$ , порождается элементами  $a_i := s_{1,i}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , и определяется соотношениями*

$$a_i^2 = 1, \tag{j1}$$

$$(a_i a_k a_j a_k)^2 = 1, \quad i \leq j, \quad i + j \leq k, \tag{j2}$$

$$a_i a_k a_j a_k = a_{i+j-k} a_j a_{i+j-k} a_i, \tag{j3}$$

$$(1) \quad 4 \leq j+2 \leq i \leq n; \quad (2) \quad j < k < i; \quad (3) \quad 2 \leq i+j-k \leq n; \quad (4) \quad 2k \leq i+j.$$

**Лемма 2.1** ([7]). *Группа кактусов  $J_n$  не может быть порождена меньше чем  $n-1$  элементами.*

### 3. Линейные представления группы кактусов

Действие отображения  $f$  и композицию отображений  $f$  и  $g$  мы применяем слева направо, т.е.  $xf = (x)f$  и  $(x)(fg) = (xf)g$ .

**Теорема 3.1.** Пусть  $V$  – свободный левый модуль с базисом  $e_i, 1 \leq i \leq n$ , над кольцом  $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_{n-1}^{\pm 1}]$ . Отображение  $f: J_n \rightarrow \text{Aut}(V)$  является линейным представлением группы кактусов  $J_n$ , действующим по правилу  $a_k \mapsto f_k$ , где  $f_k = (a_k)f$  и определяется действием на базисе модуля  $V$ :

$$(e_u)f_v = \begin{cases} t_{u-1}t_{v-u}^{-1}e_{v-u+1}, & 1 \leq u \leq v, \\ e_u, & v < u \leq n, \end{cases} \quad (1)$$

где  $v = 2, \dots, n$ . Также положим  $t_0 = 1$ .

**Доказательство.** Проверим, что  $f$  – гомоморфизм. Для этого покажем, что соотношения группы  $J_n$  сохраняются под действием  $f$ . Сначала докажем, что соотношения (j2) переходят в соотношения  $f_i f_k f_j f_k = f_k f_j f_k f_i$ . Указанное равенство будет выполнено, если для всех  $e_u, 1 \leq u \leq n$ , справедливо равенство

$$(e_u)f_i f_k f_j f_k = (e_u)f_k f_j f_k f_i, \\ i \leq j, \quad i + j \leq k.$$

В зависимости от значения  $1 \leq u \leq n$  рассмотрим несколько случаев:

- 1)  $1 \leq u \leq i$ , 2)  $i < u \leq k - j$ , 3)  $k - j < u \leq k$ , 4)  $k < u \leq n$ .

Здесь и далее будем указывать над знаком равенства номер ограничения на индексы формулы (1), которое выполняется для рассматриваемого выражения. Например, пусть  $1 \leq w \leq i$  и мы действуем  $f_k$  на  $e_{i-w+1}$ , где  $i < k$ , тогда  $(e_{i-w+1})f_k \stackrel{(1.1)}{=} t_{i-w}t_{k-i+w-1}^{-1}e_{k-i+w}$ . Здесь над знаком равенства стоит (1.1), поскольку когда мы пользуемся формулой (1), то  $u = i - w + 1, v = k$  и выполнено неравенство  $1 \leq u \leq v$  (первая строка формулы (1)).

Будем последовательно выписывать результаты вычислений для левой и правой частей.

Случай 1. Пусть  $1 \leq u \leq i$ :

$$(e_u)f_i f_k f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1}t_{i-u}^{-1}e_{i-u+1})f_k f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1}t_{k-i+u-1}^{-1}e_{k-i+u})f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} \\ \stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1}t_{k-i+u-1}^{-1}e_{k-i+u})f_k \stackrel{(1.1)}{=} t_{u-1}t_{i-u}^{-1}e_{i-u+1}, \\ (e_u)f_k f_j f_k f_i \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1}t_{k-u}^{-1}e_{k-u+1})f_j f_k f_i \stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1}t_{k-u}^{-1}e_{k-u+1})f_k f_i \stackrel{(1.1)}{=} (e_u)f_i \stackrel{(1.1)}{=} t_{u-1}t_{i-u}^{-1}e_{i-u+1}.$$

Случай 2. Пусть  $i < u \leq k - j$ :

$$(e_u)f_i f_k f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (e_u)f_k f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1}t_{k-u}^{-1}e_{k-u+1})f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1}t_{k-u}^{-1}e_{k-u+1})f_k \stackrel{(1.1)}{=} e_u, \\ (e_u)f_k f_j f_k f_i \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1}t_{k-u}^{-1}e_{k-u+1})f_j f_k f_i \stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1}t_{k-u}^{-1}e_{k-u+1})f_k f_i \stackrel{(1.1)}{=} (e_u)f_i \stackrel{(1.2)}{=} e_u.$$

Случай 3. Пусть  $k - j < u \leq k$  :

$$\begin{aligned} (e_u) f_i f_k f_j f_k &\stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_k f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{k-u}^{-1} e_{k-u+1}) f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} \\ &\stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{j-k+u-1}^{-1} e_{j-k+u}) f_k = t_{u-1} t_{2k-j-u}^{-1} e_{2k-j-u+1}, \\ (e_u) f_k f_j f_k f_i &\stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{k-u}^{-1} e_{k-u+1}) f_j f_k f_i \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{j-k+u-1}^{-1} e_{j-k+u}) f_k f_i \stackrel{(1.1)}{=} \\ &\stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{2k-j-u}^{-1} e_{2k-j-u+1}) f_i \stackrel{(1.2)}{=} t_{u-1} t_{2k-j-u}^{-1} e_{2k-j-u+1}. \end{aligned}$$

Случай 4. Пусть  $k < u \leq n$  :

$$\begin{aligned} (e_u) f_i f_k f_j f_k &\stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_k f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_k = e_u, \\ (e_u) f_k f_j f_k f_i &\stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_j f_k f_i \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_k f_i \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_i = e_u. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что соотношения (j2) переходят в соотношения  $f_i f_k f_j f_k = f_k f_j f_k f_i$ .

Перейдем к аналогичному разбору случаев для соотношения (j3):

$$(e_u) f_i f_k f_j f_k = (e_u) f_{i+j-k} f_j f_{i+j-k} f_i,$$

$$(1) 4 \leq j+2 \leq i \leq n; \quad (2) j < k < i; \quad (3) 2 \leq i+j-k \leq n; \quad (4) 2k \leq i+j.$$

Рассмотрим следующие случаи:

$$1) 1 \leq u \leq i-k, \quad 2) i-k < u \leq i+j-k, \quad 3) i+j-k < u \leq i, \quad 4) i < u \leq n.$$

Случай 1. Пусть  $1 \leq u \leq i-k$  :

$$\begin{aligned} (e_u) f_i f_k f_j f_k &\stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}) f_k f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}) f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} \\ &\stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}) f_k = t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}, \\ (e_u) f_{i+j-k} f_j f_{i+j-k} f_i &\stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{i+j-k-u}^{-1} e_{i+j-k-u+1}) f_j f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.2)}{=} \\ &\stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1} t_{i+j-k-u}^{-1} e_{i+j-k-u+1}) f_{i+j-k} f_i = (e_u) f_i = t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}. \end{aligned}$$

Случай 2. Пусть  $i-k < u \leq i+j-k$  :

$$\begin{aligned} (e_u) f_i f_k f_j f_k &\stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}) f_k f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{k-i+u-1}^{-1} e_{k-i+u}) f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} \\ &\stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{j-k+i-u}^{-1} e_{j-k+i-u+1}) f_k = t_{u-1} t_{2k-j-i+u-1}^{-1} e_{2k-j-i+u}, \\ (e_u) f_{i+j-k} f_j f_{i+j-k} f_i &\stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{i+j-k-u}^{-1} e_{i+j-k-u+1}) f_j f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{k-i+u-1}^{-1} e_{k-i+u}) f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.1)}{=} \\ &\stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{2i-2k+j-u}^{-1} e_{2i-2k+j-u+1}) f_i = t_{u-1} t_{2k-j-i+u-1}^{-1} e_{2k-j-i+u}. \end{aligned}$$

Случай 3. Пусть  $i+j-k < u \leq i$  :

$$\begin{aligned} (e_u) f_i f_k f_j f_k &\stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}) f_k f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{k-i+u-1}^{-1} e_{k-i+u}) f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} \\ &\stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1} t_{k-i+u-1}^{-1} e_{k-i+u}) f_k = t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}, \\ (e_u) f_{i+j-k} f_j f_{i+j-k} f_i &\stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_j f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_i = t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}. \end{aligned}$$

Случай 4. Пусть  $i < u \leq n$ :

$$(e_u)f_i f_k f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (e_u)f_k f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (e_u)f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (e_u)f_k \stackrel{(1.2)}{=} e_u,$$

$$(e_u)f_{i+j-k} f_j f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.2)}{=} (e_u)f_j f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.2)}{=} (e_u)f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.2)}{=} (e_u)f_i \stackrel{(1.2)}{=} e_u.$$

Следовательно, соотношения (j3) переходят в соотношения  $f_i f_k f_j f_k = f_{i+j-k} f_j f_{i+j-k} f_i$ .

Очевидно, что (j1) выполнено. Тем самым доказано, что отображение  $f$  является гомоморфизмом.  $\square$

Определим антидиагональную матрицу размера  $n \times n$ , у которой только элементы побочной диагонали могут быть отличны от нуля:

$$\text{adiag}(w_1, \dots, w_n) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & w_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу автоморфизма  $f_k$ ,  $k = 2, \dots, n$ , в базисе  $e_1, \dots, e_n$ :

$$[f_k] = \text{adiag}(t_k^{-1}, t_1 t_{k-1}^{-1}, \dots, t_1^{-1} t_{k-1}, t_k) \oplus I_{n-k}.$$

В верхнем левом углу  $[f_k]$  находится блок размера  $k \times k$ , который совпадает с матрицей  $\text{adiag}(t_k^{-1}, t_1 t_{k-1}^{-1}, \dots, t_1^{-1} t_{k-1}, t_k)$ . Указанный блок соответствует перестановке нитей от 1 до  $k$  включительно. Остальные нити остаются на месте, поэтому вне этого блока на диагонали стоят единицы.

**Пример 1.** При  $n = 3$  матрицы автоморфизмов  $f_2$  и  $f_3$  имеют следующий вид:

$$[f_2] = \begin{pmatrix} 0 & t_1^{-1} & 0 \\ t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [f_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_2^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** При  $n = 4$  матрицы автоморфизмов  $f_2, f_3$  и  $f_4$  имеют вид:

$$[f_2] = \begin{pmatrix} 0 & t_1^{-1} & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [f_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_2^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [f_4] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_3^{-1} \\ 0 & 0 & t_1 t_2^{-1} & 0 \\ 0 & t_1^{-1} t_2 & 0 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 3.2** Образ группы  $J_n$  при отображении  $f$  из теоремы 3.1 изоморфен группе подстановок  $S_n$ .

**Доказательство.** Группа  $\text{Aut}(V)$  содержит подгруппу  $H = \langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle$ , которая изоморфна  $S_n$ . Изоморфизм строится по правилу  $\varphi((k, k+1)) \mapsto T_k$ , где  $(k, k+1)$  – транспозиция, а действие автоморфизма  $T_k$  определяется по формуле

$$(e_u)T_v = \begin{cases} t_{v-1} t_v^{-1} e_{v+1}, & u = v, \\ t_{v-1}^{-1} t_v e_v, & u = v+1, \\ e_u & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2)$$

где  $v = 1, \dots, n-1$ .

Покажем, что  $\langle f_2, \dots, f_n \rangle = \langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle$ . Докажем индукцией по  $k$  вложение  $\langle f_2, \dots, f_n \rangle \subseteq \langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle$ . Для этого достаточно показать, что верно следующее равенство:

$$T_k = f_{k+1}f_2f_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

База индукции при  $k = 1$  тривиальна. Пусть индукционное предположение верно для всех  $l \leq k$ . Докажем, что для  $k+1$  выполняется равенство  $T_{k+1} = f_{k+2}f_2f_{k+2}$ . Для этого воспользуемся формулой (1) из теоремы 3.1:

$$(e_u)f_{k+2}f_2f_{k+2} = \begin{cases} (t_{u-1}t_{k-u+2}^{-1}e_{k-u+3})f_2f_{k+2}, & 1 \leq u \leq k+2, \\ (e_u)f_2f_{k+2}, & k+2 < u \leq n. \end{cases}$$

Если  $1 \leq u \leq k+2$ , то при последовательном действии  $f_2$  и  $f_{k+2}$  на  $e_{k-u+3}$  получаем следующие формулы:

$$(t_{u-1}t_{k-u+2}^{-1}e_{k-u+3})f_2f_{k+2} = \begin{cases} t_{u-1}t_{2k-u+2}^{-1}e_{2k-u+3}, & u = k+1, u = k+2, \\ e_u, & 1 \leq u < k+1. \end{cases}$$

Если  $k+2 < u \leq n$ , то находим  $(e_u)f_2f_{k+2} = e_u$ . Объединяя найденные формулы, получаем

$$(e_u)f_{k+2}f_2f_{k+2} = \begin{cases} e_u, & 1 \leq u < k+1, \\ t_{u-1}t_{2k-u+2}^{-1}e_{2k-u+3}, & u = k+1, u = k+2, \\ e_u, & k+2 < u \leq n. \end{cases} = \begin{cases} t_k t_{k+1}^{-1} e_{k+2}, & u = k+1, \\ t_k^{-1} t_{k+1} e_{k+1}, & u = k+2, \\ e_u, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

Воспользуемся формулой (2) для  $T_{k+1}$ :

$$(e_u)T_{k+1} = \begin{cases} t_k t_{k+1}^{-1} e_{k+2}, & u = k+1, \\ t_k^{-1} t_{k+1} e_{k+1}, & u = k+2, \\ e_u, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Несложно заметить, что данная формула совпадает с (3).

Теперь докажем индукцией по  $s$  обратное вложение  $\langle f_2, \dots, f_n \rangle \supseteq \langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle$ . Для этого установим равенство  $f_s = T_1 T_2 \dots T_{s-1} f_{s-1}$ ,  $2 \leq s \leq n$ . База индукции при  $s = 2$  тривиальна. Пусть индукционное предположение верно для всех  $l \leq s$ , проверим его для  $s+1$ . По индукционному предположению  $f_s = T_1 T_2 \dots T_{s-1} f_{s-1}$ , откуда выражаем  $T_1 T_2 \dots T_{s-1} = f_s f_{s-1}$ . Таким образом, достаточно проверить равенство  $f_{s+1} = f_s f_{s-1} T_s f_s$ .

Воспользуемся формулой (1):

$$(e_u)f_s f_{s-1} T_s f_s = \begin{cases} (t_{u-1}t_{s-u}^{-1}e_{s-u+1})f_{s-1}T_s f_s, & 1 \leq u \leq s, \\ (e_u)f_{s-1}T_s f_s, & s < u \leq n. \end{cases}$$

После действия  $f_{s-1}$  на  $e_{s-u+1}$  при  $1 \leq u \leq s$  получаем два возможных случая:

$$(t_{u-1}t_{s-u}^{-1}e_{s-u+1})f_{s-1}T_s f_s = \begin{cases} (t_{u-1}t_{u-2}^{-1}e_{u-1})T_s f_s, & 2 \leq u \leq s, \\ (t_{s-1}^{-1}e_s)T_s f_s, & u = 1. \end{cases}$$

Для каждого из случаев находим результат последовательного действия автоморфизмами  $T_s$  и  $f_s$ :

$$(t_{u-1}t_{s-u}^{-1}e_{s-u+1})f_{s-1}T_s f_s = \begin{cases} t_{u-1}t_{s-u+1}^{-1}e_{s-u+2}, & 2 \leq u \leq s, \\ t_s^{-1}e_{s+1}, & u = 1. \end{cases}$$

Если  $s < u \leq n$ , то по формулам (1) и (2) элемент  $e_u$  переходит в себя при действии  $f_{s-1}T_s f_s$ , за исключением случая  $u = s + 1$ , в котором получаем

$$(e_{s+1})f_{s-1}T_s f_s = (e_{s+1})T_s f_s = (t_s t_{s-1}^{-1} e_s) f_s = t_s e_1.$$

Значит, приходим к следующему выражению:

$$(e_u)f_{s-1}T_s f_s = \begin{cases} t_s e_1, & u = s + 1, \\ e_s, & s + 1 < u \leq n. \end{cases}$$

Объединяя полученные формулы, видим, что композиция  $f_s f_{s-1} T_s f_s$  совпадает с  $f_{s+1}$ :

$$(e_u)f_s f_{s-1} T_s f_s = \begin{cases} t_s^{-1} e_{s+1}, & u = 1, \\ t_{u-1} t_{s-u+1}^{-1} e_{s-u+2}, & 2 \leq u \leq s, \\ t_s e_1, & u = s + 1, \\ e_s, & s + 1 < u \leq n. \end{cases}$$

Таким образом, были доказаны оба вложения и  $\langle f_2, \dots, f_n \rangle = \langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle$ .  $\square$

**Следствие 3.1.** *Линейное представление  $f$  из теоремы 3.1 при  $n \geq 3$  не является точным.*

**Доказательство.** Учитывая, что  $J_3 \leq J_n$  для любого  $n \geq 3$ , достаточно доказать, что представление группы  $J_3$  не является точным. Группа  $J_3$  – бесконечная группа диэдра  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ , порожденная  $a_2$  и  $a_3$ , поэтому  $(a_2 a_3)^3$  – неединичный элемент. Воспользуемся примером 1, чтобы показать, что элемент  $(a_2 a_3)^3$  под действием отображения  $f$  переходит в тождественный автоморфизм:

$$([f_2][f_3])^3 = \left( \begin{pmatrix} 0 & t_1^{-1} & 0 \\ t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_2^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, линейное представление  $f$  не является точным.  $\square$

#### Список источников

1. Devadoss S.L. Tessellations of Moduli Spaces and the Mosaic Operad // Contemp. Math. 1999. V. 239. P. 91–114. doi:10.1090/conm/239/03599
2. Davis M., Januszkiewicz T., Scott R. Fundamental groups of blow-ups // Adv. Math. 2003. V. 177 (1). P. 115–179. doi:10.1016/S0001-8708(03)00075-6
3. Henriques A., Kamnitzer J. Crystals and coboundary categories // Duke Math. J. 2006. V. 132 (2). P. 191–216. doi: 10.1215/S0012-7094-06-13221-0
4. Genevois A. Cactus groups from the viewpoint of geometric group theory // arXiv. 2022. 2212.03494. 22 p. doi: 10.48550/arXiv.2212.03494

5. Bellingeri P., Chemin H., Lebed V. Cactus groups, twin groups, and right-angled Artin groups // *J. Algebr. Comb.* 2024. V. 59. P. 153–178. doi:10.1007/s10801-023-01286-8
6. Zimireva K.V. A presentation of the cactus group // Мальцевские чтения: тез. докл. конф., 13–17 нояб. 2023 г. Новосибирск: Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2023. С. 182.
7. Chemin H., Nanda N. Minimal presentation, finite quotients and lower central series of cactus groups // arXiv. 2024. 2401.07924. doi: 10.48550/arXiv.2401.07924
8. Mostovoy J. The pure cactus group is residually nilpotent // *Arch. Math.* 2019. V. 113. P. 229–235. doi:10.1007/s00013-019-01332-7
9. Yu R. Linearity of generalized cactus groups // *J. Algebra.* 2023. V. 635. P. 256–270. doi: 10.1016/j.jalgebra.2023.07.039

### References

1. Devadoss S.L. (1999) Tessellations of moduli spaces and the mosaic operad. *Contemporary Mathematics*. 239. pp. 91–114. DOI: 10.1090/conm/239/03599.
2. Davis M., Januszkiewicz T., Scott R. (2003) Fundamental groups of blow-ups. *Advances in Mathematics*. 177(1). pp. 115–179. DOI: 10.1016/S0001-8708(03)00075-6.
3. Henriques A., Kamnitzer J. (2006) Crystals and coboundary categories. *Duke Mathematical Journal*. 132(2). pp. 191–216. DOI: 10.1215/S0012-7094-06-13221-0.
4. Genevois A. (2022) Cactus groups from the viewpoint of geometric group theory. arXiv: 2212.03494. DOI: 10.48550/arXiv.2212.03494.
5. Bellingeri P., Chemin H., Lebed V. (2024) Cactus groups, twin groups, and right-angled Artin groups. *Journal of Algebraic Combinatorics*. 59. pp. 153–178. DOI: 10.1007/s10801-023-01286-8.
6. Zimireva K.V. (2023) A presentation of the cactus group. *Collection of Abstracts, Novosibirsk, November 13–17*. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University.
7. Chemin H., Nanda N. (2024) Minimal presentation, finite quotients and lower central series of cactus groups, arXiv:2401.07924. DOI: 10.48550/arXiv.2401.07924.
8. J. Mostovoy (2019) The pure cactus group is residually nilpotent. *Archiv der Mathematik*. 113. pp. 229–235. DOI: 10.1007/s00013-019-01332-7.
9. Yu R. (2023) Linearity of generalized cactus groups. *Journal of Algebra*. 635. pp. 256–270. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2023.07.039.

### Сведения об авторе:

**Зимирева Ксения Вячеславовна** – аспирант Новосибирского государственного университета (Новосибирск, Россия). E-mail: k.zimireva@g.nsu.ru

### Information about the authors:

**Zimireva Ksenia V.** (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: k.zimireva@g.nsu.ru

*The article was submitted 01.11.2024; accepted for publication 01.08.2025*

*Статья поступила в редакцию 01.11.2024; принята к публикации 01.08.2025*

Научная статья

УДК 517.98

doi: 10.17223/19988621/96/2

MSC: 46B20, 46E30

## Свойства геометрических Пирсовских разложений гранево симметричных пространств

Мухтар Мамутович Ибрагимов<sup>1</sup>, Аллабай Джалгасович Арзиев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Каракалпакский государственный университет имени Бердаха,  
Нукус, Узбекистан*

<sup>2</sup> *Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук  
Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан*

<sup>1</sup> *m.ibragimov1909@gmail.com*

<sup>2</sup> *allabayarziev@inbox.ru*

**Аннотация.** Исследована взаимосвязь между понятиями, соответствующими различным геометрическим трипотентам на гранево симметричных пространствах, и на основе этого изучены свойства геометрических Пирсовских разложений. Точнее, доказано, что геометрические Пирсовские проекторы, соответствующие некоторому классу геометрических трипотентов, совпадают. Более того, установлено, что геометрическое Пирсовское пространство  $Z_2(u)$ , соответствующее минимальному геометрическому трипотенту  $u$ , является линейно изометричным Гильбертовому пространству. **Ключевые слова:** слабо и сильно гранево симметричные пространства, симметричная грань, геометрический трипотент, геометрические треугольник и четырехугольник, геометрические Пирсовские проекторы

**Для цитирования:** Ибрагимов М.М., Арзиев А.Д. Свойства геометрических Пирсовских разложений гранево симметричных пространств // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 14–27. doi: 10.17223/19988621/96/2

Original article

## Properties of geometric Peirce decompositions of facially symmetric spaces

Mukhtar M. Ibragimov<sup>1</sup>, Allabay D. Arziev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan*

<sup>2</sup> *V.I. Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,  
Tashkent, Uzbekistan*

<sup>1</sup> *m.ibragimov1909@gmail.com*

<sup>2</sup> *allabayarziev@inbox.ru*

**Abstract.** In this paper, we consider problems of the theory of facially symmetric spaces which was introduced in the 1980s by Y. Friedman and B. Russo as a geometrical model

of quantum mechanics. These spaces are determined based on the study of the structure of the predual space of the  $JBW^*$ -triple, guided by geometric introductions to the measurement process in the set of observables in quantum mechanical systems. The main example of facially symmetric spaces is the Banach space whose dual space is a  $JBW^*$ -triple. The main goal of this project was the geometric characterization of Banach spaces admitting an algebraic structure. More precisely, facially symmetric spaces provide the corresponding structure, where the problem of characterization of the unit ball of a predual space of a  $JBW^*$ -triple is studied, describing important properties of a convex set in geometric terms such as orthogonality, projective unit, normed face, symmetric face, generalized (or geometric) tripotent and generalized (or geometric) Peirce projectors, etc.

One of the key concepts in facially symmetric spaces is the concept of geometric tripotent. In this paper, we study the relationship between the notions corresponding to different geometric tripotents on facially symmetric spaces and, on this basis, we study properties of geometric Peirce decompositions. More precisely, it is proved that geometric Peirce projectors corresponding to a certain class of geometric tripotents coincide. It is also shown that the geometric Peirce subspace corresponding to the minimal geometric tripotent is linearly isometric to the Hilbert space.

**Keywords:** weakly and strongly facially symmetric spaces, symmetric face, geometric tripotent, geometric triangle and quadrilateral, geometric Peirce projectors

**For citation:** Ibragimov, M.M., Arziev, A.D. (2025) Properties of geometric Peirce decompositions of facially symmetric spaces. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 14–27. doi: 10.17223/19988621/96/2

## 1. Введение

Аксиоматический подход к квантовой теории направлен на формализацию и обоснование основных принципов и законов квантовой механики с помощью набора аксиом, что важно для глубокого понимания квантовой теории и ее применения в различных областях физики и математики. В настоящее время существует несколько направлений в исследованиях по аксиоматике квантовой теории. Один из первых – алгебраический подход, который основывается на алгебре наблюдаемых физической системы. В этой модели предполагается, что множество наблюдаемых имеет две алгебраические структуры: сумму и возведение в квадрат. Это приводит к структуре Йордановой алгебры, где состояния представляют собой положительные функционалы с единичной нормой. Математический аппарат модели включает теорию топологических алгебр (в частности, операторных) и их представления, такие как теория  $C^*$ -алгебр, алгебр фон Неймана,  $JB$ ,  $JBW$ -алгебр и др. (подробнее см.: [1–5]).

Другой моделью является «выпуклая модель», возникшая в 1970-х гг. и представляющая собой далеко идущее логическое развитие статистической интерпретации квантовой механики. В основе этой модели лежат физически наиболее естественные аксиомы, и ее основным понятием являются выпуклые множества состояний физических систем. В рамках данной модели были изучены геометрические характеристики проективных выпуклых множеств (подробнее см.: [6–10]). В работах [11–15] найдены геометрические и физические условия на выпуклое множество, обеспечивающие его аффинную изоморфность пространству состояний  $C^*$ -алгебры или  $JB^*$ -алгебры.

Во избежание некоторых неестественных алгебраических предположений в упомянутых моделях Я. Фридман и Б. Руссо предложили геометрическую модель для квантовой механики [16–20]. Отправной точкой в этой модели было предположение, что состояния физической системы являются единичными векторами некоторого нормированного пространства  $Z$ . В результате исследования были введены понятия слабо и сильно граниво симметричных пространств. Эти пространства обеспечивают соответствующую структуру, где изучается проблема характеристики единичного шара предсопряженного пространства  $JBW^*$ -тройки.

В работах [21–25] в процессе исследования гранивой структуры единичных шаров граниво симметричных пространств были изучены различные свойства геометрических трипотентов в сопряженных пространствах. В [21. Лемма 4.5] доказано, что в сильно граниво симметричном пространстве  $Z$  для любого геометрического трипотента  $u$  и любого  $\alpha \in K$  ( $K = \mathbb{R}$  или  $K = \mathbb{C}$ ) с  $|\alpha| = 1$  элемент  $\alpha u$  является геометрическим трипотентом.

В настоящей работе мы исследовали свойства таких геометрических трипотентов и доказали (Предложение 3.1), что геометрические Пирсовские разложения, соответствующие геометрическим трипотентам  $u$  и  $\alpha u$ , совпадают. С помощью этого результата установили взаимосвязь между понятиями, соответствующими геометрическим трипотентам  $u$  и  $\alpha u$ , а также  $\alpha u$  и  $\beta v$  (Следствия 3.2., 3.6), где  $\alpha, \beta \in K$  с  $|\alpha| = |\beta| = 1$ . Кроме того, исследовали свойства геометрических треугольников (Предложение 3.10) и четырехугольников (Предложение 3.12) геометрических трипотентов. Установлено, что геометрическое Пирсовское подпространство  $Z_2(u)$ , соответствующее минимальному геометрическому трипотенту  $u$ , является линейно изометричным Гильбертовому пространству (Теорема 3.14).

## 2. Предварительные сведения

В данном разделе мы приведем некоторые необходимые сведения из теории граниво симметричных пространств (подробно см.: [16–20]).

Пусть  $Z$  – действительное или комплексное нормированное пространство. Элементы  $f, g \in Z$  называются *ортогональными*, обозначаются  $f \diamond v$ , если  $\|f + g\| = \|f - g\| = \|f\| + \|g\|$ . Выставленной по норме гранью единичного шара  $Z_1$  пространства  $Z$  является непустое множество (обязательно  $\neq Z_1$ ), имеющее вид:  $F_x = \{f \in Z_1 : \langle x, f \rangle = 1\}$ , где  $x \in Z^*$ ,  $\|x\| = 1$ . Для любого подмножества  $S \subset Z$  через  $S^\diamond$  обозначим множество всех элементов, ортогональных каждому элементу  $S$ . Элемент  $u \in Z^*$  называется *проективной единицей*, если  $\|u\| = 1$  и  $\langle u, F_u^\diamond \rangle = 0$ . Через  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{U}$  обозначим множества всех выставленных по норме граней  $Z_1$  и проективных единиц в  $Z_1^*$  соответственно.

**Определение 2.1.**  $F \in \mathfrak{F}$  называется *симметричной гранью*, если существует линейная изометрия  $S_F$  из  $Z$  на  $Z$  с  $S_F^2 = I$  такая, что множеством неподвижных

точек  $S_F$  является  $\overline{sp}F \oplus F^\diamond$ . В частности,  $F^\diamond$  является замкнутым линейным подпространством. Мы называем  $S_F$  симметрией.

Исходя из определения 2.1, через  $S_{F_u}$  обозначим симметрию, соответствующую симметричной грани  $F_u$ , а через  $S_{F_u}^*$  – сопряженное отображение к  $S_{F_u}$ .

**Определение 2.2.**  $u \in \mathfrak{U}$  называется геометрическим трипотентом, если  $F_u$  является симметричной гранью и  $S_{F_u}^* u = u$  для симметрии  $S_{F_u}$ .

Через  $S\mathfrak{F}$  и  $G\mathfrak{U}$  обозначим множества всех симметричных граней  $Z_1$  и геометрических трипотентов в  $Z_1^*$  соответственно

**Определение 2.3.** Действительное или комплексное нормированное пространство  $Z$  называется слабо граниво симметричным пространством (*WFS-пространством*), если каждая выставленная по норме грань из  $Z_1$  является симметричной.

На *WFS*-пространстве  $Z$  для каждой симметричной грани  $F$  определим сжимающие проекторы  $P_k(F_u)$  ( $k \in \{0, 1, 2\}$ ) следующим образом:

$$P_1(F_u) = \frac{1}{2}(I - S_{F_u}), \quad P_1(F_u)(Z) = \{f \in Z : S_{F_u} f = -f\};$$

$P_0(F_u)$  и  $P_2(F_u)$  проектируют  $Z$  на  $F_u^\diamond$  и  $\overline{sp}F_u$  соответственно. Эти проекторы называются геометрическими (или обобщенными) Пирсовскими проекторами.

Для удобства вводятся следующие обозначения:

$$P_k(u) = P_k(F_u), \quad Z_k(u) = P_k(u)Z, \quad U_k(u) = Z_k^*(u), \quad S_u = S_{F_u},$$

где  $k \in \{0, 1, 2\}$ . Очевидно, что

$$P_0(u) + P_2(u) = \frac{1}{2}(I + S_u), \quad P_0(u) + P_1(u) + P_2(u) = I, \\ P_0(u) - P_1(u) + P_2(u) = S_u.$$

Для  $u, v \in G\mathfrak{U}$  будем писать  $u \leq v$ , если  $F_u \subset F_v$ .  $u \in G\mathfrak{U}$  называется минимальным, если  $\dim U_2(u) = 1$ . Через  $M$  обозначим множество всех минимальных геометрических трипотентов.  $u \in G\mathfrak{U}$  называется неразложимым, если для  $v \in G\mathfrak{U}$  из  $v \leq u$  вытекает  $v = u$ . Через  $\mathfrak{J}$  обозначим множество всех неразложимых геометрических трипотентов.

**Определение 2.4.** *WFS*-пространство  $Z$  называется сильно граниво симметричным пространством (*SFS-пространством*), если для каждой симметричной грани  $F_u$  из  $Z_1$  и для каждого  $v \in Z^*$  с  $\|v\| = 1$  и  $F_u \subset F_v$  имеем  $S_u^* v = v$ .

Сжимающий проектор  $Q$  на нормированном пространстве  $Z$  называется нейтральным, если для любого  $f \in Z$  из равенства  $\|Qf\| = \|f\|$  вытекает  $Qf = f$ . Нормированное пространство  $Z$  называется нейтральным, если для каждой симметричной грани  $F_u$  соответствующий проектор  $P_2(u)$  является нейтральным.

Пусть  $Z$  – нейтральное сильно граниво симметричное пространство, и  $u, v \in G\mathfrak{U}$ . Мы скажем, что

$$- u \leq_2 v, \text{ если } u \in U_2(v);$$

- $u \leq_0 v$ , если  $U_0(v) \subset U_0(x)$ ;
- $u \sim_k v$ , если  $u \leq_k v$  и  $v \leq_k u$ , где  $k \in \{0, 2\}$ .

Геометрический трипотент  $u$  называется

- *максимальным*, если  $U_0(u) = \{0\}$ ;
- *полным*, если  $U_2(u) = U$ ;
- *абелевым*, если  $U_1(v) = \{0\}$  для любого  $v \in G\mathfrak{U}$ ,  $v \leq u$ .

Назовем геометрический трипотент  $e \in G\mathfrak{U}$  *конечным*, если произвольный геометрический трипотент  $u \in U_2(e)$ , который максимален в  $U_2(e)$ , является полным в  $U_2(e)$ . Если произвольный геометрический трипотент в  $Z^*$  конечен, мы скажем, что  $Z$  – конечен.

### 3. Основной результат

Как уже было отмечено во введении, в сильно граниво симметричном пространстве  $Z$  для любого  $u \in G\mathfrak{U}$  и любого  $\alpha \in K$  ( $K = \mathbb{R}$  или  $K = \mathbb{C}$ ) с  $|\alpha| = 1$  элемент  $\alpha u$  является геометрическим трипотентом. Более того, выполняется равенство  $F_u = \alpha F_{\alpha u}$ . Эти факты и обозначение  $T = \{\lambda \in K : |\lambda| = 1\}$  будем иметь в виду в дальнейшем.

**Предложение 3.1.** Пусть  $Z$  является SFS-пространством. Тогда для любого  $u \in G\mathfrak{U}$  и любого  $\alpha \in T$  имеет место равенство  $Z_k(\alpha u) = \bar{\alpha} Z_k(u)$ , где  $k \in \{0, 1, 2\}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим случаи, когда  $k = 0, 1, 2$ .

$k = 0$ . Пусть  $\forall f \in Z_0(\alpha u) = F_{\alpha u}^\diamond$ , т.е.  $f \in (\bar{\alpha} F_u)^\diamond$ , следовательно,  $f \diamond (\bar{\alpha} g)$ , для любого  $g \in F_u$ , и  $\left\| f \pm \frac{1}{\alpha} g \right\| = \|f\| + \left\| \frac{1}{\alpha} g \right\|$ . Тогда  $\|\alpha f \pm g\| = \|\alpha f\| + \|g\|$ , т.е.  $(\alpha f) \diamond g$ , откуда следует, что  $f \in \frac{1}{\alpha} F_u^\diamond$ , следовательно,  $Z_0(\alpha u) \subset \bar{\alpha} Z_0(u)$ . Обратное включение доказывается аналогично. Таким образом,  $Z_0(\alpha u) = \bar{\alpha} Z_0(u)$ .

$k = 2$ . Справедливо следующее:

$$Z_2(\alpha u) = \overline{sp} F_{\alpha u} = \overline{sp}(\bar{\alpha} F_u) = \bar{\alpha} \overline{sp} F_u = \bar{\alpha} Z_2(u).$$

$k = 1$ . Поскольку для произвольного  $v \in G\mathfrak{U}$  имеем  $Z = Z_0(v) + Z_1(v) + Z_2(v)$  и  $Z_k(\alpha u) = \bar{\alpha} Z_k(u)$  при  $k \in \{0, 2\}$ , то

$$Z_1(\alpha u) = \bar{\alpha} Z_1(u). \quad \blacksquare$$

Из доказанного предложения следует следующее утверждение.

**Следствие 3.2.** Пусть  $Z$  является нейтральным SFS-пространством и  $u \in \mathfrak{U}$ . Тогда для любого  $\alpha \in T$  справедливы следующие соотношения:

(i)  $P_k(\alpha u) = P_k(u)$ , где  $k \in \{0, 1, 2\}$ ;

(ii)  $u \sim_k \alpha u$ , где  $k \in \{0, 2\}$ ;

(iii)  $u$  является максимальным тогда и только тогда, когда  $\alpha u$  является максимальным;

- (iv) и является полным тогда и только тогда, когда  $\alpha u$  является полным;  
 (v) и является абелевым тогда и только тогда, когда  $\alpha u$  является абелевым;  
 (vi) и является конечным тогда и только тогда, когда  $\alpha u$  является конечным;  
 (vii) и является минимальным тогда и только тогда, когда  $\alpha u$  является минимальным;  
 (viii) и является неразложимым тогда и только тогда, когда  $\alpha u$  является неразложимым.

**Доказательство.** (i) Поскольку  $Z_k(\alpha u) = \bar{\alpha}Z_k(u)$ , где  $k \in \{0, 1, 2\}$ , то  $Z_k(\alpha u) = Z_k(u)$ , т.е.  $U_k(\alpha u) = U_k(u)$ . Тогда из [26. Предложение 3.3] следует, что  $P_k(\alpha u) = P_k(u)$ .

(ii), (iii), (iv) и (vii) и вытекают из (i), точнее, из равенства  $U_k(\alpha u) = U_k(u)$ , когда  $k \in \{0, 2\}$ .

(v) Пусть  $u$  является абелевым. Если  $v \in G\mathfrak{U}$  и  $v \leq \alpha u$ , то  $F_v \subset F_{\alpha u} = \bar{\alpha}F_u$ , т.е.  $F_{\bar{\alpha}v} = \alpha F_v \subset F_u$ , следовательно,  $\bar{\alpha}v \leq u$ . Поскольку  $u$  является абелевым, то  $U_1(\bar{\alpha}v) = \{0\}$ . Помимо этого, имеем  $U_1(\bar{\alpha}v) = U_1(v)$ . Таким образом,  $U_1(v) = \{0\}$ , т.е.  $\alpha u$  является абелевым.

Обратное, пусть  $\alpha u$  является абелевым. Если  $v \in G\mathfrak{U}$  и  $v \leq u$ , то  $F_v \subset F_u = \alpha F_{\alpha u}$ , т.е.  $\bar{\alpha}F_v = F_{\alpha v} \subset F_{\alpha u}$ , следовательно,  $\alpha v \leq \alpha u$ . Поскольку  $\alpha u$  является абелевым, то  $U_1(\alpha v) = \{0\}$ . Кроме этого, имеем  $U_1(\alpha v) = U_1(v)$ . Таким образом,  $U_1(v) = \{0\}$ , т.е.  $u$  является абелевым.

(vi) Пусть  $u$  является конечным, и геометрический трипотент  $v \in U_2(\alpha u)$  максимален в  $U_2(\alpha u)$ , т.е.  $U_0(v) \cap U_2(\alpha u) = \{0\}$ . Из равенства  $U_2(\alpha u) = U_2(u)$  имеем  $U_0(v) \cap U_2(u) = \{0\}$ , т.е.  $v$  максимален в  $U_2(u)$ , следовательно, полный в  $U_2(u)$ . Поэтому

$$U_2(v) \cap U_2(\alpha u) = U_2(v) \cap U_2(u) = U_2(u) = U_2(\alpha u),$$

т.е.  $v$  является полным в  $U_2(\alpha u)$ , следовательно,  $\alpha u$  является конечным.

Обратное доказывается аналогичным образом.

(viii) Пусть  $u$  является неразложимым, и  $v \leq \alpha u$  для некоторого  $v \in G\mathfrak{U}$ . Тогда  $F_v \subset F_{\alpha u} = \bar{\alpha}F_u$ , т.е.  $F_{\bar{\alpha}v} = \alpha F_v \subset F_u$ , следовательно,  $\bar{\alpha}v \leq u$ . Поскольку  $u$  неразложимый, то  $\bar{\alpha}v = u$ . Тогда  $\alpha F_v = F_{\bar{\alpha}v} = F_u$ , поэтому  $F_v = F_{\alpha u}$ , следовательно,  $v = \alpha u$ , т.е.  $\alpha u$  является неразложимым.

Обратное, пусть  $\alpha u$  является неразложимым и  $v \leq u$  для некоторого  $v \in G\mathfrak{U}$ . Тогда  $F_v \subset F_u = \alpha F_{\alpha u}$ , т.е.  $F_{\alpha v} \subset F_{\alpha u}$ , следовательно,  $\alpha v \leq \alpha u$ . Поскольку  $\alpha u$  неразложимый, то  $\alpha v = \alpha u$ . Тогда  $\bar{\alpha}F_v = F_{\alpha v} = F_{\alpha u} = \bar{\alpha}F_u$ , поэтому  $F_v = F_u$ , следовательно,  $v = u$ , т.е.  $u$  является неразложимым. ■

Теперь кратко приведем сведения из теории  $JBW^*$ -троек, необходимые для разъяснения понятий, определяемых на гранево симметричных пространствах.

**Определение 3.3.** Банахово пространство  $U$  над  $\mathbb{C}$  называется  $JB^*$ -тройкой, если оно снабжено тройным произведением  $(a, b, c) \mapsto \{a, b, c\}$ , отображающим  $U \times U \times U$  на  $U$  таким, что

- (i)  $\{a, b, c\}$  линейно относительно  $a$  и  $c$ , сопряжено линейно относительно  $b$ ;
- (ii)  $\{a, b, c\}$  симметрично относительно крайних переменных, т.е.  $\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$ ;
- (iii) для всякого  $x \in U$  оператор  $L(x, x)$  из  $U$ , на  $U$  определенный как  $L(x, x): y = \{x, x, y\}$ , где  $y \in U$ , является эрмитовым с неотрицательным спектром;
- (iv) тройное произведение удовлетворяет следующему тождеству, называемому *главным тождеством*:

$$L(x, x)\{a, b, c\} = \{L(x, x)a, b, c\} - \{a, L(x, x)b, c\} + \{a, b, L(x, x)c\};$$

- (v) имеет место следующее равенство для всякого  $x \in U$  :

$$\| \{x, x, x\} \| = \| x \|^3 .$$

Ненулевой элемент  $u$  из  $JB^*$ -тройки  $U$  называется *трипотентом*, если  $u = \{u, u, u\}$ . Элементы  $a$  и  $b$  называются *взаимно ортогональными* ( $a \perp b$ ), если  $\{abx\} = 0$  для любого  $x \in U$ . Обозначим через  $Q$  *квадратичный оператор* на  $U$  (см.: [27. §1]):

$$Q(x)y = \{x, y, x\} \text{ для } x, y \in U .$$

*Пирсовские проекторы*  $P_k(u)$  ( $k = 0, 1, 2$ ), соответствующие трипотенту  $u$ , определяются следующим образом:

$$P_2(u) = Q(u)^2, \quad P_1(u) = 2(L(u, u) - Q(u)^2), \quad P_0(u) = I - 2L(u, u) + Q(u)^2.$$

$JB^*$ -тройка  $U$ , предсопряженное пространство  $U^*$  которого является банаховым пространством, называется  *$JBW^*$ -тройкой*.

Такие понятия, как ортогональность, регулярность и коллинеарность геометрических трипотентов, аналогичным образом определяются и в сопряженном пространстве  $Z^*$  слабо гранево симметричного пространства  $Z$ , а именно следующим образом.

**Определение 3.4** [16. §2]. Пусть  $Z$  – нормированное пространство. Элементы  $a, b \in Z^*$  называются *ортогональными*, если существует симметричная грань  $F \subset Z_1$  такая, что либо

$$(i) \quad a \in \text{im}P_2(F)^* \text{ и } b \in \text{im}P_0(F)^*,$$

или

$$(ii) \quad a \in \text{im}P_0(F)^* \text{ и } b \in \text{im}P_2(F)^* .$$

В этом случае мы будем писать  $a \diamond b$  и  $b \diamond a$ .

**Определение 3.5** [18. Определение 2.1]. Пусть  $Z$  является *WFS-пространством*, и  $u, v$  – геометрические трипотенты. Говорят, что  $u$  *регулирует*  $v$ , если  $u \in U_1(v)$  и  $v \in U_2(u)$ , обозначается  $u \vdash v$ . Мы скажем, что  $u$  и  $v$  являются *коллинеарными*, если  $u \in U_1(v)$  и  $v \in U_1(u)$ , обозначается  $u \top v$ .

Теперь приведем еще одно утверждение, вытекающее из Предложения 3.1.

**Следствие 3.6.** Пусть  $Z$  является *нейтральным SFS-пространством*, и  $u, v \in G\mathcal{U}$ . Тогда для любых  $\alpha, \beta \in T$  справедливы следующие соотношения:

$$(i) \quad u \diamond v \Leftrightarrow \alpha u \diamond \beta v;$$

(ii)  $u \top v \Leftrightarrow \alpha u \top \beta v$ ;

(iii)  $u \vdash v \Leftrightarrow \alpha u \vdash \beta v$ .

**Доказательство.** (i) Если  $u \diamond v$ , то из [16. Лемма 2.5 (3), (4)] имеем  $u \in U_0(v)$  и  $v \in U_0(u)$ . Тогда  $\alpha u \in U_0(v) = U_0(\beta v)$  и  $\beta v \in U_0(u) = U_0(\alpha u)$ , следовательно, из [16. Лемма 2.5 (1), (3), (4)], вытекает, что  $\alpha u \diamond \beta v$ .

Обратное утверждение доказывается аналогично.

(ii) Если  $u \top v$ , т.е.  $u \in U_1(v)$  и  $v \in U_1(u)$ , то  $\alpha u \in U_1(v) = U_1(\beta v)$  и  $\beta v \in U_1(u) = U_1(\alpha u)$ , следовательно,  $\alpha u \top \beta v$ .

Аналогичным образом доказывается и обратное утверждение.

(iii) Если  $u \vdash v$ , т.е.  $u \in U_1(v)$  и  $v \in U_2(u)$ , то  $\alpha u \in U_1(v) = U_1(\beta v)$  и  $\beta v \in U_2(u) = U_2(\alpha u)$ , следовательно,  $\alpha u \vdash \beta v$ .

Обратное утверждение доказывается подобным образом. ■

Теперь приведем определение треугольника трипотентов в  $JBW^*$ -тройке (см.: [28]).

**Определение 3.7** [28. С. 297]. Порядковая тройка трипотентов  $(v, u, \tilde{v})$  называется *треугольником*, если  $v \perp \tilde{v}$ ,  $u \vdash v$ ,  $u \vdash \tilde{v}$  и  $\tilde{v} = Q(u)v$ .

Поскольку в сопряженном пространстве  $Z^*$  слабо гранево симметричного пространства  $Z$  тройное произведение элементов не определено, то, чтобы понять значение равенства  $\tilde{v} = Q(u)v = \{u, v, u\}$  из Определения 3.7, рассмотрим в  $JBW^*$ -тройке следующие равенства, вытекающие из взаимно равносильных формул  $\tilde{v} = Q(u)v$  и  $v = Q(u)\tilde{v}$ :

$$P_2(u)\tilde{v} = Q(u)Q(u)\tilde{v} = Q(u)v = \tilde{v}.$$

Имея в виду это и тот факт, что аналогами Пирсовских проекторов являются соответствующие проекторы, сопряженные к геометрическим Пирсовским проекторам на  $WFS$ -пространстве  $Z$ , мы в пространстве  $Z^*$  вместо равенств  $\tilde{v} = Q(u)v$  или  $v = Q(u)\tilde{v}$  будем использовать равенства  $P_2^*(u)v = v$  и  $P_2^*(u)\tilde{v} = \tilde{v}$ .

**Предложение 3.8.** Пусть  $Z$  – нейтральное сильно гранево симметричное пространство и  $u, v \in G\mathcal{U}$ . Тогда

$$P_2^*(u)v = v \Leftrightarrow v \in U_2(u).$$

**Доказательство.**  $P_2^*(u)v = v \Rightarrow v \in U_2(u)$ : Поскольку  $P_2^*(u)v = v$ , то для любого  $f \in F_v$  имеем  $1 = \langle v, f \rangle = \langle P_2^*(u)v, f \rangle = \langle v, P_2(u)f \rangle$ , поэтому  $P_2(u)f \in F_v$ . Так как  $\|P_2(u)f\| = \|f\|$ , то из нейтральности пространства  $Z$  вытекает, что  $P_2(u)f = f$ , следовательно,  $f \in \overline{sp}F_u$ , поэтому  $F_v \in \overline{sp}F_u = Z_2(u)$ . Тогда из [17. Теорема 2.3] имеем  $v \in U_2(u)$ .

$v \in U_2(u) \Rightarrow P_2^*(u)v = v$ : Из [17. Следствие 3.4 (b) (i)] имеем  $P_2(u)P_2(v) = P_2(v)$ . Поскольку  $v \in U_2(u)$ , то по [17. Теорема 3.3] получаем, что геометрические трипотенты  $u$  и  $v$  являются взаимно совместимыми, следовательно,  $P_2^*(u)P_2^*(v) = P_2^*(v)$ . Так

как  $F_v \subset F_v$ , то из [17. Теорема 4.2] имеем  $P_2^*(v)v = v$ . Таким образом,  $P_2^*(u)v = P_2^*(u)P_2^*(v)v = P_2^*(v)v = v$ . ■

Из данного предложения непосредственно вытекает, что

$$u \in U_1(v) \text{ и } P_2^*(u)v = v \Leftrightarrow u \vdash v.$$

Теперь дадим определение аналога треугольника трипотентов в сопряженном пространстве нейтрального SFS-пространства.

**Определение 3.9.** В сопряженном пространстве  $Z^*$  нейтрального SFS-пространства  $Z$  упорядоченную тройку геометрических трипотентов  $(v, u, \tilde{v})$  назовем *геометрическим треугольником*, если  $v \diamond \tilde{v}$ ,  $u \vdash v$ ,  $u \vdash \tilde{v}$ .

Имеет место следующее

**Предложение 3.10.** Пусть  $Z$  является нейтральным SFS-пространством и  $u, v, \tilde{v} \in G\mathcal{M}$ . Тройка  $(v, u, \tilde{v})$  является геометрическим треугольником тогда и только тогда, когда тройка  $(\alpha v, \beta u, \gamma \tilde{v})$  является геометрическим треугольником при всех  $\alpha, \beta, \gamma \in T$ .

**Доказательство.** Если тройка  $(v, u, \tilde{v})$  является геометрическим треугольником, то из Следствия 3.6, (i), (iii) вытекает, что  $\alpha v \diamond \gamma \tilde{v}$ ,  $\beta u \vdash \alpha v$  и  $\beta u \vdash \gamma \tilde{v}$ , следовательно,  $(\alpha v, \beta u, \gamma \tilde{v})$  является геометрическим треугольником.

Обратное утверждение доказывается аналогично. ■

Теперь рассмотрим определение геометрического четырехугольника трипотентов в сопряженном пространстве слабо гранево симметричного пространства (см.: [18]).

**Определение 3.11** [18. Определение 4.14]. Порядковая четверка  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  минимальных геометрических трипотентов называется *геометрическим четырехугольником*, если

$$u_1 \diamond u_3, \quad u_2 \diamond u_4, \quad u_1 \top u_2, \quad u_2 \top u_3, \quad u_3 \top u_4, \quad u_4 \top u_1,$$

и  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 u_i$  является минимальным геометрическим трипотентом. Порядковая тройка  $(u_1, u_2, u_3)$  минимальных геометрических трипотентов называется *геометрическим предчетырёхугольником*, если  $u_1 \diamond u_3$ ,  $u_1 \top u_2$ ,  $u_2 \top u_3$ .

**Предложение 3.12.** Пусть  $Z$  является нейтральным SFS-пространством и  $u_1, u_2, u_3, u_4 \in M$ . Тогда

(i)  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  является геометрическим четырехугольником тогда и только тогда, когда  $(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3, \alpha u_4)$  является геометрическим четырехугольником, где  $\alpha \in T$ ;

(ii)  $(u_1, u_2, u_3)$  является геометрическим предчетырёхугольником тогда и только тогда, когда  $(\alpha_1 u_1, \alpha_2 u_2, \alpha_3 u_3)$  является геометрическим предчетырёхугольником, где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in T$ .

**Доказательство.** (i) Если  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  является геометрическим четырехугольником, то из Следствия 3.6 вытекает, что  $\alpha u_1 \diamond \alpha u_3$ ,  $\alpha u_2 \diamond \alpha u_4$ ,  $\alpha u_1 \top \alpha u_2$ ,

$\alpha u_2 \top \alpha u_3$ ,  $\alpha u_3 \top \alpha u_4$ ,  $\alpha u_4 \top \alpha u_1$ . Кроме того, поскольку  $\alpha \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 u_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \alpha u_i$  и  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 u_i$  являются минимальным геометрическими трипотентами, то из Следствия 3.2, (vii) имеем, что  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \alpha u_i$  является минимальным геометрическим трипотентом, следовательно,  $(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3, \alpha u_4)$  является геометрическим четырехугольником.

Обратное утверждение доказывается аналогично.

(ii) Если  $(u_1, u_2, u_3)$  является геометрическим предчетыреугольником, то из Следствия 3.6, (i), (ii) вытекает, что  $\alpha_1 u_1 \diamond \alpha_3 u_3$ ,  $\alpha_1 u_1 \top \alpha_2 u_2$ ,  $\alpha_2 u_2 \top \alpha_3 u_3$ , следовательно,  $(\alpha_1 u_1, \alpha_2 u_2, \alpha_3 u_3)$  является геометрическим предчетыреугольником.

Аналогично доказывается и обратное утверждение. ■

**Предложение 3.13.** Пусть  $Z$  является нейтральным комплексным SFS-пространством и  $u, v \in G\mathfrak{U}$ . Если существует  $\alpha \in T$  такое, что  $\alpha u \leq v$ , то

- (a)  $v = \alpha u + P_0^*(u)v$ ;
- (b)  $P_k^*(u)v = P_k^*(\alpha u)v$ , где  $k \in \{0, 1, 2\}$ ;
- (c)  $S_u^*v = S_{\alpha u}^*v = v$ .

**Доказательство.** (a) Из [21. Лемма 4.5] имеем

$$\alpha u \leq v \Rightarrow \frac{1}{\alpha} F_u = F_{\alpha u} \subset F_v \Rightarrow F_u \subset \alpha F_v = F_{\frac{1}{\alpha} v} \Rightarrow u \leq \frac{1}{\alpha} v.$$

Тогда по [16. Лемма 2.8] получим

$$\frac{1}{\alpha} v = u + P_0^*(u) \frac{1}{\alpha} v, \text{ т.е. } v = \alpha u + P_0^*(u)v.$$

(b) Сразу следует из Следствия 3.2, (i).

(c) Поскольку  $P_1^*(u)v = P_1^*(\alpha u)v$ , то  $(I - S_u^*)v = (I - S_{\alpha u}^*)v$ , следовательно,

$$S_u^*v = S_{\alpha u}^*v.$$

Из  $\alpha u \leq v$  имеем  $S_{\alpha u}^*v = v$ . ■

Напомним, что выпуклое множество называется *строго выпуклым*, если все точки его границы являются выставленными по норме.

Нормированное пространство  $Z$  называется *атомическим*, если каждая симметричная грань  $F$  единичного шара  $Z_1$  содержит экстремальную точку.

Говорят, что слабо гранево симметричное пространство обладает свойством (PE), если каждая экстремальная точка единичного шара является выставленной по норме точкой.

**Теорема 3.14.** Пусть  $Z$  является нейтральным SFS-пространством и  $u \in M$ . Тогда  $Z_2(u)$  является линейно изометричным действительному или комплексному Гильбертовому пространству.

Перед тем как доказать данную теорему, докажем для начала следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.15.** Пусть  $Z$  является нейтральным  $SFS$ -пространством и  $u \in M$ . Тогда единичный шар  $(Z_2(u))_1$  подпространства  $Z_2(u)$  является строго выпуклым.

**Доказательство.** Из [19. Предложение 2.4] вытекает, что  $F_u$  является выставленной по норме точкой. Пусть  $F_u = \{f_u\}$ , следовательно,

$$Z_2(u) = \{\lambda f_u : \text{для всех } \lambda \in K\}.$$

Тогда для любого  $f \in \partial(Z_2(u))_1$  имеем, что  $f = \alpha_f f_u$  для некоторого  $\alpha_f \in K$  с  $|\alpha_f| = 1$ . Поскольку из Следствия 2, (vii) вытекает, что геометрический трипотент  $\bar{\alpha}_f u$  является минимальным и  $f(\bar{\alpha}_f u) = \bar{\alpha}_f f(u) = \bar{\alpha}_f \alpha_f f_u(u) = 1$ , то из [19. Предложение 2.4] получим, что  $\{f\} = F_{\bar{\alpha}_f u}$ , т.е.  $\{f\}$  является выставленной по норме точкой единичного шара  $Z_1$ . Из [19. Предложение 2.1] имеем, что  $\bar{\alpha}_f u \in G\mathfrak{U}_{Z_2(u)}$ . Поскольку  $U_2(u) = U_2(\bar{\alpha}_f u)$ , то  $\bar{\alpha}_f u \in M_{Z_2(u)}$ , т.е.  $\{f\}$  является выставленной по норме точкой единичного шара  $(Z_2(u))_1$ , следовательно,  $(Z_2(u))_1$  является строго выпуклым. ■

**Доказательство теоремы.** Из [17. Теорема 3.6, Предложение 4.1] вытекает, что  $Z_2(u)$  является нейтральным  $SFS$ -пространством. А из строго выпуклости  $(Z_2(u))_1$  сразу вытекает, что  $Z_2(u)$  является атомическим с условием  $(PE)$ . Более того,  $Z_2(u)$  является пространством ранга 1. Действительно, предположим обратное. Пусть существуют такие элементы  $f, g \in Z_2(u)$ , что  $f \diamond g$ . Тогда, как было показано в доказательстве Леммы 3.15, существуют такие  $\alpha, \beta \in K$  с  $|\alpha| = |\beta| = 1$ ,

что  $\left\{ \frac{f}{\|f\|} \right\} = F_{\alpha u}$ ,  $\left\{ \frac{g}{\|g\|} \right\} = F_{\beta u}$  и  $F_{\alpha u} \diamond F_{\beta u}$ , следовательно, из [16. Лемма 2.5] имеем  $\alpha u \diamond \beta u$ . Тогда из Следствия 3.6, (i) вытекает, что  $u \diamond u$ . Это противоречие, т.е.  $Z_2(u)$  является пространством ранга 1.

Таким образом,  $Z_2(u)$  является нейтральным атомическим  $SFS$ -пространством ранга 1 с условием  $(PE)$ . Тогда из [19. Следствие 2.11] вытекает, что  $Z_2(u)$  является линейно изометричным действительному или комплексному Гильбертовому пространству.

#### Список источников

1. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров Н.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
2. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.
3. Эмх. Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Мир, 2009.
4. Jordan P., von Neumann J., Wigner E. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism // Ann. of Math. 1934. V. 35 (1). P. 29–64. doi: 10.2307/1968117
5. Сигал А. Математические проблемы релятивистской физики. М.: Мир, 1968.

6. Аюпов Ш.А., Ядгаров Н.Ж. Спектральные выпуклые множества в конечномерных пространствах // Известия АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1989. № 3. С. 3–7.
7. Аюпов Ш.А., Ядгаров Н.Ж. Геометрия пространства состояний модулярных йордановых алгебр // Известия Российской академии наук. Сер. математическая. 1993. Т. 57 (6). С. 199–211.
8. Аюпов Ш.А., Ядгаров Н.Ж. Свойства спектральных выпуклых множеств // Доклады АН УзССР. 1989. № 7. С. 3–4.
9. Ajupov Sh., Iochum B., Yadgorov N. Symmetry versus facial homogeneity for self-dual cones // Linear Algebra and its Applications. 1990. V. 142. P. 83–89. doi: 10.1016/0024-3795(90)90257-D
10. Аюпов Ш.А., Иокум В., Ядгаров Н.Ж. Геометрия пространств состояний конечномерных йордановых алгебр // Известия АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1990. № 3. С. 19–22.
11. Alfsen E.M., Hanche-Olsen H., Shultz F.W. Space spaces of  $C^*$ -algebras // Acta Math. 1980. V. 144. P. 267–305. doi: 10.1007/BF02392126
12. Alfsen E.M., Shultz F.W. On non-commutative spectral theory and Jordan algebras // Proc. London Math. Soc. 1979. V. s3-38 (3). P. 497–516. doi: 10.1112/plms/s3-38.3.497
13. Alfsen E.M., Shultz F.W. State Spaces of Jordan algebras // Acta Math. 1978. V. 140. P. 155–190. doi: 10.1007/BF02392307
14. Araki H. On the characterization of the state space of quantum mechanics // Commun. Math. Physics. 1980. V. 75. P. 1–24. doi: 10.1007/BF01962588
15. Iochum B., Shultz F.W. Normal state spaces of Jordan and von Neumann algebras // Journal of Functional Analysis. 1983. V. 50 (3). P. 317–328. doi: 10.1016/0022-1236(83)90008-3
16. Friedman Y., Russo B. A geometric spectral theorem // The Quarterly Journal of Mathematics. 1986. V. 37 (3). P. 263–277. doi: 10.1093/qmath/37.3.263
17. Friedman Y., Russo B. Affine structure of facially symmetric spaces // Mathematical Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1989. V. 106 (1). P. 107–124. doi: 10.1017/S030500410006802X
18. Friedman Y., Russo B. Classification of atomic facially symmetric spaces // Canadian Journal of Mathematics. 1993. V. 45 (1). P. 33–87. doi: 10.4153/CJM-1993-004-0
19. Friedman Y., Russo B. Geometry of the Dual ball of the Spin Factor // Proc. Lon. Math. Soc. 1992. V. s3-65 (1). P. 142–174. doi: 10.1112/plms/s3-65.1.142
20. Friedman Y., Russo B. Some affine geometric aspects of operator algebras // Pacific Journal of Mathematics. 1989. V. 137 (1). P. 123–144. doi: 10.2140/pjm.1989.137.123
21. Ibragimov M. Geometric properties of geometric tripotents and split faces in neutral *SFS*-space // Science and Education in Karakalpakstan. 2023. № 2/2. P. 43–49.
22. Ибрагимов М.М., Кудайбергенов К.К. Геометрическое описание  $L_1$ -пространств // Известия вузов. Математика. 2013. № 9. С. 21–27.
23. Ибрагимов М.М., Кудайбергенов К.К., Тлеумуратов С.Ж., Сейпуллаев Ж.Х. Геометрическое описание предсопряженного пространства к атомической коммутативной алгебре фон Неймана // Математические заметки. 2018. № 93 (5). С. 728–735. doi: 10.4213/mzm9314
24. Ibragimov M.M., Tleumuratov S.J., Seypullaev J.X. Some geometric properties of a strongly facially symmetric space // Methods of functional analysis and topology. 2005. V. 11 (3). P. 234–238 ().
25. Yadgorov N.Dj., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K. Geometric characterization of  $L_1$ -spaces // Studia Mathematica. 2013. V. 219. P. 97–107. doi: 10.4064/sm219-2-1
26. Seypullaev J.X. Finite strongly facially symmetric spaces // Uzb. Math. Journal. 2020. № 4. P. 140–148. doi: 10.29229/uzmj.2020-4-15
27. Friedman Y., Russo B. Structure of the predual of a  $JBW^*$ -triple // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 1985. Bd. 356. S. 67–89. doi: 10.1515/crll.1985.356.67
28. Dang T., Friedmann Y. Classification of  $JBW^*$ -triple factors and applications // Mathematica Scandinavica. 1987. V. 61. P. 292–330. doi: 10.7146/math.scand.a-12206

## References

1. Bogolubov N.N., Logunov A.A., Todorov I.T. (1969) *Osnovy aksiomaticheskogo podkhoda v kvantovoy teorii polya* [Fundamentals of the axiomatic approach to quantum field theory]. Moscow: Nauka.
2. Bratelli O., Robinson D. (1987) *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1.  $C^*$ - and  $W^*$ -Algebras. Symmetry Groups. Decomposition of States*. Berlin: Springer.
3. Emch G.G. (2009) *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*. Mineola: Dover Publications.
4. Jordan P., von Neumann J., Wigner E. (1934) On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Annals of Mathematics*. 35(1). pp. 29–64. DOI: 10.2307/1968117.
5. Segal I.E. (1963) *Mathematical Problems of Relativistic Physics*. American Mathematical Society.
6. Ayupov Sh.A., Yadgorov N.Zh. (1989) Spektral'nyye vypuklyye mnozhestva v konechnomernyykh prostranstvakh [Spectral convex sets in finite-dimensional spaces]. *Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk*. 3. pp. 3–7.
7. Ayupov Sh.A., Yadgorov N.Zh. (1994) Geometry of the state space of modular Jordan algebras. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*. 43(3). pp. 581–592. DOI: 10.1070/IM1994v043n03ABEH001581.
8. Ayupov Sh.A., Yadgorov N.Zh. (1989) Svoystva spektral'nykh vypuklykh mnozhestv [Properties of spectral convex sets]. *Doklady Akademii Nauk UzSSR*. 7. pp. 3–4.
9. Ajupov Sh., Iochum B., Yadgorov N. (1990) Symmetry versus facial homogeneity for self-dual cones. *Linear Algebra and Its Applications*. 142. pp. 83–89. DOI: 10.1016/0024-3795(90)90257-D.
10. Ayupov Sh.A., Iochum B., Yadgorov N.Zh. (1990) Geometriya prostranstv sostoyaniy konechnomernyykh yordanovykh algebr [Geometry of spaces of states of finite-dimensional Jordan algebras]. *Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk*. 3. pp. 19–22.
11. Alfsen E.M., Hanche-Olsen H., Shultz F.W. (1980) State spaces of  $C^*$ -algebras. *Acta Mathematica*. 144. pp. 267–305. DOI: 10.1007/BF02392126.
12. Alfsen E.M., Shultz F.W. (1979) On non-commutative spectral theory and Jordan algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society*. s3-38(3). pp. 497–516. DOI: 10.1112/plms/s3-38.3.497.
13. Alfsen E.M., Shultz F.W. (1978) State spaces of Jordan algebras. *Acta Mathematica*. 140. pp. 155–190. DOI:10.1007/BF02392307.
14. Araki H. (1980) On the characterization of the state space of quantum mechanics. *Communications in Mathematical Physics*. 75. pp. 1–24. DOI:10.1007/BF01962588.
15. Iochum B., Shultz F.W. (1983) Normal state spaces of Jordan and von Neumann algebras. *Journal of Functional Analysis*. 50(3). pp. 317–328. DOI: 10.1016/0022-1236(83)90008-3.
16. Friedman Y., Russo B. (1986) A geometric spectral theorem. *Quarterly Journal of Mathematics*. 37(3). pp. 263–277. DOI:10.1093/qmath/37.3.263.
17. Friedman Y., Russo B. (1989) Affine structure of facially symmetric spaces. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 106(1). pp. 107–124. DOI: 10.1017/S030500410006802X.
18. Friedman Y., Russo B. (1993) Classification of atomic facially symmetric spaces. *Canadian Journal of Mathematics*. 45(1). pp. 33–87. DOI: 10.4153/CJM-1993-004-0.
19. Friedman Y., Russo B. (1992) Geometry of the dual ball of the spin factor. *Proceedings of the London Mathematical Society*. s3-65(1). pp. 142–174. DOI:10.1112/plms/s3-65.1.142.
20. Friedman Y., Russo B. (1989) Some affine geometric aspects of operator algebras. *Pacific Journal of Mathematics*. 137(1). pp. 123–144. DOI: 10.2140/pjm.1989.137.123.
21. Ibragimov M. (2023) Geometric properties of geometric tripotents and split faces in neutral  $SFS$ -space. *Science and Education in Karakalpakstan*. 2/2. pp. 43–49.

22. Ibragimov M.M., Kudaibergenov K.K. (2013) Geometric description of  $L_1$ -spaces. *Russian Mathematics*. 57. pp. 16–21. DOI: 10.3103/S1066369X1309003X.
23. Ibragimov M.M., Kudaibergenov K.K., Pleumuratov S.Z. et al. (2013) Geometric description of the preduals of atomic commutative von Neumann algebras. *Mathematical Notes*. 93. pp. 715–721. DOI: 10.1134/S0001434613050076.
24. Ibragimov M.M., Pleumuratov S.J., Seypullaev J.X. (2005) Some geometric properties of a strongly facially symmetric space. *Methods of functional analysis and topology*. 11(3). pp. 234–238.
25. Yadgorov N.Dj., Ibragimov M.M., Kudaibergenov K.K. (2013) Geometric characterization of  $L_1$ -spaces. *Studia Mathematica*. 219. pp. 97–107. DOI: 10.4064/sm219-2-1.
26. Seypullaev J.X. (2020) Finite strongly facially symmetric spaces. *Uzbek Mathematical Journal*. 4. pp. 140–148. DOI: 10.29229/uzmj.2020-4-15.
27. Friedman Y., Russo B. (1985) Structure of the predual of a JBW\*-triple. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1985(356). pp. 67–89. DOI: 10.1515/crll.1985.356.67.
28. Dang T., Friedmann Y. (1987) Classification of JBW\*-triple factors and applications. *Mathematica Scandinavica*. 61. pp. 292–330. DOI: 10.7146/math.scand.a-12206.

**Сведения об авторах:**

**Ибрагимов Мухтар Мамутович** – кандидат физико-математических наук, доцент математического факультета Каракалпакского государственного университета им. Бердаха (Нукус, Узбекистан). E-mail: m.ibragimov1909@gmail.com.

**Арзиев Аллабай Джалгасович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Узбекистан). E-mail: allabayarziev@inbox.ru

**Information about the authors:**

**Ibragimov Mukhtar M.** (PhD, Associate Professor, Faculty of Mathematics, Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan). E-mail: m.ibragimov1909@gmail.com.

**Arziev Allabay D.** (PhD, Senior Researcher, V.I. Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences. Tashkent. Uzbekistan). E-mail: allabayarziev@inbox.ru.

*The article was submitted 08.07.2024; accepted for publication 01.08.2025*

*Статья поступила в редакцию 08.07.2024; принята к публикации 01.08.2025*

Научная статья

УДК 517.982.3

doi: 10.17223/19988621/96/3

MSC: 2020: 46E35; 35J30

## Представление линейного функционала в гильбертовом пространстве Соболева

**Игорь Витальевич Корытов**

*Томский политехнический университет, Томск, Россия, korytov@tpu.ru*

**Аннотация.** Введена оригинальная норма для гильбертова пространства Соболева. Установлено представление линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве с введенной нормой. Показано, что для финитного функционала представляющая функция выражается через свертку функционала с фундаментальным решением дифференциального оператора, связанного со структурой нормы рассматриваемого пространства.

**Ключевые слова:** гильбертово пространство, пространство Соболева, линейный финитный функционал, представление функционала

**Для цитирования:** Корытов И.В. Представление линейного функционала в гильбертовом пространстве Соболева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 28–41. doi: 10.17223/19988621/96/3

Original article

## Representation of a linear functional in a Hilbert Sobolev space

**Igor V. Korytov**

*Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation, korytov@tpu.ru*

**Abstract.** In this paper, a representation of a linear functional in the Hilbert case of a Sobolev space is obtained. The space is normed by expression that is introduced for the first time and that has not been considered anywhere before.

First, the intermediate problems of substantiating the legality of the norm, the inner product generating the norm, and the metrics generated with the norm are solved. As necessary, the proof of concomitant inequalities and identities is given.

Second, a finite linear functional is considered. The finiteness makes it possible to establish explicit structural elements included in the representation. Solution of the problem of finding a representing function belonging to the same space that a test function belongs to is based on the property of uniform convexity of a unit sphere using a limit element matching the functional. Such a way leads to a partial differential equation in generalized functions. The operator of the equation is linear and includes constant coefficients, which makes it possible to find a solution as a convolution of its fundamental solution and its right-hand side term. It is shown that the solution exists and is the required function representing the functional.

**Keywords:** Hilbert space, Sobolev space, linear finite functional, functional representation

**For citation:** Korytov, I.V. (2025) Representation of a linear functional in a Hilbert Sobolev space. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 28–41. doi: 10.17223/19988621/96/3

## Введение

Источником материала для данной работы являются работы С.Л. Соболева по оценке погрешности кубатурных формул – формул численного интегрирования функций нескольких переменных. Погрешность приближенного вычисления интеграла рассматривается как линейный функционал над банаховыми пространствами функций, от которых интеграл приближенно вычисляется. Оценивающей константой в произведении с нормой функции выступает норма функционала в сопряженном пространстве. Одна из промежуточных задач на пути нахождения нормы функционала – нахождение его представления. Из теоремы Рисса известно, что в гильбертовом пространстве существует элемент, представляющий данный функционал в составе скалярного произведения. Помимо подтверждения данного факта для пространства Соболева с конкретной нормой, рассмотрим путь его нахождения.

С.Л. Соболев указывал способ нормирования пространств типа  $W_p^{(m)}$  через проекционные операторы [1, 2] как наиболее генерализованный путь. В конкретных ситуациях чаще всего практикуется включение самой функции и частных производных наивысшего заданного порядка  $m$ . Например, В.Г. Мазья [3] применяет нормы в виде:

$$\|f\|_{W_p^m(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} \left( \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha f(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right]^{1/p} + \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

и

$$\|f\|_{V_p^m(\Omega)} = \sum_{k=0}^m \left[ \int_{\Omega} \left( \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha f(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right]^{1/p}.$$

М.С. Агранович [4], отмечая, что в подынтегральных функциях можно оставить только  $\alpha = (0, \dots, 0)$  и  $\alpha = (m, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, m)$ , приводит структуру нормы без конкретизации коэффициентов при каждой из производных:

$$\|f\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \left[ \int_{\mathbf{R}_n} |D^\alpha f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Что касается пространства Соболева с гильбертовым показателем, то подобным же образом без конкретизации коэффициентов вводит норму М.А. Шубин [5]:

$$\|f\|_{H^{(m)}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \left[ \int_{\Omega} |D^\alpha f(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Здесь функции заданы на  $\Omega$  – открытым подмножеством  $\mathbf{R}^n$ , а само пространство, обозначенное  $H^{(m)}$ , определяется через замыкание пространства  $D$  финитных бесконечно дифференцируемых на  $\Omega$  функций.

Наиболее близкий к нашему способ нормирования применен в работе Ц.Б. Шойнжурова [6]

$$\|f\|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)} = \left[ \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} a_\alpha (D^\alpha f(x))^2 dx \right]^{1/2}.$$

Здесь присутствуют числовые коэффициенты  $a_\alpha$ , зависящие от мультииндекса.

Вышеперечисленные способы не исчерпывают весь список нормировок пространства Соболева. Отметим, что при нормировании обязательным является включение функции и всех частных производных наивысшего заданного порядка в выражение нормы. Включение производных промежуточных порядков, а также коэффициентов при них остается произвольным.

Представление функционала непосредственно связано с видом нормы и выводится через порожденное этой структурой дифференциальное уравнение. Для гильбертовых пространств такие уравнения относятся к эллиптическому типу, и их дифференциальные операторы могут быть тем или иным образом выражены через оператор Лапласа.

Уравнение с оператором Лапласа вида  $\Delta^m u = l$ , которое использовал С.Л. Соболев для получения представления функционала в пространстве  $L_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ , было названо им полигармоническим. В работе Ц.Б. Шойнжурова [6] уравнение с оператором Лапласа  $\sum_{k=0}^m \Delta^k u = l$ , содержащее все производные четных промежуточных порядков от 0 до  $2m$ , называлось  $m$ -метагармоническим. Такими наименованиями мы будем пользоваться в дальнейшем. Отметим, что в Математической энциклопедии под редакцией И.М. Виноградова<sup>1</sup> термины «полигармоническая», «метагармоническая» и «гипергармоническая» употребляются как синонимы по отношению к функции, удовлетворяющей уравнению вида  $\Delta^m u = l$ . Решение однородного  $m$ -метагармонического уравнения  $\sum_{k=0}^m \Delta^k u = 0$  является нулевым, в то время как решение однородного полигармонического уравнения  $\Delta^m u = 0$  отлично от нуля. Первое из этих уравнений естественным образом возникает при решении задач с функциями из пространств типа  $W_2^{(m)}$ , а второе –  $L_2^{(m)}$ .

Фундаментальные решения эллиптических операторов входят в состав представлений функционалов. Их аналитические выражения и асимптотические оценки сильно зависят от соотношений между размерностью пространства аргумента и порядком производных, от четности или нечетности некоторых выражений, их содержащих.

## 1. Скалярное произведение и норма с биномиальными коэффициентами

Пространство Соболева функций, суммируемых в квадрате, у которых частные производные всех порядков до  $m$  включительно также суммируемы в квадрате, строится как замыкание пространства  $S(\mathbf{R}^n)$  бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности быстрее любой отрицательной степени аргумента, по некоторой норме. Иными словами,  $f \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ , если существуют

<sup>1</sup> Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. М., 1977. Т. 4. 1215 с.

обобщенные производные  $D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  всех порядков  $|\alpha| \leq m$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , и каждая частная производная суммируема в квадрате, т.е.  $D^\alpha f \in L_2(\mathbf{R}^n)$ .

Структура нормы пространства  $L_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ , введенной С.Л. Соболевым в [1], с точки зрения принадлежности частных производных наивысшего порядка пространству  $L_2(\mathbf{R}^n)$  следующая:

$$\|f|L_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)\|^2 = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \|D^\alpha f|L_2(\mathbf{R}^n)\|^2 = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\mathbf{R}^n} (D^\alpha f)^2 dx.$$

Данную норму можно рассматривать как сумму с единичными коэффициентами, тогда как во вводимой нами норме будут присутствовать коэффициенты биномиальные. Кроме того, учтем, что  $L_2^{(m)} = W_2^{(m)}/P_{m-1}$  является факторпространством пространства  $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  по множеству многочленов степени не выше  $m - 1$ .

Покажем, что вводимая нами норма генерирует гильбертово пространство. Все рассматриваемые в последующих разделах утверждения справедливы для пространства  $S(\mathbf{R}^n)$  и переносятся на пространство  $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  путем предельного перехода. С другой стороны, можно доказать справедливость нижестоящих утверждений на основе свойства линейности интеграла Лебега. И тот и другой путь конструирования пространства  $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  приводит к одному и тому же запасу функций [1].

Рассматривая пространство  $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  как гильбертово, введем скалярное произведение. Выражение

$$(f, g) = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f D^\alpha g dx \quad (1)$$

удовлетворяет свойствам скалярного произведения.

**Предложение 1.** Интеграл (1) является скалярным произведением в пространстве  $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ , и для любой пары функций  $f, g \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  справедливы утверждения

- 1)  $(f, g) = (g, f)$ ;
- 2)  $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ ;
- 3)  $(\lambda f, g) = \lambda (f, g)$ ;
- 4)  $(f, f) > 0, (f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ .

Последнее свойство определяет скалярный квадрат. Извлекая из него квадратный корень, получаем выражение

$$\sqrt{(f, f)} = \left( \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha f)^2 dx \right)^{1/2},$$

которое примем за норму в рассматриваемом пространстве.

**Предложение 2 (неравенство Коши–Буняковского).** Для скалярного произведения (1) справедливо неравенство

$$|(f, g)| \leq \|f|W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)\| \cdot \|g|W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)\|.$$

Скалярное произведение (1), введенное в пространстве  $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ , порождает норму

$$\|f|W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)\| = \left( \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha f)^2 dx \right)^{1/2} \quad (2)$$

**Предложение 3.** Для любой функции  $f \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  справедливы утверждения:

- 1)  $\|f\|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)} \geq 0, \|f\|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)} = 0 \Leftrightarrow f = 0;$
- 2)  $\|f + g\|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)} \leq \|f\|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)} + \|g\|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)}, \forall f, g \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n);$
- 3)  $\|\lambda f\|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)} = |\lambda| \|f\|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)}, \forall \lambda \in \mathbf{R}.$

Норма (2) порождает метрику

$$\rho(f, g) = \|f - g\|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)} = \left( \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha(f - g))^2 dx \right)^{1/2}.$$

**Предложение 4.** Для любых  $f, g \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  справедливы утверждения:

- 1)  $\rho(f, g) > 0, \rho(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g;$
- 2)  $\rho(f, g) = \rho(g, f);$
- 3)  $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g), \forall f, g, h \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n).$

Тождество параллелограмма представляет собой пограничный случай неравенств Кларксона между утверждениями для показателя суммируемости в ниже следующих интервалах [7].

**Предложение 5.** При  $1 < p \leq 2$  справедливо первое неравенство Кларксона

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}^n)}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}^n)}^p \leq \frac{1}{2} \left( \|f\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}^n)}^p + \|g\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}^n)}^p \right).$$

**Предложение 6.** При  $2 \leq p < \infty$  справедливо второе неравенство Кларксона

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}^n)}^q + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}^n)}^q \leq \left( \frac{1}{2} \|f\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}^n)}^p + \frac{1}{2} \|g\|_{W_p^{(m)}(\mathbf{R}^n)}^p \right)^{q-1}.$$

Здесь  $q$  – сопряженный показатель, связанный с показателем  $p$  соотношением  $1/p + 1/q = 1$ . Для гильбертова пространства  $p = q = 2$ , что и превращает каждое из неравенств в тождество параллелограмма. Неравенства позволяют утверждать, что середина всякой хорды лежит существенно в глубине единичного шара. Это свойство называется равномерной выпуклостью единичного шара [2]. Геометрически равномерная выпуклость означает отсутствие спрямленных участков на поверхности единичного шара.

**Предложение 7.** Для любых двух элементов  $f$  и  $g$  гильбертова пространства  $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  с нормой (2) выполняется равенство

$$\|f + g\|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)}^2 + \|f - g\|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)}^2 = 2 \left( \|f\|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)}^2 + \|g\|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)}^2 \right).$$

## 2. Вариационная задача

Рассмотрим линейный непрерывный функционал  $l(f)$  на функциях из пространства  $f \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ . Далее в выкладках для нормы функции  $f$  будем применять краткое обозначение  $\|f\|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)} = \|f\|$ .

Равномерная выпуклость единичной сферы пространства  $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ , подтвержденная выше, дает основание для постановки задачи о представлении функционала. Именно, если взять предельный элемент  $f_0 \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ , для которого  $\|f_0\| = 1$ ,  $l(f_0) = \sup |l(f)|$  при  $\|f\|=1$ , и для любой  $f \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  построить функцию одного аргумента  $F(\lambda)$

$$F(\lambda) = l \left( \frac{f_0 + \lambda f}{\|f_0 + \lambda f\|} \right), \tag{3}$$

то при  $\lambda = 0$

$$F(0) = l\left(\frac{f_0}{\|f_0\|}\right) = l(f_0) = \sup_{\|f\|=1} |l(f)| = \max_{\lambda} l\left(\frac{f_0 + \lambda f}{\|f_0 + \lambda f\|}\right). \quad (4)$$

Иными словами, начало и конец цепочки равенств (4) представляет условие экстремума функции одной переменной. Значение  $\lambda = 0$  представляет собственно критическую точку.

Найдем производную составленной функции (3) по  $\lambda$ . Норма является константой по отношению к функционалу, поэтому

$$F'(\lambda) = l\left(\frac{f_0 + \lambda f}{\|f_0 + \lambda f\|}\right)' = \left(\frac{l(f_0 + \lambda f)}{\|f_0 + \lambda f\|}\right)'.$$

Далее выполняем действия, как с производной частного:

$$F'(\lambda) = \frac{(l(f_0 + \lambda f))' \|f_0 + \lambda f\| - l(f_0 + \lambda f) \|f_0 + \lambda f\|'}{\|f_0 + \lambda f\|^2}. \quad (5)$$

Взятие производной нормы требует обоснования. Вначале выполним формальное дифференцирование:

$$\begin{aligned} \|f_0 + \lambda f\|' &= \left( \left( \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha (f_0 + \lambda f))^2 dx \right)^{1/2} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha (f_0 + \lambda f))^2 dx \right)^{-1/2} \times \\ &\quad \times \left( \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha (f_0 + \lambda f))^2 dx \right)' = \\ &= \frac{1}{2 \|f_0 + \lambda f\|} \int_{\mathbf{R}^n} \left( \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha (f_0 + \lambda f))^2 \right)' dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку постоянный множитель перед интегралом не повлияет на дальнейшие выкладки, продолжим дифференцирование по параметру подынтегрального выражения:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^n} \left( \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha (f_0 + \lambda f))^2 \right)' dx = \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left( (D^\alpha (f_0 + \lambda f))^2 \right)' dx = \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} 2 D^\alpha (f_0 + \lambda f) (D^\alpha (f_0 + \lambda f))' dx = \\ &= 2 \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha (f_0 + \lambda f) (D^\alpha f_0 + D^\alpha (\lambda f))' dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha (f_0 + \lambda f) \left( (D^\alpha f_0)' + (\lambda D^\alpha f)' \right) dx = \\
 &= 2 \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha (f_0 + \lambda f) (D^\alpha f) dx.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Соединяя (6) и (7), имеем производную нормы по параметру

$$\|f_0 + \lambda f\|' = \frac{1}{\|f_0 + \lambda f\|} \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha (f_0 + \lambda f) (D^\alpha f) dx. \tag{8}$$

Подынтегральная функция в (8) удовлетворяет условиям теоремы о первообразной по параметру от несобственного интеграла [8], поэтому выполненное нами формальное дифференцирование законно. Продолжим действия с остальными членами (5):

$$\frac{(l(f_0) + l(\lambda f))'}{\|f_0 + \lambda f\|} = \frac{(l(f_0))' + (l(\lambda f))'}{\|f_0 + \lambda f\|} = \frac{(\lambda l(f))'}{\|f_0 + \lambda f\|} = \frac{l(f)'}{\|f_0 + \lambda f\|},$$

а затем подставим в (5) результат (8):

$$\begin{aligned}
 F'(\lambda) &= \frac{l(f)'}{\|f_0 + \lambda f\|} - \frac{l(f_0 + \lambda f) \|f_0 + \lambda f\|'}{\|f_0 + \lambda f\|^2} = \\
 &= \frac{l(f)'}{\|f_0 + \lambda f\|} - \frac{l(f_0 + \lambda f)'}{\|f_0 + \lambda f\|^2} \cdot \frac{1}{\|f_0 + \lambda f\|} \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha (f_0 + \lambda f) (D^\alpha f) dx = \\
 &= \frac{l(f)'}{\|f_0 + \lambda f\|} - \frac{l(f_0 + \lambda f)'}{\|f_0 + \lambda f\|^3} \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha (f_0 + \lambda f) (D^\alpha f) dx.
 \end{aligned}$$

Из условия экстремума функции одной переменной  $F'(0) = 0$ . Таким образом,

$$\frac{l(f)'}{\|f_0 + \lambda f\|} - \frac{l(f_0 + \lambda f)'}{\|f_0 + \lambda f\|^3} \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha (f_0 + \lambda f) (D^\alpha f) dx \Big|_{\lambda=0} = 0.$$

Далее, подставив  $\lambda = 0$ , получим

$$\frac{l(f)'}{\|f_0\|} - \frac{l(f_0)'}{\|f_0\|^3} \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f_0 D^\alpha f dx = 0,$$

или

$$\frac{l(f)'}{\|f_0\|} = \frac{l(f_0)'}{\|f_0\|^3} \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f_0 D^\alpha f dx.$$

Избавимся от общего множителя в обеих частях равенства:

$$l(f)' = \frac{l(f_0)'}{\|f_0\|^2} \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f_0 D^\alpha f dx.$$

С учетом  $\|f_0\| = 1$  имеем

$$l(f)' = l(f_0)' \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f_0 D^\alpha f dx.$$

По отношению к интегралу и производным, в него входящим,  $l(f_0)$  является константой, поэтому

$$l(f) = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha (l(f_0) f_0) D^\alpha f dx .$$

Переобозначив  $u = l(f_0) f_0$ , получаем окончательное выражение

$$l(f) = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha u D^\alpha f dx . \quad (9)$$

Поскольку по условию  $f_0 \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ , то  $u \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ . Таким образом, (9) является скалярным произведением в  $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ , а следовательно, и представлением функционала в этом пространстве.

Выясним, чему равна норма функции  $u$ :

$$\begin{aligned} \|u\| &= \left( \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha u)^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \left( \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha (l(f_0) f_0))^2 dx \right)^{1/2} = |l(f_0)| \cdot \|f_0\| = |l(f_0)| . \end{aligned}$$

Далее, по определению, функционал является ограниченным, если найдется такое  $M > 0$ , что для любой  $f \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  выполняется неравенство

$$|l(f)| \leq M \|f\| ,$$

а наименьшее из чисел  $M$  является нормой функционала.

Оценим представление (9):

$$|l(f)| = \left| \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha u D^\alpha f dx \right| \leq \|u\| \cdot \|f\| . \quad (10)$$

Так как  $l(f_0) = \sup |l(f)|$  при  $\|f\| = 1$ , то число, меньшее  $l(f_0)$ , не может быть нормой функционала в  $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ . Следовательно,  $\|u\|$  в неравенстве (10) есть наименьшая из констант, ограничивающих функционал. Отсюда,  $\|u\| = \|l\|^*$ .

Если рассмотреть аналогичную задачу о представлении линейного непрерывного функционала в пространстве  $L_2(\mathbf{R}^n)$  и выполнить такие же выкладки, как (3)–(10), то функционал будет представлен через предельный элемент  $\varphi_0 \in L_2(\mathbf{R}^n)$ :

$$l(f) = \int_{\mathbf{R}^n} l(\varphi_0) \cdot \varphi_0 \cdot f dx = \int_{\mathbf{R}^n} u_0 f dx . \quad (11)$$

По аналогии здесь также  $l(\varphi_0) = \|u_0\|_{L_2(\mathbf{R}^n)} = \|l\|_{L_2^*(\mathbf{R}^n)}$ .

Поскольку  $f \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  принадлежит также и пространству  $L_2(\mathbf{R}^n)$ , то на основании (11) будут справедливыми выкладки и результаты, излагаемые ниже.

### 3. Метагармоническое дифференциальное уравнение

Интегрируя по частям (9), получаем дифференциальное уравнение в обобщенных функциях

$$l(f) = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^k D^{2\alpha} u \cdot f dx .$$

Для дальнейшего изложения будет удобным переобозначение функции из (11)  $u_0(x) = l(x)$ , имея в виду, что функционал  $l(x)$  представлен функцией  $u_0(x)$  в  $L_2(\mathbf{R}^n)$  и как обобщенная функция может быть записан через аргумент  $x$  основных функций. Иными словами, так как  $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n) \subset L_2(\mathbf{R}^n)$ , то

$$l(f) = \int_{\mathbf{R}^n} l(x) \cdot f(x) dx,$$

где

$$l(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^k D^{2\alpha} u(x). \quad (12)$$

Для решения дифференциального уравнения (12) используем результаты [9]. Оператор

$$L(D^\alpha) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^k D^{2\alpha}$$

является линейным с постоянными коэффициентами. Известно [9], что для уравнения с правой частью и таким оператором существует единственное решение, равное свертке правой части с фундаментальным решением оператора

$$u = G * l. \quad (13)$$

Свертка существует не для всякой обобщенной функции  $l$ , поэтому класс рассматриваемых функционалов будет сужен. Известно [9], что для финитного функционала свертка существует. Фундаментальное решение  $G$  оператора  $L(D^\alpha)$  найдем, опираясь на теоремы [9] и свойства преобразования Фурье обобщенных функций

$$\begin{aligned} F \left[ \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^k D^{2\alpha} u(x) \right] &= F [\delta(x)], \\ \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^k (-i\xi)^{2k} F[G(x)] &= 1. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака. Преобразуем выражение слева, перегруппировав множители:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^k (-i\xi)^k (-i\xi)^k F[G(x)] &= 1, \\ \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^{2k} (i\xi)^k (-i\xi)^k F[G(x)] &= 1, \\ \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (i\xi)^k (-i\xi)^k F[G(x)] &= 1. \end{aligned}$$

Далее, степени комплексных выражений представим в виде покомпонентного произведения

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \prod_{j=1}^n (i\xi_j)^{\alpha_j} (-i\xi_j)^{\alpha_j} F[G(x)] = 1.$$

Произведение комплексно-сопряженных чисел с нулевой действительной частью дает квадрат модуля мнимой части:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{2\alpha_j} F[G(x)] = 1.$$

Развернув полиномиальный коэффициент и покомпонентное произведение степеней квадратов модулей

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} (|\xi_1|^2)^{\alpha_1} \dots (|\xi_n|^2)^{\alpha_n} F[G(x)] = 1,$$

видим, что внутренняя сумма есть не что иное, как степень полинома от квадратов модулей комплексных компонент:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left( \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2 \right)^k F[G(x)] = 1.$$

Полином же, в свою очередь, есть квадрат модуля вектора с комплексными компонентами:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (|\xi|^2)^k F[G(x)] = 1.$$

Далее становится очевидным, что выражение, полученное после всех преобразований, представляет собой разложение биннома Ньютона:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (|\xi|^2)^k \cdot 1^{m-k} F[G(x)] = 1,$$

$$(1 + |\xi|^2)^m F[G(x)] = 1.$$

Отсюда преобразование Фурье фундаментального решения

$$F[G(x)] = \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^m}.$$

Обратное преобразование Фурье такого выражения известно [10]:

$$G(x) = F^{-1} \left[ (1 + |\xi|^2)^{-m} \right],$$

$$G(|x|) = \frac{K_{n/2-m}(|x|)}{2^{m-1} \Gamma(m) |x|^{n/2-m}}.$$

Здесь  $K_{n/2-m}(|x|)$  – функция Макдональда,  $\Gamma(m)$  – гамма-функция.

#### 4. Фундаментальное решение и его свертка

**Предложение 8.** Функция (13) в условиях  $2m > n$  принадлежит пространству  $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  с нормой вида (2).

**Доказательство.** Для доказательства утверждения потребуется установить суммируемость в квадрате частных производных всех порядков  $|\alpha| \leq m$  свертки (13). Вначале докажем это утверждение для производных функции  $G$ . Соответствующие оценочные неравенства для произвольных  $m$  и  $n$  приведены в [10]:

$$|D^\alpha G| \leq C \begin{cases} \frac{e^{-|x|}}{|x|^{\frac{n-2m+1}{2}}}, & |x| > 1, & \forall n, m, \alpha; \\ 1 - \ln|x|, & |x| < 1, & n - 2m + |\alpha| = 0, |\alpha| - \text{чётное}; \\ \frac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}}, & |x| < 1, & n - 2m + |\alpha| = 0, |\alpha| - \text{нечётное} \\ & & \text{или } n - 2m + |\alpha| > 0; \\ 1, & |x| < 1, & n - 2m + |\alpha| < 0, \end{cases} \quad (14)$$

где  $C$  – произвольная константа. На основании оценок (14)

$$|D^\alpha G| \leq C_\infty e^{-|x|} |x|^{(2m-n-1)/2}, \quad |x| > 1,$$

все частные производные убывают на бесконечности по экспоненциальному типу, и несобственные интегралы вне единичного шара от каждой производной сходятся. Здесь символом  $C_\infty$  обозначена константа, соответствующая оценке на бесконечности.

Оценка внутри единичного шара разбивается на три случая.

При  $n - 2m + |\alpha| = 0$  и четном  $|\alpha|$  несобственный интеграл от оценивающей функции

$$|D^\alpha G| \leq C_1 (1 - \ln|x|), \quad |x| < 1,$$

сходится.

При  $n - 2m + |\alpha| < 0$  интеграл от оценки

$$|D^\alpha G| \leq C_2, \quad |x| < 1,$$

является собственным.

При  $n - 2m + |\alpha| = 0$  и нечетном  $|\alpha|$  или  $n - 2m + |\alpha| > 0$  несобственный интеграл от оценки

$$|D^\alpha G| \leq C_3 \frac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}}, \quad |x| < 1,$$

возведенной в квадрат

$$\int_{|x|<1} |D^\alpha G|^2 dx \leq C_3^2 \int_{|x|<1} \left| \frac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}} \right|^2 dx,$$

сводится к однократному путем перехода к сферическим координатам:

$$C_4 \int_0^1 \left| \frac{1}{r^{n-2m+|\alpha|}} \right|^2 r^{n-1} dr \leq C \int_0^1 \frac{1}{r^{2(n-2m+|\alpha|)-n+1}} dr.$$

Здесь в константу  $C_4$  перешли все повторно взятые интегралы от тригонометрических множителей, а  $C = C_3^2$ . Несобственный интеграл от неограниченной функции одной переменной сходится на указанном интервале при  $2(n - 2m + |\alpha|) - n + 1 < 1$ .

Таким образом, получаем сходимость интеграла, оценивающего каждую производную при условии  $2(2m - |\alpha|) > n$ . Следовательно, интегралы от производных наивысшего порядка функции  $G$  оцениваются сходящимся несобственным интегралом при  $2m > n$ .

Для установления существования свертки используем ограниченность линейного функционала в  $L_2 [1]$ :

$$\left\| D^\alpha G * l \Big|_{L_2(\mathbf{R}^n)} \right\|^2 = \int_{\mathbf{R}^n} |D^\alpha G * l|^2 dx \leq M \int_{\mathbf{R}^n} |D^\alpha G|^2 dx .$$

Таким образом, для всех  $|\alpha| \leq m$  интегралы от производных свертки, возведенных в квадрат, сходятся при  $2m > n$ , следовательно  $D^\alpha G * l \in L_2(\mathbf{R}^n)$ ,  $|\alpha| \leq m$ , и  $G * l \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ , т.е. свертка и ее производные всех порядков существуют.

## 5. Представление линейного функционала

На основании изложенного можно сформулировать окончательные утверждения.

**Теорема 1.** Для всякого линейного функционала  $l$  на  $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  существует единственный элемент  $u \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  такой, что

$$l(f) = (u, f) = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha u D^\alpha f dx, \quad f \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n), \quad (15)$$

причем  $\|l|_{W_2^{(m)*}(\mathbf{R}^n)}\| = \|u|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)}\|$ . Обратно, если  $u \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ , то (15) определяет такой линейный функционал  $l$ , что  $\|l|_{W_2^{(m)*}(\mathbf{R}^n)}\| = \|u|_{W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)}\|$ .

**Доказательство.** Данное утверждение представляет собой теорему об общем виде линейного функционала на гильбертовом пространстве [11], перефразированную для конкретного случая  $W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n)$  с нормой (2). Выкладки по доказательству утверждения приведены выше при рассмотрении вариационной задачи.

**Теорема 2.** Для любого линейного финитного функционала  $l \in W_2^{(m)*}(\mathbf{R}^n)$  при  $2m > n$  справедливо представление

$$l(f) = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha G * l D^\alpha f dx ,$$

$$f \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n), G * l \in W_2^{(m)}(\mathbf{R}^n) .$$

**Доказательство.** Из теоремы 1 и конкретизации функции  $u = G * l$  с учетом установления условий существования и суммируемости свертки следует утверждение теоремы.

### Список источников

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 333 с.
3. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 416 с.
4. Агранович М.С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М.: Изд-во МЦНМО, 2013. 378 с.

5. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М.: Изд-во МЦНМО, 2003. 303 с.
6. Шойнжуров Ц.Б. Оценка функционалов погрешности кубатурной формулы в пространствах с нормой, зависящей от младших производных: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1967. 83 с.
7. Clarkson J.A. Uniformly convex spaces // Transactions of the American Mathematical Society. 1936. V. 40 (3). P. 396–414.
8. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1992. 431 с.
9. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2008. 398 с.
10. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 572 с.

### References

1. Sobolev S.L. (1974) *Vvedeniye v teoriyu kubaturnykh formul* [Introduction to the theory of cubature formulas]. Moscow: Nauka.
2. Sobolev S.L. (1988) *Nekotoryye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow: Nauka.
3. Maz'ya V.G. (1985) *Prostranstva S.L. Soboleva* [S.L. Sobolev spaces]. Leningrad: LGU.
4. Agranovich M.S. (2013) *Sobolevskiyeh prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskiye zadachi v oblastiakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev spaces, their generalizations and elliptical problems in domains with a smooth and Lipschitz boundary]. Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education.
5. Shubin M.A. (2003) *Lektsii ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki* [Lectures on equations of mathematical physics]. Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education.
6. Shoinzhurov Ts.B. (1967) *Otsenka funktsionalov pogreshnosti kubaturnoy formuly v prostranstvakh s normoy, zavisyashchey ot mladshikh proizvodnykh* [Estimation of the error functionals of the cubature formula in spaces with a norm dependent on the lowest derivatives]. Dissertation. Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences.
7. Clarkson J.A. (1936) Uniformly convex spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*. 40(3). pp. 396–414.
8. Sobolev S.L. (1992) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka.
9. Vladimirov V.S., Zharinov V.V. (2008) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit.
10. Nikol'skii S.M. (1977) *Priblizheniye funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approximation of multivariate functions and embedding theorems]. Moscow: Nauka.
11. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. (2004) *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of function theory and functional analysis]. Moscow: Fizmatlit.

### Сведения об авторе:

**Корытов Игорь Витальевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент отделения математики и математической физики Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: korytov@tpu.ru

***Information about the author:***

**Korytov Igor V.** (Associate Professor, Mathematics and Mathematical Physics Division, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: korytov@tpu.ru

*Статья поступила в редакцию 01.06.2024; принята к публикации 01.08.2025*

*The article was submitted 01.06.2024; accepted for publication 01.08.2025*

## МЕХАНИКА

## MECHANICS

Научная статья

УДК 004.942:623.526.4

doi: 10.17223/19988621/96/4

## Валидация квазиодномерной модели продольно-поперечных колебаний ствола при выстреле

Даниил Анатольевич Клюкин<sup>1</sup>, Вадим Гарайханович Суфиянов<sup>2</sup>,  
Елена Александровна Федорова<sup>3</sup>

*<sup>1, 2, 3</sup> Ижевский государственный технический университет  
имени М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия*

*<sup>1</sup> anatoliikljukin@mail.ru*

*<sup>2</sup> vsufiy@mail.ru*

*<sup>3</sup> iso@istu.ru*

**Аннотация.** Представлены результаты сравнения результатов натуральных экспериментов и математического моделирования продольно-поперечных колебаний ствола при выстреле в квазиодномерной постановке. Валидация модели колебаний ствола осуществлялась по данным отстрелов винтовочных патронов на баллистическом стволе. Колебания ствола фиксировались с помощью высокоскоростной камеры в высоком разрешении и обрабатывались с помощью специализированного программного обеспечения. Результаты валидации показали, что компьютерная модель достаточно точно описывает колебания ствола в процессе выстрела, позволяет оценивать амплитуду и динамику колебаний.

**Ключевые слова:** продольно-поперечные колебания ствола при выстреле, валидация математической модели, баллистический ствол

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках программы развития научных и научно-педагогических кадров ИжГТУ имени М.Т. Калашникова (НИР, КДА-23, приказ ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова» от 27.12.2023 № 1566).

**Для цитирования:** Клюкин Д.А., Суфиянов В.Г., Федорова Е.А. Валидация квазиодномерной модели продольно-поперечных колебаний ствола при выстреле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 42–52. doi: 10.17223/19988621/96/4

Original article

## Validation of a quasi-one-dimensional model of longitudinal and transverse vibrations of the barrel on firing

Daniil A. Klyukin<sup>1</sup>, Vadim G. Sufiyarov<sup>2</sup>, Elena A. Fyodorova<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> *Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation*

<sup>1</sup> *anatoliikljukin@mail.ru*

<sup>2</sup> *vsufiy@mail.ru*

<sup>3</sup> *iso@istu.ru*

**Abstract.** This paper presents a comparison of the results of field experiments and mathematical modeling of longitudinal and transverse vibrations of the barrel on firing in a quasi-one-dimensional formulation. The validation of the barrel vibration model is carried out according to the data of the rifle cartridges fired from a ballistic barrel. The vibrations of the barrel are detected using a high-speed camera at high resolution and processed with a specific software. The validation shows that the computer model accurately describes the vibrations of the barrel during firing and allows estimating the amplitude and dynamics of the vibrations.

**Keywords:** longitudinal and transverse vibrations of the barrel on firing, validation of the mathematical model, ballistic barrel

**Acknowledgments:** This research was financially supported by the Program for the development of scientific and scientific-pedagogical personnel of the M.T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University.

**For citation:** Klyukin, D.A., Sufiyarov, V.G., Fyodorova, E.A. (2025) Validation of a quasi-one-dimensional model of longitudinal and transverse vibrations of the barrel on firing. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 42–52. doi: 10.17223/19988621/96/4

### Введение

При проектировании военной техники широко применяется математическое моделирование физических процессов, протекающих в разрабатываемых изделиях и оказывающих существенное влияние на их тактико-технические характеристики [1]. Важной характеристикой автоматических пушек является точность, и кучность стрельбы и колебания ствола в процессе стрельбы очередями играют весьма значительную роль.

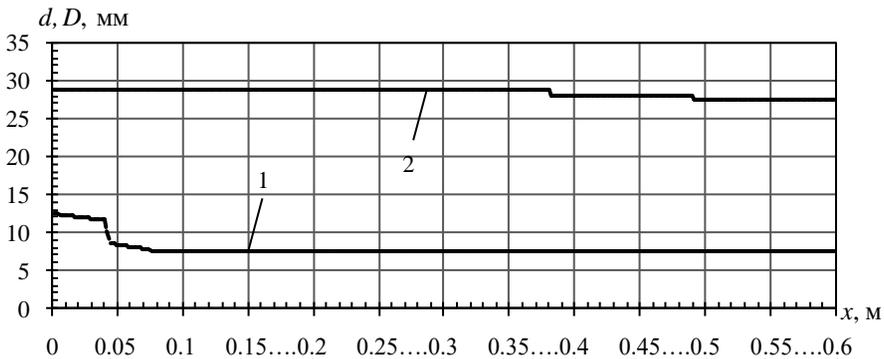
В данной статье рассматривается вопрос об адекватности квазиодномерной модели напряженно-деформированного состояния ствола [2] для исследования его колебаний. Точность и достоверность результатов моделирования имеют критическое значение для эффективной разработки новых орудий, улучшения их характеристик и обеспечения надежности эксплуатации [3]. Одним из методов анализа и оптимизации работы стволов является проведение компьютерного моделирования колебаний ствола во время выстрела [3].

Верификация и валидация компьютерных моделей стали неотъемлемой частью исследований в области вычислительной механики [4, 5], они позволяют убедиться в точности и достоверности математических моделей, используемых для анализа различных физических процессов [6]. Мы рассмотрим процесс валидации квазиодномерной компьютерной модели продольно-поперечных колебаний ствола при выстреле. Валидация реализованной компьютерной модели на основе сравнения с экспериментальными данными позволяет оценить ее достоверность и возможность использования для моделирования и анализа колебаний ствола в процессе выстрела и стрельбы очередями. В данном контексте верификация и валидация компьютерной модели имеют ключевое значение для подтверждения ее соответствия исследуемым физическим процессам.

Цель исследования состоит в сравнении результатов моделирования колебаний баллистического ствола с данными, полученными в эксперименте. В ходе исследования проведена валидация компьютерной квазиодномерной модели продольно-поперечных колебаний ствола на основе сравнения результатов моделирования с экспериментальными данными.

### Условия эксперимента

При проведении эксперимента был использован баллистический ствол калибра 7.62 мм, устанавливаемый в универсальный баллистический затвор UZ-2002 [6]. Ствол состоит из цилиндрических участков постоянного внешнего диаметра, геометрия ствола представлена на рис. 1.

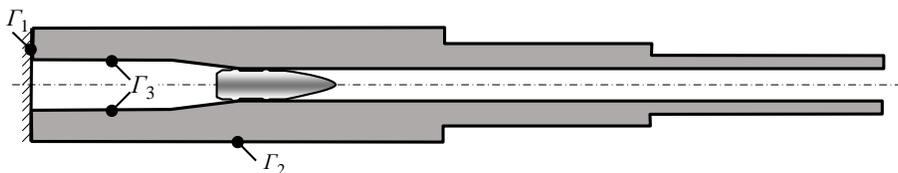


**Рис. 1.** Геометрия баллистического ствола: 1 – внутренний диаметр; 2 – внешний диаметр  
**Fig. 1.** Geometry of a ballistic barrel: (1) inner and (2) outer diameters

Ствол закреплялся в казенной части в универсальном баллистическом затворе, схема закрепления ствола представлена на рис. 2.

Стрельба проводилась винтовочными патронами 7.62 × 54 R, которые являются одними из самых старых патронов, все еще активно используемых во многих странах в различных винтовках и пулеметах [7].

Давление в стволе измерялось с помощью пьезодатчика давления, обладающего высокой точностью измерений, быстрым откликом на изменения давления, широким диапазоном рабочих температур, надежностью и долговечностью [8]. Пьезодатчик давления располагался на расстоянии 580 мм от дульного среза. Баллистическая установка в сборе представлена на рис. 3.



**Рис. 2.** Схема закрепления баллистического ствола  
**Fig. 2.** Schematic diagram of the barrel fixing



**Рис. 3.** Баллистическая установка  
**Fig. 3.** Ballistic installation

Фиксация колебаний ствола проводилась с помощью высокоскоростной камеры Olympus i-speed 3 с частотой съемки 10 000 кадров в секунду в разрешении  $1\,280 \times 1\,024$  пикселей [9], это позволило точно отследить динамику движения ствола и избежать засветов изображения при выстреле. Для обеспечения хорошей освещенности во время съемки стенд, на котором располагался баллистический ствол, освещался прожектором Digital pro 1200x (рис. 4).



**Рис. 4.** Высокоскоростная камера, прожектор и результаты фиксации положения ствола на экране  
**Fig. 4.** High-speed camera, searchlight, and fixed position of the barrel on the screen

Использование представленного на рис. 4 экспериментального оборудования позволило получить качественную видеозапись колебаний ствола.

### Результаты эксперимента

Ниже представлены экспериментальные результаты по отстрелу трех винтовочных патронов на баллистическом стволе. Полученные данные были проанализированы с использованием специализированного программного обеспечения для определения кривых колебаний дульного среза и давления в камере. Результаты измерения давления для трех выстрелов представлены на рис. 5.

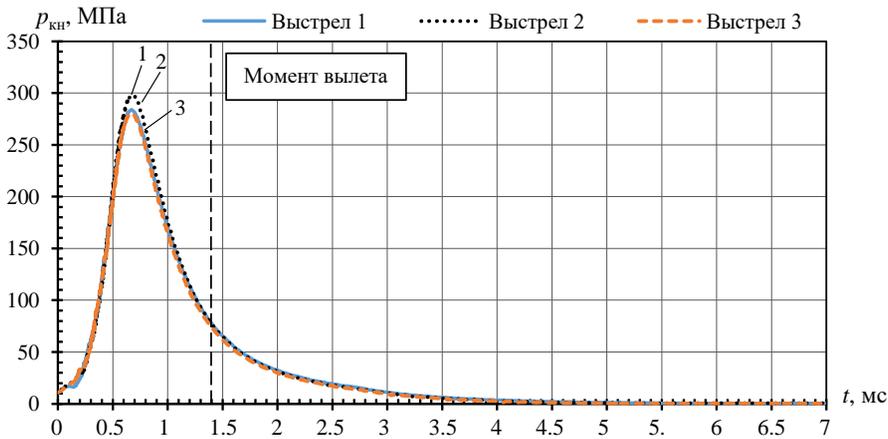


Рис. 5. Экспериментальные данные давления в камере баллистического ствола:  
1 – выстрел 1; 2 – выстрел 2; 3 – выстрел 3

Fig. 5. Experimental pressure in the chamber of the ballistic barrel:  
1, Shot 1; 2, Shot 2; and 3, Shot 3

Из рис. 5 видно, что экспериментальные кривые давления хорошо повторяют друг друга, максимальное давление составило 280, 283 и 298 МПа для 1-го, 2-го и 3-го выстрелов соответственно. Полученные экспериментальные кривые давления использовались в качестве исходных данных в квазидномерной модели колебаний ствола.

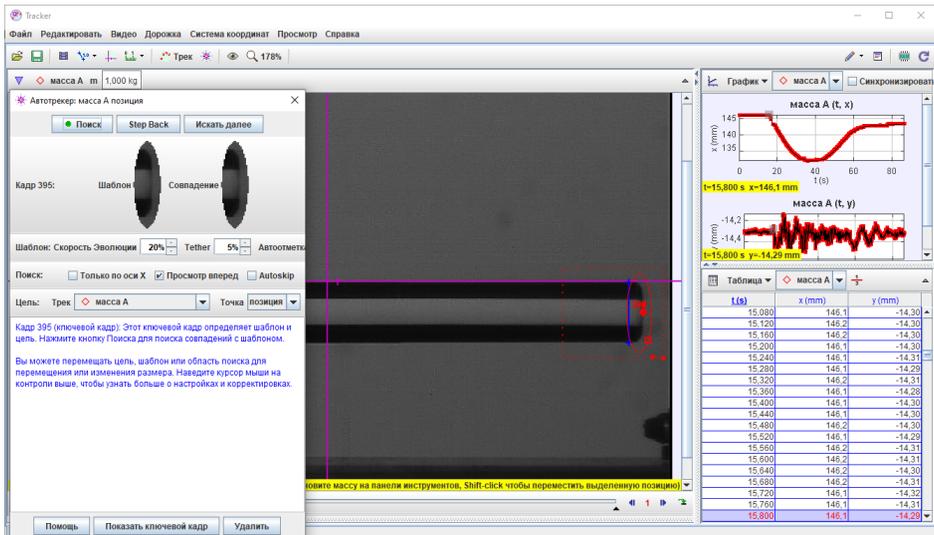


Рис. 6. Определение колебаний дульного среза баллистического ствола по видео в программе Tracker

Fig. 6. Detection of muzzle vibrations of the ballistic barrel by video in the Tracker program

Обработка видео колебаний дульного среза ствола проводилась в специализированном программном обеспечении Tracker [10], которое позволяет отслеживать

перемещения исследуемого объекта с помощью технологии машинного зрения. Пример результатов обработки видео представлен на рис. 6.

Кривые колебаний дульного среза были получены для всех трех выстрелов, и проведена их обработка: определено время выстрела, графики были приведены к одному моменту времени, проведены сглаживание данных с помощью скользящего окна по 11 точкам и совмещение графиков по осям (рис. 7, 8). Погрешность определения координат составила не более 0.01 мм.

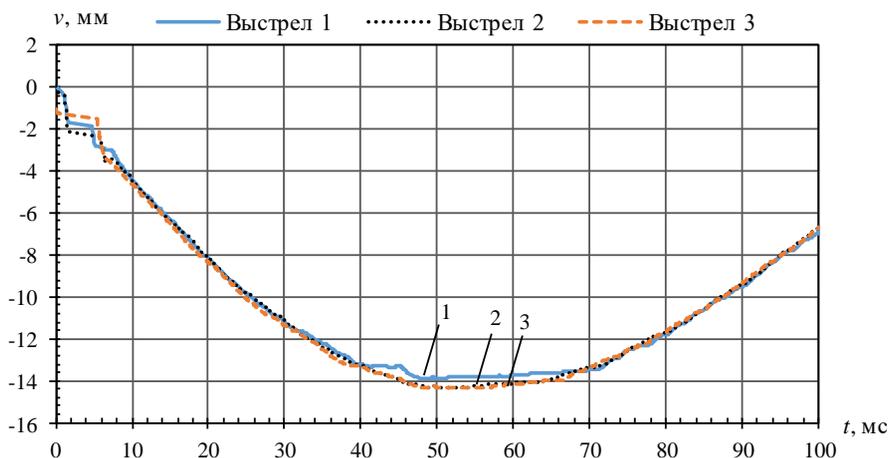


Рис. 7. Продольные колебания дульного среза баллистического ствола:

1 – выстрел 1; 2 – выстрел 2; 3 – выстрел 3

Fig. 7. Longitudinal vibrations of the muzzle of the ballistic barrel:

1, Shot 1; 2, Shot 2; and 3, Shot 3

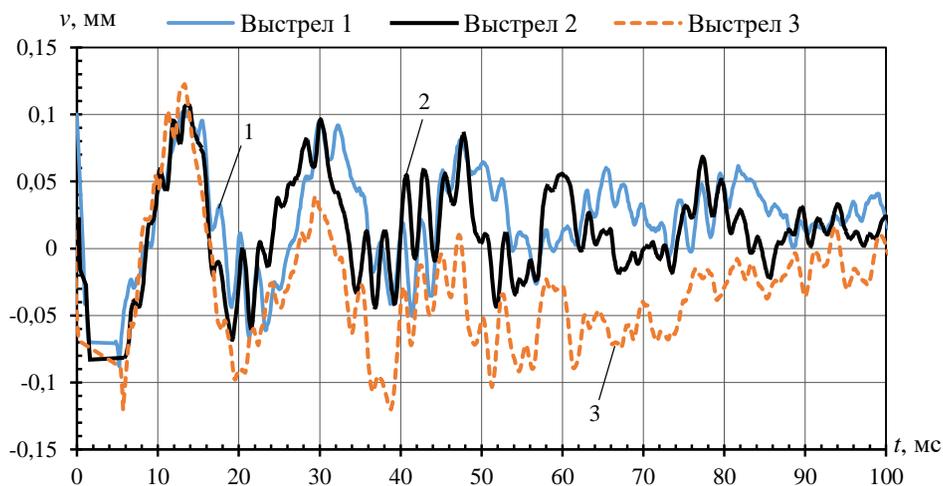


Рис. 8. Вертикальные колебания дульного среза баллистического ствола

Fig. 8. Vertical vibrations of the muzzle of the ballistic barrel

Из рис. 7 видно, что за 50 мс баллистический ствол откатывается при выстреле на 14 мм и далее возвращается к исходному положению.

На рис. 8 показано, что экспериментальные кривые динамики поперечных колебаний ствола в вертикальной плоскости достаточно хорошо повторяют друг друга, при этом амплитуды колебаний, равные 0.25 мм, также совпадают.

### Сравнение экспериментальных данных с результатами моделирования

Рассмотрим квазиодномерную математическую модель колебаний ствола [2, 11]. Уравнение баланса сил, действующих в продольном направлении по оси  $Ox$ , записывается в виде:

$$\rho F \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} \right) + = -\rho F g \sin \varphi - q_1 + \frac{\partial}{\partial x} (F \sigma^{xx}) - p_1 \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (1)$$

где  $u(x, t)$  – величина продольных колебаний ствола;  $\rho$  – плотность материала ствола;  $k$  – коэффициент демпфирования колебаний;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $\varphi$  – угол возвышения ствола;  $q_1 = q_1(x, t)$  – распределенные внешние силы, действующие в продольном направлении;  $p_1 = p_1(x, t)$  – распределение избыточного давления внутри ствола.

Уравнение поперечных колебаний ствола в вертикальной плоскости  $Oxy$  имеет вид:

$$\rho F \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + k \frac{\partial v}{\partial t} \right) = -\rho F g \cos \varphi - q_2 + (F \sigma^{xx} + p_1 S) \frac{\partial^2 (v + v_{00})}{\partial x^2} + \\ + v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) y df \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \alpha E \int_F T(x, r, t) y df \right), \quad (2)$$

где  $v = v(x, t)$  – величина поперечных колебаний в вертикальной плоскости;  $v_0 = v_0(x)$  – величина начального прогиба в вертикальной плоскости;  $q_2 = q_2(x, t)$  – распределенные внешние силы, действующие по оси  $Oy$ ;  $v_{00} = v_{00}(x)$  – технологическое смещение центра канала ствола относительно оси  $Oy$ ;  $J_z = J_z(x)$  – момент инерции сечения относительно оси  $Oz$ .

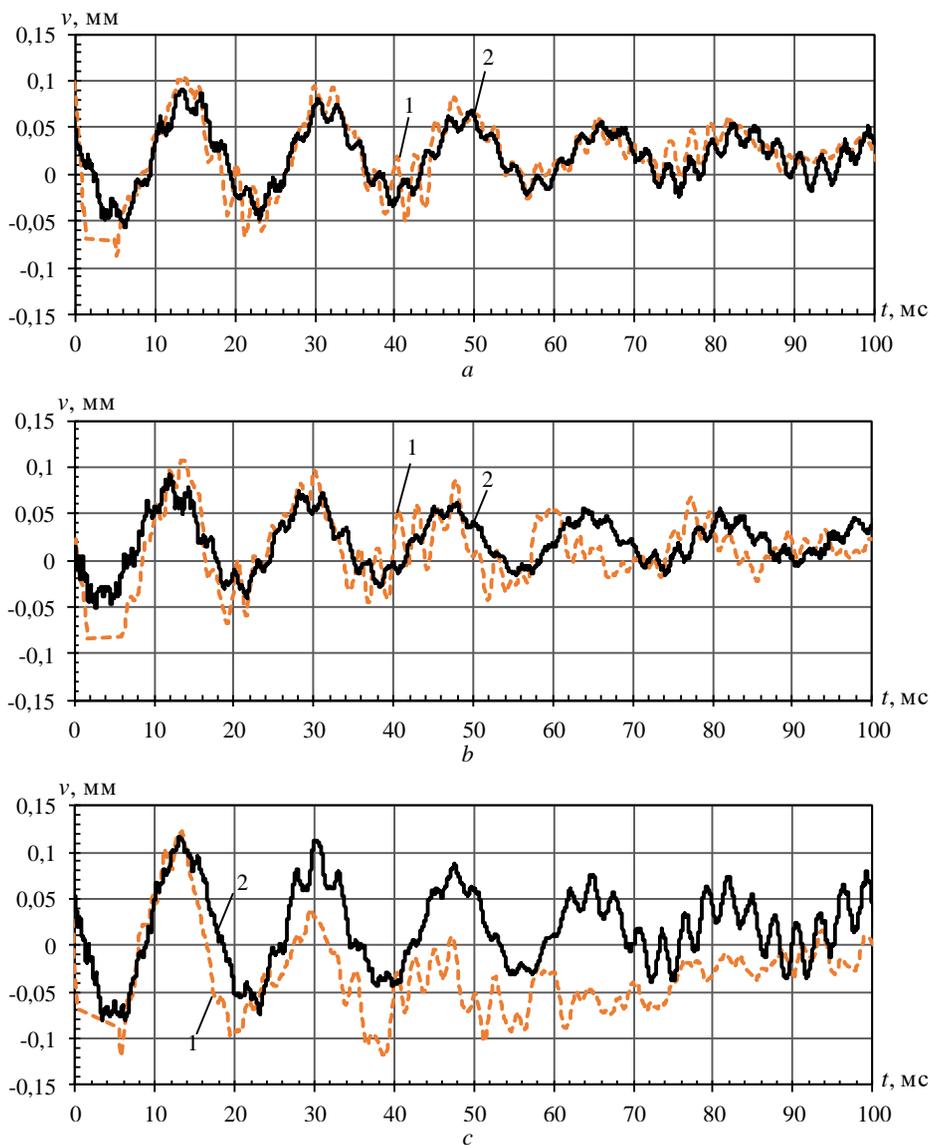
Добавим в модель в качестве граничных условий на казенном срезе  $\Gamma_1$  учет движения ствола при откате:

$$u(0, t) = u_0(t) \quad (3)$$

где  $u(x, t)$  – величина продольных колебаний ствола;  $u_0(t)$  – движение ствола при откате.

Баллистический ствол сделан из высокопрочной стали, характеристики которой были приняты равными: плотность  $\rho = 7\,800 \text{ кг/м}^3$ , модуль Юнга  $E = 200 \text{ ГПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ , коэффициент демпфирования  $k = 25 \text{ с}^{-1}$ , масса ствола 4.6 кг.

Распределение давления внутри ствола определялось на основе экспериментальных данных, расчет движения снаряда проводился на основе решения задачи внутренней баллистики в термодинамической постановке [12], давление внутри ствола в период последействия определялось по модели [13]. Моделирование осуществлялось в программе [14]. Результаты сравнения рассчитанных колебаний ствола на дульном срезе с экспериментальными данными представлены на рис. 9.



**Рис. 9.** Сравнение результата расчета вертикальных колебаний ствола с экспериментальными данными: 1 – эксперимент; 2 – расчетные значения; а – выстрел 1; б – выстрел 2; с – выстрел 3

**Fig. 9.** Comparison of the calculated vertical vibrations of the barrel with the experimental data: 1, experiment and 2, calculation; (a) Shot 1; (b) Shot 2; and (c) Shot 3

Результаты сравнения экспериментальных и модельных колебаний ствола показывают, что модель позволяет достаточно точно описать поведение ствола в процессе выстрела и оценить амплитуду и период колебаний дульного среза. Полученные результаты показывают, что квазиодномерная модель адекватно описывает динамику колебаний ствола в процессе выстрела, при этом квазиодно-

мерная математическая модель требует меньших затрат временных ресурсов по сравнению с трехмерным моделированием.

### Заключение

В работе представлены результаты валидации компьютерной квазиодномерной модели упругих продольно-поперечных колебаний ствола на основе сравнения результатов моделирования с экспериментальными данными, полученными в результате отстрелов трех винтовочных патронов на баллистическом стволе, установленном в универсальный баллистический затвор.

Моделирование продольно-поперечных колебаний ствола осуществлялось с использованием экспериментальных данных по динамике давления, которая фиксировалась с помощью пьезодатчиков давления, и динамике отката ствола, которая определялась на основе обработки данных видеосъемки на специализированной высокоскоростной камере в высоком разрешении. Поперечные колебания дульного среза ствола также были получены на основе обработки данных видеосъемки высокоскоростной камерой с использованием специального программного обеспечения.

В ходе эксперимента было проведено три выстрела винтовочным патроном из баллистического ствола. Сравнение графиков модельных и экспериментальных колебаний дульного среза при выстреле показало, что результаты квазиодномерного моделирования колебаний ствола качественно совпадают, при этом амплитуды и период колебаний практически совпадают. Таким образом, валидация квазиодномерной модели показала, что она позволяет достаточно точно описывать перемещения ствола при выстреле и дает возможность оценить амплитуду и динамику его колебаний.

### Список источников

1. Новиков И.А., Мешков С.А., Мелехин А.А. Адекватность алгоритмов пакета ANSYS и спектрального анализа измеренных свободных колебаний ствольного узла орудия // Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук. 2023. № 1 (126). С. 96–104.
2. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.
3. O'Neil D. The Optimization of Rifle Barrel Harmonics // Graduate College Dissertations and Theses. 2022. 1608. 72 p.
4. American Society of Mechanical Engineers. Standard for Verification and validation in computational solid mechanics. ASME V&V 10-2019. 2020. 44 p.
5. Сальников А.В., Французов М.С., Виноградов К.А., Пятунин К.Р., Никулин А.С. Верификация и валидация компьютерных моделей // Известия вузов. Машиностроение. 2022. № 9 (750). С. 100–115. doi: 10.18698/0536-1044-2022-9-100-115
6. UZ-2002 Universal ballistic breech // Prototypa. URL: <http://www.prototypa.com/uz-2002-universal-ballistic-breech-1> (Дата обращения 13.07.2024).
7. 7,62-мм винтовочно-пулеметные патроны 7,62 × 54 // Большая Российская энциклопедия. URL: <https://bigenc.ru/c/7-62-mm-vintovochno-pulemiotnye-patrony-7-62x54-eeeeaf1> (дата обращения: 13.07.2024).
8. Шарпов В.М., Мусиенко М.П., Шарпова Е.В. Пьезоэлектрические датчики. М.: Техносфера, 2006. 628 с. (Мир электроники).
9. i-SPEED 3 series high-speed cameras // iX Cameras. URL: <https://www.ix-cameras.com/3-Series/> (accessed: 13.07.2024).

10. Tracker. Tracker Video Analysis and Modeling Tool. URL: <https://physlets.org/tracker/> (accessed: 13.07.2024).
11. Клюкин Д.А., Суфиянов В.Г., Русяк И.Г. Верификация одномерной компьютерной модели продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия при выстреле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 79–93. doi: 10.17223/19988621/86/6
12. Русяк И.Г., Тенев В.А. Моделирование баллистики артиллерийского выстрела с учетом пространственного распределения параметров и противодействия // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12, № 5. С. 1123–1147. doi: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147.
13. Липанов А.М., Русяк И.Г., Суфиянов В.Г. Исследование влияния колебаний ствола на угол вылета снаряда при выстреле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 80–94. doi: 10.17223/19988621/68/8
14. Суфиянов В.Г., Клюкин Д.А. Разработка программы для расчета продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия // I Липановские научные чтения: материалы регион. науч. конф., Ижевск, 15–16 июня 2021 г. Ижевск: Ижевск. гос. техн. ун-т им. М.Т. Калашникова, 2021. С. 106–111.

### References

1. Novikov I.A., Meshkov S.A., Melekhin A.A. (2023) Adekvatnost' algoritmov paketa ANSYS i spektral'nogo analiza izmerennykh svobodnykh kolebaniy stvol'nogo uzla orudiya [Adequacy of the algorithms of the ANSYS package and spectral analysis of the measured free vibrations of the gun barrel assembly]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii raketnykh i artilleriyskikh nauk – Proceedings of the Russian Academy of Missile and Artillery Sciences*. 1(126). pp. 96–104.
2. Homenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematical modeling of intra-ballistic processes in stem systems]. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN.
3. O'Neil D. (2022) *The Optimization of Rifle Barrel Harmonics*. Graduate College Dissertations and Theses. 1608.
4. ASME V&V 10-2019 (2020) *Standard for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics*.
5. Sal'nikov A.V., Frantsuzov M.S., Vinogradov K.A., Pyatunin K.R., Nikulin A.S. (2022) Verifikatsiya i validatsiya komp'yuternykh modeley [Digital simulation verification and validation]. *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie – BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 9(750). pp. 100–115. doi: 10.18698/0536-1044-2022-9-100-115
6. Prototypa. UZ-2002 Universal ballistic breech. [Electronic resource]. URL: <http://www.prototypa.com/uz-2002-universal-ballistic-breech-1> (Date of access: 13.07.2024).
7. Bol'shaya Rossiyskaya entsiklopediya. 7,62-mm vintovochno-pulemyotnye patrony 7,62×54. [Electronic resource]. URL: <https://bigenc.ru/c/7-62-mm-vintovochno-pulemyotnye-patrony-7-62x54-eeeaf1> (Date of access: 13.07.2024).
8. Sharapov V.M., Musienko M.P., Sharapova E.V. (2006) *P'ezoelektricheskie datchiki* [Piezo-electric sensors]. Moscow: Tekhnosfera.
9. iX Cameras. i-SPEED 3 series high-speed cameras. [Electronic resource]. URL: <https://www.ix-cameras.com/3-Series/> (Date of access: 13.07.2024).
10. Tracker. Tracker Video Analysis and Modeling Tool. [Electronic resource]. URL: <https://physlets.org/tracker/> (Date of access: 13.07.2024).
11. Klyukin D.A., Sufiyonov V.G., Ruyak I.G. (2023) Verifikatsiya odnomernoy komp'yuternoy modeli prodol'no-poperechnykh kolebaniy stvola artilleriyskogo orudiya pri vystrele [Verification of a one-dimensional computer model of longitudinal-transverse vibrations of an artillery gun barrel on firing]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 79–93. doi: 10.17223/19988621/86/6

12. Ruyak I.G., Tenenev V.A. (2020) Modelirovanie ballistiki artilleriyskogo vystrela s uchetom prostranstvennogo raspredeleniya parametrov i protivodavleniya [Modeling the ballistics of an artillery shot taking into account the spatial distribution of parameters and backpressure]. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie – Computer Research and Modeling*. 12(5). pp. 1123–1147. doi: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147
13. Lipanov A.M., Ruyak I.G., Sufiyarov V.G. (2020) Issledovanie vliyaniya kolebaniy stvola na ugol vyleta snaryada pri vystrele [Investigation of the effect of barrel vibrations on the angle of projectile departure when fired]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. pp. 80–94. doi: 10.17223/19988621/68/8
14. Sufiyarov V.G., Klyukin D.A. (2021) Razrabotka programmy dlya rascheta prodol'no-poperechnykh kolebaniy stvola artilleriyskogo orudiya [Development of a program for calculating longitudinal and transverse vibrations of the barrel of an artillery piece]. *I Lipanovskie nauchnye chteniya: Materialy regional'noy nauchnoy konferentsii – The I Lipanovsky Scientific Readings: Proceedings of the Regional Scientific Conference*. pp. 106–111.

**Сведения об авторах:**

**Клюкин Даниил Анатольевич** – аспирант, инженер-программист 1-й категории, ассистент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова (Ижевск, Россия). E-mail: anatoliikljukin@mail.ru

**Суфьянов Вадим Гарайханович** – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова (Ижевск, Россия). E-mail: vsufiy@mail.ru

**Федорова Елена Александровна** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Стрелковое оружие», заведующая лабораторией «Разработка и производство стрелкового оружия» Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова (Ижевск, Россия). E-mail: iso@istu.ru

**Information about the authors:**

**Klyukin Daniil A.** (1st Category Software Engineer, Assistant, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: anatoliikljukin@mail.ru

**Sufiyarov Vadim G.** (Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: vsufiy@mail.ru

**Fedorova Elena A.** (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of Laboratory, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: iso@istu.ru

*Статья поступила в редакцию 01.08.2024; принята к публикации 01.08.2025*

*The article was submitted 01.08.2024; accepted for publication 01.08.2025*

Научная статья

УДК 51-73

doi: 10.17223/19988621/96/5

## Разработка математического критерия для определения конфигурации бимодального спектроскопического прибора, обеспечивающей наиболее эффективную диагностику немеланомного рака кожи в зависимости от клинических параметров образцов

Валентин Владиславович Куприянов<sup>1</sup>, Юрий Владимирович Кистенёв<sup>2</sup>,  
Наталья Андреевна Кривова<sup>3</sup>, Григорий Ефимович Дунаевский<sup>4</sup>

*<sup>1, 2, 3, 4</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия*

*<sup>1</sup> valentin.kupriyanov@univ-lorraine.fr*

*<sup>2</sup> yuk@iao.ru*

*<sup>3</sup> nakri@res.tsu.ru*

*<sup>4</sup> proecs@mail.tsu.ru*

**Аннотация.** Исследование посвящено разработке и апробации математического критерия определения конфигурации бимодального спектроскопического прибора, обеспечивающей наиболее эффективную диагностику немеланомного рака кожи (НМРК) в зависимости от возраста и пола пациентов, фототипа их кожи и анатомической области локализации новообразования. Предложенный математический критерий разделимости выборок спектров (КРВС) был протестирован на спектрах диффузного отражения и автофлуоресценции с различными длинами волн возбуждения, измеренными на коже людей с НМРК. Применение КРВС позволило определить для каждой протестированной комбинации клинических параметров соответствующие каналы данных, для которых наблюдаются значимые различия спектров НМРК и здоровой кожи.

**Ключевые слова:** немеланомный рак кожи, критерий разделимости спектров, спектроскопия, диагностика

**Благодарности:** Исследование выполнено при поддержке проекта № 075-15-2024-557 «Развитие фундаментальных основ новых технологий обеспечения безопасности жизнедеятельности на основе интеграции мультимодальной радиоволновой и оптической дистанционной сенсорики и искусственного интеллекта», выполненного при поддержке Минобрнауки России.

**Для цитирования:** Куприянов В.В., Кистенёв Ю.В., Кривова Н.А., Дунаевский Г.Е. Разработка математического критерия для определения конфигурации бимодального спектроскопического прибора, обеспечивающей наиболее эффективную диагностику немеланомного рака кожи в зависимости от клинических параметров образцов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 53–65. doi: 10.17223/19988621/96/5

## Development of a mathematical criterion for determining the configuration of a bimodal spectroscopic device providing the most effective diagnosis of non-melanoma skin cancer based on the clinical parameters of samples

Valentin V. Kupriyanov<sup>1</sup>, Yuriy V. Kistenyov<sup>2</sup>,  
Nataliya A. Krivova<sup>3</sup>, Grigoriy E. Dunaevskiy<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> valentin.kupriyanov@univ-lorraine.fr

<sup>2</sup> yuk@iao.ru

<sup>3</sup> nakri@res.tsu.ru

<sup>4</sup> proecs@mail.tsu.ru

**Abstract.** This study is devoted to the development and validation of a mathematical criterion for determining the configuration of the bimodal (autofluorescence and diffuse reflectance spectroscopy) spectroscopic device (SpectroLive), which provides the most effective diagnosis of non-melanoma skin cancer (NMSC) depending on the age and gender of patients, their skin phototype, and anatomical localization of the lesion. Pre-processing of the diffuse reflectance and autofluorescence spectra with different excitation wavelengths measured on the skin of people with NMSC includes noise removal, smoothing, and outliers' removal stages. The suggested mathematical criterion for spectra separability is based on the curve similarity criterion and is used for each unique combination of the clinical parameters of the samples. The application of such criterion allows identifying the data channels for each tested combination of the clinical parameters with the most significant differences between the spectra of NMSC and healthy skin. The results of this study can be used in a clinical procedure for diagnosing NMSC using the SpectroLive device. The developed spectra separability criterion is applicable for assessing the separability of groups of spectra and other data of the similar structure in clinical and other studies.

**Keywords:** non-melanoma skin cancer, spectra separability criterion, spectroscopy, diagnosis

**Acknowledgments:** This study was funded by the project No. 075-15-2024-557 “Development of Fundamentals of New Technologies for Life Safety on the Basis of Integration of Multimodal Radio Wave and Optical Remote Sensing, and Artificial Intelligence” supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation.

**For citation:** Kupriyanov, V.V., Kistenyov, Yu.V., Krivova, N.A., Dunaevskiy, G.E. (2025) Development of a mathematical criterion for determining the configuration of a bimodal spectroscopic device providing the most effective diagnosis of non-melanoma skin cancer based on the clinical parameters of samples. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 53–65. doi: 10.17223/19988621/96/5

## Введение

В 2022 г. немеланомный рак кожи (НМРК) стал пятым по распространенности типом рака в мире [1]. Стандартизованный по возрасту уровень заболеваемости НМРК вырос с 54.08/100 000 в 1990 г. до 79.10/100 000 в 2019 г. (+1.78% в год), а количество зарегистрированных случаев увеличивается с каждым годом [2–4], что делает задачу своевременной и корректной диагностики НМРК одной из значимых задач медицины.

Стандартная процедура диагностики подозрительных поражений кожи включает в себя хирургическую биопсию и гистологический анализ удаленных образцов тканей [5, 6]. К недостаткам данной процедуры относятся ее инвазивность, общая длительность, стоимость для системы здравоохранения, невозможность точно оценить границы новообразования, а также низкая диагностическая точность. Все вышеперечисленные факторы обуславливают необходимость разработки новых неинвазивных методик диагностики НМРК.

Использование оптических методов для исследования кожи позволяет получить диагностическую информацию в течение нескольких минут по сравнению с несколькими днями для стандартной диагностической процедуры. При этом оптические методы могут быть использованы в режиме *in vivo* [5, 7, 8]. Особенность оптических методов заключается в их чувствительности к изменениям оптических свойств кожи на тканевом, клеточном и субклеточном уровнях, которые напрямую связаны с патологическими морфологическими и метаболическими изменениями при канцерогенезе, что делает оптические методы перспективным вспомогательным средством диагностики в режиме реального времени для клинической практики.

За последние три десятилетия было проведено множество исследований по тематике использования оптических методов для диагностики рака кожи человека *in vivo* [7, 9, 10]. Особый интерес представляет применение так называемых мультимодальных методов, которые предполагают одновременное использование нескольких экспериментальных приемов в одном исследовании [11, 12], за счет чего становится возможным получить больше информации об изменениях свойств и структуры исследуемых образцов. Наиболее распространенной комбинацией методов, объединяемых в общий мультимодальный метод, являются спектроскопия диффузного отражения и спектроскопия автофлуоресценции [13–15]. Также данные методы хорошо сочетаются с Рамановской спектроскопией [12, 16, 17].

Важным аспектом при разработке методик диагностики НМРК на основе спектроскопических методов является учет влияния индивидуальных клинических параметров пациентов и образцов (пол и возраст пациентов, фототип их кожи, анатомическая область расположения исследуемого образца кожи и др.), так как они оказывают значительное влияние на оптические свойства исследуемых тканей [18, 19], что, в свою очередь, влияет на эффективность используемых экспериментальных методов. Подбор экспериментального метода исследования образцов в зависимости от его особенностей, для которого эффективность диагностики НМРК будет наибольшей, способен значительно улучшить эффективность диагностики.

Задачу определения экспериментального спектроскопического метода, для которого эффективность диагностики НМРК будет наибольшей, можно свести к задаче оценки статистической значимости различий между выборками спектров НМРК и здоровой кожи для каждого метода. Однако во многих клинических

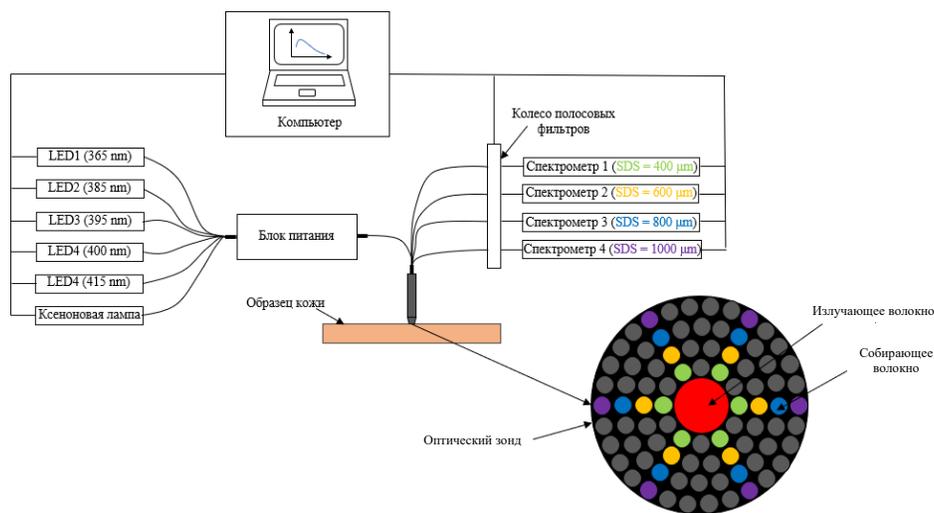
исследованиях в области диагностики НМРК при помощи спектроскопических методов общий размер выборки слишком мал, вследствие чего использование статистических критериев для оценки статистической значимости различий между подвыборками не имеет смысла. Данный фактор обуславливает необходимость разработки альтернативных математических подходов для оценки делимости двух выборок спектров малого размера.

Цель данного исследования – разработка и апробация математических критериев для определения каналов данных бимодального спектроскопического прибора, для которых спектры немеланомного рака кожи и здоровой кожи, соответствующие различным комбинациям клинических параметров, содержат наиболее значимые различия.

## 1. Материалы и методы

### 1.1. Описание бимодального спектроскопического прибора

Для регистрации спектров автофлуоресценции и диффузного отражения на коже людей с немеланомным раком кожи использовался прибор SpectroLive, схема которого представлена на рис. 1 [20].



**Рис. 1.** Схема прибора SpectroLive  
**Fig. 1.** Schematic design of the SpectroLive device

В состав прибора входит пять светодиодов в сочетании с системой полосовых фильтров, используемых для получения пика возбуждения флуоресценции: 365, 385, 395, 400 и 415 нм. Для получения спектров диффузного отражения в качестве источника света использовалась ксеноновая лампа производства Hamamatsu (Масси, Франция) с диапазоном излучения от 350 до 800 нм. Референсный спектр для получения спектров диффузного отражения регистрировался на спектральной мишени (SRS-99-010, Labsphere®, Poynnton, Великобритания) со спектрально плоским откликом в диапазоне длин волн. Оптический зонд прибора имел диаметр

измерительной области 3.5 мм и содержал одно центральное волокно диаметром 600 мкм для освещения поверхности образца и 4 группы по 6 волокон диаметром 200 мкм каждая, соответствовавшие четырем расстояниям между источниками и детектором: (SDS1-4) от 400 до 1 000 мкм между центрами светоизлучающих и собирающих волокон.

### 1.2. Описание исследуемого набора данных

Клиническое исследование было проведено пластическим хирургом из региональной больницы Метц-Тионвиль (Франция) и одобрено Национальным агентством по лекарственным средствам Франции (ANSM) и этическим комитетом (CPP Est III). В исследовании принял участие 131 пациент с одним или несколькими новообразованиями, предположительно являющимися немеланомным раком кожи. Общее количество поражений кожи составило 218. Более подробную информацию о клиническом исследовании можно найти в [21, 22].

Измерение каждой точки поверхности кожи повторялось три раза без перемещения зонда, чтобы обеспечить постоянные по позиции измерения с увеличенным соотношением сигнал / шум и уменьшенным влиянием случайных выбросов в результирующих спектрах. Примеры спектров автофлуоресценции и диффузного отражения, регистрируемых прибором SpectroLive, представлены на рис. 2.

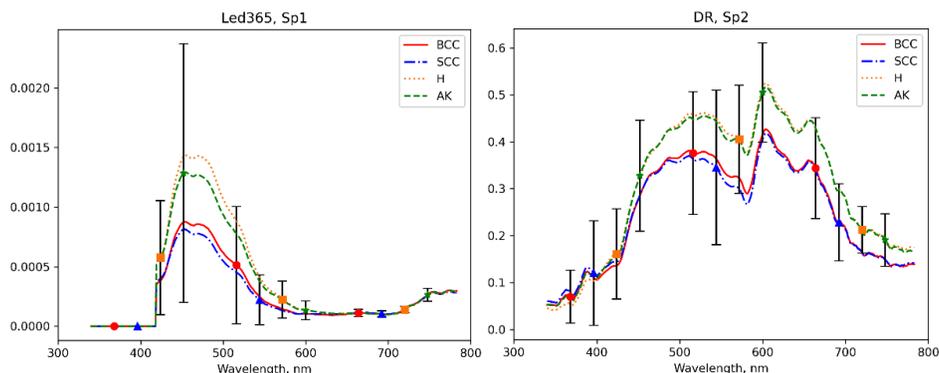


Рис. 2. Примеры средних спектров автофлуоресценции и диффузного отражения, регистрируемых прибором SpectroLive.

Fig. 2. Examples of the mean autofluorescence and diffuse reflectance spectra obtained using the SpectroLive device

На рисунке можно заметить, что диапазоны разброса для спектров каждого класса, отражающие внутриклассовую вариативность форм кривых интенсивности спектра, достаточно велики, что говорит о значительном влиянии клинических параметров на уровень внутриклассового разнообразия в каждом из представленных в оригинальном исследовании диагностических классов.

### 1.3. Предварительная обработка полученных спектров

Первым этапом предварительной обработки полученных спектров была очистка их от шума, генерируемого прибором, которая включала в себя вычитание

шума из спектров, удаление импульсных шумов при помощи медианного фильтра и сглаживание при помощи фильтра Савицкого–Голея. Регистрация шума проводилась с выключенными источниками излучения перед каждым измерением нового образца. Значения рабочих параметров методов представлены в табл. 1.

Таблица 1

**Перечень рабочих параметров методов для каждого этапа предварительной обработки спектров**

Метод обработки данных	Оптимизируемый параметр	Оптимальное значение параметра
Фильтрация и удаление шума		
Удаление шума	–	–
Медианный фильтр	Размер окна	3
Фильтр Савицкого–Голея	Размер окна фильтра	~ 5 нм
	Порядок полинома	4
Удаление выбросов на основе коэффициентов вариации для серии измерений	Пороговое значение коэффициента вариации, выше которого серия из трёх измерений рассматривалась как содержащая выбросы	0.08

Следующий этап – удаление выбросов в сериях из трех измерений на основе коэффициентов вариации для каждой возможной пары их трех спектров. Для расчета коэффициентов вариации, представляющих собой стандартные отклонения, нормированные на среднее значение величины, использовалось следующее соотношение:

$$CV = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n [S_j(\lambda_i) - \bar{S}(\lambda_i)]^2}{n \bar{S}(\lambda_i)}} \quad (1)$$

где  $S(\lambda)$  представляет собой спектр автофлуоресценции или диффузного отражения,  $\bar{S}(\lambda)$  соответствует усредненному спектру для трех измерений каждой точки на коже для соответствующего канала данных,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяют границы диапазона длин волн,  $N$  – количество точек в диапазоне длин волн  $[\lambda_1; \lambda_2]$ , а  $n$  – количество измерений одной и той же области образца.

Проверка на наличие выбросов для каждой серии из трех измерений для одного и того же участка кожи перед усреднением проводилась независимо для каждого канала данных и состояла из двух этапов. На первом этапе рассчитывался средний коэффициент вариации для серии из трех измерений; если его значение не превышало порогового, считалось, что серия измерений не содержит выбросов, и все три спектра использовались для последующего усреднения. В противоположном случае для каждой из возможных пар измеренных спектров рассчитывался отдельный коэффициент вариации. Основная идея такого подхода состояла в том, что если большая часть исследуемых спектров в серии измерений незначительно отличается друг от друга и существенно отличается от нескольких оставшихся, то коэффициенты вариации для соответствующих пар спектров должны быть меньше, чем коэффициенты вариации для других пар спектров. В то же время, если коэффициенты вариации, рассчитанные для всех пар спектров, превышали пороговое значение,

измерение считалось нестабильным и исключалось из последующего анализа для соответствующего канала данных. Пороговое значение, рассчитанное для всех пар спектров, определялось как компромисс между (i) выявлением и исключением нестабильных измерений или выбросов в них и (ii) сохранением достаточного количества спектров для дальнейшего анализа.

## 2. Результаты и обсуждение

### 2.1. Разработка критерия оценки делимости двух выборок спектров

В качестве основы математического критерия оценки делимости двух выборок спектров предлагалось использовать критерий близости кривых (КБК). В своем исходном виде представленный в [23] КБК используется для нахождения разницы между двумя кривыми и вычисляется по формуле

$$\text{КБК} = \frac{\sum_i |X_i - Y_i|}{\frac{1}{2} \cdot \sum_i |X_i + Y_i|} \quad (2)$$

где  $X_i$  и  $Y_i$  – значения ординаты для сравниваемых кривых. Таким образом, чем меньше значение КБК, тем больше схожесть двух кривых. Из уравнения также видно, что критерий может изменяться в пределах от 0, если кривые одинаковы, до 2, если одна из кривых лежит значительно выше другой.

Расчет КБК для всех пар спектров здоровой кожи и НМРК, соответствующих определенной комбинации клинических параметров, с последующим усреднением полученного результата дает возможность использовать данный критерий для оценки разницы между спектрами немеланомного рака кожи и здоровой кожи для конкретной комбинации клинических параметров, а значит, и для сопоставления всех комбинаций таких параметров между собой. Также было предложено убрать из знаменателя множитель, равный 1/2: в этом случае полученный критерий принимает значения от 0 до 1, что упрощает интерпретацию полученных результатов. Модифицированная формула расчета параметра критерия делимости выборок спектров (КРВС), представляющего собой среднее значение КБК для всех возможных пар спектров НМРК и здоровой кожи, соответствующих конкретной комбинации клинических параметров, имеет вид:

$$\overline{\text{КРВС}} = \frac{1}{N_H \cdot N_C} \cdot \sum_{j=1}^{N_H} \sum_{k=1}^{N_C} \frac{\sum_i |H_{j,i} - C_{k,i}|}{\sum_i |H_{j,i} + C_{k,i}|} \quad (3)$$

где  $H_{j,i}$  и  $C_{k,i}$  – значения ординаты спектров здоровой кожи и НМРК для исследуемой комбинации клинических параметров, а  $N_H$  и  $N_C$  – количество спектров здоровой кожи и немеланомного рака кожи для исследуемой комбинации клинических параметров соответственно.

При помощи КРВС можно оценить, насколько значительно различаются спектры двух выборок. Однако данный метод не учитывает возможный разброс значений ординат спектральных кривых внутри каждой из выборок, в связи с чем существует риск получения неоптимальных результатов. Вследствие этого сравнительный анализ различных комбинаций клинических параметров предлагалось осуществлять на основе не только максимального значения КРВС, но и соответствующих

значений коэффициента вариации данного параметра, представляющего собой отношение среднеквадратичного отклонение к среднему значению [24]:

$$CV = \frac{\sigma_{\text{КРВС}}}{\overline{\text{КРВС}}} \quad (4)$$

где  $\sigma_E$  представляет собой среднеквадратичное отклонение для коэффициента КРВС для какой-либо комбинации клинических параметров, а  $\overline{\text{КРВС}}$  – его соответствующее среднее значение.

Кроме того, вместо вычисления КРВС путем нахождения отношения разности кривых к сумме кривых по всему диапазону предлагается находить данное соотношение для наиболее информативных областей. Для спектров автофлуоресценции такими областями будут служить пики флуоресценции различных флуорофоров, а для спектров диффузного отражения – пики поглощения различных компонентов кожи. Информация о границах соответствующих областей интереса для используемых в работе модальностей представлена в табл. 2.

Таблица 2

**Информация о границах областей интереса для спектров автофлуоресценции и диффузного отражения**

Модальность	$\lambda_1$ , нм	$\lambda_2$ , нм	Тип пика	Компоненты кожи
AF	440	520	Флуоресценции	Коллаген, эластин, кератин
	530	600	Флуоресценция	Флавины
	635	690	Флуоресценции	Порфирины
DR	340	360	Поглощения	Коллаген, кератин
	390	450	Поглощения	Коллаген, флавины, порфирины
	560	600	Поглощения	Оксигемоглобин, дезоксигемоглобин

## 2.2. Апробация критерия оценки делимости двух выборок спектров

Ранжированные результаты расчета максимальных значений КРВС и соответствующих значений коэффициентов вариации для всех возможных комбинаций клинических параметров, а также соответствующие каналы данных представлены в табл. 3.

Минимальное значение КРВС среди всех вариантов комбинаций клинических параметров составило  $0.09 \pm 0.03$  (комбинация параметров № 20), что соответствует средней разнице в интенсивности между параметрами спектров НМРК и здоровой кожи в  $15 \pm 5\%$  относительно спектра с большей интенсивностью в каждой паре (во всех случаях это был спектр здоровой кожи). В свою очередь, наименее стабильные значения параметра КРВС относительно его среднего значения для анализируемой комбинации клинических параметров составили  $0.18 \pm 0.09$  (комбинация параметров № 18), что соответствует средней разнице в интенсивности спектров НМРК и здоровой кожи в  $31 \pm 14\%$  относительно спектра с большей интенсивностью в каждой паре. В обоих случаях разница в спектрах НМРК и здоровой кожи является достаточно значимой даже с учетом величины разброса, вследствие чего можно сделать вывод, что высокая эффективность дифференциации спектров НМРК и здоровой кожи может быть достигнута для любой комбинации клинических параметров, представленной в табл. 3, при использовании соответствующего канала данных.

Таблица 3

**Результаты расчета параметра КРВС и соответствующих коэффициентов вариации для всех возможных комбинаций клинических параметров**

№	Возраст	Фототип	Локализация	Пол	Источник	SDS	КРВС <sub>max</sub>	CV
1	80:90	2	Нога	М	Led400	SDS1 – 400 мкм	0.86 ± 0.09	0.10
2	80:90	2	Лоб	М	Led400	SDS1 – 400 мкм	0.82 ± 0.15	0.18
3	80:90	2	Кисть	М	Led365	SDS3 – 800 мкм	0.8 ± 0.02	0.03
4	70:80	2	Шея	М	Led365	SDS1 – 400 мкм	0.78 ± 0.09	0.12
5	80:90	2	Шея	М	Led400	SDS2 – 600 мкм	0.66 ± 0.1	0.15
6	80:90	2	Щека	М	Led385	SDS3 – 800 мкм	0.62 ± 0.17	0.27
7	70:80	1	Ухо	М	Led385	SDS3 – 800 мкм	0.52 ± 0.17	0.33
8	80:90	2	Макушка	М	Led365	SDS1 – 400 мкм	0.49 ± 0.06	0.12
9	70:80	1	Шея	F	Led385	SDS3 – 800 мкм	0.48 ± 0.17	0.35
10	70:80	2	Лоб	М	Led400	SDS2 – 600 мкм	0.47 ± 0.06	0.13
11	80:90	4	Ухо	М	Led385	SDS2 – 600 мкм	0.4 ± 0.12	0.30
12	70:80	2	Висок	М	Led415	SDS1 – 400 мкм	0.38 ± 0.06	0.16
13	80:90	1	Лоб	М	Led400	SDS4 – 1 000 мкм	0.38 ± 0.15	0.40
14	70:80	3	Нос	М	Led395	SDS3 – 800 мкм	0.33 ± 0.06	0.18
15	80:90	2	Рука	М	Led385	SDS2 – 600 мкм	0.31 ± 0.14	0.45
16	50:60	2	Плечи	М	Led365	SDS2 – 600 мкм	0.26 ± 0.06	0.23
17	80:90	2	Ухл	М	Led395	SDS2 – 600 мкм	0.21 ± 0.09	0.43
18	80:90	2	Висок	М	Led385	SDS1 – 400 мкм	0.18 ± 0.09	0.50
19	70:80	2	Лоб	F	Led395	SDS3 – 800 мкм	0.09 ± 0.02	0.22
20	60:70	2	Висок	М	Led365	SDS4 – 1 000 мкм	0.09 ± 0.03	0.33

Информация об источнике и детекторе излучения является крайне значимой, так как позволяет определить наиболее информативный канал данных для каждой конкретной комбинации клинических параметров. Данный подход является противоположным использованию слияния данных, зачастую применяемому в мульти-модальных исследованиях, так как в данном случае предлагается использовать лишь одну наиболее информативную модальность, игнорируя все остальные. Информация о наиболее информативном канале данных для каждой уникальной комбинации клинических параметров также может быть использована при планировании дальнейших клинических испытаний прибора SpectroLive или в других независимых исследованиях.

### Заключение

В настоящем исследовании был разработан и протестирован математический критерий для определения каналов данных бимодального спектроскопического прибора, для которых спектры немеланомного рака кожи и здоровой кожи, соответствующие различным комбинациям клинических параметров, содержат наиболее значимые различия.

Установлено, что благодаря использованию описанного критерия достаточно стабильные и значимые различия между спектрами НМРК и здоровой кожи возможно получить для всех используемых комбинаций клинических параметров.

Разработанный математический критерий разделимости выборок спектров может быть в дальнейшем использован для оценки разделимости групп спектров и данных аналогичной структуры, полученных в клинических и других исследованиях.

## Список источников

1. Bray F., Laversanne M., Sung H., Ferlay J., Siegel R. L., Soerjomataram I., Jemal A. Global cancer statistics 2022: GLOBOCAN estimates of incidence and mortality worldwide for 36 cancers in 185 countries // *A Cancer Journal for Clinicians*. 2024. V. 74 (3). P. 229–263. doi: 10.3322/caac.21834
2. Roser M., Ritchie H. Cancer // *Our World in Data*. 2024. URL: <https://ourworldindata.org/cancer> (accessed: 23.04.2024).
3. Ciążyńska M., Kamińska-Winciorek G., Lange D., Lewandowski B., Reich A., Stawińska M., Pabianek M., Szczepaniak K., Hankiewicz A., Ułańska M., Morawiec J., Błasińska-Morawiec M., Morawiec Z., Piekarski J., Nejc D., Brodowski R., Zaryczkańska A., Sobjanek M., Nowicki R.J., Owczarek W., Słowińska M., Wróbel K., Bieniek A., Woźniacka A., Skibińska M., Narbutt J., Niemczyk W., Ciążyński K., Lesiak A. The incidence and clinical analysis of non-melanoma skin cancer // *Scientific Reports*. 2021. V. 11 (1). Art. 4337. doi: 10.1038/s41598-021-83502-8
4. Eisemann N., Waldmann A., Geller A.C., Weinstock M.A., Volkmer B., Greinert R., Breitbart E.W., Katalinic A. Non-Melanoma Skin Cancer Incidence and Impact of Skin Cancer Screening on Incidence // *Journal of Investigative Dermatology*. 2014. V. 134 (1). P. 43–50. doi: 10.1038/jid.2013.304
5. Mogensen M., Jemec G.B.E. Diagnosis of Nonmelanoma Skin Cancer / Keratinocyte Carcinoma: A Review of Diagnostic Accuracy of Nonmelanoma Skin Cancer Diagnostic Tests and Technologies // *Dermatologic Surgery*. 2007. V. 33 (10). Art. 1158. doi: 10.1111/j.1524-4725.2007.33251.x
6. Nault A., Zhang C., Kim K., Saha S., Bennett D.D., Xu Y.G. Biopsy Use in Skin Cancer Diagnosis: Comparing Dermatology Physicians and Advanced Practice Professionals // *JAMA Dermatology*. 2015. V. 151 (8). P. 899–902. doi: 10.1001/jamadermatol.2015.0173
7. Narayanamurthy V., Padmapriya P., Noorasafin A., Pooja B., Hema K., Nithyakalyani K., Samsuri F. Skin cancer detection using non-invasive techniques // *RSC Advances*. 2018. V. 8 (49). P. 28095–28130. doi: 10.1039/C8RA04164D
8. Calin M.A., Parasca S.V., Savastru R., Calin M.R., Dontu S. Optical techniques for the noninvasive diagnosis of skin cancer // *Journal of Cancer Research and Clinical Oncology*. 2013. V. 139 (7). P. 1083–1104. doi: 10.1007/s00432-013-1423-3
9. Kim J.A., Wales D.J., Yang G.-Z. Optical spectroscopy for in vivo medical diagnosis – a review of the state of the art and future perspectives // *Progress in Biomedical Engineering*. 2020. V. 2 (4). Art. 042001. doi: 10.1088/2516-1091/abaaa3
10. Rey-Barroso L., Peña-Gutiérrez S., Yáñez C., Burgos-Fernández F.J., Vilaseca M., Royo S. Optical Technologies for the Improvement of Skin Cancer Diagnosis: A Review // *Sensors*. 2021. V. 21 (1). Art. 252. doi: 10.3390/s21010252
11. Tuchin V., Popp J., Zakharov V. *Multimodal Optical Diagnostics of Cancer*. Springer International Publishing, 2020. doi: 10.1007/978-3-030-44594-2
12. Lim L., Nichols B., Migden M.R., Rajaram N., Reichenberg J.S., Markey M.K., Ross M.I., Tunnell J.W. Clinical study of noninvasive in vivo melanoma and nonmelanoma skin cancers using multimodal spectral diagnosis // *Journal of Biomedical Optics*. 2014. V. 19 (11). Art. 117003. doi: 10.1117/1.JBO.19.11.117003
13. Thompson A.J., Coda S., Sørensen M.B., Kennedy G., Patalay R., Waitong-Brämning U., De Beule P.A.A., Neil M.A.A., Andersson-Engels S., Bendsøe N., French P.M.W., Svanberg K., Dunsby C. In vivo measurements of diffuse reflectance and time-resolved autofluorescence emission spectra of basal cell carcinomas // *Journal of Biophotonics*. 2012. V. 5 (3). P. 240–254. doi: 10.1002/jbio.201100126
14. Borisova E., Pavlova E., Kundurjiev T., Troyanova P., Genova T., Avramov L. Light-induced autofluorescence and diffuse reflectance spectroscopy in clinical diagnosis of skin cancer //

- Biophotonics: Photonic Solutions for Better Health Care IV. SPIE. 2014. V. 9129. P. 251–258. doi: 10.1117/12.2051406
15. *Carpenter D.J., Sajisevi M.B., Chapurin N., Brown C.S., Cheng T., Palmer G.M., Stevenson D.S., Rao C.L., Hall R.P., Woodard C.R.* Noninvasive optical spectroscopy for identification of non-melanoma skin cancer: Pilot study // *Lasers in Surgery and Medicine*. 2018. V. 50 (3). P. 246–252. doi: 10.1002/lsm.22786
  16. *Bratchenko I.A., Artemyev D.N., Myakinin O.O., Khristoforova Y.A., Moryatov A.A., Kozlov S.V., Zakharov V.P.* Combined Raman and autofluorescence ex vivo diagnostics of skin cancer in near-infrared and visible regions // *Journal of Biomedical Optics*. 2017. V. 22 (2). Art. 027005. doi: 10.1117/1.JBO.22.2.027005
  17. *Feng X., Moy A.J., Nguyen H.T.M., Zhang J., Fox M.C., Sebastian K.R., Reichenberg J.S., Markey M.K., Tunnell J.W.* Raman active components of skin cancer // *Biomedical Optics Express*. 2017. V. 8 (6). P. 2835–2850. doi: 10.1364/BOE.8.002835
  18. *Wong R., Geyer S., Weninger W., Guimberteau J.C., Wong J.K.* The dynamic anatomy and patterning of skin // *Experimental Dermatology*. 2016. V. 25 (2). P. 92–98. doi: 10.1111/exd.12832
  19. *Warren R., Gartstein V., Kligman A.M., Montagna W., Allendorf R.A., Ridder G.M.* Age, sunlight, and facial skin: a histologic and quantitative study // *Journal of the American Academy of Dermatology*. 1991. V. 25 (5). P. 751–760. doi: 10.1016/s0190-9622(08)80964-4
  20. *Blondel W., Delconte A., Khairallah G., Marchal F., Gavoille A., Amouroux M.* Spatially-Resolved Multiply-Excited Autofluorescence and Diffuse Reflectance Spectroscopy: SpectroLive Medical Device for Skin In Vivo Optical Biopsy // *Electronics*. 2021. V. 10 (3). Art. 243. doi: 10.3390/electronics10030243
  21. *Elsen T., Fauvel C., Khairallah G., Zghal A., Delconte A., Kupriyanov V., Blondel W., Amouroux M.* A dataset of optical spectra and clinical features acquired on human healthy skin and on skin carcinomas // *Data in Brief*. 2024. V. 53. Art. 110163. doi: 10.1016/j.dib.2024.110163
  22. *Kupriyanov V., Blondel W., Daul C., Hohmann M., Khairallah G., Kistenev Y., Amouroux M.* Machine learning-based classification of spatially resolved diffuse reflectance and autofluorescence spectra acquired on human skin for actinic keratoses and skin carcinoma diagnostics aid // *Journal of Biomedical Optics*. 2025. Vol. 30 (3). Art. 035001. doi: 10.1117/1.JBO.30.3.035001
  23. *Нидаловна З.Х.* Исследование ранозаживления методами лазерного молекулярного имиджинга: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 1.3.21. Томск, 2024. 135 с.
  24. *Kesteven G.L.* The Coefficient of Variation // *Nature*. 1946. V. 158 (4015). P. 520–521. doi: 10.1038/158520c0

## References

1. Bray F., Laversanne M., Sung H., Ferlay J., Siegel R.L., Soerjomataram I., Jemal A. (2024) Global cancer statistics 2022: GLOBOCAN estimates of incidence and mortality worldwide for 36 cancers in 185 countries. *A Cancer Journal for Clinicians*. 74(3). pp. 229–263. doi: 10.3322/caac.21834
2. Roser M., Ritchie H. (2024) Cancer. *Our World in Data*. URL: <https://ourworldindata.org/cancer> (Date of access: 23.04.2024).
3. *Цiążyńska M., Kamińska-Winciorek G., Lange D., Lewandowski B., Reich A., Sławińska M., Pabianek M., Szczepaniak K., Hankiewicz A., Ułańska M., Morawiec J., Błasińska-Morawiec M., Morawiec Z., Piekarski J., Nejc D., Brodowski R., Zaryczańska A., Sobjanek M., Nowicki R. J., Owczarek W., Słowińska M., Wróbel K., Bieniek A., Woźniacka A., Skibińska M., Narbutt J., Niemczyk W., Ciążyński K., Lesiak A.* (2021) The incidence and clinical analysis of non-melanoma skin cancer. *Scientific Reports*. 11(1). Article 4337. doi: 10.1038/s41598-021-83502-8

4. Eisemann N., Waldmann A., Geller A.C., Weinstock M.A., Volkmer B., Greinert R., Breitbart E.W., Katalinic A. (2014) Non-melanoma skin cancer incidence and impact of skin cancer screening on incidence. *Journal of Investigative Dermatology*. 134(1). pp. 43–50. doi: 10.1038/jid.2013.304
5. Mogensen M., Jemec G.B.E. (2007) Diagnosis of nonmelanoma skin cancer/keratinocyte carcinoma: a review of diagnostic accuracy of nonmelanoma skin cancer diagnostic tests and technologies. *Dermatologic Surgery*. 33(10). pp. 1158–1174. doi: 10.1111/j.1524-4725.2007.33251.x
6. Nault A., Zhang C., Kim K., Saha S., Bennett D.D., Xu Y.G. (2015) Biopsy use in skin cancer diagnosis: comparing dermatology physicians and advanced practice professionals. *JAMA Dermatology*. 151(8). pp. 899–902. doi: 10.1001/jamadermatol.2015.0173
7. Narayanamurthy V., Padmapriya P., Noorasafin A., Pooja B., Hema K., Nithyakalyani K., Samsuri F. (2018) Skin cancer detection using non-invasive techniques. *RSC Advances*. 8(49). pp. 28095–28130. doi: 10.1039/C8RA04164D
8. Calin M.A., Parasca S.V., Savastru R., Calin M.R., Dontu S. (2013) Optical techniques for the noninvasive diagnosis of skin cancer. *Journal of Cancer Research and Clinical Oncology*. 139(7). pp. 1083–1104. doi: 10.1007/s00432-013-1423-3
9. Kim J.A., Wales D.J., Yang G.-Z. (2020) Optical spectroscopy for in vivo medical diagnosis – a review of the state of the art and future perspectives. *Progress in Biomedical Engineering*. 2(4). Article 042001. doi: 10.1088/2516-1091/abaaa3
10. Rey-Barroso L., Peña-Gutiérrez S., Yáñez C., Burgos-Fernández F.J., Vilaseca M., Royo S. (2021) Optical technologies for the improvement of skin cancer diagnosis: A review. *Sensors*. 21(1). Article 252. pp. 1–31. doi: 10.3390/s21010252
11. Tuchin V., Popp J., Zakharov V. (2020) *Multimodal Optical Diagnostics of Cancer*. Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-030-44594-2
12. Lim L., Nichols B., Migden M.R., Rajaram N., Reichenberg J.S., Markey M.K., Ross M.I., Tunnell J.W. (2014) Clinical study of noninvasive in vivo melanoma and nonmelanoma skin cancers using multimodal spectral diagnosis. *Journal of Biomedical Optics*. 19(11). Article 117003. doi: 10.1117/1.JBO.19.11.117003
13. Thompson A.J., Coda S., Sørensen M.B., Kennedy G., Patalay R., Waitong-Brämning U., De Beule P.A.A., Neil M.A.A., Andersson-Engels S., Bendsøe N., French P.M.W., Svanberg K., Dunsby C. (2012) In vivo measurements of diffuse reflectance and time-resolved autofluorescence emission spectra of basal cell carcinomas. *Journal of Biophotonics*. 5(3). pp. 240–254. doi: 10.1002/jbio.201100126
14. Borisova E., Pavlova E., Kundurjiev T., Troyanova P., Genova T., Avramov L. (2014) Light-induced autofluorescence and diffuse reflectance spectroscopy in clinical diagnosis of skin cancer. *Biophotonics: Photonic Solutions for Better Health Care IV. SPIE*. 9129. pp. 251–258. doi: 10.1117/12.2051406
15. Carpenter D.J., Sajisevi M.B., Chapurin N., Brown C.S., Cheng T., Palmer G.M., Stevenson D.S., Rao C.L., Hall R.P., Woodard C.R. (2018) Noninvasive optical spectroscopy for identification of non-melanoma skin cancer: Pilot study. *Lasers in Surgery and Medicine*. 50(3). pp. 246–252. doi: 10.1002/lsm.22786
16. Bratchenko I.A., Artemyev D.N., Myakinin O.O., Khristoforova Y.A., Moryatov A.A., Kozlov S.V., Zakharov V.P. (2017) Combined Raman and autofluorescence ex vivo diagnostics of skin cancer in near-infrared and visible regions. *Journal of Biomedical Optics*. 22(2). Article 027005. doi: 10.1117/1.JBO.22.2.027005
17. Feng X., Moy A.J., Nguyen H.T.M., Zhang J., Fox M.C., Sebastian K.R., Reichenberg J.S., Markey M.K., Tunnell J.W. (2017) Raman active components of skin cancer. *Biomedical Optics Express*. 8(6). pp. 2835–2850. doi: 10.1364/BOE.8.002835
18. Wong R., Geyer S., Weninger W., Guimberteau J.C., Wong J.K. (2016) The dynamic anatomy and patterning of skin. *Experimental Dermatology*. 25(2). pp. 92–98. doi: 10.1111/exd.12832
19. Warren R., Gartstein V., Kligman A.M., Montagna W., Allendorf R.A., Ridder G.M. (1991) Age, sunlight, and facial skin: a histologic and quantitative study. *Journal of the American Academy of Dermatology*. 25(5). pp. 751–760. doi: 10.1016/s0190-9622(08)80964-4

20. Blondel W., Delconte A., Khairallah G., Marchal F., Gavaille A., Amouroux M. (2021) Spatially-resolved multiply-excited autofluorescence and diffuse reflectance spectroscopy: spectrolive medical device for skin in vivo optical biopsy. *Electronics*. 10(3). Article 243. doi: 10.3390/electronics10030243
21. Elsen T., Fauvel C., Khairallah G., Zghal A., Delconte A., Kupriyanov V., Blondel W., Amouroux M. (2024) A dataset of optical spectra and clinical features acquired on human healthy skin and on skin carcinomas. *Data in Brief*. 53. Article 110163. doi: 10.1016/j.dib.2024.110163
22. Kupriyanov V., Blondel W., Daul C., Hohmann M., Khairallah G., Kistenev Y., Amouroux M. (2025) Machine learning-based classification of spatially resolved diffuse reflectance and autofluorescence spectra acquired on human skin for actinic keratoses and skin carcinoma diagnostics aid. *Journal of Biomedical Optics*. 30(3). Article 035001. doi: 10.1117/1.JBO.30.3.035001
23. Nidalovna Z.Kh. (2024) *Issledovanie ranozazhivleniya metodami lazernogo molekulyarnogo imidzhinga* [A study of wound healing by methods of laser molecular imaging]. Dissertation, Tomsk.
24. Kesteven G.L. (1946) The coefficient of variation. *Nature*. 158(4015). pp. 520–521. doi: 10.1038/158520c0

**Сведения об авторах:**

**Куприянов Валентин Владиславович** – PhD, младший научный сотрудник лаборатории лазерного молекулярного имиджинга и машинного обучения Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: valentin.kupriyanov@univ-lorraine.fr

**Кистенёв Юрий Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и экспериментальной физики физического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: yuk@iao.ru

**Кривова Наталья Андреевна** – доктор биологических наук, ведущий научный сотрудник Института биологии, экологии, почвоведения, сельского и лесного хозяйства Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nakri@res.tsu.ru

**Дунаевский Григорий Ефимович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиоэлектроники радиофизического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: proecs@mail.tsu.ru

**Information about the authors:**

**Kupriyanov Valentin V.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: valentin.kupriyanov@univ-lorraine.fr

**Kistenyov Yuriy V.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: yuk@iao.ru

**Krivova Nataliya A.** (Doctor of Biological Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nakri@res.tsu.ru

**Dunaevskiy Grigoriy E.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: proecs@mail.tsu.ru

*Статья поступила в редакцию 17.06.2025; принята к публикации 01.08.2025*

*The article was submitted 17.06.2025; accepted for publication 01.08.2025*

Научная статья

УДК 539.4, 620.178

doi: 10.17223/19988621/96/6

## Возможности использования порошков системы Ti–B–Fe для получения твердых сплавов с повышенными механическими характеристиками

Ольга Клавдиевна Лепакова<sup>1</sup>, Ольга Александровна Шкода<sup>2</sup>

*<sup>1, 2</sup> Томский научный центр Сибирского отделения  
Российской академии наук, Томск, Россия*

*<sup>1</sup> klavdievna.k@yandex.ru*

*<sup>2</sup> O.Shkoda@dsm.tsc.ru*

**Аннотация.** Разработан способ получения композиционного порошка TiB<sub>2</sub>–Fe с высокими эксплуатационными характеристиками. Найдены оптимальные режимы проведения самораспространяющегося высокотемпературного синтеза, измельчения продуктов синтеза и последующего спекания. Изучены температурные характеристики синтеза и микроструктуры продуктов. Проведены механические испытания полученных материалов, определены высокие характеристики прочности (HRA 83–85,  $\sigma_{\text{изг}} = 1\,200$  МПа) и износостойкости на уровне ВК-15. Показана возможность их применения в лесобработывающей промышленности.

**Ключевые слова:** самораспространяющийся высокотемпературный синтез, спекание, диборид титана, структура, механические свойства, композитный материал, система Ti–B–Fe, твердость, прочностные характеристики

**Для цитирования:** Лепакова О.К., Шкода О.А. Возможности использования порошков системы Ti–B–Fe для получения твердых сплавов с повышенными механическими характеристиками // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 66–80. doi: 10.17223/19988621/96/6

Original article

## Possibilities of using Ti–B–Fe system powders in producing hard alloys with improved mechanical properties

Ol'ga K. Lepakova<sup>1</sup>, Ol'ga A. Shkoda<sup>2</sup>

*<sup>1, 2</sup> Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
Tomsk, Russian Federation*

*<sup>1</sup> klavdievna.k@yandex.ru*

*<sup>2</sup> O.Shkoda@dsm.tsc.ru*

**Abstract.** A method for obtaining a composite powder of titanium diboride and iron with high performance characteristics has been developed. The newly produced materials should be able to function at high speeds, temperatures, mechanical loads, and aggressive

conditions. To meet these requirements, they should possess a complex set of physical, mechanical, chemical, and other special properties. In this work, the optimal modes of self-propagating high-temperature synthesis, subsequent grinding of the synthesis products, and further sintering have been discovered. The microstructures of the products at each technological stage of product preparation were studied. The compaction patterns of the compressed composite powder based on titanium diboride depending on the temperature and time parameters of sintering were examined. Mechanical tests of the obtained sintered materials for strength ( $\sigma_{\text{bend}}$ ) and hardness (HRA) using the INSTRON 3368 and hardness tester TK-2 by the Rockwell method have determined high characteristics of strength (HRA 83-85,  $\sigma_{\text{bend}} = 1200$  MPa) and wear resistance at the level of BK 15. The possibility of their application in the woodworking industry has been shown

**Keywords:** self-propagating high-temperature synthesis, sintering, titanium diboride, structure, mechanical properties, composite material, Ti–B–Fe system, hardness, strength characteristics

**For citation:** Lepakova, O.K., Shkoda, O.A. (2025) Possibilities of using Ti–B–Fe system powders in producing hard alloys with improved mechanical properties. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 66–80. doi: 10.17223/19988621/96/6

## Введение

Прогресс в области техники тесно связан с разработкой новых материалов, способных функционировать при высоких скоростях, температурах, механических нагрузках и агрессивных условиях. Для удовлетворения этих требований материалы должны обладать сложным комплексом физико-механических, химических и других специальных свойств. Поэтому исследователей при разработке таких материалов всегда привлекали бескислородные тугоплавкие соединения, такие как бориды переходных металлов и сплавы на их основе.

Бориды титана являются перспективными материалами благодаря своей высокой твердости, жаропрочности, износостойкости, стойкости к расплавленным металлам, а также высокой электро- и теплопроводности при небольшом весе. Несмотря на множество полезных свойств, бориды титана не получили широкого применения по причине трудностей их получения из-за высоких температур плавления, сильной реакционной способности бора и титана с материалом тигля, а также ограниченного изучения фаз в системе титан–бор [1].

Физико-механические свойства диборида титана делают его потенциально применимым в качестве конструкционного и инструментального материала. Однако технологические сложности мешают широкому использованию изделий из индивидуального диборида титана, особенно методом литья из-за высоких температур плавления (около 2 980°C). Поэтому методы порошковой металлургии, такие как спекание, горячее прессование и пропитка расплавами пористого материала из TiB<sub>2</sub>, более распространены при производстве изделий из тугоплавких материалов [2].

Существует ряд исследований [3–6], которые рассмотрели процесс спекания порошков диборида титана, полученных различными способами. Было показано, что для получения практически газонепроницаемого материала требуются довольно высокие температуры: 1 800–2 000°C. Увеличение температуры спекания приводит к повышению плотности материала, однако снижает прочностные

характеристики из-за интенсивного роста зерен и появления микротрещин как внутри зерен, так и на их границах. Образование микротрещин связано с анизотропией коэффициента термического расширения гексагональной решетки. Было установлено, что критический размер зерна, при котором начинаются микротрещины, составляет 15 мкм.

Наилучшие результаты в спекании  $TiB_2$  достигнуты при использовании небольших добавок активных веществ и спекании без давления с последующим горячим изостатическим прессованием [7]. Однако материалы, полученные спеканием только  $TiB_2$ , обладают хрупкостью, что препятствует их широкому применению. Поэтому важной задачей является разработка методов увеличения пластичности боридов, что позволит расширить область их применения. На протяжении многих лет активно ведутся исследования по созданию композиционных материалов на основе тугоплавких соединений, включая диборид титана.

Разработка композиционных материалов на основе диборида титана ведется в разных направлениях. Одно из них – исследования по созданию композиционных материалов с керамической матрицей: к дибориду титана добавляют различные соединения – карбиды ( $TiC$ ,  $WC$ ,  $B_4C$ ), бориды ( $CoB$ ,  $NiB$ ,  $CaB_6$ ,  $WB_2$  и др.), силициды ( $CaSi_2$ ), нитриды ( $TiN$ ), оксиды ( $ZrO_2$ ,  $Al_2O_3$ ). Такие композиционные материалы обладают достаточно высокими прочностными характеристиками. В литературе имеется ряд патентов на износостойкие и режущие материалы на основе боридов титана с керамической матрицей [8, 9], однако в большинстве случаев патентуется идея создания таких сплавов без исследования их свойств.

Еще одним направлением исследований является разработка композиционных материалов с металлической основой. Эти материалы должны объединять характеристики, присущие боридам, и высокую пластичность металлической связки. Поэтому разработка таких материалов требует подбора подходящей металлической основы, которая бы улучшала пластичные свойства боридов, сохраняя при этом их высокие показатели твердости, износостойкости, устойчивости к окислению и коррозии, а также ударной вязкости. Исследования структуры и свойств композиционных материалов на основе тугоплавких соединений показали, что металлическая основа должна соответствовать следующим требованиям [10–13]: они должны обладать высокой химической стойкостью по отношению к бориду титана, не взаимодействовать с ним так, чтобы ослабить материал, обладать высокой адгезией к бориду для прочного сцепления с боридной фазой и не ухудшать физико-механические свойства боридов.

Из анализа диаграмм состояния боридных систем с учетом законов взаимодействия (совместимость по термодинамике) и законов движения (совместимость по кинетике) следует, что материалы, обладающие перечисленным комплексом свойств, в основном принадлежат металлам группы железа с добавками, улучшающими адгезию между связкой и диборидными зёрнами, а также повышающими механические характеристики материалов [10].

Основным способом получения композиционных материалов на основе диборида титана с металлической связкой является процесс спекания при высоких температурах в диапазоне от 1 800 до 2 200°C. В качестве исходного сырья используют порошки  $TiB_2$ , полученные различными методами [14–17].

Металлическая связка улучшает пластичность композиционного материала на основе диборида титана и ускоряет процесс спекания за счет образования жидкой

фазы, стимулирующей диффузионные процессы и заполняющей поры и зазоры между частицами. Это приводит к уменьшению объемной усадки, повышению плотности и снижению остаточной пористости.

Исследования [18, 19] показали, что композиты на основе диборида титана с металлами-связками группы железа проявляют особенности в процессе спекания. На ранней стадии спекания обнаружена пластичная фаза, которая затем исчезает. Малое количество металла группы железа, добавленное на этапе спекания, образует прочный раствор с тугоплавкими соединениями. При увеличении температуры спекания металл испаряется, оставляя дефектный слой на поверхности частиц тугоплавкого соединения. Этот слой способствует процессу спекания материала. Следовательно, в таких материалах отсутствует пластичная металлическая связка.

В исследовании [18] было обнаружено, что при горячем прессовании порошка  $TiB_2$  в присутствии жидкого никеля происходит значительное уплотнение. При давлении 12 МПа и температуре 1 425°C в вакууме (чуть ниже температуры плавления никеля) наблюдалось уплотнение диборида титана, при этом концентрация никеля в образцах после прессования снижалась с 15 до менее 1 мас. %. Повышение плотности в результате горячего прессования с жидкой фазой было обусловлено диффузией титана и бора через жидкую фазу. Присутствие жидкой фазы способствовало увеличению скорости диффузии титана и бора, что привело к увеличению плотности образцов при более низких температурах и сокращении времени спекания.

Исследования показали, что инструмент из горячепрессованного порошка  $TiB_2$  с содержанием никеля 10 и 20 мас. % не уступает по износостойкости инструменту из промышленных твердых сплавов WC–Co. В работах [20–27] были изучены различные режимы спекания порошков  $TiB_2$  с металлическими связками: Fe, Si, Ni, Co, AlN. Спекание проводилось в аргоне, водороде, вакууме. Для получения образцов без пор и с высокой прочностью требуются высокие температуры. Однако спекание в вакууме при этих температурах приводит к испарению металла связки, что не обеспечивает необходимую прочность композитов из порошка  $TiB_2$ .

Исследования структуры и свойств сплавов системы  $TiB_2$ –Fe были проведены в [20, 28–36] и выявили наличие двух структурных составляющих: диборида титана и эвтектики. Металлографические исследования показали, что сплавы  $TiB_2$ –Fe обладают высокой твердостью по Виккерсу ( $H_v$ ), прочностью при изгибе и износостойкостью при резании. Согласно данным авторов, эти сплавы с железной матрицей обещают быть перспективными материалами для использования в качестве конструкционных и инструментальных материалов. Особое внимание уделяется высокой твердости спеченного материала, которая сохраняется даже при температурах вплоть до 1 100°C.

Проведенное исследование демонстрирует, что сплав  $TiB_2$ –Fe с содержанием 15% железа обладает более высокой стойкостью, чем стандартный сплав T15K6. Кроме того, прочностные характеристики сплава  $TiB_2$ –Fe при температурах от 900 до 1 100°C превышают аналогичные показатели сплава T15K6.

Использование методов прессования и спекания открывает возможности для создания композиционных материалов на основе  $TiB_2$  с металлической матрицей, обладающих высокими физико-механическими свойствами. Однако встречаются препятствия, такие как необходимость высоких температур спекания, условие использования мелкодисперсного порошка, требующее длительного размола исходных

порошков, а также недостаток высококачественного сырья. Эти факторы являются основными причинами, затрудняющими применение данных материалов в различных областях техники. Исследования в области сплавов системы Ti–B–Fe свидетельствуют об их потенциале для создания новых материалов инструментального и конструкционного назначения с высокими эксплуатационными характеристиками, что подтверждается анализом доступной литературы.

Для обеспечения оптимальных характеристик твердых сплавов, полученных из композиционного порошка TiB<sub>2</sub>–Fe, необходимо учитывать не только состав материала, но и структуру, которая формируется в процессе спекания при определенных температуре и времени. Синтез композиционного порошка на основе ферроборных сплавов и титана позволяет получить материал с желаемыми эксплуатационными свойствами. Для оценки возможности использования СВС-композиционных порошков TiB<sub>2</sub>–Fe в производстве твердосплавных изделий необходимо определить оптимальные параметры спекания.

Изучение возможности создания твердого сплава (TiB<sub>2</sub>–Fe) путем спекания измельченного материала системы Ti–B–Fe, полученного методом самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС), является ключевой темой данной работы.

### Материалы и методики эксперимента

Для приготовления реакционных смесей использовали порошки титана (ПТМ, менее 100 мкм, 98.8–99.0 мас. % основного компонента), бор аморфный (МРТУ6-02-292-64, дисперсность 0.1–10 мкм, 97.0 мас. % основного компонента), железо карбонильное (99.8 мас. % основного компонента, дисперсность 10 мкм), ферробор ФБ20 (содержание бора 20 мас. %). Для расширения возможностей проведения СВС с участием ферроборных сплавов с большим содержанием бора получали образцы FeB<sub>n</sub> спеканием в вакуумных печах в лабораторных условиях.

Перед самораспространяющимся высокотемпературным синтезом исходные порошки подвергали сушке в вакуумном сушильном шкафу при температуре 150–200°C для удаления влаги и летучих примесей. Реакционные смеси готовили смешением порошков в определенных концентрационных соотношениях в фарфоровой ступке в течение 30–40 мин. Из полученных смесей прессовали цилиндрические образцы диаметром 10–20 мм, высотой 15–20 мм, относительной плотностью 0.6–0.7. Синтез образцов осуществляли в установке постоянного давления в атмосфере аргона при давлении 5 МПа. Иницирование волны безгазового горения в образцах осуществляли при помощи поджигающей таблетки (Ti : B = 1:2) которую, в свою очередь, поджигали накаливаемой вольфрамовой спиралью. Полученный методом СВС материал измельчали в шаровой мельнице до размера частиц 60–80 мкм. Исследуемый композиционный порошок со средним размером частиц от 60 до 80 мкм формировали в жесткой пресс-форме одностороннего сжатия при удельном давлении 40 кг/мм<sup>2</sup>, спекание композиционных порошков проводили в вакуумной печи СВШ 1-2/25-И1.

В работе приведены результаты исследования закономерностей уплотнения спрессованного композиционного порошка на основе диборида титана в зависимости от температурно-временных параметров спекания. Плотность спеченных образцов измеряли методом гидростатического взвешивания.

Микроструктурный анализ СВС-материалов проводили с помощью оптической микроскопии: микроскоп Olympus GX 53 (Япония), рентгенофазовый анализ проводили на SHIMADZU XRD 6000 с Co излучением.

Среди физических методов изучения связи состава и структуры исследуемых сплавов с их механическими свойствами важное место отводится фрактографии – изучению поверхностей разрушения (изломов). Фрактографические, морфологические исследования проводили на микроскопе РЭМ JEOL JSM-7500F (Япония). Механические испытания спеченных материалов на прочность ( $\sigma_{изг}$ ) и твердость (HRA) проводили на установке INSTRON 3368 (Великобритания) при комнатной температуре и твердомере ТК-2 (Россия) по методу Роквелла в соответствии с ГОСТ 9013–59.

### Результаты

В работе для получения СВС-композиционных порошков системы Ti–Fe–B использовали следующие составы исходной смеси: 1) FeB + 1/2Ti (содержание железа 62 вес. %, содержание бора 12 вес. %); 2) FeB<sub>2</sub> + Ti (железа 45 вес. %, бора 17 вес. %); 3) FeB<sub>4</sub> + 2Ti (железа 29 вес. %, бора 22 вес. %); 4) FeB<sub>6</sub> + 3Ti (железа 21 вес. %, бора 28 вес. %).

Для получения материала с максимально возможными плотностью и твердостью при спекании требуются температуры  $\approx 1400^\circ\text{C}$  и выдержки не менее 30 мин.

Зависимости твердости HRA спеченных СВС-композиционных порошков от содержания железа приведены на рис. 1, где видно, что при увеличении содержания железа до 48 вес. % значения HRA возрастают, а затем снижаются. Максимальное значение 85 HRA соответствует 48 вес. % Fe в смеси. Низкие значения твердости при содержании железа менее 48 вес. % обусловлены высокой пористостью спеченных композитов, что связано с недостаточным количеством жидкой фазы, влияющей на процесс уплотнения. Снижение твердости после 48 вес. % Fe обусловлено наличием большого количества железной связки в спеченных композитах.

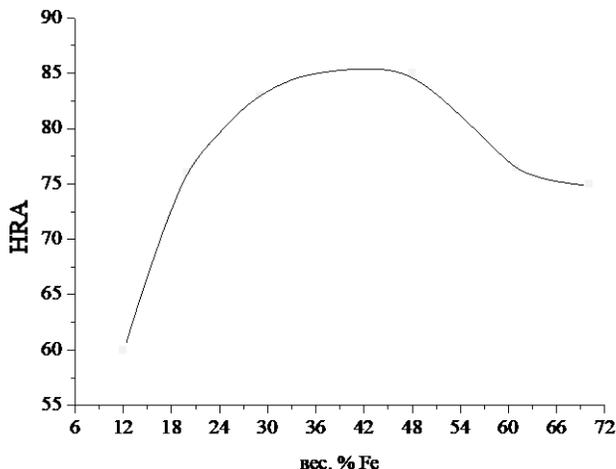
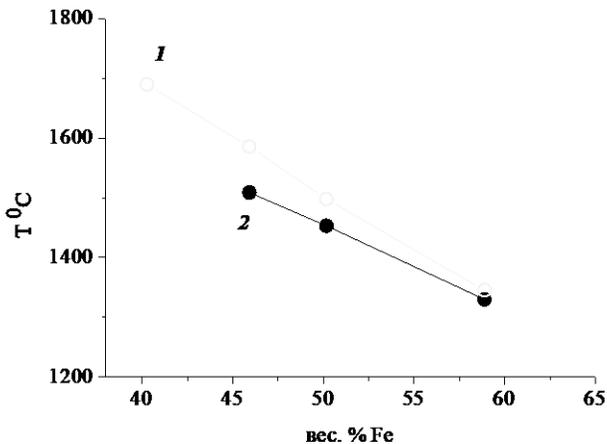


Рис. 1. Зависимость твердости спеченных СВС-композиционных порошков от содержания железа

Fig. 1. Hardness of the sintered SHS composite powders as a function of iron content

При изучении параметров спекания СВС-композиционных порошков была установлена взаимосвязь между температурами спекания и максимальными температурами горения соответствующих смесей. Изменение параметров СВС, таких как, например, дополнительный подогрев исходных смесей, увеличение диаметра образцов и т.д., приводивших к увеличению максимальных температур горения смесей, полноты превращения конечных СВС-продуктов, требовало более высоких температур спекания для достижения высоких значений плотности и твердости спеченного продукта. На рис. 2 приведены соотношения между температурами спекания и максимальными температурами горения исходных смесей от содержания в них железа. Видно, что при увеличении содержания Fe снижаются максимальные температуры как при СВС смесей порошков ферроборных сплавов с титаном, так и при спекании соответствующих композиционных порошков.



**Рис. 2.** Соотношение максимальных температур горения смесей порошков и оптимальных температур спекания: 1 – горение смесей порошков ферроборных сплавов с титаном; 2 – спекание композиционных порошков

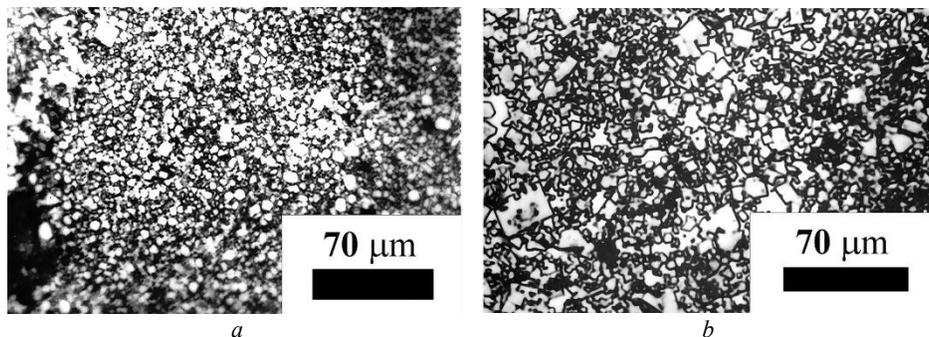
**Fig. 2.** The ratio of the maximum combustion temperatures for the powder mixtures and the optimal sintering temperatures: 1, combustion of the ferroboric alloys – titanium powder mixtures and 2, sintering of the composite powders

Фазовый состав конечных продуктов отличается от равновесного ( $\text{TiB}_2 + \text{Fe}$ ). Рентгенофазовый анализ СВС-образцов показал, что все они состоят в основном из диборида титана и железа. Кроме этих двух основных фаз во всех образцах в разных количествах присутствуют неравновесные фазы:  $\text{FeB}$ ,  $\text{Fe}_2\text{B}$ ,  $\text{FeTi}$ ,  $\text{Fe}_2\text{Ti}$ , которые являются структурными составляющими неравновесных эвтектик.

На рис. 3 показаны микроструктуры конечных СВС-продуктов для шихты, приготовленной из ферроборных сплавов ( $\text{FeB}_n$ ) с титаном. Из приведенных микрофотографий следует, что увеличение содержания железа в реакционных смесях приводит к формированию более мелкой и однородной структуры по размерам частиц  $\text{TiB}_2$ . Также видно, что продукты горения ферроборных сплавов с титаном характеризуются мелкодисперсной структурой, частицы  $\text{TiB}_2$  имеют размер, не превышающий  $\approx 5$  мкм, и не имеют четкой кристаллографической огранки.

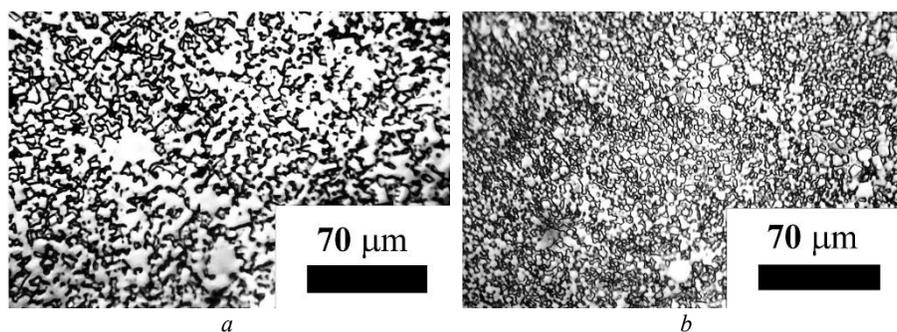
При сравнительном анализе микроструктур исходных СВС-порошков и спеченных из них композитов наблюдался процесс перекристаллизации через расплав-

ленную матрицу, что сопровождается растворением-осаждением контактов между боридами и растворении мелких частиц в этой матрице. В результате этого процесса кристаллы TiB<sub>2</sub> округлились и стали более изолированными друг от друга, а бывшие поры заполнились расплавленной эвтектикой. На рис. 4 изображены микроструктуры исходного материала СВС-порошка (FeB<sub>2</sub>-Ti) и спеченного из него композита.



**Рис. 3.** Микроструктуры конечных СВС-продуктов системы титан-бор-железо: *a* – FeB<sub>2</sub> + Ti (содержание Fe – 45 вес. %), *b* – FeB<sub>4</sub> + 2Ti (содержание Fe – 29 вес. %)

**Fig. 3.** Microstructures of the final SHS products of the titanium-boron-iron system: (*a*) FeB<sub>2</sub> + Ti (Fe content of 45 wt%) and (*b*) FeB<sub>4</sub> + 2Ti (Fe content of 29 wt%)



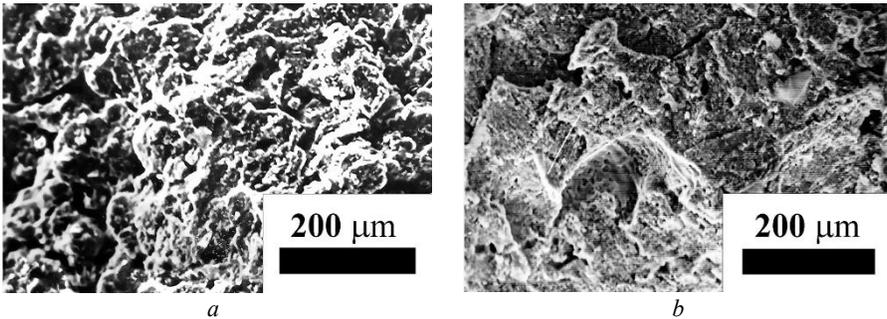
**Рис. 4.** Микроструктура СВС-материала (FeB<sub>2</sub> + Ti) (*a*) и спеченного композита, полученного из измельченного СВС-материала (FeB<sub>2</sub> + Ti) (*б*)

**Fig. 4.** Microstructures of the (*a*) SHS material (FeB<sub>2</sub> + Ti) and (*b*) sintered composite obtained from the crushed SHS material (FeB<sub>2</sub> + Ti)

Из анализа микроструктур следует, что перекристаллизовавшиеся частицы диборида титана склонны к коалесценции. Без коалесценции частицы диборида титана в спеченных по оптимальным режимам образцах имеют размеры не более 5 мкм. Незначительная передержка во времени спекания приводит к образованию конгломератов из боридных частиц, достигающих размеров до 40 мкм.

Верхний временной предел температурных выдержек при спекании определяется коалесценцией частиц и не должен превышать 100–120 мин при  $T_{\text{сп}} = 1400^{\circ}\text{C}$ . Для композиционного порошка с соотношением фаз TiB<sub>2</sub> : Fe  $\approx$  50:50 (мас. %) оптимальное время выдержки при температуре 1400°C составляет 40–60 мин.

На рис. 5 приведены фрактограммы изломов двух спеченных образцов: с оптимальным (40 мин) и запредельным (125 мин) временами спекания при  $T = 1\,400^\circ\text{C}$ . В первом случае на фрактограмме излома имеется много участков вязкого отрыва с ячеистой структурой, что свидетельствует о пластичности материала. Во втором случае (см. рис. 5, *b*) на фрактограмме излома наблюдается много гладких транскристаллитных плоскостей. Транскристаллитный излом чаще всего проходил через конгломераты скоалесцированных боридов титана. Такой излом свидетельствует о хрупкости материала.



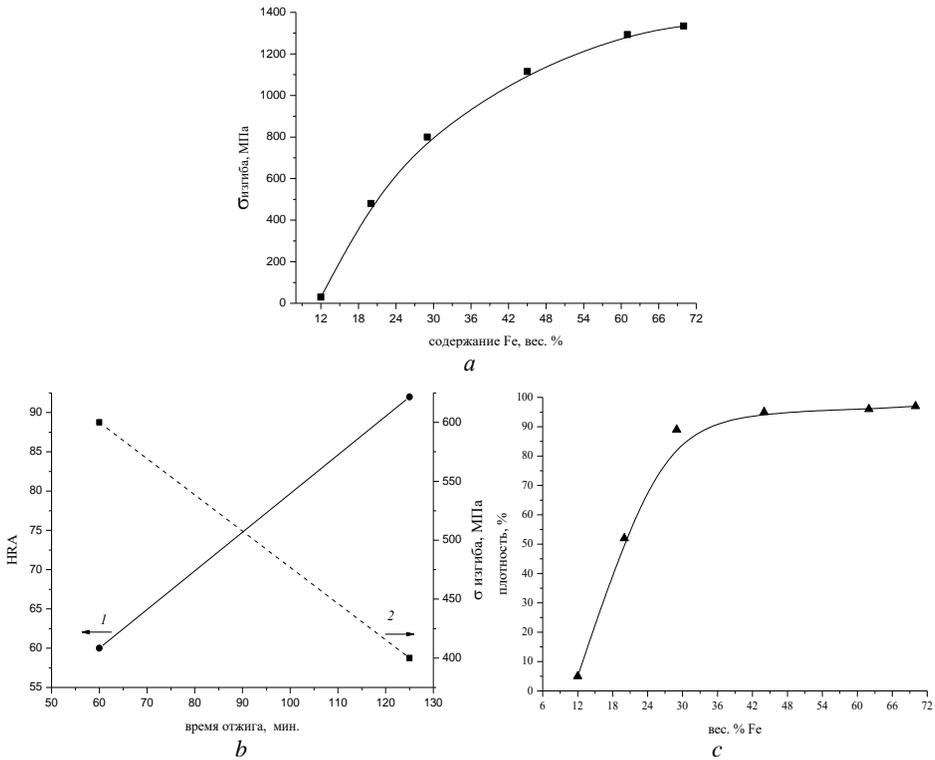
**Рис. 5.** Фрактограммы изломов спеченных сплавов ( $\text{FeB}_2\text{-Ti}$ ):  
*a* –  $T_{\text{сп}} = 1\,400^\circ\text{C}$ ,  $t = 60$  мин; *b* –  $T_{\text{сп}} = 1\,400^\circ\text{C}$ ,  $t = 125$  мин  
**Fig. 5.** Fractograms of the fractures of sintered alloys ( $\text{FeB}_2\text{-Ti}$ ):  
 (a)  $T_{\text{ann}} = 1400^\circ\text{C}$ ,  $t = 60$  min and (b)  $T_{\text{ann}} = 1400^\circ\text{C}$ ,  $t = 125$  min

Физико-механические свойства спеченных прессовок из СВС-композиционных порошков  $\text{TiB}_2\text{-Fe}$  определяются преимущественно степенью уплотнения. На рис. 6 приведены некоторые характеристики образцов с разным соотношением железа и диборида титана в исходных СВС-порошках, спеченных при разных температурах и временах выдержки.

Как видно из графиков, наилучшими свойствами обладают образцы, спеченные из композиционного порошка состава  $\text{TiB}_2 : \text{Fe} \approx 52:48$  (вес. %) при температуре спекания  $1\,400^\circ\text{C}$  и выдержке 60 мин. При всех дальнейших исследованиях, связанных с практическим применением разработанного СВС-порошка, в качестве базисного был выбран порошок указанного состава.

Сравнительный анализ физико-механических свойств спеченных композитов системы  $\text{Ti-B-Fe}$  с использованием промышленных ферроборных сплавов не показал существенных отличий в их свойствах. Поэтому в дальнейших исследованиях СВС-композиционные порошки системы  $\text{Ti-B-Fe}$  получали с использованием промышленного ферроборного сплава ФБ20 (содержание бора 20 вес. %). Спеченный композит из этого СВС-порошка можно использовать в качестве конструкционного, инструментального материала в различных областях техники.

Полученный композиционный материал из СВС-порошка  $\text{TiB}_2\text{-Fe}$  был применен для упрочнения зубьев дисковых пил при обработке древесины. Проведенные испытания показали, что упрочнение пил полученным СВС-материалом  $\text{TiB}_2\text{-Fe}$  привело к увеличению износостойкости в 1.2 раза относительно работы с используемыми напайками из сплава ВК-15, в время работы без переточки составило 12 ч.



**Рис. 6.** Зависимости  $\sigma$  изгиба от содержания Fe в смеси после отжига 1 400°C, 60 мин (а), зависимости HRA (1) и  $\sigma$  изгиба (2) от времени отжига при температуре 1 600°C и содержании Fe 48 вес. % в смеси (52% TiB<sub>2</sub> + 48% Fe) (b), зависимость плотности от содержания Fe в смеси после отжига 1 400°C, 60 мин (c)

**Fig. 6.** (a) Bending  $\sigma$  as a function of Fe content in the mixture after annealing at 1400°C during 60 minutes; (b) dependences of the (1) HRA and (2) bending  $\sigma$  on the annealing time at 1600°C and Fe content 48 wt. % in the mixture (52% TiB<sub>2</sub> + 48% Fe), and (c) density as a function of Fe content in the mixture after annealing at 1400°C during 60 minutes

### Выводы

Успешно разработаны основы технологии изготовления твердых сплавов на основе СВС-композиционного порошка TiB<sub>2</sub>-Fe с высокими характеристиками прочности (HRA 83–85,  $\sigma_{\text{изг}} = 1\ 200$  МПа) и износостойкости на уровне ВК-15.

Применение разработанного твердого сплава на основе СВС-композитного порошка TiB<sub>2</sub>-Fe в лесоперерабатывающей промышленности показало увеличение износостойкости дисковой пилы в 1.2 раза по сравнению с использованием дорогостоящего сплава ВК-15 из карбида вольфрама и кобальтовой связки.

### Список источников

1. Серебрякова Т.И., Неронов В.А., Пешев П.Д. Высокотемпературные бориды. М.: Металлургия, 1991. 367 с.

2. Свойства, получение и применение тугоплавких соединений / под ред. Т.Я. Косолаповой. М.: Металлургия, 1986. 928 с.
3. Baumgartner H.R., Steiger R.A. Sintering and properties of titanium diboride made from powder synthesized in a plasma-arc heater // J. Amer. Ceram. Soc. 1984. V. 67 (3). P. 207–212.
4. Bellosi A., Craziani T., Guicciardi S., Tampieri A. Characteristics of TiB<sub>2</sub> ceramic // Brit. Ceram. Proc. 1992. № 49. P. 163–174.
5. Khoa H.X., Tuan N.Q., Lee Y.H., Lee B.H., Vieta N.H., Kim J.S. Fabrication of Fe-TiB<sub>2</sub> Composite Powder by High-Energy Milling and Subsequent Reaction Synthesis // J. Kor. Powd. Met. Inst. 2013. V. 20 (3). P. 221–227. doi: 10.4150/KPMI.2013.20.3.221
6. Lepakova O.K., Terekhova O.G., Kostikova V.A., Kitler V.D. Cermet formation during mechanical activation of TiB<sub>2</sub>-Fe SHS Powder in Benzine // Chemistry for Sustainable Development. 2004. № 4. P. 443–446
7. Kubodera S. Titanium diboride for high-wear resistance parts // Nippon Kokan Tech. Rept. 1987. № 50. P. 83–84.
8. Пат. 60-103148 Япония. Прочные сверхтвердые материалы класса боридов / Takabasu. Оpubл. 1985.
9. Пат. 497954 Япония. Способ изготовления спеченного материала на основе борида титана / Хиденобу, МураямаТосиюки. Оpubл. 30.3.1992.
10. Панасюк А.Д. Физико-химические основы формирования композиционных материалов на основе тугоплавких боридов // Бориды и материалы на их основе. Киев: ИПМ, 1986. С. 22–29.
11. Композиционные материалы: справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
12. Борисова А.Л. Совместимость тугоплавких соединений с металлами и графитом. Киев: Наукова думка, 1985. 247с.
13. Yujiao Ke, Kazuhiro Matsugi, Zhefeng Xu, Yu He, Yongbum Choi, Mingzhi Wang, Jinku Yu. Synthesis of 30 vol% TiB<sub>2</sub> Containing Fe<sub>5</sub>Ti Matrix Composites with High Thermal Conductivity and Hardness // Materials Transactions. 2019. V. 60 (12). P. 2516–2524. doi: 10.2320/matertrans.MT-M2019168
14. КифферР., Бенезовский Ф. Твердые материалы. М.: Металлургия, 1968. 384 с.
15. Brewer L., Sawyer D., Penton D. A Study of the Refractory Borides // J. Amer. Ceram. Soc. 2006. V. 34 (6). P. 173–179. doi: 10.1111/j.1151-2916.1951.tb11631.x
16. Blumenthal H. Production of transition metal diborides and their solid solutions from metal oxides and boron oxide // Powder Metallurgy Bull. 1956. V. 7 (3). P. 79–81.
17. Самсонов Г.В. К вопросу о прохождении реакции восстановления двуокиси титана углеродом через стадии низших окислов // Журнал прикладной химии. 1955. Т. 28. С. 919–921.
18. Tennery V.J., Finch C.B., Yust C.S., Clark G.M. Structure-property correlations for TiB<sub>2</sub>-based ceramics densified using active liquid metals // Sci. Hard Mater. Proc. Int. Conf., 23–28 Aug., 1981. New York; London: 1983. P. 891–909. doi: 10.1007/978-1-4684-4319-6\_49
19. Meyer R., Pastor H. Etude du frittage et de la compression a chaud des diborures de titane et de zirconium avec addition de metaux de transition et de quelques proprietes des alliages obtenus // Planseeberichte fur Pulvermetallurgie. 1969. Bd. 17 (2). P. 111–122.
20. Функе В.Ф., Юдковский С.И., Самсонов Г.В. Сплавы системы В, Ti, Fe // Журнал прикладной химии. 1961. Т. 34, № 5. С. 1013–1020.
21. Искольдский И.И., Богородская Л.П. О возможности получения металлокерамических твердых сплавов на основе боридов хрома, титана и вольфрама // Журнал прикладной химии. 1957. Т. 30, № 2. С. 177–185.
22. Khanra A.K., Godkhindi M.M., Pathak L.C. Sintering behaviour of ultra-fine titanium diboride powder prepared by self-propagating high-temperature synthesis (SHS) technique // Materials Science and Engineering A. 2007. Т. 454–455. С. 281–287. doi: 10.1016/j.msea.2006.11.083

23. Кислый П.С., Кузнецова М.А. Спекание тугоплавких соединений. Киев: Наукова думка, 1980. 167 с.
24. Kovalev D.Yu., Bolotskaya A.V., Mikheev M.V. Self-propagating high-temperature synthesis in the Ti–B–Fe system with AlN additions // *Inorganic Materials*. 2022. V. 58 (9). P. 922–930. doi: 10.1134/S0020168522080052
25. Лепакова О.К., Расколенко Л.Г., Афанасьев Н.И., Китлер В.Д. Синтез, фазовый состав и структура твердых сплавов на основе диборида титана // *Физика и химия обработки материалов*. 2012. № 1. С. 54–58.
26. Лепакова О.К., Голобоков Н.Н., Китлер В.Д., Радишевская Н.И., Афанасьев Н.И. Влияние механической активации и добавок кремния на структуру и свойства материалов, спеченных из СВС-композиционного порошка TiB<sub>2</sub>–Fe // *Физика и химия обработки материалов*. 2011. № 1. С. 71–76.
27. Yuchao Song, Shucheng Dong, Oleksandr Stasiuk, Dmytro Savvakyn, Orest Ivasishin. Synthesis of Ti/TiB Composites via Hydrogen-Assisted Blended Elemental Powder Metallurgy // *Frontiers in Materials*. 2020. V. 7. doi: 10.3389/fmats.2020.572005
28. Yangyang Sun, Hui Chang, Zhigang Fang, Yuecheng Dong, Zhenhua Dan, YanhuaGuo, Lian Zhou. Study on Microstructure and Mechanical Properties of Low Cost Ti-Fe-B Alloy // *MATEC Web of Conferences “The 14th World Conference on Titanium”*. 2020. V. 321. Art. 11029. doi: 10.1051/mateconf/20203211102929
29. Huang F., Fu Z., Yan A., Wang W. *et al.* Experimental evidence of structural evolution for TiB<sub>2</sub> microcrystal under externally high stresses // *Powder Technol.* 2010. V. 1-2. P. 83–86. doi: 10.1016/j.powtec.2009.08.023
30. Zhou D., Liu Y., Shen B., Zhao X. *et al.* Structural prediction of ultrahard semi-titanium boride (Ti<sub>2</sub>B) using the frozen-phonon method // *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2016. V. 18 (11). P. 7927–7931. doi: 10.1039/C6CP00758A
31. Gai L., Ziemnicka-Sylwester M. The TiB<sub>2</sub>-based Fe-matrix composites fabricated using elemental powders in one step process by means of SHS combined with pseudo-HIP // *International Journal of Refractory Metals & Hard Materials*. 2014. V. 45. P. 141–146. doi: 10.1016/j.ijrmhm.2014.04.008.
32. Tian J.Z., Zhao Y.H., Wang B., Hou H., Zhang Y.M. The structural, mechanical and thermodynamic properties of Ti-B compounds under the influence of temperature and pressure: first-principles study // *Mater. Chem. Phys.* 2018. V. 209. P. 200–207. doi: 10.1016/j.matchemphys.2018.01.067
33. Лепакова О.К., Расколенко Л.Г., Максимов Ю.М. Self-propagating high-temperature synthesis of composite material TiB<sub>2</sub>–Fe // *J Mater Sci*. 2004. V. 39 (11). P. 3723–3732. doi: 10.1023/B:JMSC.0000030726.29507.2b
34. Manish Patel, Vajinder Singh, Deepak Kumar. Effect of particle size and sintering additive on densification and mechanical properties of titanium diboride (TiB<sub>2</sub>) ceramic // *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*. 2023. V. 117. Art. 106380. doi: 10.1016/j.ijrmhm.2023.106380.
35. Лепакова О.К., Расколенко Л.Г., Максимов Ю.М. The mechanism of phase and structure formation of the Ti-B-Fe system in a combustion wave // *Combust Explos Shock Waves*. 2000. V. 36. P. 575–581. doi: 10.1007/BF02699520
36. Расколенко Л.Г., Лепакова О.К., Максимов Ю.М. Спекание композиционных частиц на основе диборида титана, полученных методом СВС // *Самораспространяющийся высокотемпературный синтез: сб. ст. / под ред. Ю.М. Максимова. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. С. 110–116.*

## References

1. Serebryakova T.I., Neronov V.A., Peshev P.D. (1991) *Vysokotemperaturnye boridy* [High temperature borides]. Moscow: Metallurgiya.

2. Kosolapova T.Ya. (ed.) (1986) Svoystva, poluchenie i primeneniye tugoplavkikh soedineniy [Properties, preparation, and application of refractory compounds]. Moscow: Metallurgiya.
3. Baumgartner H.R., Steiger R.A. (1984) Sintering and properties of titanium diboride made from powder synthesized in a plasma-arc heater. *Journal of the American Ceramic Society*. 67(3). pp. 207–212. doi: 10.1111/j.1151-2916.1984.tb19744.x
4. Bellosi A., Craziani T., Guicciard S., Tampieri A. (1992) Characteristics of TiB<sub>2</sub> ceramic. *British Ceramic Proceedings*. 49. pp. 163–174.
5. Khoa H.X., Tuan N.Q., Lee Y.H., Lee B.H., Vieta N.H., Kim J.S. (2013) Fabrication of Fe-TiB<sub>2</sub> composite powder by high-energy milling and subsequent reaction synthesis. *Journal of Korean Powder Metallurgy Institute*. 20(3). pp. 221–227. doi: 10.4150/KPMI.2013.20.3.221
6. Lepakova O.K., Terekhova O.G., Kostikova V.A., Kitler V.D. (2004) Cermet formation during mechanical activation of TiB<sub>2</sub> - Fe SHS powder in benzene. *Chemistry for Sustainable Development*. 4. pp. 443–446.
7. Kubodera S. (1987) Titanium diboride for high-wear resistance parts. *Nippon Kokan Technical Report*. 50. pp. 83–84.
8. Takabacu (1985) *Durable Superhard Materials of the Boride Class*. Patent 60-103148 Japan.
9. Hidenobu, Murayamatoshiyuki (1992) *A Method for Manufacturing Sintered Material Based on Titanium Boride* Patent 497954 Japan.
10. Panasyuk A.D. (1986) Fiziko-khimicheskie osnovy formirovaniya kompozitsionnykh materialov na osnove tugoplavkikh boridov [Physico-chemical bases of the formation of composite materials based on refractory borides]. In: *Boridy i materialy na ikh osnove*. Kyiv: IPM. pp. 22–29.
11. Karpinis D.M. (ed.) (1985) *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Handbook]. Kyiv: Naukova Dumka.
12. Borisova A.L. (1985) *Sovmestimost' tugoplavkikh soedineniy s metallami i grafitom* [Compatibility of refractory compounds with metals and graphite]. Kyiv: Naukova Dumka.
13. Ke Y., Matsugi K., Xu Zh., He Y., Choi Y., Wang M., Yu J. (2019) Synthesis of 30 vol% TiB<sub>2</sub> containing Fe<sub>5</sub>Ti matrix composites with high thermal conductivity and hardness. *Materials Transactions*. 60(12). pp. 2516–2524. doi: 10.2320/matertrans.MT-M2019168
14. Kiffer R., Benezovskii F. (1968) *Tverdye materialy* [Solid materials]. Moscow: Metallurgiya.
15. Brewer L., Sawyer D., Temperton D. (2006) A study of the refractory borides. *Journal of the American Ceramic Society*. 34(6). pp. 173–179. doi: 10.1111/j.1151-2916.1951.tb11631.x
16. Blumenthal H. (1956) Production of transition metal diborides and their solid solutions from metal oxides and boron oxide. *Powder Metallurgy*. 7(3). pp. 79–81.
17. Samsonov G.V. (1955) K voprosu o prokhozhenii reaktsii vosstanovleniya dvuokisi titana uglerodom cherez stadii nizshikh okislov [On the issue of the reaction of reduction of titanium dioxide by carbon through the stages of lower oxides]. *Zhurnal prikladnoy khimii – Journal of Applied Chemistry*. 28. pp. 919–921.
18. Tennery V.J., Finch C.B., Yust C.S., Clark G.M. (1983) Structure-property correlations for TiB<sub>2</sub>-based ceramics densified using active liquid metals. *Science of Hard Materials: Proceedings of the International Conference on the Science of Hard Materials*. New York, London. pp. 891–909. doi: 10.1007/978-1-4684-4319-6\_49
19. Meyer R., Pastor H. (1969) Etude du frittage et de la compression a chaud des diborures de titane et de zirconium avec addition de metaux de transition et de guelguesproprietes des alliagesobtenus. *Planseeberichte fur Pulvermetallurgie*. 17(2). pp. 111–122.
20. Funke V.F., Yudkovskiy S.I., Samsonov G.V. (1961) Splavy sistemy B, Ti, Fe [Alloys of the B, Ti, Fe system]. *Zhurnal prikladnoy khimii – Journal of Applied Chemistry*. 34(5). pp. 1013–1020.
21. Iskol'dskiy I.I., Bogorodskaya L.P. (1957) O vozmozhnosti polucheniya metallokeramicheskikh tverdykh splavov na osnove boridov khroma, titana i vol'frama [About the possibility of obtaining metal-ceramic hard alloys based on borides of chromium, titanium, and tungsten]. *Zhurnal prikladnoy khimii – Journal of Applied Chemistry*. 30(2). pp. 177–185.

22. Khanra A.K., Godkhindi M.M., Pathak L.C. (2007) Sintering behaviour of ultra-fine titanium diboride powder prepared by self-propagating high-temperature synthesis (SHS) technique. *Materials Science and Engineering A*. 454–455. pp. 281–287. doi: 10.1016/j.msea.2006.11.083
23. Kislyy P.S., Kuznetsova M.A. (1980) *Spekanie tugoplavkikh soedineniy* [Sintering of refractory compounds]. Kyiv: Naukova Dumka.
24. Kovalev D.Yu., Bolotskaya A.V., Mikheev M.V. (2022) Self-propagating high-temperature synthesis in the Ti–B–Fe system with AlN additions. *Inorganic Materials*. 58(9). pp. 922–930. doi: 10.1134/S0020168522080052
25. Lepakova O.K., Raskolenko L.G., Afanas'ev N.I., Kitler V.D. (2012) Sintez, fazovyy sostav i struktura tverdykh splavov na osnove diborida titana [Synthesis, phase composition, and structure of titanium diboride-based hard alloys]. *Fizika i khimiya obrabotki materialov – Physics and Chemistry of Materials Treatment*. pp. 54–58.
26. Lepakova O.K., Golobokov N.N., Kitler V.D., Radishevskaya N.I., Afanas'ev N.I. (2011) Vliyanie mekhanicheskoy aktivatsii i dobavok kremniya na strukturu i svoystva materialov, spechennykh iz SVS-kompozitsionnogo poroshka TiB<sub>2</sub>-Fe [The effect of mechanical activation and silicon additives on the structure and properties of materials sintered from TiB<sub>2</sub>-Fe SHS composite powder]. *Fizika i khimiya obrabotki materialov – Physics and Chemistry of Materials Treatment*. pp. 71–76.
27. Song Y., Dong S., Stasiuk O., Savvakina D., Ivasishin O. (2020) Synthesis of Ti/TiB composites via hydrogen-assisted blended elemental powder metallurgy. *Frontiers in Materials*. 7. doi: 10.3389/fmats.2020.572005
28. Sun Y., Chang H., Fang Z., Dong Y., Dan Z., Guo Y., Zhou L. (2020) Study on microstructure and mechanical properties of low cost Ti-Fe-B alloy. *MATEC Web of Conferences “The 14th World Conference on Titanium”*. 321. Article 11029. doi: 10.1051/mateconf/20203211102929
29. Huang F., Fu Z., Yan A., Wang W., Wang H., Zhang J., Zhang Q. (2010) Experimental evidence of structural evolution for TiB<sub>2</sub> microcrystal under externally high stresses. *Journal of the Society of Powder Technology*. 1-2. pp. 83–86. doi: 10.1016/j.powtec.2009.08.023
30. Zhou D., Liu Y., Shen B., Zhao X., Xu Y., Tian J. (2016) Structural prediction of ultrahard semi-titanium boride (Ti<sub>2</sub>B) using the frozen-phonon method. *Physical Chemistry Chemical Physics*. 18(11). pp. 7927–7931. doi: 10.1039/C6CP00758A
31. Gai L., Ziennicka-Sylwester M. (2014) The TiB<sub>2</sub>-based Fe-matrix composites fabricated using elemental powders in one step process by means of SHS combined with pseudo-HIP. *International Journal of Refractory Metals & Hard Materials*. 45. pp. 141–146. doi: 10.1016/j.ijrmhm.2014.04.008
32. Tian J.Z., Zhao Y.H., Wang B., Hou H., Zhang Y.M. (2018) The structural, mechanical and thermodynamic properties of Ti-B compounds under the influence of temperature and pressure: first-principles study. *Materials Chemistry and Physics*. 209. pp. 200–207. doi: 10.1016/j.matchemphys.2018.01.067
33. Lepakova O.K., Raskolenko L.G., Maksimov Y.M. (2004) Self-propagating high-temperature synthesis of composite material TiB<sub>2</sub>-Fe. *Journal of Materials Science*. 39(11). pp. 3723–3732. doi: 10.1023/B:JMSC.0000030726.29507.2b
34. Patel M., Singh V., Kumar D. (2023) Effect of particle size and sintering additive on densification and mechanical properties of titanium diboride (TiB<sub>2</sub>) ceramic. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*. 117. Article 106380. doi: 10.1016/j.ijrmhm.2023.106380
35. Lepakova O.K., Raskolenko L.G., Maksimov Y.M. (2000) The mechanism of phase and structure formation of the Ti-B-Fe system in a combustion wave. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 36. pp. 575–581. doi: 10.1007/BF02699520
36. Raskolenko L.G., Lepakova O.K., Maksimov Yu.M. (1991) Spekanie kompozitsionnykh chas-tits na osnove diborida titana, poluchennykh metodom SVS [Sintering of composite particles based on titanium diboride obtained by the SHS method]. *Samorasprostranyayushchiysya*

*vysokotemperaturnyy sintez – Self-Propagating High-Temperature Synthesis*. Tomsk: Tomsk University Press. pp. 110–116.

**Сведения об авторах:**

**Лепакова Ольга Клавдиевна** – кандидат технических наук, научный сотрудник отдела структурной макрокинетики Томского научного центра Сибирского отделения Российской академии наук (Томск, Россия). E-mail: klavdievna.k@yandex.ru

**Шкода Ольга Александровна** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник отдела структурной макрокинетики Томского научного центра Сибирского отделения Российской академии наук (Томск, Россия). E-mail: O.Shkoda@dsm.tsc.ru

**Information about the authors:**

**Lepakova Olga K.** (Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: klavdievna.k@yandex.ru

**Shkoda Olga A.** (Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: O.Shkoda@dsm.tsc.ru

*Статья поступила в редакцию 24.07.2024; принята к публикации 01.08.2025*

*The article was submitted 24.07.2024; accepted for publication 01.08.2025*

Научная статья

УДК 533

doi: 10.17223/19988621/96/7

## Исследование скорости горения аэрозвеси порошка алюминия с учетом лучистого теплопереноса

Ксения Михайловна Моисеева<sup>1</sup>, Артем Андреевич Митрофанов<sup>1</sup>,  
Евгения Сергеевна Чура<sup>1</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> *Томский государственный университет, Томск, Россия*

<sup>1</sup> *Moiseeva\_KM@t-sk.ru*

<sup>2</sup> *art\_1827@mail.ru*

<sup>3</sup> *yulia.chura@mail.ru*

**Аннотация.** Статья посвящена математическому моделированию процесса горения порошка алюминия в воздухе. Математическая модель основана на модели механики двухфазной реагирующей среды и учитывает лучистый теплоперенос в газозвеси. В работе проведено параметрическое исследование, цель которого – определение зависимости видимой и нормальной скорости горения смеси от состава. Показано, что наличие лучистого теплопереноса для мелкодисперсного порошка алюминия снижает видимую скорость распространения пламени по газозвеси порошка алюминия.

**Ключевые слова:** горение, аэрозвесь порошка алюминия, скорость распространения пламени, двухфазные потоки, численное моделирование

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ 24-21-00071.

**Для цитирования:** Моисеева К.М., Митрофанов А.А., Чура Е.С. Исследование скорости горения аэрозвеси порошка алюминия с учетом лучистого теплопереноса // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 81–91. doi: 10.17223/19988621/96/7

Original article

## A study of the burning rate of an air suspension of the aluminum powder with allowance for radiant heat transfer

Kseniya M. Moiseeva<sup>1</sup>, Artyom A. Mitrofanov<sup>2</sup>, Evgeniya S. Chura<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

<sup>1</sup> *Moiseeva\_KM@t-sk.ru*

<sup>2</sup> *art\_1827@mail.ru*

<sup>3</sup> *yulia.chura@mail.ru*

**Abstract.** This paper presents a numerical study of the combustion of an aluminum powder-air suspension in the presence of radiant heat transfer. The physical and mathematical formulation of the problem is based on the approaches of mechanics for two-phase reacting media. The solution method uses an arbitrary discontinuity decay algorithm. A parametric

study of the apparent and normal burning rates of the aluminum powder-air suspension depending on the composition and degree of blackness of the gas suspension is implemented. According to the results obtained, the radiant heat losses can significantly affect the rate of flame propagation in the gas suspension of the fine aluminum powder. It is shown that the presence of the radiant heat transfer reduces the apparent flame propagation velocity through the gas suspension of the aluminum powder.

**Keywords:** combustion, air suspension of aluminum powder, flame propagation velocity, two-phase flows, numerical modeling

**Acknowledgments:** This study was financially supported by the Russian Science Foundation (grant No. 24-21-00071).

**For citation:** Moiseeva, K.M., Mitrofanov, A.A., Chura, E.S. (2025) A study of the burning rate of an air suspension of the aluminum powder with allowance for radiant heat transfer. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 81–91. doi: 10.17223/19988621/96/7

## Введение

В [1] предложена модель горения частиц алюминия, основанная на концепции, что воспламенение частицы не происходит до достижения ею температуры плавления оксидной оболочки. При этом гетерогенные процессы, такие как проникновение кислорода внутрь капли и увеличение толщины оксидной оболочки на ее поверхности, оказывают существенное влияние на продолжительность горения. В работе [2] исследовано воспламенение и горение аэрозвеси порошка алюминия в ламинарном потоке воздуха в условиях обедненного топлива. Сделан обзор работ по горению аэрозвеси порошка алюминия и показано, что с увеличением радиуса частиц скорость горения аэрозвеси уменьшается. В работе [3] показано, что с ростом массовой концентрации частиц увеличиваются максимальная температура пламени смеси и температура воспламенения аэрозвеси в целом. Выводы работы [3] удовлетворительно согласуются с результатами [4]. В работе [5] выявлено, что взвесь порошка алюминия горит при атмосферном давлении в диффузионном режиме. Скорость пламени при этом плавно возрастает с увеличением концентрации горючего. Максимальное значение скорости горения аэрозвеси порошка алюминия АСД-4 достигается для стехиометрического состава газозвеси. В [6] указано, что для частиц алюминия диаметром от 4 до 6 мкм при массовых концентрациях порошка алюминия 100–400 г/м<sup>3</sup> нормальная скорость распространения фронта горения составляет 10–30 см/с. В [7] показано, что зависимость скорости горения порошка алюминия во взрывной камере постоянного давления от массовой концентрации частиц в аэрозвеси имеет параболический вид. В [8] выполнено математическое моделирование горения одиночной частицы алюминия в смеси 79% Ar и 21% O<sub>2</sub>. Основной вывод работы [8] гласит, что по мере сгорания частицы алюминия изменяется тип теплообмена частицы с окружающей средой: на начальных стадиях интенсивен теплообмен излучением, после сгорания частицы и увеличения ее радиуса наибольшая интенсивность теплообмена наблюдается за счет механизмов теплопроводности. Для частиц диаметром 0.2–0.4 мм лучистый теплоперенос составляет от 30 до 50% общей энергии, отдаваемой в окружающую среду. Для порошка алюминия с диаметром частиц менее 50 мкм интенсивность лучистого теплопереноса не превышает 8%.

Настоящая работа основана на модели, предложенной в работе [9] и основанной на подходах из работы [10]. В отличие от [9] в настоящей работе учитывается влияние лучистого теплопереноса в газозвеси. И хотя в работе [8] утверждается, что для одиночных мелкодисперсных частиц алюминия влиянием лучистого теплопереноса можно пренебречь, присутствие лучистого теплообмена и теплопереноса может повлиять на скорость горения аэрозвеси порошка алюминия. В работах [11, 12] указано, что лучистый теплообмен во взвесах пыли достаточно сложен и эффективная степень черноты для газозвесей зависит от материала, размера, концентрации частиц пыли, а также от состава газа и не определяется степенью черноты материала частиц. Из ранее выполненных оценок эффективной степени черноты для аэрозвеси угольной пыли [13] эффективная степень черноты аэрозвеси составила 0.1–0.3. Было показано, что эффективная степень черноты может менять скорость горения аэрозвеси, определенную численным моделированием.

Цель настоящей работы – исследование скорости распространения пламени в смеси порошка алюминия и воздуха и определение влияния интенсивности лучистого теплопереноса на расчетную скорость горения смеси.

### Физико-математическая модель

Предполагается, что в воздухе равномерно распределена монодисперсная взвесь порошка алюминия с массовой концентрацией частиц  $\rho_{kb}$ , размером частиц  $r_{Al,0}$ . На левой границе области расположен тонкий очаг зажигания протяженностью  $x_z$ . Правая граница области полагается бесконечно удаленной от источника зажигания. Коэффициенты диффузии и теплопроводности газа зависят от температуры [9]. Горение частиц алюминия описывается на основе экспериментальных данных аналогично описаниям из [9], воспламенение частицы алюминия происходит при достижении ею температуры зажигания  $T_{kz}$ . Скорость гетерогенной химической реакции на частицах описывается с учетом массоотдачи и массообмена. Учитывается тепловое и динамическое взаимодействие между частицами и газом. Полагается, что при горении частицы алюминия радиус алюминия в частице  $r_{Al}$  уменьшается, радиус самой частицы  $r_p$  растет за счет нарастания оксидного слоя на поверхности частицы. До начала химических реакций в частице  $r_k = r_{Al,0}$ . Система уравнений математической постановки записывается в виде:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g u_g}{\partial x} = -G, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_g u_g^2 + p)}{\partial x} = -\tau_{fr} - Gu_g, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_g (\varepsilon_g + 0.5u_g^2)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_g u_g (\varepsilon_g + 0.5u_g^2) + pu_g]}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_g (T_g) \frac{\partial T_g}{\partial x} \right) - G (c_v T_g + u_g^2 / 2) - u_p \tau_{fr} + \alpha_p n_p S_p (T_p - T_g), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_{O_2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{O_2} u_g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_g \rho_g (T_g) \frac{\partial a_{O_2}}{\partial x} \right) - G, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p u_p}{\partial x} = G, \quad (5)$$

$$\frac{\partial (\rho_p u_p)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p u_p^2}{\partial x} = \tau_{fr} + G u_g, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho_p (\varepsilon_p + 0.5 u_p^2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p u_p (\varepsilon_p + 0.5 u_p^2)}{\partial x} = \frac{QG}{\alpha_1} - \alpha_p S_p n_p (T_p - T_g) + G_{izl} + G (c_v T_g + u_g^2 / 2) + \tau_{fr} u_p, \quad (7)$$

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \frac{\partial n_p u_p}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

$$p = \rho_g R_g T_g, \quad (9)$$

$$T_g(x, t_z) = \begin{cases} T_z, & 0 \leq x \leq x_0 \\ T_b, & x_0 < x < \infty \end{cases}, \quad T_p(x, t_z) = T_b, \quad \rho_{O_2}(x, t_z) = \rho_{O_2,b}, \quad (10)$$

$$\rho_p(x, t_z) = \rho_{p,b}, \quad u_g(x, t_z) = u_p(x, t_z) = 0, \quad \rho(x, t_z) = \rho_{p,b}, \quad n_p(x, t_z) = n_{p,b}.$$

$$\frac{\partial \rho_{O_2}(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_g(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho_p(0, t)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial n_p(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_p(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u_p(0, t) = 0, \quad u_g(0, t) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho_{O_2}(\infty, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_g(\infty, t)}{\partial x} = 0.$$

В (1)–(11) приняты следующие обозначения:  $t$  – время,  $x$  – координата,  $\rho_g, \rho_{O_2}, \rho_p$  – плотность газа, парциальная плотность кислорода, распределенная плотность частиц,  $u$  – скорость,  $r_p$  – радиус частицы,  $p$  – давление,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\lambda = \lambda_{st} (T/T_b)^{2/3}$ ,  $D_g$  – коэффициент диффузии,  $D_g(T_g) = \lambda_g(T_g) / (c_p \rho_g)$ ,  $Q$  – тепловой эффект реакции на поверхности частиц,  $T$  – температура,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости газа.  $\alpha_p = Nu_p \lambda_g / (2r_p)$  – коэффициент теплообмена газа с частицами,  $\varepsilon_g = p / (\rho_g (\gamma - 1))$  – внутренняя энергия газа,  $\gamma = c_{pg} / c_{vg}$  – показатель адиабаты,  $\varepsilon_p = c_p T_p$  – внутренняя энергия частиц,  $G$  – скорость изменения массы частиц при горении,  $S_p = 4\pi r_p^2$  – площадь поверхности частицы,  $S_m = \pi r_p^2$  – площадь миделевого сечения частицы,  $\tau_{fr} = n_p F_{fr}$  – сила трения,  $F_{fr} = C_r S_m \rho_g (u_g - u_p) |u_g - u_p| / 2$  – сила взаимодействия одиночной частицы с газом,  $C_r = 24 (1 + 0.15 Re^{0.682}) / Re$  – коэффициент трения,  $Re$  – число Рейнольдса,  $Nu_p = 2 + (Nu_l^2 + Nu_t^2)^{1/2}$  – число Нуссельта, где  $Nu_l = 0.664 Re^{0.5}$ ,

$Nu_t = 0.037 Re^{0.8}$ ,  $\alpha_1$  – стехиометрический коэффициент реакции кислорода с частицами алюминия. Индексом  $b$  отмечены начальные значения параметров состояния,  $p$  – параметры частиц,  $g$  – параметры газа,  $Al$  – параметры алюминия, содержащегося в частице.

В уравнениях (1)–(8) правые части, отвечающие за химическое взаимодействие газа и частиц, определяются через радиус алюминия в частице. Слагаемые, отвечающие за инерционное и тепловое взаимодействие, определяются через радиус самой частицы, состоящей из алюминия и оксидного слоя на поверхности частицы. Для определения скорости изменения массы частиц при их горении  $G$ , примем, что продуктом сгорания алюминия является окисел  $Al_2O_3$ , который остается на частице; плотность частицы в процессе горения не меняется. Размер оставшейся части алюминия в частице  $r_{Al}$  определяется из соотношения

$$r_{Al} = \left[ \left( \frac{\mu_{Al} + 3/2 \mu_O}{\mu_{Al}} r_{Al,0}^3 - \frac{\rho_p}{(4/3)\pi n \rho_p^0} \right) \frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O} \right]^{1/3}, \quad (12)$$

где  $\mu_O$ ,  $\mu_{Al}$  – молярная масса кислорода и алюминия,  $\rho_p^0$  – собственная плотность алюминия.

Для радиуса частицы  $r_p$ , рассчитанного с учетом того, что частица состоит из несгоревшего алюминия и окисла  $Al_2O_3$ , выполняется соотношение

$$r_p = 3 \sqrt[3]{\frac{3\rho_p}{4\pi\rho_p^0 n_p}}. \quad (13)$$

Подробный вывод уравнений (12)–(13) приведен в [9].

С учетом диффузионного торможения реакции скорость изменения массы частиц алюминия записывается в виде:

$$G = \alpha_1 n_p \rho_p^0 S_{Al} \frac{k(a_{O_2}, r_{Al}) \beta_p}{(k(a_{O_2}, r_{Al}) + \beta_p)}, \quad (14)$$

где  $k(a_{O_2}, r_{Al}) = k_0 a_{O_2}^{0.9} / \sqrt{r_{Al}}$  – закон горения одиночной частицы при избытке окислителя,  $S_{Al} = 4\pi r_{Al}^2$  – площадь поверхности чистого алюминия в частице,  $k_0$  – константа скорости химической реакции,  $\beta_p = \lambda_g(T) Nu_D / (c_g \rho_g r_p)$  – коэффициент массоотдачи частиц.

Перенос тепла за счет излучения от частиц определялся аналогично [14]:

$$G_{izl} = n_p S_{p,m} (4\sigma \varepsilon T_p^4 - Uc), \quad (15)$$

где  $U$  – объемная плотность излучения,  $c$  – скорость света,  $\varepsilon$  – степень черноты,  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана. Величина объемной плотности излучения рассчитывалась из уравнения

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{3n_p S_{p,m}} \frac{dUc}{dx} \right) = -n_p S_{p,m} (4\sigma \varepsilon T_p^4 - Uc) \quad (16)$$

с граничными условиями  $\frac{dU}{dx} = 0$ ,  $cU(\infty) = 4\sigma \varepsilon T_b^4$ .

Температура зажигания частиц алюминия определялась по уравнению [2]

$$T_{ign} = \exp\left(0.087 \cdot \lg\left(2r_{Al,0} \cdot 10^6\right) + 7.28\right). \quad (17)$$

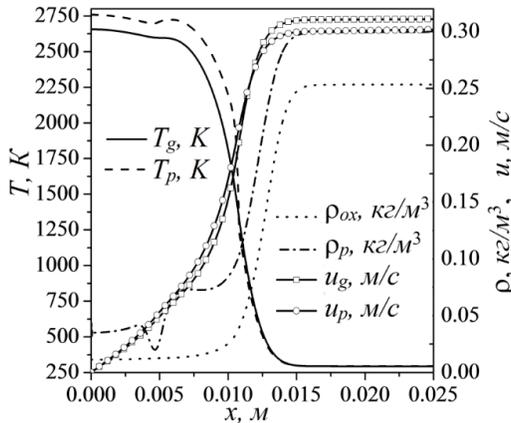
Задача (16) решалась с использованием конечно-разностного метода с неявной аппроксимацией правой части уравнения. Для решения уравнений (1)–(11) использовались метод С.К. Годунова [16] и модификация метода С.К. Годунова, изложенная в [16]. После определения потоков, переносимых на гранях расчетных ячеек, уравнения (1)–(11) решались конечно-разностным методом. Подробная методика численного решения описана в [9], методика решения уравнения (16) описана в работе [14].

### Результаты параметрических расчетов и обсуждение

Для решения задачи взяты физико-химические параметры из работы [9]. Результаты численного исследования представлены на рис. 1–6. Согласно рис. 1 для выбранного радиуса частиц температура газа отличается от температуры частиц и имеет перегиб в зоне горения частицы алюминия. Наблюдаемые скорости движения газа и частиц отличаются незначительно для выбранного радиуса.

Рисунок 1 соответствует установившемуся режиму распространения пламени. Затем волна горения перемещается по пространству со скоростями и температурами, приведенными на рис. 1. Для частиц меньшего радиуса из расчетов получено малое отклонение между динамическими и тепловыми характеристиками газа и частиц.

Учет лучистого теплопереноса влияет на скорость распространения пламени в газозвеси за счет того, что частицы теряют температуру из-за излучения. Далее было выполнено параметрическое исследование влияния учета степени черноты на скорость распространения пламени газозвеси частиц различного радиуса и массовой концентрации. Зависимости скоростей распространения пламени в газозвеси приведены на рис. 2–6.

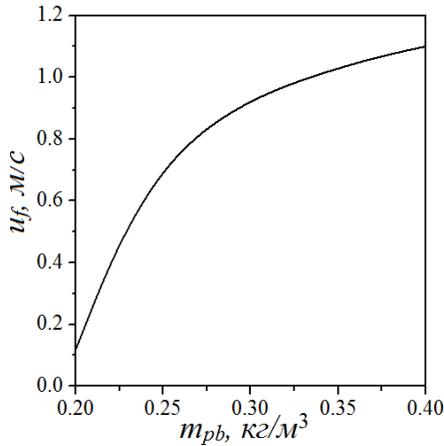


**Рис. 1.** Структура фронта пламени.  $r_{Al,0} = 10 \text{ мкм}$ ,  $\rho_{p,b} = 0.3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\varepsilon = 0.1$

**Fig. 1.** Structure of the flame front at  $r_{Al,0} = 10 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $\rho_{p,b} = 0.3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\varepsilon = 0.1$

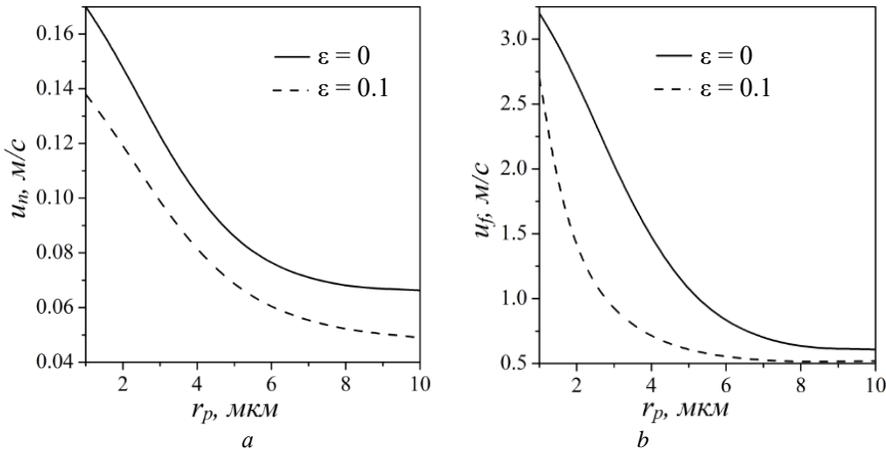
На рис. 2 представлена зависимость видимой скорости горения азрозвеси порошка алюминия с радиусом частиц 2 мкм от массовой концентрации порошка

в аэрозвеси. Для выбранных массовых концентраций частиц при значении  $\varepsilon = 0.1$  скорость горения аэрозвеси порошка алюминия с увеличением массовой концентрации частиц увеличивается.



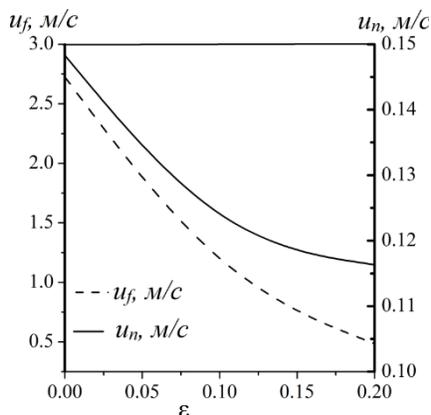
**Рис. 2.** Зависимость видимой скорости горения аэрозвеси порошка алюминия от массовой концентрации частиц алюминия в смеси.  $r_{Al,0} = 2$  мкм,  $\varepsilon = 0.1$   
**Fig. 2.** Apparent burning rate of the air suspension of the aluminum powder as a function of mass concentration of aluminum particles in the mixture at  $r_{Al,0} = 2$   $\mu\text{m}$ ,  $\varepsilon = 0.1$

На рис. 3 представлена зависимость нормальной и видимой скорости распространения пламени по взвешенному порошку алюминия от радиуса частиц алюминия. Наблюдаемая закономерность поведения скорости горения от величины радиуса частицы соответствует работам [2, 9], с увеличением радиуса частиц скорость горения ведет себя асимптотически, замедляя скорость уменьшения.



**Рис. 3.** Зависимость нормальной (a) и видимой (b) скорости горения аэрозвеси порошка алюминия от радиуса частиц алюминия в смеси,  $\rho_{p,b} = 0.3$  кг/м<sup>3</sup>  
**Fig. 3.** (a) Normal and (b) apparent burning rates of the air suspension of the aluminum powder as functions of the radius of aluminum particles in the mixture at  $\rho_{p,b} = 0.3$  kg/m<sup>3</sup>

На рис. 4 представлена зависимость видимой и нормальной скорости горения газозвеси порошка алюминия от эффективной степени черноты  $\varepsilon$ . Сплошной линией представлена нормальная скорость горения газозвеси, пунктиром – видимая скорость. При увеличении степени черноты численные значения видимой и нормальной скорости горения газозвеси уменьшаются. Согласно рисунку относительное изменение нормальной скорости горения, посчитанное из разности скоростей горения при степени черноты 0 и 0.2, составило 21.5%.



**Рис. 4.** Зависимость видимой и нормальной скорости горения аэрозвеси порошка алюминия от степени черноты,  $\rho_{p,b} = 0.3 \text{ кг/м}^3$ ,  $r_{Al,0} = 2 \text{ мкм}$

**Fig. 4.** Apparent and normal burning rates of the air suspension of aluminum powder as functions of the degree of blackness at  $\rho_{p,b} = 0.3 \text{ kg/m}^3$ ,  $r_{Al,0} = 2 \text{ }\mu\text{m}$

Уменьшение скорости распространения пламени с увеличением степени черноты объясняется тем, что при выбранных массовых концентрациях порошка алюминия потери за счет лучистого теплопереоса превышают приход тепла от горения частиц и поток тепла за счет механизмов теплопроводности газа. Соответственно, частицы алюминия имеют меньшую температуру при увеличении степени черноты. Снижение температуры порошка замедляет скорость его горения. Это объясняется тем, что излучение тепла частицами из зоны интенсивных гетерогенных химических реакций понижает температуру частицы. Известно, что зона химической реакции определяется одним «Семеновским интервалом» от адиабатической температуры горения. При учете излучения горячие частицы отдают часть тепла за счет излучения и получают тепло от химической реакции на поверхности, лимитируемой диффузией кислорода к поверхности частицы. В результате этих «условно конкурирующих» процессов излучение понижает температуру частиц и, соответственно, скорость распространения фронта горения.

### Заключение

В работе выполнено численное исследование горения аэрозвеси порошка алюминия при наличии лучистого теплопереноса. Показано, что наличие лучистого теплопереноса для мелкодисперсного порошка алюминия снижает видимую скорость распространения пламени по газозвеси порошка алюминия. Можно сделать

вывод, что для задач горения газодисперсных сред нужно учитывать влияние лучистого теплопереноса.

#### Список источников

1. Dreizin E.L. On the mechanism of asymmetric aluminum particle combustion // *Combustion and Flame*. 1999. V. 117. P. 841–850.
2. Huang Y., Risha G.A., Yang V., Yetter R.A. Effect of particle size on combustion of aluminum particle dust in air // *Combustion and Flame*. 2009. V. 156. P. 5–13.
3. Пурмохаммад Я., Сабзпушани М. Влияние скорости деформации, размера частиц и коэффициента избытка горючего на горение в противотоках смеси воздуха и микрочастиц алюминия // *Физика горения и взрыва*. 2018. Т. 54, № 6. С. 59–67.
4. Badiola C., Gill R.J., Dreizin E.L. Combustion characteristics of micron-sized aluminum particles in oxygenated environments // *Combustion and Flame*. 2011. V. 158. P. 2064–2070.
5. Полетаев Н.И. Связь скорости распространения пылевого пламени с режимом горения частиц горючего // *Физика горения и взрыва*. 2016. Т. 52, № 6. С. 60–69.
6. Бойчук Л.В. Исследование процессов распространения пламени в двухкомпонентных смесях: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.17. Одесса, 1993. 18 с.
7. Алексеев А.Г., Судакова И.В. Скорость распространения пламени в аэрозвесах металлических порошков // *Физика горения и взрыва*. 1983. Т. 19, № 5. С. 34–36.
8. Крюков А.Ю., Малинин В.И. Зависимость размера зоны пламени одиночных частиц алюминия от давления // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника*. 2020. № 60. С. 45–54.
9. Моисеева К.М., Крайнов А.Ю., Дементьев А.А. Определение критических условий искрового зажигания газозвесей // *Физика горения и взрыва*. 2019. Т. 55, № 4. С. 26–33.
10. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
11. Блох А.Г. Основы теплообмена излучением. Л.: Госэнергоиздат, 1962. 332 с.
12. Канторович Б.В. Основы теории горения и газификации твердого топлива. М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1958. 606 с.
13. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu. Effect of radiation transport on minimal sparkplug ignition energy of nanosized coal-dust suspension // *Key Engineering Materials*. 2018. V. 769. P. 311–316.
14. Крайнов А.Ю. Влияние лучистого теплопереноса на минимальную энергию искрового зажигания газозвесей // *Физика горения и взрыва*. 2001. Т. 37, № 3. С. 16–24.
15. Моисеева К.М. Моделирование газодинамики и горения газозвесей порошков горючих материалов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 1.1.9. Томск, 2023.
16. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
17. Крайко А.Н. О поверхностях разрыва в среде, лишенной ‘собственного’ давления // *Прикладная математика и механика*. 1979. Т. 43, № 3. С. 500–510.

#### References

1. Dreizin E. L. (1999) On the mechanism of asymmetric aluminum particle combustion. *Combustion and Flame*. 117(4). pp. 841–850. doi: 10.1016/S0010-2180(98)00125-4
2. Huang Y., Risha G.A., Yang V., Yetter R.A. (2009) Effect of particle size on combustion of aluminum particle dust in air. *Combustion and Flame*. 156(1). pp. 5–13. doi: 10.1016/j.combustflame.2008.07.018
3. Pourmohammad Y., Sabzpooshani M. (2018) Influence of the strain rate, particle size, and equivalence ratio on the combustion of the premixed air–aluminum microparticle mixture with a counterflow structure. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 54(6). pp. 681–688. doi: 10.1134/S0010508218060072

4. Badiola C., Gill R.J., Dreizin E.L. (2011) Combustion characteristics of micron-sized aluminum particles in oxygenated environments. *Combustion and Flame*. 158(10). pp. 2064–2070. doi: 10.1016/j.combustflame.2011.03.007
5. Poletaev N.I. (2016) Relationship between the dust flame propagation velocity and the combustion mode of fuel particles. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 52. pp. 673–682. doi: 10.1134/S0010508216060071
6. Boychuk L.V. (1993) *Issledovanie protsessov rasprostraneniya plameni v dvukhkompontnykh smesyakh* [Investigation of the flame propagation in two-component mixtures]. Ph.D. thesis, Odessa: OSU.
7. Fialkov B.S., Shcherbakov N.D., Akst N.K., Besedin V.I., Ostrovskii M.D. (1983) Application of electrophysical effects for the monitoring and control of heat-engineering and technological processes. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 19(5). pp. 559–561. doi: 10.1007/BF00750419
8. Kryukov A.Yu., Malinin V.I. (2020) Zavisimost' razmera zony plameni odinochnykh chastits alyuminiya ot davleniya [Dependence of the flame zone size of single aluminum particles on pressure]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika – Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Aerospace Engineering*. 60. pp. 45–54.
9. Moiseeva K.M., Krainov A.Y., Dement'ev A.A. (2019) Critical conditions of spark ignition of a bidisperse aluminum powder in air. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 55. pp. 395–401. doi: 10.1134/S001050821904004X
10. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka.
11. Blokh A.G. (1962) *Osnovy teploobmena izlucheniem* [Fundamentals of heat exchange by radiation]. Leningrad: Gosenergoizdat.
12. Kantorovich B.V. (1958) *Osnovy teorii gorenii i gazifikatsii tverdogo topliva* [Fundamentals of the theory of combustion and gasification of solid propellants]. Moscow: Izdatel'stvo akademii nauk SSSR.
13. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu. (2018) Effect of radiation transport on minimal sparkplug ignition energy of nanosized coal-dust suspension. *Key Engineering Materials*. 769. pp. 311–316. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.769.311
14. Krainov A.Y. (2001) Effect of radiant heat transfer on the minimum spark-ignition energy of gas suspensions. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 37. pp. 259–266. doi: 10.1023/A:1017515720961
15. Moiseeva K.M. (2023) *Modelirovanie gazodinamiki i goreniiya gazovzvesey poroshkov goryuchikh materialov* [Modeling of gas dynamics and combustion of gas mixtures of combustible powders]. Dissertation, Tomsk.
16. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.I., Kraiko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.
17. Kraiko A.N. (1979) On discontinuity surfaces in a medium devoid of “proper” pressure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 43(3). pp. 539–549. doi: 10.1016/0021-8928(79)90102-3

#### **Сведения об авторах:**

**Моисеева Ксения Михайловна** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: Moiseeva\_KM@t-sk.ru

**Митрофанов Артем Андреевич** – аспирант кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: art\_1827@mail.ru

**Чура Евгения Сергеевна** – студент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: yulia.chura@mail.ru

***Information about the authors:***

**Moiseeva Kseniya M.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Moiseeva\_KM@t-sk.ru

**Mitrofanov Artyom A.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: art\_1827@mail.ru

**Chura Evgeniya S.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: yulia.chura@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 06.11.2024; принята к публикации 01.08.2025*

*The article was submitted 06.11.2024; accepted for publication 01.08.2025*

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/96/8

## Методология численного моделирования резания для расчетов распределения контактных напряжений на примере фрезерования стали

Пётр Михайлович Пивкин<sup>1</sup>, Артём Сергеевич Бабаев<sup>2</sup>,  
Виктор Николаевич Козлов<sup>3</sup>, Артём Романович Семёнов<sup>4</sup>,  
Екатерина Сергеевна Назаренко<sup>5</sup>, Алексей Борисович Надыкто<sup>6</sup>

<sup>1, 5, 6</sup> *Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»,  
Москва, Россия*

<sup>2, 3, 4</sup> *Томский государственный университет, Томск, Россия*

<sup>1</sup> *pmpivkin@gmail.com*

<sup>2</sup> *a.s.babaev@mail.tsu.ru*

<sup>3</sup> *kozlov-viktor@bk.ru*

<sup>4</sup> *artems2102@yandex.ru*

<sup>5</sup> *katarina.86@bk.ru*

<sup>6</sup> *abnadykto@yandex.ru*

**Аннотация.** Представлена общая методология численного моделирования резания при примере фрезерования концевой фрезой. Предложена многоуровневая модель, в которой представляются к определению функциональные связи между конструктивными параметрами инструмента, остротой режущей кромки, режимами резания, характеристиками обрабатываемого материала и возникающими эквивалентными напряжениями по Мизесу в режущем клине зуба фрезы.

**Ключевые слова:** численное моделирование резания, метод конечных элементов, фрезерование, контактные напряжения

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках государственного задания № FSFS-2024-0014 «Цифровая кибер-физическая система проектирования и производства многономенклатурной гаммы режущего инструмента нового поколения с уникальными функциональными свойствами для нужд отечественной станкоинструментальной промышленности».

**Для цитирования:** Пивкин П.М., Бабаев А.С., Козлов В.Н., Семёнов А.Р., Назаренко Е.С., Надыкто А.Б. Основы методологии численного моделирования резания для расчётов распределения контактных напряжений в режущем клине при фрезеровании концевой фрезой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 92–107. doi: 10.17223/19988621/96/8

Original article

## Methodology of the numerical modeling of cutting for calculating the contact stress distribution: a case study on steel milling

Pyotr M. Pivkin<sup>1</sup>, Artyom S. Babaev<sup>2</sup>, Viktor N. Kozlov<sup>3</sup>,  
Artyom R. Semyonov<sup>4</sup>, Ekaterina S. Nazarenko<sup>5</sup>, Aleksey B. Nadykto<sup>6</sup>

<sup>1, 5, 6</sup> *Moscow State University of Technology STANKIN, Moscow, Russia*

<sup>2, 3, 4</sup> *Tomsk State University, Tomsk, Russia*

<sup>1</sup> *pmpivkin@gmail.com*

<sup>2</sup> *a.s.babaev@mail.tsu.ru*

<sup>3</sup> *kozlov-viktor@bk.ru*

<sup>4</sup> *artems2102@yandex.ru*

<sup>5</sup> *katarina.86@bk.ru*

<sup>6</sup> *abnadykto@yandex.ru*

**Abstract.** This paper presents a general methodology for the numerical modeling of cutting using end milling as an example. The proposed multilevel model is specified with functional relations between the tool design parameters (shape of the end part, number of teeth, front and back angles), sharpness (radius of rounding) of the cutting edge, cutting modes (cutting speed, feed, cutting depth and width), physical and mechanical characteristics of the processed material, and the resulting equivalent Mises stresses in the cutting wedge of the milling tooth. The justification of the requirements for the finite element mesh is given. It is suggested to choose a rational option when splitting into elements. The assumptions of the model that allow reducing requirements to computing power without calculation quality losses, are justified.

**Keywords:** numerical modeling of cutting, finite element method, milling, contact stresses

**Acknowledgments:** This work was carried out within the State Assignment (theme No. FSFS-2024-0014) “Digital cyber-physical system for design and production of a multiproduct range of new generation cutting tools with unique functional properties for the needs of the domestic machine-tool industry”.

**For citation:** Pivkin, P.M., Babaev, A.S., Kozlov, V.N., Semyonov, A.R., Nazarenko, E.S., Nadykto, A.B. (2025) Methodology of the numerical modeling of cutting for calculating the contact stress distribution: a case study on steel milling. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 92–107. doi: 10.17223/19988621/96/8

### Введение

Прогнозирование и управление эффективностью процесса резания (в частном случае фрезерование) становится затруднительным в силу необходимости учета большого количества факторов. К последним относятся физические явления, сопровождающие процесс отделения стружки от обрабатываемой поверхности (условия контакта поверхностей двух твердых тел): физико-механические характеристики инструментального и обрабатываемого материалов, условия формирования

нагрузок (деформаций) в режущем клине и заготовке; выделение тепла за счет трения и диссипативных эффектов; формирование износа и разрушения контактирующих поверхностей и т.п.

Установление эффективности процесса резания путем проведения натуральных испытаний в настоящее время становится процессом с низкой эффективностью ввиду повышенной стоимости времени работы станка и необходимости большого количества итераций для выработки статистически достоверного количества экспериментов. В этой связи натурные испытания заменяются на вычислительные эксперименты, основанные на проведении моделирования процессов резания с использованием различных вычислительных моделей. Такие модели рассматриваются в условиях специальных программных продуктов, например Abaqus, LS-Dyna, Ansys Workbench и др. Все они при корректной постановке задачи позволяют сократить финансовые издержки при изучении резания, особенно когда в эксперименте участвуют дорогостоящее оборудование и материалы, наличие которых может быть ограничено по различным причинам. Таким образом, предварительное моделирование процесса резания позволяет избежать необходимости применения станочной базы и машинного времени, при этом формируя адекватное поведение изучаемых процессов. Важно понимать, что каждая вычислительная модель строится под конкретную задачу, учитывающую условия резания, а также допущения, использование которых не должно сказываться на эффективности моделирования и ожидаемых результатах. В случае, когда модель в полной мере соответствует физическому процессу резания, для обеспечения расчетов (без учета производительности вычислительной техники) могут потребоваться дни или недели вычислительного времени. Поэтому отдельным направлением является задача оптимизации вычислительных процессов.

Исследованию моделирования образования шероховатости поверхности при фрезеровании инструментами с принудительной фаской посвящена работа В. Denkena и соавт. [1]. Авторы приводят разработанную аналитическую модель для прогнозирования рельефа поверхности, включающую вариации режимов фрезерования (подача и толщина срезаемого слоя) и геометрию режущего клина инструмента. Ими установлено, что биения инструмента оказывают существенное влияние на профиль поверхности. Продолжение этой работы описано в [2], где отмечается, что проведенное моделирование демонстрирует повышение стабильности процесса фрезерования инструментом с фаской. Исследования показали, что фаска в сторону передней поверхности (отрицательный передний угол) может повысить стабильность процессов фрезерования за счет контакта с заготовкой и возникающих демпфирующих сил. В качестве положительного явления отмечается, что фаска приводит к выглаживающему эффекту, сопровождающемуся снижением шероховатости обработанной поверхности. Таким образом, эффективной может считаться фаска длиной 0,1 мм.

В работах [3, 4] исследовано влияние различных геометрических параметров инструмента на обработку с применением метода конечных элементов. Использование моделирования переходных процессов при резании позволило рассчитать контактные напряжения и силы, а также распределение температуры в заготовке. Основными результатами работы стали увеличение технологических сил и температуры в зоне контакта из-за дополнительного трения между фаской инструмента и заготовкой.

В работе [5] приведены результаты экспериментальных исследований резания с использованием различной геометрии инструмента. Было обнаружено, что в значительной мере радиус округления режущей кромки и переменные углы наклона вспомогательных режущих кромок, расположенных по спирали, оказывают влияние на эффективность процесса с точки зрения демпфирования вибраций в технологической системе.

Влияние округления кромок также отмечается в работе [6]. На примере режущих пластин авторы отмечают, что асимметричное округление кромки оказывает влияние на размер застойной зоны резания, положение точки разделения материала на стружку, а также с увеличением округления в сторону задней поверхности происходит повышение сил резания и температуры в зоне контакта.

При создании расчетной модели авторы используют подходы Лагранжа [7–12], Эйлера [13], их модификации и другие альтернативные методы [14], учитывающие особенности динамики процесса резания. Важно отметить, что от выбора математического аппарата зависит адекватность модели и ее способность выполнять расчеты. Моделирование методом конечных элементов высокоскоростной обработки при ортогональном строгании стали AISI 4340 рассматривается в работе [15]. В работе применен динамический метод Лагранжа–Эйлера (ALE) с возможностью адаптивного перестроения расчетной сетки при использовании конечно-элементной модели.

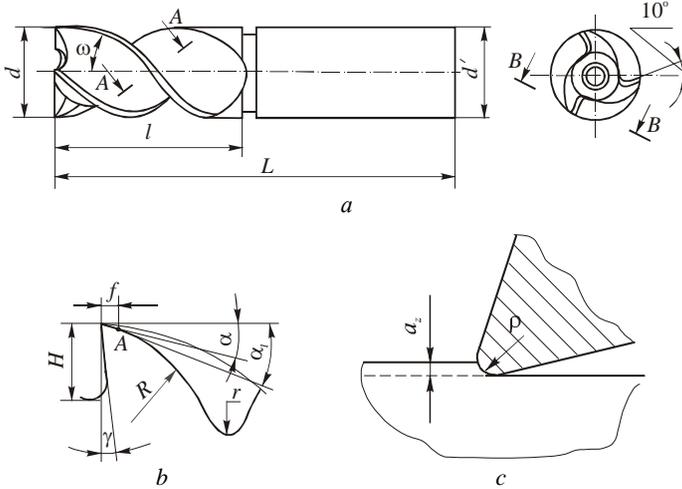
По результатам обзора открытых источников определена актуальность настоящей работы, цель которой – разработка методологии численного моделирования резания для расчетов распределения контактных напряжений по Мизесу в режущем клине на примере фрезерования пластичной стали марки AISI 304 SS твердосплавной концевой фрезой.

### **Геометрическая постановка задачи**

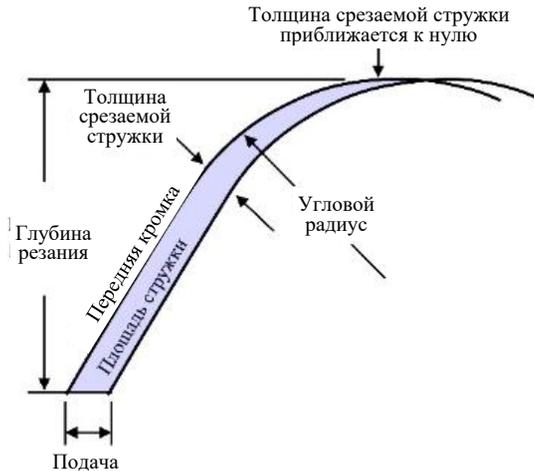
В настоящей работе рассмотрен порядок создания модели численного расчета контактных напряжений, возникающих в процессе фрезерования с использованием метода конечных элементов в Ansys Workbench. В ходе разработки модели особое внимание уделялось формированию контактных нагрузок и напряжений на передней и задней поверхностях режущего клина концевой фрезы (рис. 1). Для трехмерного моделирования задаются обязательные геометрические параметры режущей части концевой фрезы: диаметр  $d$ , мм; длина рабочей части  $L$ , мм; радиус сферической торцевой части  $R$ , мм; передний угол  $\gamma$  и задний угол  $\alpha$ , град.; угол наклона винтовой канавки  $\omega$ , град.; высота зуба  $H$ , мм. При необходимости вводятся дополнительные характеристики режущего клина: радиус округления (острота) режущих кромок  $\rho$ , мм; ширина упрочняющей фаски  $f$ , мм и т.п. [16].

При создании методологии подразумевалось, что в качестве обрабатываемых материалов могут быть использованы коррозионностойкие стали и титановые сплавы различных марок, имеющие широкое распространение при обработке резанием ответственных и высоконагруженных элементов морской техники, которые имеют сложную пространственную геометрию (лопасти, винты, крыльчатки и т.п.).

Рассматриваемая для расчетов область представляет собой участок контактного взаимодействия режущей кромки и обрабатываемой поверхности заготовки, схематичное представление которых показано на рис. 2.



**Рис. 1.** Схемы геометрических параметров концевой фрезы:  
 a – общий вид; b – зуб в сечении A–A; c – округленная режущая кромка и толщина среза  
**Fig. 1.** Schematic diagrams of the geometric parameters of the end mill:  
 (a) general view, (b) tooth in A–A section, and (c) rounded cutting edge and cut thickness



**Рис. 2.** Схема определения толщины срезанной стружки при фрезеровании концевой фрезой со сферическим торцом  
**Fig. 2.** Pattern for determining the cut chip thickness when using a tapered end mill with a spherical face

Для расчета величины толщины срезаемого слоя и ее наибольшего значения перед выходом зуба фрезы из контакта с заготовкой при встречном фрезеровании представлена схема на рис. 3.

Перемещение зуба фрезы в направлении подачи при глубине фрезерования (резания)  $t$  и диаметре фрезы  $D$  происходит на величину  $S_{az}$ . Ее численное значение определяется центральным углом  $\psi$ , измеряемым от точки входа режущей кромки

зуба фрезы до ее положения в момент начала выхода зуба из контакта с заготовкой и величиной подачи на зуб  $s_z$ .

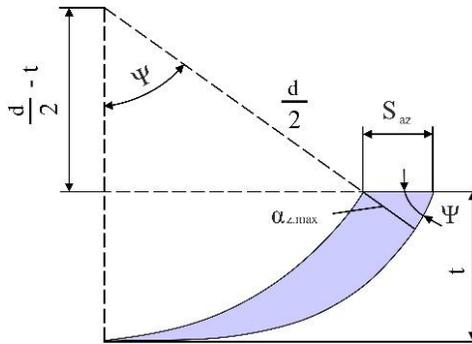


Рис. 3. Расчетная схема для определения толщины срезаемого слоя при встречном фрезеровании

Fig. 3. Calculation model for determining the cut layer thickness during counter milling

Для определения толщины среза текущей  $a_i$  и наибольшей  $a_{max}$ , которая получается перед выходом зуба фрезы из контакта с заготовкой при встречном фрезеровании, использовали схемы перпендикулярно (рис. 4, *a*) и вдоль (рис. 4, *b*) оси вращения фрезы.

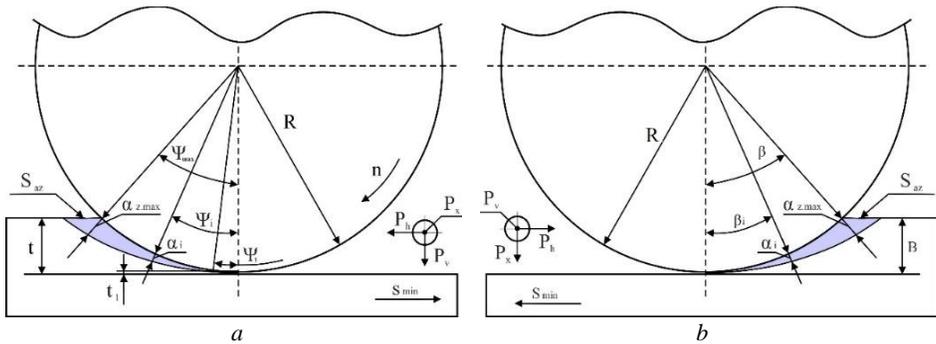


Рис. 4. Общий случай схемы для определения толщины срезаемого слоя  $a_i$  и  $a_{z,max}$  на скругленной режущей кромке концевой фрезы со сферическим торцом:

*a* – вид перпендикулярно оси вращения фрезы; *b* – вид вдоль оси вращения фрезы

Fig. 4. General pattern for determining cut layer thicknesses  $a_i$  and  $a_{z,max}$  at the curved cutting edge of the end mill with a spherical face: (a) perpendicular to and (b) along the axis of the mill rotation

Из геометрических построений с учетом масштаба было определено (измерено), что угол  $\psi_{max} = 8^\circ$ . Таким образом,

$$S_{az} = 2 \cdot S_z \cdot \sqrt{\left(\frac{t}{d}\right)} / \sin \psi_{max} \quad (1)$$

Если бы режущая кромка зуба фрезы была прямолинейной, то на всей ее длине наибольшая толщина среза была бы везде одинаковой. Но при криволинейной главной режущей кромке, характерной для концевой фрезы, необходимо учитывать

уменьшение наибольшей толщины среза при уменьшении угла  $\beta$  на виде в плоскости, проходящей через ось вращения фрезы, т.е. на виде, приблизительно перпендикулярном передней поверхности круглого участка без учета переднего угла, в точке выхода зуба из контакта с заготовкой (см. рис. 4, b).

Тогда

$$S_{az} = 2 \cdot S_z \cdot \sqrt{(B/d)} / \sin \beta_{\max} \quad (2)$$

Для задания режимов обработки, а также при численном моделировании определяют диапазон варьирования режимами резания (скорость резания  $V$ , м/мин; подача  $S$ , мм/мин; глубина резания  $t$ , мм; ширина резания  $B$ , мм), т.е. параметры, влияющие на производительность обработки.

Определение максимальной толщины срезаемого слоя (см. рис. 4) производили по формуле

$$a_{\max} = 2 \cdot S_{az} \cdot \sqrt{t/d - (t/d)^2} \quad (3)$$

### Моделирование рабочих материалов

Численное моделирование обработки резанием заключается в подготовке вычислительной модели: выборе элементов твердотельных конструкций, установлении характера взаимодействия участвующих в контакте поверхностей, а также назначения характеристик и свойств их материалов.

Физико-математическая модель механического поведения деформируемой срезы фрезы, изготовленной из твердого сплава WC + Co, и обрабатываемого образца из нержавеющей стали марки AISI 304 SS содержит уравнения сохранения массы, импульса и энергии, записанные в рамках классического лагранжевого подхода континуальной механики для динамических условий взаимодействия [17]. Уравнение состояния для конденсированных фаз записывается в виде [18]:

$$P = \Gamma_0 E + \rho_0 C_0^2 \xi \left[ 1 + (1 - \frac{\Gamma_0}{2}) \xi \right] / [1 - (S_1 - 1) \xi]^2, \quad (4)$$

где  $\xi = \rho / \rho_0 - 1$ ,  $\rho$  и  $\rho_0$  – текущая и начальная массовые плотности;  $P$  – давление;  $\Gamma_0$  – коэффициент Грюнайзена;  $C_0, S_1$  – постоянные материала.

Девiator напряжений определяется из решения уравнения

$$\frac{dS_{ij}}{dt} = 2\mu(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk}), \quad (5)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига;  $\dot{\epsilon}_{ij}$  – компоненты тензора скорости деформации;  $dS_{ij} / dt$  – производная Яуманна для компонент тензора девiatorа напряжения в конденсированной фазе материальной частицы. В качестве критерия пластичности использовано условие Мизеса  $\sigma_{eq} \leq \sigma_S$ , где  $\sigma_{eq} = [(3/2)S_{ij}S_{ij}]^{1/2}$ .

В качестве материала обрабатываемого образца рассматривается сплав AISI 304 SS. Для описания кинетики развития пластического течения обрабатываемого материала в диапазоне скоростей деформации  $10^{-3}$  до  $10^4 \text{ c}^{-1}$  использовано соотношение Джонсона–Кука [19]. Эта континуальная модель предназначена для моделирования поведения материалов, подверженных действию больших деформаций, высоких скоростей деформации и температур, что имеет место при резании.

Обычно используется в задачах с интенсивными динамическими нагрузками, порождаемыми столкновением, при высоких скоростях нагружения:

$$\sigma_s = \left[ A + B \cdot \varepsilon_p^n \right] \cdot \left[ 1 + C \cdot \ln \varepsilon_p^* \right] \cdot \left[ 1 - (T_H)^m \right]. \quad (6)$$

Константа  $A$  – величина условного предела текучести материала при исходной скорости деформации,  $B$  и  $n$  – константа и степень деформационного упрочнения. Выражения во второй и третьей скобках описывают эффекты влияния скорости деформации через параметры скоростной чувствительности  $C$ , температуры и коэффициент температурного разупрочнения  $m$  соответственно,  $T_H = \left( \frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)$  –

гомологическая температура. В частности, температурное разупрочнение влияет на напряжение течения, которое стремится к нулю при приближении температуры проведения эксперимента  $T_r$  к температуре плавления  $T_m$ . В используемой модели учитывается локальный разогрев обрабатываемого материала в зоне формирования стружки при резании вследствие диссипации работы напряжений на пластических деформациях; в некоторых работах их локальные значения даже приравнивают к интенсивным пластическим деформациям, поэтому изменение температуры определяется с помощью соотношения [17]

$$T = T_0 + \frac{0.9}{C_p} \int_0^t \left| \sigma_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right| dt, \quad (7)$$

где  $C_p$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $T_0$  – температура до начала деформации.

Значения материальных констант, использованных в расчетах, и физико-механические характеристики обрабатываемого и инструментального материалов подобраны из открытых источников [19].

При проведении моделирования были использованы следующие значения коэффициентов моделей:

– для твердого сплава WC + Co:  $\Gamma_0 = 1.54$ ;  $C_0 = 4\,029$  м/с;  $S_1 = 1.237$ ;  $\rho_0 = 17\,000$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu = 160$  ГПа;

– для сплава AISI 304 SS:  $\Gamma_0 = 1.23$ ;  $C_0 = 5\,130$  м/с;  $S_1 = 1.028$ ;  $\rho_0 = 7\,950$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu = 77$  ГПа;  $A = 452$  МПа,  $B = 694$  МПа;  $n = 0.311$ ;  $C = 0.0067$ ;  $m = 0.996$ ;  $T_r = 296$  К,  $T_m = 1\,662$  К;  $C_p = 423$  Дж/(кг · К)

Так как в процессе фрезерования образуется стружка, то в вычислительной модели учитывают эффект накопления повреждений в области деформирования, а отрыв материала моделируют эрозией элементов при достижении значений параметра поврежденности, равного 1. Эволюция параметра поврежденности среды  $D$  вычислялась путем суммирования приращений на дискретных интервалах времени, соответствующих шагу интегрирования:

$$D = \sum_{k=1} \Delta D_k, \quad (8)$$

где  $\Delta D_k = [\Delta \varepsilon_{eq}^p]_k / \varepsilon_f$  – приращение параметра поврежденности за шаг по времени

ни  $\Delta t_k$ ;  $[\Delta \varepsilon_{eq}^p]_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{\varepsilon}_{eq}^p dt$  – приращение эквивалентной пластической деформации;

$\varepsilon_f$  – значение эквивалентной пластической деформации в момент начала макроскопического повреждения деформируемой среды:

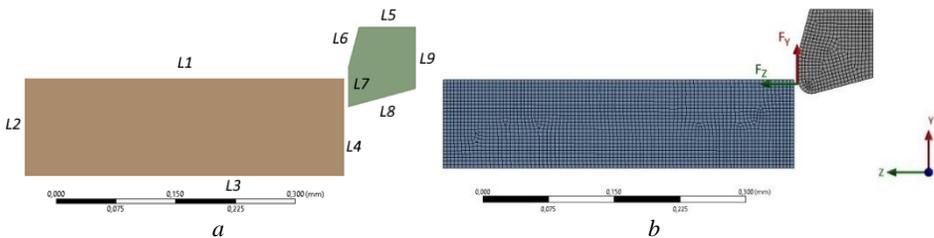
$$\varepsilon_f = [D_1 + D_2 \exp(D_3 \sigma^*)][1 + D_4 \ln \dot{\varepsilon}][1 + D_5 T_H] \quad (9)$$

где  $\sigma^* = \frac{P}{\sigma_{eq}}$  – параметр трехосности напряженного состояния;  $P$  – гидростатическое давление;  $\sigma_{eq}$  – эквивалентные напряжения по Мизесу;  $\dot{\varepsilon}$  – нормированная величина эквивалентной скорости пластической деформации  $D_1$ – $D_5$  – константы модели разрушения при накоплении повреждения, которые для AISI 304 SS имеют следующие значения:  $D_1 = 0.53$ ;  $D_2 = 0.5$ ;  $D_3 = -6.8$ ;  $D_4 = 0.014$ ;  $D_5 = 0$ .

### Конечно-элементная модель и сетка

При создании вычислительной модели особое внимание уделяется допущениям (упрощениям) модели. Переход от макроуровня к микроуровню обуславливается геометрическими особенностями режущей кромки и особенностями самого процесса фрезерования, так как при численном моделировании необходимо учитывать округление режущей кромки, фактическую максимальную толщину среза и путь резания, которые совокупно влияют на количество элементов расчетной сетки. В совокупности большое количество элементов расчетной сетки при их малых размерах на макроуровне усложняет решение динамической задачи в явной постановке, реализованной в решателе AUTODYN [18], при этом кратно увеличивается расчетное время за счет малого шага интегрирования, зависящего от размеров самого маленького элемента сетки. В статьях [19, 20] акцентировано внимание на масштабном уровне похожего моделируемого процесса и предлагается решение для оптимизации процесса моделирования фрезерования, где производится переход от макроуровня с учетом всех особенностей реальных объектов, участвующих в процессе фрезерования, к альтернативным постановкам и идеализации задачи до двухмерного случая в микромасштабе геометрической модели. По некоторым признакам из-за принятых упрощений постановка задачи переходит от фрезерования, когда режущая кромка движется по окружности, к развертке пройденного кромкой пути, когда осуществляется прямолинейное движение. При этом геометрические размеры, скорости резания остаются соизмеримыми.

Затем задают начальные и граничные условия закрепления, контакта режущего клина с обрабатываемой поверхностью заготовки по поверхностям, указанным на рис. 5, *a*.



**Рис. 5.** Примеры микромасштабных геометрических моделей, используемых в моделировании: *a* – радиус скругления 0 мм (острая кромка); *b* – радиус скругления больше 0 мм (округленная кромка)

**Fig. 5.** Examples of microscale geometric models with rounding radius of: (a) 0 mm (sharp edge) and (b) greater than 0 mm (rounded edge)

Граничные условия при решении задачи соответствовали следующему случаю:  
– на нижней ( $L3$ ) и торцевой слева ( $L2$ ) гранях модели образца жесткое закрепление;

– на верхней ( $L1$ ) и торцевой справа ( $L4$ ) гранях модели образца условия свободной поверхности;

– на верхней ( $L5$ ) и торцевой справа ( $L9$ ) гранях режущего клина фрезы постоянная скорость смещения вдоль образца от  $L4$  к  $L2$ , соответствующая значениям режимов резания и ограничениям на смещения в других направлениях, что вынуждает режущий клин двигаться с заданной линейной скоростью, не меняя направления.

Выбор шага пространственной дискретизации расчетной области обеспечивает сходимость численного решения задачи. Пример расчетной сеточной модели представлен на рис. 5, *b*, ячейки модели представлены четырехузловыми элементами. Шаг интегрирования по времени определяется из условия Куранта [17].

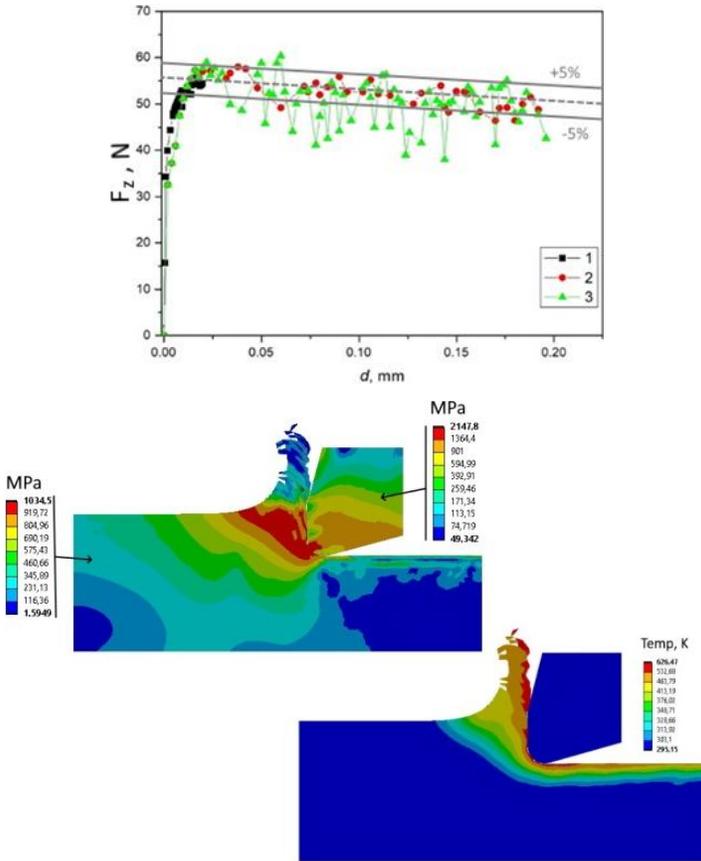
### Результаты и обсуждение

Для проверки результата анализа сеточной сходимости произведена оценка по графику на рис. 6, где представлены силы резания в виде графиков контактного усилия  $F_z$ , отображенного на схеме рис. 5, *b*. Результаты получены на трех расчетных сетках со средними размерами конечных элементов (КЭ) 0.002, 0.004 и 0.005 мм, графики 1, 2, 3 соответственно. Решения качественно отличаются друг от друга, однако количественно по среднему схожи: графики имеют общую асимптоту, к которой сходятся во всех случаях. Оптимальным вариантом при анализе сеточной сходимости является использование в вычислительной модели сетки 2, где решение является средним между случаями 1 и 3. Близкое качественное и количественное совпадение графиков 1 и 2 говорит о хорошем допустимом диапазоне размеров элементов. Максимальные значения усилий в численных расчетах составляли  $56 \pm 2.8$  Н.

Приведенный результат можно считать достаточно точным совпадением с экспериментальными данными, опубликованными в [21, 22]. Экспериментальные значения максимальных усилий резания в начальные моменты обработки концевыми фрезами с различными свойствами режущей кромки, приведенные к 1 мм длины режущей кромки, при той же толщине стружки колебались в пределах  $53 \pm 5$  Н. Поэтому можно считать, что предлагаемая методика и разработанная физико-математическая модель для численного моделирования дает адекватный прогноз контактных усилий в режущем клине при фрезеровании концевой фрезой. Как следствие, значения контактных напряжений в резце и материале образца являются адекватными.

Возвращаясь к графику на рис. 6, отметим, что по виду контактное усилие быстро увеличивается до максимального значения и постепенно стабилизируется на начальном этапе фрезерования. Возрастающий нелинейный характер контактного усилия в начале характеризуется упругопластическим поведением материала образца во время начала взаимодействия с инструментом и образования навала перед критическим накоплением повреждений под режущей кромкой и первым отрывом, символизирующим образование стружки. Случай 1 со средним размером элементов 0.002 мм практически не имеет осцилляций, но более затратен по времени и отражает только начальный момент вхождения режущей пластины в заготовку,

при этом для отображения результата на широкий интервал требуется на порядки больше расчетного времени, чем в других двух. Отсюда делается вывод, что бесконечное уменьшение среднего размера КЭ-сетки нецелесообразно в силу значительного увеличения расчетного времени в угоду слабому уточнению результатов решения.



**Рис. 6.** Зависимость силы резания от продвижения режущей кромки в заготовке из сплава *AISI 304 SS* при скорости резания  $V = 50$  м/мин и поля распределения эквивалентных напряжений и температуры в образце в момент времени 0.24 с

**Fig. 6.** Cutting force as a function of cutting-edge motion in *AISI 304 SS* alloy specimens at cutting speed  $V = 50$  m/min; equivalent stress and temperature distributions in the specimen at a time instant of 0.24 s

Осцилляции на графике (см. рис. 6) отражают процесс моделирования отрыва материала стружки от заготовки и, по сути, являются артефактами выбранного метода эрозии для разделения сетки, который не стоит воспринимать как физическое явление. Так как за отделение стружки в численном решении отвечает алгоритм эрозии элементов с максимальным повреждением, то при удалении поврежденного элемента или целого кластера элементов на какое-то время под задней поверхностью режущего клина возникает микропустота. По мере прохождения этой

пустоты резцом и взаимодействия со следующим малоповрежденным элементом происходит сброс усилия на некоторую величину. При использовании крупных КЭ образуется большой зазор, поэтому величина сброса усилия кратно больше.

Из графического представления полей напряжений на рис. 6 следует, что максимальные значения эквивалентных напряжений в инструменте и образце возникают в области округления резца, находящегося в контакте со стружкой, образуя полосу адиабатического сдвига в материале образца и пятно концентрации в инструменте. Максимальные значения температуры 626 К, возросшей вследствие диссипативных эффектов при развитии пластической деформации, находятся в области контакта инструмента и стружки – в месте концентрации максимальных пластических деформаций. Сопоставляя количественные данные по контактным усилиям, качественное распределение искомых величин и формы образующейся стружки, можно считать, что конечно-элементная модель фрезерования, описанная в данной статье, соответствует фактическому течению.

### **Заключение**

В работе предложены алгоритм расчета и общая методология создания физико-математической модели скоростного взаимодействия режущей кромки с образцом из конструкционного материала во время процесса фрезерования, позволяющая проводить оценку напряженно-деформированного состояния инструмента при заданных режимах обработки. Для автоматизации расчетов предлагается использовать решатель AUTODYN, доступный в виде самостоятельной программы или в качестве расчетного ядра в инженерных программных комплексах.

В ходе подготовки расчетной модели предлагается проводить аналитическую оценку максимальной толщины срезаемой стружки при различных скоростях резания с учетом геометрических особенностей режущего клина фрезы, которые выступают основными данными для создания геометрической модели. В качестве допущения при моделировании используется идеализированная двумерная модель прямолинейной развертки пути, пройденного режущей кромкой при фрезеровании.

При разработке физико-математической модели обработки образцов концевой фрезой учитывается упругопластическое поведение материала с разупрочнением и разрушением на примере обрабатываемого сплава AISI 304 SS. Определяющее уравнение в виде модели Джонсона–Кука позволяет описывать сложное сочетание факторов влияния на пластическое течение материала при фрезеровании, таких как скоростная чувствительность, температурное размягчение. Одноименная модель повреждаемой среды позволяет учесть эффект накопления микроповреждений вплоть до момента образования макроскопического разрушения при образовании стружки. В совокупности появляется возможность теоретически оценить кинетику протекания процесса образования стружки как качественно, так и количественно.

Ключевой вопрос о возможности применения предлагаемой методики и создаваемой модели для получения с помощью численного моделирования адекватных прогнозов контактных напряжений в режущем клине при фрезеровании концевой фрезой закрывается проведенным анализом сеточной сходимости с экспериментальными данными и сравнениями с экспериментальными данными. Расчетные максимальные значения контактного усилия при фрезеровании совпадают с экспе-

риментальными данными в рамках небольшой погрешности. Анализ сеточной сходимости позволил подобрать расчетную сетку с оптимальными размерами.

Предлагаемая методика может быть адаптирована для широкого класса пар «обрабатываемый / инструментальный материал». Таким образом, появляется возможность оценивать НДС при различных сочетаниях инструмента и обрабатываемых материалов. Знание параметров НДС должно позволить уже на стадии проектирования формировать режущие кромки с улучшенными геометрическими параметрами, повысить жесткость и прочность режущего клина в целом, а за счет численного прогноза увеличить производительность инструмента при сопоставимом уровне нагрузки на технологическую систему.

#### Список источников

1. *Denkena B., Kohler J., Sellmeier V., Morke T.* Topography prediction of resilient parts after flank milling with chamfered tools // *Production Engineering. Research and Development*. 2011. V. 5. P. 273–281. doi: 10.1007/s11740-011-0305-2
2. *Denkena B., Bicke W., Sellmeier V.* Flank milling of compliant workpieces with chamfered tools // *Production Engineering. Research and Development*. 2012. V. 6. P. 403–412. doi: 10.1007/s11740-012-0399-1
3. *Yen Y.-C., Jain A., Altan T.* A finite element analysis of orthogonal machining using different tool edge geometries // *Journal of Manufacturing and Materials Processing*. 2004. V. 146. P. 72–81. doi: 10.1016/S0924-0136(03)00846-X
4. *Al-Athel K.S., Gadala M.S.* The use of volume of solid (VOS) approach in simulating metal cutting with chamfered and blunt tools // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2011. V. 53. P. 23–30. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2010.10.003
5. *Yusoff A.R., Turner S., Taylor C.M., Sims N.D.* The role of tool geometry in process damping milling // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2010. V. 50. P. 883–895. doi: 10.1007/s00170-010-2586-6
6. *Denkena B., Kohler J., Mengesha M.S.* Influence of the cutting edge rounding on the chip formation process: Part 1. Investigation of material flow, process forces, and cutting temperature // *Production Engineering. Research and Development*. 2012. V. 6. P. 329–338. doi: 10.1007/s11740-012-0366-x
7. *Usui E., Shirakashi T.* Mechanics of machining—from descriptive to predictive theory. In *On the art of cutting metals – 75 years later* // *American Society of Mechanical Engineers. Publication PED*. 1982. V. 7. P. 13–35.
8. *Strenkowski J.S., Carroll J.T.* A finite element model of orthogonal metal cutting // *American Society of Mechanical Engineers. Journal of Engineering in Industrial Research*. 1985. V. 107. P. 346–354.
9. *Komvopoulos K., Erpenbeck S.A.* Finite element modeling of orthogonal metal cutting // *American Society of Mechanical Engineers. Journal of Engineering in Industrial Research*. 1991. V. 113. P. 253–267.
10. *Lin Z.C., Lin S.Y.* A coupled finite element model of thermoelastic-plastic large deformation for orthogonal cutting // *American Society of Mechanical Engineers. Journal of Engineering in Industrial Research*. 1992. V. 114. P. 218–226.
11. *Zhang B., Bagchi A.* Finite element simulation of chip formation and comparison with machining experiment. // *American Society of Mechanical Engineers. Journal of Engineering in Industrial Research*. 1994. V. 116. P. 289–297.
12. *Shih A.J.* Finite element simulation of orthogonal metal cutting // *American Society of Mechanical Engineers. Journal of Engineering in Industrial Research*. 1995. V. 117. P. 84–93.
13. *Strenkowski J.S., Carroll J.T.* Finite element models of orthogonal cutting with application to single point diamond turning // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1986. V. 30. P. 899–920.

14. Black J.T., Huang J.M. An evaluation of chip separation criteria for the FEM simulation of machining // *The Journal of Manufacturing Science and Engineering*. 1996. V. 118. P. 545–553.
15. Tuğrul Ö., Erol Z. Finite element modeling the influence of edge roundness on the stress and temperature fields induced by high-speed machining // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2007. V. 35. P. 255–267. doi: 10.1007/s00170-006-0720-2
16. Кожжевников Д.В., Кирсанов С.В. Резание материалов. М.: Машиностроение, 2012.
17. Skripnyak V.V., Skripnyak V.A. Hexagonal Close-Packed (hcp) Alloys under Dynamic Impacts // *Journal of Applied Physics*. 2022. V. 28. P. 16–19. doi: 10.1063/5.0085338
18. AUTODYN-TM Interactive non-linear dynamic analysis software theory manual. Horsam: Century Dynamics Inc., 1998.
19. Molinari A., Musquar C., Sutter G. Adiabatic shear banding in high speed machining of Ti–6Al–4V: experiments and modeling // *International Journal of Plasticity*. 2002. V. 18. P. 443–459. doi: 10.1016/S0749-6419(01)00003-1
20. Zichuan Z., Lin H., Tao Zh. et al. Research on inverse identification of Johnson-Cook constitutive parameters for turning 304 stainless steel based on coupling simulation // *Journal of Materials Research and Technology*. 2023. V. 23. P. 2244–2262. doi: 10.1016/j.jmrt.2023.01.090
21. Kozlov V., Babaev A., Schulz N. et al. Study of a Methodology for Calculating Contact Stresses during Blade Processing of Structural Steel // *Metals*. 2023. V. 13. doi: 10.3390/met13122009
22. Бабаев А.С., Козлов В.Н., Семёнов А.Р., Шевчук А.С. и др. Исследование влияния параметров микрогеометрии режущих кромок на силу резания, износ и обрабатываемость при фрезеровании // *Вестник машиностроения*. 2024. Т. 103, № 10. С. 862–872. doi: 10.36652/0042-4633-2024-103-10-862-872

## References

1. Denkena B., Kohler J., Sellmeier V., Morke T. (2011) Topography prediction of resilient parts after flank milling with chamfered tools. *Production Engineering. Research and Development*. 5. pp. 273–281. doi: 10.1007/s11740-011-0305-2
2. Denkena B., Bicke W., Sellmeier V. (2012) Flank milling of compliant workpieces with chamfered tools. *Production Engineering. Research and Development*. 6. pp. 403–412. doi: 10.1007/s11740-012-0399-1
3. Yen Y-C., Jain A., Altan T. (2004) A finite element analysis of orthogonal machining using different tool edge geometries. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*. 146. pp. 72–81. doi: 10.1016/S0924-0136(03)00846-X
4. Al-Athel K.S., Gadala M.S. (2011) The use of volume of solid (VOS) approach in simulating metal cutting with chamfered and blunt tools. *International Journal of Mechanical Sciences*. 53. pp. 23–30. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2010.10.003
5. Yusoff A.R., Turner S., Taylor C.M., Sims N.D. (2010) The role of tool geometry in process damping milling. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 50. pp. 883–895. doi: 10.1007/s00170-010-2586-6
6. Denkena B., Kohler J., Mengesha M.S. (2012) Influence of the cutting edge rounding on the chip formation process: Part 1. Investigation of material flow, process forces, and cutting temperature. *Production Engineering. Research and Development*. 6. pp. 329–338. doi: 10.1007/s11740-012-0366-x
7. Usui E., Shirakashi T. (1982) Mechanics of machining – from descriptive to predictive theory. In on the art of cutting metals – 75 years later. *American Society of Mechanical Engineers. Publication PED*. 7. pp. 13–35.
8. Strenkowski J.S., Carroll J.T. (1985) A finite element model of orthogonal metal cutting. *American Society of Mechanical Engineers. Journal of Engineering in Industrial Research*. 107(4). pp. 346–354. doi: 10.1115/1.3186008
9. Komvopoulos K., Erpenbeck S.A. (1991) Finite element modeling of orthogonal metal cutting. *American Society of Mechanical Engineers. Journal of Engineering in Industrial Research*. 113(3). pp. 253–267. doi: 10.1115/1.2899695

10. Lin Z.C., Lin S.Y. (1992) A coupled finite element model of thermoelastic-plastic large deformation for orthogonal cutting. *American Society of Mechanical Engineers. Journal of Engineering in Industrial Research*. 114(2). pp. 218–226. doi: 10.1115/1.2904165
11. Zhang B., Bagchi A. (1994) Finite element simulation of chip formation and comparison with machining experiment. *American Society of Mechanical Engineers. Journal of Engineering in Industrial Research*. 116(3). pp. 289–297. doi: 10.1115/1.2901944
12. Shih A.J. (1995) Finite element simulation of orthogonal metal cutting. *American Society of Mechanical Engineers. Journal of Engineering in Industrial Research*. 117(1). pp. 84–93. doi: 10.1115/1.2803283
13. Strenkowski J.S., Carroll J.T. (1986) Finite element models of orthogonal cutting with application to single point diamond turning. *International Journal of Mechanical Sciences*. 30(12). pp. 899–920. doi: 10.1016/0020-7403(88)90073-2
14. Black J.T., Huang J.M. (1996) An evaluation of chip separation criteria for the FEM simulation of machining. *The Journal of Manufacturing Science and Engineering*. 118(4). pp. 545–553. doi: 10.1115/1.2831066
15. Tuğrul Ö., Erol Z. (2007) Finite element modeling the influence of edge roundness on the stress and temperature fields induced by high-speed machining. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 35. pp. 255–267. doi: 10.1007/s00170-006-0720-2
16. Kozhevnikov D.V., Kirsanov S.V. (2012) *Rezanie materialov* [Cutting of materials]. Moscow: Mashinostroenie.
17. Skripnyak V.V., Skripnyak V.A. (2022) Hexagonal close-packed (hcp) alloys under dynamic impacts. *Journal of Applied Physics*. 28. pp. 16–19. doi: 10.1063/5.0085338
18. *AUTODYN-TM Interactive Non-Linear Dynamic Analysis Software Theory Manual* (1998) Horsam, UK: Century Dynamics Inc.
19. Molinari A., Musquar C., Sutter G. (2002) Adiabatic shear banding in high speed machining of Ti-6Al-4V: experiments and modeling. *International Journal of Plasticity*. 18. pp. 443–459. doi: 10.1016/S0749-6419(01)00003-1
20. Zou Z., He L., Zhou T., Zhang W., Tian P., Zhou X. (2023) Research on inverse identification of Johnson-Cook constitutive parameters for turning 304 stainless steel based on coupling simulation. *Journal of Materials Research and Technology*. 23. pp. 2244–2262. doi: 10.1016/j.jmrt.2023.01.090
21. Kozlov V., Babaev A., Schulz N., Semenov A., Shevchuk A. (2023) Study of a methodology for calculating contact stresses during blade processing of structural steel. *Metals*. 13(12). Article 2009. doi: 10.3390/met13122009
22. Babaev A.S., Kozlov V.N., Semenov A.R., Shevchuk A.S., Ovcharenko V.A. (2024) Issledovanie vliyaniya parametrov mikrogeometrii rezhushchikh kromok na silu rezaniya, iznos i obrabatyvaemost' pri frezerovanii [Research of influence of cutting edges microgeometry parameters on cutting force, wear, and machinability during milling]. *Vestnik mashinostroeniya – Vestnik Mashinostroeniya*. 103(10). pp. 862–872. doi: 10.3103/s1068798x24703271

**Сведения об авторах:**

**Пивкин Пётр Михайлович** – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории цифрового проектирования кибер-физических инструментальных систем Московского государственного технологического университета «СТАНКИН» (Москва, Россия). E-mail: pmpivkin@gmail.com

**Бабаев Артём Сергеевич** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории нанотехнологий металлургии Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: a.s.babaev@mail.tsu.ru

**Козлов Виктор Николаевич** – кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории нанотехнологий металлургии Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kozlov-viktor@bk.ru

**Семёнов Артём Романович** – младший научный сотрудник лаборатории нанотехнологий металлургии Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: artems2102@yandex.ru

**Назаренко Екатерина Сергеевна** – кандидат физико-математических наук, заведующая лабораторией цифрового проектирования кибер-физических инструментальных систем Московского государственного технологического университета «СТАНКИН» (Москва, Россия). E-mail: katarina.86@bk.ru

**Надыкто Алексей Борисович** – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории цифрового проектирования кибер-физических инструментальных систем Московского государственного технологического университета «СТАНКИН» (Москва, Россия). E-mail: abnadykto@yandex.ru

***Information about the authors:***

**Pivkin Pyotr M.** (Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Laboratory of Digital Design of Cyber-Physical Cutting Tool Systems, Moscow State University of Technology STANKIN, Moscow, Russian Federation). E-mail: pmpivkin@gmail.com

**Babaev Artyom S.** (Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Nanotechnology of Metallurgy, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: a.s.babaev@mail.tsu.ru

**Kozlov Viktor N.** (Candidate of Technical Sciences, Researcher, Laboratory of Nanotechnology of Metallurgy, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kozlov-viktor@bk.ru

**Semyonov Artyom R.** (Junior Researcher, Laboratory of Nanotechnology of Metallurgy, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: artems2102@yandex.ru

**Nazarenko Ekaterina S.** (Candidate of Physics and Mathematics, Head of Laboratory, Laboratory of Digital Design of Cyber-Physical Cutting Tool Systems, Moscow State University of Technology STANKIN, Moscow, Russian Federation). E-mail: katarina.86@bk.ru

**Nadykto Aleksey B.** (Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Laboratory of Digital Design of Cyber-Physical Cutting Tool Systems, Moscow State University of Technology STANKIN, Moscow, Russian Federation). E-mail: abnadykto@yandex.ru

*Статья поступила в редакцию 21.04.2025; принята к публикации 01.08.2025*

*The article was submitted 21.04.2025; accepted for publication 01.08.2025*

Научная статья

УДК 531

doi: 10.17223/19988621/96/9

## Механические свойства композиционных материалов, полученных с применением СВС-порошков Al–TiB<sub>2</sub> методом прямого лазерного выращивания

Владимир Васильевич Промахов<sup>1</sup>, Алексей Евгеньевич Матвеев<sup>2</sup>,  
Никита Александрович Шульц<sup>3</sup>, Владислав Романович Бахмат<sup>4</sup>,  
Тимур Эшанкулович Туранов<sup>5</sup>

<sup>1, 2, 3, 4, 5</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>2</sup> Томский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук, Томск, Россия

<sup>1</sup> [vyromakhov@mail.ru](mailto:vyromakhov@mail.ru)

<sup>2</sup> [cool.mr.c@mail.ru](mailto:cool.mr.c@mail.ru)

<sup>3</sup> [schulznikita97@gmail.com](mailto:schulznikita97@gmail.com)

<sup>4</sup> [bakhmatvr@gmail.com](mailto:bakhmatvr@gmail.com)

<sup>5</sup> [timur.kb2@icloud.com](mailto:timur.kb2@icloud.com)

**Аннотация.** Проведены исследования механических свойств композиционных материалов, полученных с применением композиционных порошков Al–TiB<sub>2</sub> методом прямого лазерного выращивания при различном расходе порошка. Установлено, что с увеличением расхода порошка наблюдается снижение твердости и прочности на сжатие композиционных материалов. Такая зависимость напрямую связана с пористостью композиционного материала, которая увеличивается с ростом расхода порошка в процессе лазерного выращивания. Представленные результаты демонстрируют, что использование порошка Al–TiB<sub>2</sub> как основного сырья в процессе прямого лазерного выращивания с расходом порошка 5.1 г/мин позволяет получить композиты с оптимальным показателем твердости и прочности на сжатие для выбранного диапазона изменения скорости расхода порошка. Полученные данные превосходят показатели традиционных сплавов на основе алюминия.

**Ключевые слова:** самораспространяющийся высокотемпературный синтез, порошки, композиционные материалы, алюминий, диборид титана, прямое лазерное выращивание, прочность, твердость

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФ № 20-79-10086-П.

**Для цитирования:** Промахов В.В., Матвеев А.Е., Шульц Н.А., Бахмат В.Р., Туранов Т.Э. Механические свойства композиционных материалов, полученных с применением СВС-порошков Al–TiB<sub>2</sub> методом прямого лазерного выращивания // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 108–117. doi: 10.17223/19988621/96/9

Original article

## Mechanical properties of composite materials produced with the use of Al–TiB<sub>2</sub> SHS powders by direct laser deposition

Vladimir V. Promakhov<sup>1</sup>, Aleksey E. Matveev<sup>2</sup>, Nikita A. Schulz<sup>3</sup>,  
Vladislav R. Bakhmat<sup>4</sup>, Timur E. Turanov<sup>5</sup>

<sup>1, 2, 3, 4, 5</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>2</sup> Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch  
of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> vvpromakhov@mail.ru

<sup>2</sup> cool.mr.c@mail.ru

<sup>3</sup> schulznikita97@gmail.com

<sup>4</sup> bakhmatvr@gmail.com

<sup>5</sup> timur.kb2@icloud.com

**Abstract.** This paper presents a study of the mechanical properties of composite materials produced with the use of Al–TiB<sub>2</sub> powders by direct laser deposition at different powder consumption. With an increase in the powder consumption, a decrease in the hardness and compressive strength of the composite materials is observed. Such a dependence is directly related to the porosity of the composite material, which increases with an expansion of the powder consumption during laser deposition. The use of Al–TiB<sub>2</sub> powder as the main raw material during direct laser deposition with a powder consumption of 5.1 g/min allows the production of composites with the optimal hardness and compressive strength in the selected range of powder consumption variation. The obtained data exceed the characteristics of the traditional aluminum-based alloys.

**Keywords:** self-propagating high-temperature synthesis, powders, composite materials, aluminum, titanium diboride, direct laser deposition, strength, hardness

**Acknowledgments:** This study was financially supported by the Russian Science Foundation (grant No. 20-79-10086-П).

**For citation:** Promakhov, V.V., Matveev, A.E., Schulz, N.A., Bakhmat, V.R., Turanov, T.E. (2025) Mechanical properties of composite materials produced with the use of Al–TiB<sub>2</sub> SHS powders by direct laser deposition. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 108–117. doi: 10.17223/19988621/96/9

### Введение

В последние десятилетия технологии аддитивного производства стремительно внедряются в различные области промышленности: автомобильную, авиакосмическую, судостроительную, станкостроительную и др. [1]. Прямое лазерное выращивание является частным случаем аддитивного производства и позволяет изготавливать изделия необходимой геометрии с применением порошковых материалов на металлической основе [2]. По сравнению с традиционными методами механической обработки прямое лазерное осаждение повышает коэффициент использования материалов и скорость изготовления сложнопрофильных деталей [3]. На сегодняш-

ний день работы большого количества авторов сфокусированы на получении новых порошковых материалов для аддитивных технологий [4]. Такие материалы, несомненно, имеют высокую ценность и будут востребованы в различных отраслях промышленности [5]. Наиболее острые проблемы существуют в транспортной промышленности (автомобильная, авиакосмическая, судостроительная), которая должна удовлетворять современным экологическим требованиям [6]. К этим требованиям, несомненно, относятся рациональное потребление топлива и снижение выброса выхлопных газов, которое может быть достигнуто путем снижения веса транспортной конструкции при сохранении прочностных свойств [7, 8].

Композиционные материалы, состоящие из металлической матрицы и керамических частиц, обладают улучшенными физико-механическими свойствами (износостойкость, прочность, твердость и др.) по сравнению с обычными сплавами, широко применяемыми в технологиях лазерного выращивания [9–11]. В нашей предыдущей работе методом самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС) были получены металломатричные композиционные материалы Al–TiB<sub>2</sub> [12]. Структура композитов представлена алюминиевой матрицей (60 мас. %), внутри которой распределены частицы диборида титана (40 мас. %) субмикронного и нанометрового размера. Стоит отметить, что в процессе исследований удалось осуществить переход от лабораторных условий к полупромышленным и синтезировать материалы массой от 1 до 10 кг [13]. Измельченные в порошок СВС-композиты системы Al–TiB<sub>2</sub> применялись в качестве основного сырья для получения консолидированных материалов методом прямого лазерного выращивания. Добавление керамических частиц TiB<sub>2</sub> предположительно позволит повысить физико-механические свойства композитов (прочность, твердость и др.) на основе алюминия относительно его традиционных сплавов. С другой стороны, использование композиционных материалов Al–TiB<sub>2</sub> при производстве изделий транспорта методом прямого лазерного выращивания позволит в значительной степени снизить их массу при сохранении требуемых физико-механических параметров. Следовательно, возникает закономерный вопрос об исследовании механических свойств композиционных материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания с применением СВС-порошков Al–TiB<sub>2</sub>, а также сравнении этих свойств с традиционными сплавами.

Цель работы – исследование механических свойств композиционных материалов, полученных с применением СВС-порошков Al–TiB<sub>2</sub> методом прямого лазерного выращивания при различном расходе порошка.

### Материалы и методы

Механические испытания проводились на композиционных материалах, полученных методом прямого лазерного выращивания с применением СВС-порошков Al–TiB<sub>2</sub>. Методика получения исходных композиционных порошков представлена в работе [13]. Параметры прямого лазерного выращивания материалов, а также СЭМ-изображения (сканирующая электронная микроскопия) их структуры представлены в таблице и на рис. 1 соответственно.

Из композиционных материалов Al–TiB<sub>2</sub>, полученных прямым лазерным выращиванием, методом электроэрозионной обработки были приготовлены образцы в форме параллелепипеда ( $D \times Ш \times В$ : 10 × 5 × 5 мм).

Параметры прямого лазерного выращивания

Образец	I	II	III
Диаметр луча в зоне обработки, мм	1.5	1.5	1.5
Мощность, Вт	500	500	500
Расход порошка, г/мин	5.1	6.3	7.5
Смещение X, мм	0.7	0.7	0.7
Смещение Z, мм	0.2	0.2	0.2

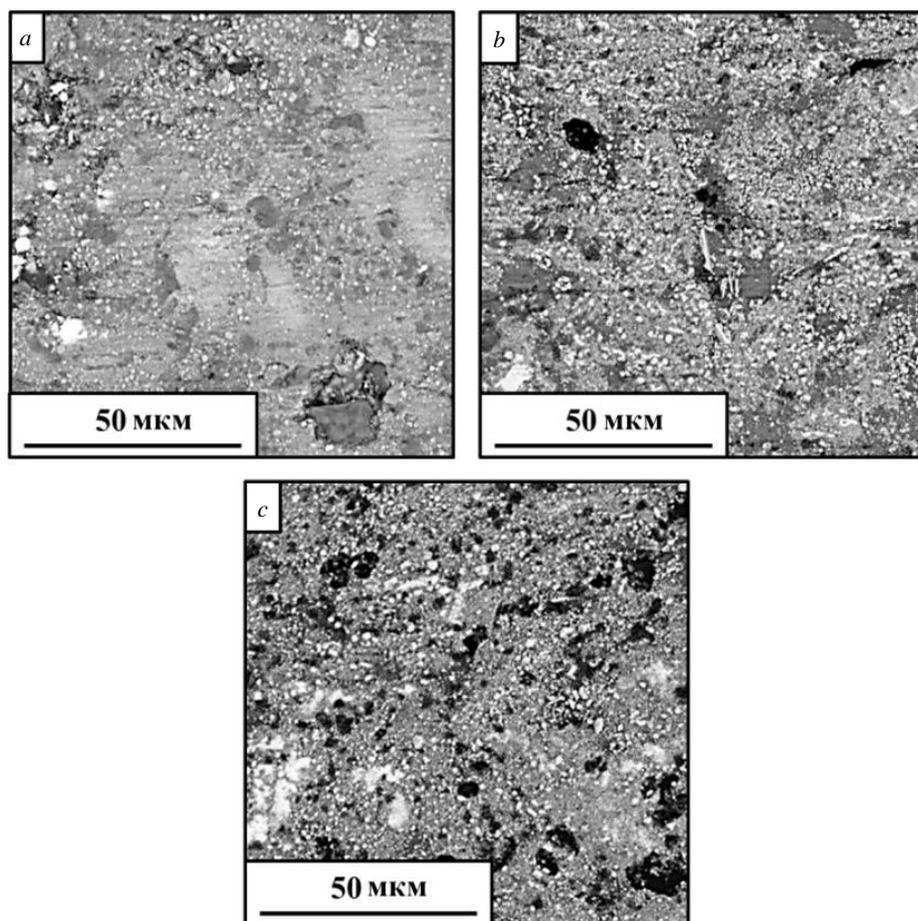


Рис. 1. СЭМ-изображения композиционных материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания с применением СВС-порошков Al-TiB<sub>2</sub> при их расходе:

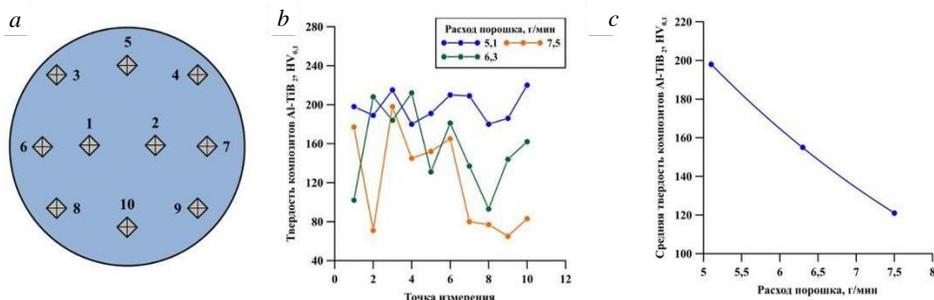
5.1 г/мин (a), 6.3 г/мин (b), 7.5 г/мин (c)

Fig. 1. SEM images of the composite materials obtained by direct laser deposition using Al-TiB<sub>2</sub> SHS powders at a powder consumption of: (a) 5.1, (b) 6.3, and (c) 7.5 g/min

Полученные заготовки подвергались обработке шлифованием и полировкой для создания плоскопараллельных граней. Твердость образцов исследовалась с использованием твердомера Buehler Wilson Micromet 6040. Испытания на предел прочности при сжатии проводились с применением установки Instron 5985.

## Результаты и их обсуждение

Установлено, что полученные образцы наследуют структуру СВС-порошков и состоят из алюминиевой матрицы и керамических частиц  $\text{TiB}_2$ . Изменение расхода порошка в процессе прямого лазерного спекания от 5.1 до 7.5 г/мин приводит к изменению размера области когерентного рассеяния рентгеновских лучей (ОКР) фаз Al и  $\text{TiB}_2$ , а также среднего размера керамических частиц в структуре материалов. На рис. 2, *a* представлена схема измерения твердости. Результаты измерений показаны на рис. 2, *b*. Установлено, что распределение твердости в образцах, полученных при расходе порошка 5.1 г/мин, имеет незначительные отклонения и изменяется в диапазоне от 180 до 220  $\text{HV}_{0.1}$ . При изменении расхода порошка до 6.3 и 7.5 г/мин разброс показателей твердости значительно увеличивается, а минимальное значение достигает 70  $\text{HV}_{0.1}$ . Среднее значение твердости образцов уменьшается от 198  $\text{HV}_{0.1}$  до 121  $\text{HV}_{0.1}$  с увеличением расхода порошка от 5.1 до 7.5 г/мин соответственно (рис. 2, *c*).



**Рис. 2.** Схематическое изображение измерения твердости на выбранном участке образцов Al– $\text{TiB}_2$  (*a*), результаты измерения твердости на образцах (*b*), зависимость средних значений твердости от расхода порошка (*c*)

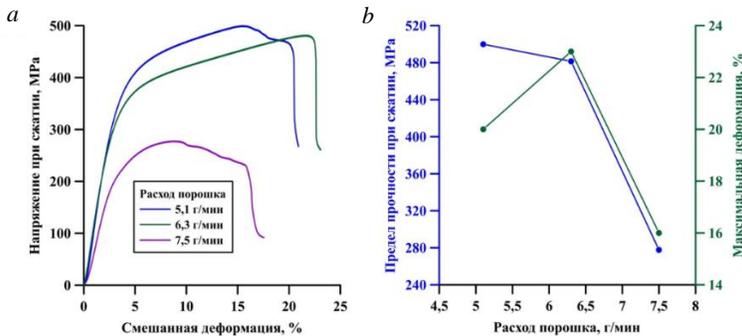
**Fig. 2.** (*a*) Schematic representation of hardness measurements on a selected region of Al– $\text{TiB}_2$  samples, (*b*) hardness measurements on the samples, and (*c*) average hardness as a function of powder consumption

Испытания на прочность при сжатии проводились на трех образцах, полученных при расходах порошка 5.1, 6.3 и 7.5 г/мин. На рис. 3 представлены диаграммы «напряжение–деформация», полученные в ходе испытаний, а также зависимость предела прочности и максимальной деформации при сжатии от расхода порошка.

Установлено, что максимальный предел прочности при сжатии композиционных материалов уменьшается от 500 до 278 МПа с увеличением расхода порошка от 5.1 до 7.5 г/мин соответственно. При увеличении скорости расхода порошка от 5.1 до 6.3 г/мин максимальная деформация композита при сжатии незначительно увеличивается от 20 до 23%. Дальнейшее увеличение скорости расхода до 7.5 г/мин приводит к уменьшению максимальной деформации до 16%. При измерении прочности на сжатие установлено, что отклонение от среднего значения не превышало 48 МПа для каждого измерения. Для данных по максимальной деформации отклонение от среднего значения не превышало 4% для каждого измерения.

Зависимость твердости и прочности на сжатие композиционных материалов от изменения расхода СВС-порошка Al– $\text{TiB}_2$  напрямую связана с пористостью ком-

позиционного материала, полученного в процессе лазерного выращивания. При увеличении скорости расхода порошка снижается продолжительность локального воздействия лазерного пучка. Это сопровождается уменьшением продолжительности и температуры нагрева частиц, что приводит к снижению глубины их проплавления в процессе лазерного выращивания. Следовательно, увеличение скорости расхода порошка приводит к увеличению пористости. При расходе порошка 5.1 г/мин наблюдалась пористость 4%, при расходе порошка 6.3 г/мин пористость составляла 9%, при расходе порошка 7.5 г/мин – 14%. Большое количество пор способствует более сильному углублению пирамиды при измерении твердости. В процессе сжатия на границах между порами образуются трещины. Распространение трещин между порами приводит к разрушению композитов и, следовательно, к значительному снижению их прочности. Высокая концентрация пор, которые образуются в композитах при расходе порошка 7.5 г/мин, способствует увеличению эффекта хрупкого разрушения, что приводит к снижению максимальной деформации. Увеличение скорости расхода порошка от 5.1 до 6.3 г/мин приводит к незначительному уменьшению среднего размера керамических частиц TiB<sub>2</sub>. Уменьшение размера частиц диборида титана способствует снижению напряжений на их границах с алюминиевой матрицей и, следовательно, приводит к небольшому увеличению максимальной деформации композиционного материала.



**Рис. 3.** Диаграммы «напряжение–деформация», полученные при испытаниях композиционных образцов Al–TiB<sub>2</sub> на сжатие (а), зависимость предела прочности и максимальной деформации от расхода СВС-порошка (б)

**Fig. 3.** (a) Stress–strain diagrams during compression tests for Al–TiB<sub>2</sub> composite samples and (b) ultimate strength and maximum strain as functions of SHS powder consumption

Таким образом, представленные результаты демонстрируют, что использование СВС-порошка на основе системы Al–TiB<sub>2</sub> как основного сырья в процессе прямого лазерного выращивания при скорости расхода порошка 5.1 г/мин позволяет получить композиты с наибольшим показателем твердости и прочности на сжатие. Стоит отметить, что полученные результаты превосходят традиционные сплавы на основе алюминия как по твердости: 6061 (53.1–124.2 HV), 6061-T6 (95.4–121.60 HV, высокопрочный сплав AA7075 (136 HV) [14–17], так и по прочности на сжатие: A356 (323 МПа), экструдированный AZ31 (370 МПа), Mg–Ca–Zn (294 МПа), биметаллический материал из нержавеющей стали 316L и алюминиевого сплава Al12Si (299,4 МПа) [18–21]. Увеличение твердости и прочности на сжатие образцов композиционных материалов, полученных методом прямого лазерного выращи-

вания с применением СВС-порошков на основе системы Al–TiB<sub>2</sub>, связано с рядом факторов. Во-первых, высокая твердость диборида титана (25–35 ГПа) в значительной степени способствует увеличению твердости полученных материалов. Во-вторых, в процессе лазерного осаждения частицы диборида титана выступают в качестве центров кристаллизации, что может уменьшить средний размер зерен алюминия и повысить прочность [22]. Таким образом, композиционная структура материала способствует реализации механизма зернограницного упрочнения.

### Заключение

Установлено, что с увеличением скорости расхода порошка наблюдается снижение твердости и прочности на сжатие композиционных материалов. Такая зависимость напрямую связана с остаточной пористостью полученных материалов, которая увеличивается с ростом скорости расхода порошка в процессе лазерного выращивания. Представленные результаты демонстрируют, что использование СВС-порошка Al–TiB<sub>2</sub> как основного сырья в процессе прямого лазерного выращивания с расходом порошка 5.1 г/мин позволяет получить композиты с оптимальным показателем твердости и прочности на сжатие для выбранного диапазона изменения скорости расхода порошка. Полученные данные превосходят показатели традиционных сплавов на основе алюминия.

### Список источников

1. Furumoto T., Oishi K., Abe S., Tsubouchi K., Yamaguchi M., Clare A.T. Evaluating the thermal characteristics of laser powder bed fusion // *Journal of Materials Processing Technology*. 2022. V. 299. Art. 117384. doi: 10.1016/j.jmatprotec.2021.117384
2. Simchi A. Direct laser sintering of metal powders: Mechanism, kinetics and microstructural features // *Materials Science and Engineering: A*. 2006. V. 428 (1-2). P. 148–158. doi: 10.1016/j.msea.2006.04.117
3. Wang X., Gong X., Chou K. Review on powder-bed laser additive manufacturing of Inconel 718 parts // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*. 2017. V. 231 (11). P. 1890–1903. doi: 10.1177/09544054156198
4. Ezugwu E.O., Bonney J., Yamane Y. An overview of the machinability of aeroengine alloys // *Journal of Materials Processing Technology*. 2003. V. 134 (2). P. 233–253. doi: 10.1016/S0924-0136(02)01042-7
5. Philips N.R., Carl M., Cunningham N.J. New opportunities in refractory alloys // *Metallurgical and Materials Transactions A*. 2020. V. 51. P. 3299–3310. doi: 10.1007/s11661-020-05803-3
6. Nyamekye P., Golroudbary S.R., Piili H., Kraslawski A., Luukka P. Impact of additive manufacturing on titanium supply chain: Case of titanium alloys in automotive and aerospace industries // *Advances in Industrial and Manufacturing Engineering*. 2023. V. 6. Art. 100112. doi: 10.1016/j.aime.2023.100112
7. Mussatto A., Ahad I.U., Mousavian R.T., Delaure Y., Brabazon D. Advanced production routes for metal matrix composites // *Engineering reports*. 2021. V. 3 (5). e12330. doi: 10.1002/eng2.12330
8. Joost W.J. Reducing vehicle weight and improving US energy efficiency using integrated computational materials engineering // *JOM*. 2012. V. 64. P. 1032–1038. doi: 10.1007/s11837-012-0424-z
9. Hashim J., Looney L., Hashmi M.S.J. Metal matrix composites: production by the stir casting method // *Journal of Materials Processing Technology*. 1999. V. 92. P. 1–7. DOI: 10.1016/S0924-0136(99)00118-1

10. Tjong S.C. Novel nanoparticle-reinforced metal matrix composites with enhanced mechanical properties // *Advanced engineering materials*. 2007. V. 9 (8). P. 639–652. doi: 10.1002/adem.200700106
11. Rawal S.P. Metal-matrix composites for space applications // *JOM*. 2001. V. 53 (4). P. 14–17. doi: 10.1007/s11837-001-0139-z
12. Matveev A., Promakhov V., Schulz N., Bakhmat V., Belchikov I. Structure and phase composition of SHS composites based on Al–Ti–B system with different Al content // *Ceramics International*. 2024. V. 50 (1). P. 503–511. doi: 10.1016/j.ceramint.2023.10.126
13. Matveev A., Promakhov V., Schulz N., Bakhmat V., Turanov T. Nano- and Submicron-Sized TiB<sub>2</sub> Particles in Al–TiB<sub>2</sub> Composite Produced in Semi-Industrial Self-Propagating High-Temperature Synthesis Conditions // *Metals*. 2024. V. 14 (5). Art. 511. doi: 10.3390/met14050511
14. Sun Q., Yang M., Jiang Y., Lei L., Zhang Y. Achieving excellent corrosion resistance properties of 7075 Al alloy via ultrasonic surface rolling treatment // *Journal of Alloys and Compounds*. 2022. V. 911. Art. 165009. doi: 10.1016/j.jallcom.2022.165009
15. Zheng Y.S., Tang G.Y., Kuang J., Zheng X.P. Effect of electropulse on solid solution treatment of 6061 aluminum alloy // *Journal of Alloys and Compounds*. 2014. V. 615. P. 849–853. doi: 10.1016/j.jallcom.2014.07.062
16. Tan C.F., Radzai S.M. Effect of hardness test on precipitation hardening aluminium alloy 6061-T6 // *Chiang Mai Journal of Science*. 2009. V. 36 (3). P. 276–286.
17. Aliyah A N., Anawati A. Effect of Heat Treatment on Microstructure and mechanical hardness of aluminum alloy AA7075 // *IOP conference series: Materials Science and Engineering*. 2019. V. 541 (1). Art. 012007. doi: 10.1088/1757-899X/541/1/012007
18. Akbari M.K., Baharvandi H.R., Mirzaee O. Nano-sized aluminum oxide reinforced commercial casting A356 alloy matrix: Evaluation of hardness, wear resistance and compressive strength focusing on particle distribution in aluminum matrix // *Composites Part B: Engineering*. 2013. V. 52. P. 262–268. doi: 10.1016/j.compositesb.2013.04.038
19. Wang Y.N., Huang J.C. The role of twinning and untwinning in yielding behavior in hot-extruded Mg–Al–Zn alloy // *Acta Materialia*. 2007. V. 55 (3). P. 897–905. doi: 10.1016/j.actamat.2006.09.010
20. Селиховкин М.А., Ахмадиева А.А., Жуков И.А., Марченко Е.С., Хрусталеv А.П. Исследование влияния наночастиц алмаза на структуру и механическое поведение сплава Mg–Ca–Zn // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 79. С. 152–161. doi: 10.17223/19988621/79/13
21. Zhang Y., Bandyopadhyay A. Influence of compositionally graded interface on microstructure and compressive deformation of 316L stainless steel to Al12Si aluminum alloy bimetallic structures // *ACS Applied Materials & Interfaces*. 2021. V. 13 (7). P. 9174–9185. doi: 10.1021/acsmami.0c21478
22. Li W., Yang Y., Liu J., Zhou Y., Li M., Wen S., Wei Q., Yan C., Shi Y. Enhanced nanohardness and new insights into texture evolution and phase transformation of TiAl/TiB<sub>2</sub> in-situ metal matrix composites prepared via selective laser melting // *Acta Materialia*. 2017. V. 136. P. 90–104. doi: 10.1016/j.actamat.2017.07.003
23. Chen L., Sun Y., Li L., Ren Y., Ren X. In situ TiC/Inconel 625 nanocomposites fabricated by selective laser melting: Densification behavior, microstructure evolution, and wear properties // *Applied Surface Science*. 2020. V. 518. Art. 145981. doi: 10.1016/j.apsusc.2020.145981

## References

1. Furumoto T., Oishi K., Abe S., Tsubouchi K., Yamaguchi M., Clare A.T. (2021) Evaluating the thermal characteristics of laser powder bed fusion. *Journal of Materials Processing Technology*. 299. Article 117384. doi: 10.1016/j.jmatprotec.2021.117384
2. Simchi A. (2006) Direct laser sintering of metal powders: Mechanism, kinetics and microstructural features. *Materials Science and Engineering: A*. 428(1–2). pp. 148–158. doi: 10.1016/j.msea.2006.04.117

3. Wang X., Gong X., Chou K. (2017) Review on powder-bed laser additive manufacturing of Inconel 718 parts. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*. 231(11). pp. 1890–1903. doi: 10.1177/09544054156198
4. Ezugwu E.O., Bonney J., Yamane Y. (2003) An overview of the machinability of aeroengine alloys. *Journal of Materials Processing Technology*. 134(2). pp. 233–253. doi: 10.1016/S0924-0136(02)01042-7
5. Philips N.R., Carl M., Cunningham N.J. (2020) New opportunities in refractory alloys. *Metalurgical and Materials Transactions A*. 51. pp. 3299–3310. doi: 10.1007/s11661-020-05803-3
6. Nyamekye P., Golroudbary S.R., Piili H., Kraslawski A., Luukka P. (2023) Impact of additive manufacturing on titanium supply chain: Case of titanium alloys in automotive and aerospace industries. *Advances in Industrial and Manufacturing Engineering*. 6. Article 100112. doi: 10.1016/j.aime.2023.100112
7. Mussatto A., Ahad I.U., Mousavian R.T., Delaure Y., Brabazon D. (2021) Advanced production routes for metal matrix composites. *Engineering Reports*. 3(5). Article e12330. doi: 10.1002/eng2.12330
8. Joost W.J. (2012) Reducing vehicle weight and improving US energy efficiency using integrated computational materials engineering. *The Journal of The Minerals, Metals & Materials Society*. 64. pp. 1032–1038. doi: 10.1007/s11837-012-0424-z
9. Hashim J., Looney L., Hashmi M.S.J. (1999) Metal matrix composites: production by the stir casting method. *Journal of Materials Processing Technology*. 92. pp. 1–7. doi: 10.1016/S0924-0136(99)00118-1
10. Tjong S.C. (2007) Novel nanoparticle-reinforced metal matrix composites with enhanced mechanical properties. *Advanced Engineering Materials*. 9(8). pp. 639–652. doi: 10.1002/adem.200700106
11. Rawal S.P. (2001) Metal-matrix composites for space applications. *The Journal of the Minerals, Metals & Materials Society*. 53(4). pp. 14–17. doi: 10.1007/s11837-001-0139-z
12. Matveev A., Promakhov V., Schulz N., Bakhmat V., Belchikov I. (2024) Structure and phase composition of SHS composites based on Al–Ti–B system with different Al content. *Ceramics International*. 50(1). pp. 503–511. doi: 10.1016/j.ceramint.2023.10.126
13. Matveev A., Promakhov V., Schulz N., Bakhmat V., Turanov T. (2024) Nano- and submicron-sized TiB<sub>2</sub> particles in Al–TiB<sub>2</sub> composite produced in semi-industrial self-propagating high-temperature synthesis conditions. *Metals*. 14(5). Article 511. doi: 10.3390/met14050511
14. Sun Q., Yang M., Jiang Y., Lei L., Zhang Y. (2022) Achieving excellent corrosion resistance properties of 7075 Al alloy via ultrasonic surface rolling treatment. *Journal of Alloys and Compounds*. 911. Article 165009. doi: 10.1016/j.jallcom.2022.165009
15. Zheng Y.S., Tang G.Y., Kuang J., Zheng X.P. (2014) Effect of electropulse on solid solution treatment of 6061 aluminum alloy. *Journal of Alloys and Compounds*. 615. pp. 849–853. doi: 10.1016/j.jallcom.2014.07.062
16. Tan C.F., Radzai S.M. (2009) Effect of hardness test on precipitation hardening aluminium alloy 6061-T6. *Chiang Mai Journal of Science*. 36(3). pp. 276–286.
17. Aliyah A.N., Anawati A. (2019) Effect of heat treatment on microstructure and mechanical hardness of aluminum alloy AA7075. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 541(1). Article 012007. doi: 10.1088/1757-899X/541/1/012007
18. Akbari M.K., Baharvandi H.R., Mirzaee O. (2013) Nano-sized aluminum oxide reinforced commercial casting A356 alloy matrix: Evaluation of hardness, wear resistance and compressive strength focusing on particle distribution in aluminum matrix. *Composites Part B: Engineering*. 52. pp. 262–268. doi: 10.1016/j.compositesb.2013.04.038
19. Wang Y.N., Huang J.C. (2007) The role of twinning and untwinning in yielding behavior in hot-extruded Mg–Al–Zn alloy. *Acta Materialia*. 55(3). pp. 897–905. doi: 10.1016/j.actamat.2006.09.010
20. Selikhovkin M.A., Akhmadieva A.A., Zhukov I.A., Marchenko E.S., Khrustalev A.P. (2022) Issledovanie vliyaniya nanochastits almaza na strukturu i mekhanicheskoe povedenie splava

- Mg-Ca-Zn [Investigation of the effect of diamond nanoparticles on the structure and mechanical behavior of Mg-Ca-Zn alloy]. *Vestnik Tomskogo gosudarsvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 152–161. doi: 10.17223/19988621/79/13
21. Zhang Y., Bandyopadhyay A. (2021) Influence of compositionally graded interface on microstructure and compressive deformation of 316L stainless steel to Al12Si aluminum alloy bimetallic structures. *ACS Applied Materials & Interfaces*. 13(7). pp. 9174–9185. doi: 10.1021/acsami.0c21478
  22. Li W., Yang Y., Liu J., Zhou Y., Li M., Wen S., Wei Q., Yan C., Shi Y. (2017) Enhanced nanohardness and new insights into texture evolution and phase transformation of TiAl/TiB<sub>2</sub> in-situ metal matrix composites prepared via selective laser melting. *Acta Materialia*. 136. pp. 90–104. doi: 10.1016/j.actamat.2017.07.003
  23. Chen L., Sun Y., Li L., Ren Y., Ren X. (2020) In situ TiC/Inconel 625 nanocomposites fabricated by selective laser melting: Densification behavior, microstructure evolution, and wear properties. *Applied Surface Science*. 518. Article 145981. doi: 10.1016/j.apsusc.2020.145981

**Сведения об авторах:**

**Прوماхов Владимир Васильевич** – кандидат технических наук, директор НОЦ «Аддитивные технологии» Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: vvpromakhov@mail.ru

**Матвеев Алексей Евгеньевич** – младший научный сотрудник НОЦ «Аддитивные технологии» Томского государственного университета; младший научный сотрудник Томского научного центра Сибирского отделения Российской академии наук (Томск, Россия). E-mail: cool.mr.c@mail.ru

**Шульц Никита Александрович** – научный сотрудник НОЦ «Аддитивные технологии» Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: schulznikita97@gmail.com

**Бахмат Владислав Романович** – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bakhmatvr@gmail.com

**Туранов Тимур Эшанкулович** – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: timur.kb2@icloud.com

**Information about the authors:**

**Promakhov Vladimir V.** (Candidate of Technical Sciences, Scientific and Educational Center “Additive Technologies” of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vvpromakhov@mail.ru

**Matveev Aleksey E.** (Scientific and Educational Center “Additive Technologies” of Tomsk State University; Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: cool.mr.c@mail.ru

**Schulz Nikita A.** (Scientific and Educational Center “Additive Technologies” of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: schulznikita97@gmail.com

**Bakhmat Vladislav R.** (Scientific and Educational Center “Additive Technologies” of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bakhmatvr@gmail.com

**Turanov Timur E.** (Scientific and Educational Center “Additive Technologies” of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: timur.kb2@icloud.com

*Статья поступила в редакцию 16.04.2024; принята к публикации 01.08.2025*

*The article was submitted 16.04.2024; accepted for publication 01.08.2025*

Научная статья

УДК 531.01

doi: 10.17223/19988621/96/10

## Динамический анализ трехмассового кривошипно-ползунного механизма на базе его двухмассового аналога

Сергей Викторович Савелькаев

*Сибирский государственный университет геосистем и технологий, Новосибирск, Россия,  
sergei.savelkaev@yandex.ru*

**Аннотация.** Проведен динамический анализ плоского трехмассового кривошипно-ползунного механизма. Он сведен к двухмассовому аналогу, а затем к одномассовому эквиваленту, движение которого описывается вторым законом Ньютона, учитывающим действие сил инерции рабочих тел этого механизма и действие диссипативных сил на его ползун. Исследована зависимость смещения центра масс механизма от диссипации внешней среды и найден ее минимальный уровень, до которого смещение центра масс механизма постоянно и ниже которого оно всегда стремится к нулю.  
**Ключевые слова:** трехмассовый кривошипно-ползунный механизм, двухмассовый аналог, одномассовый эквивалент, диссипативная среда, уравнения движения, эффект смещения центра масс

**Для цитирования:** Савелькаев С.В. Динамический анализ трехмассового кривошипно-ползунного механизма на базе его двухмассового аналога // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 118–130. doi: 10.17223/19988621/96/10

Original article

## Dynamic analysis of a three-mass crank-slider mechanism based on its two-mass analog

Sergey V. Savel'kaev

*Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russia,  
sergei.savelkaev@yandex.ru*

**Abstract.** This paper presents a dynamic analysis of a planar three-mass crank–slider mechanism of the “Tolchin inertioïd” type. Based on the axiom of constraints applied to inertial forces – the inertial forces of two interacting bodies are mutually applied to these bodies and act on them through their constraints, which can be discarded, and its reactions replaced by the inertial forces of these bodies, – a mathematical model of this mechanism is obtained in terms of Newton's second law written in an inertial frame of reference with account for the inertial domain formed by the resulting inertial force of the counter syn-

chronous rotational motion of the working bodies of the mechanism relative to its slider and the dissipative forces acting on this slider. The displacement of the center of mass of this mechanism is simulated numerically. The minimum level of dissipation of the external environment up to which the displacement of the center of mass is constant and below which it tends to zero, is recorded. In practice, the revealed effect can be used as a basis when developing devices for directed discrete motion in a medium with low dissipation, for instance, in a liquid medium and on solid horizontal surfaces with low linear viscous resistance to motion.

**Keywords:** three-mass crank–slider mechanism, two-mass analogue, single-mass equivalent, dissipative medium, equations of motion, center of mass moving effect

**For citation:** Savel'kaev, S.V. (2025) Dynamic analysis of a three-mass crank–slider mechanism based on its two-mass analog. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 118–130. doi: 10.17223/19988621/96/10

## Введение

В работе проведен динамический анализ плоского трехмассового кривошипно-ползунного механизма (КПМ) типа «инерциоид Толчина» [1], содержащего два рабочих тела, которые с помощью кривошипов установлены на общем основании в виде ползуна с возможностью их встречного синхронного вращательного движения в его плоскости.

Цель работы – исследование амплитудных и фазовых характеристик движения ползуна (опорного тела)  $m_1$  и двух рабочих тел  $m_2$  КПМ, включая и движение его центра масс  $C$  в неподвижной системе отсчета  $K$ . Исследование показало, что смещение  $\Delta x_C$  ЦМ  $C$  КПМ остается постоянным ( $\Delta x_C = \text{const}$ ) в случае, когда уровень диссипации внешней среды превышает ее пороговый уровень  $\xi \geq \xi_{\text{п}}$ , где  $\xi_{\text{п}}$  – пороговое значение диссипативного параметра  $\xi$ , физический смысл которого будет определен в работе на основе математической модели КПМ, а его пороговое значение  $\xi_{\text{п}}$  определено методами численного моделирования. При этом показано, что для любых значений  $\xi < \xi_{\text{п}}$  смещение  $\Delta x_C$  ЦМ  $C$  КПМ стремится к нулю:  $\Delta x_C \rightarrow 0$ .

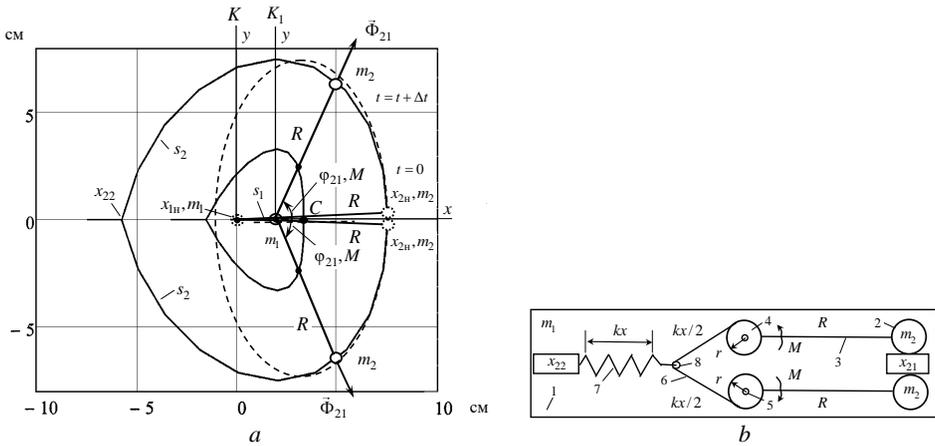
## Динамический анализ КПМ

Кинематическая схема и конструкция КПМ показаны на рис. 1, *a*, *b*. Основными элементами КПМ (см. рис. 1, *b*) являются ползун (опорное тело)  $1$  с массой  $m_1$  и два рабочих тела  $2$  с одинаковой массой  $m_2$ , которые с помощью кривошипов  $3$  с длиной  $R = \text{const}$  и шкивов  $4$  с радиусом  $r$  установлены на осях  $5$  ползуна  $1$  с возможностью их встречного синхронного вращательного движения в его плоскости из положения  $x_{21}$  в положение  $x_{22}$  с помощью нити  $6$  и пружины  $7$  с жесткостью  $k$ .

Для проведения динамического анализа КПМ введем неподвижную систему отсчета  $K$ , лежащую в плоскости рисунка (см. рис. 1, *a*). Начало координат этой системы отсчета  $K$  свяжем с начальным положением  $x_{1н}$  ползуна  $m_1$  в момент времени  $t = 0$ . Также введем собственную систему  $K_1$  ползуна  $m_1$ , лежащую в его плоскости, которая вместе с ним может совершать движение вдоль оси  $x$  неподвижной системы отсчета  $K$ .

КПМ имеет три степени свободы по следующим обобщенным координатам: декартовой координате  $x_1$  поступательного движения ползуна  $m_1$  вдоль оси  $x$  непо-

движной системы отсчета  $K$  и двум полярным координатам  $\pm\varphi_{21}$  встречного синхронного вращательного движения тел  $m_2$  в собственной системе отсчета  $K_1$  ползуна  $m_1$ , где знак  $+\varphi_{21}$  – для верхнего тела  $m_2$ , а знак  $-\varphi_{21}$  – для нижнего. Рабочие тела  $m_2$  установлены на ползуне  $m_1$  с помощью прямолинейных кривошипов 3 с массой  $m_R \ll m_2$  каждого, которые закреплены на шкивах 4 с массой  $m_{ш} \ll m_2$  каждого. Сами шкивы 4 шарнирно установлены на осях 5 ползуна  $m_1$  (см. рис. 1, *b*), что обеспечивает возможность встречного синхронного вращательного движения рабочих тел  $m_2$  в плоскости ползуна  $m_1$  из положения  $x_{21}$  в положение  $x_{22}$  с помощью нерастяжимой нити 6 (ее свободные концы намотаны на шкивы 4) и пружины 7.



**Рис. 1.** Кинематическая схема КПМ (*a*) и его конструкция (*b*):

- 1 – основание с массой  $m_1$ ; 2 – рабочее тело с массой  $m_2$ ; 3 – кривошип с длиной  $R$ ;
  - 4 – шкив с радиусом  $r$ ; 5 – ось; 6 – нить; 7 – пружина с жесткостью  $k$ ; 8 – ролик
- Fig. 1.** (*a*) Kinematic diagram of the crank–slider mechanism (CSM) and (*b*) its design:  
 1, base with mass  $m_1$ ; 2, working body with mass  $m_2$ ; 3, crank with length  $R$ ;  
 4, pulley with radius  $r$ ; 5, axis; 6, thread; 7, spring with stiffness  $k$ ; and 8, roller

В неподвижной системе отсчета  $K$  (см. рис. 1, *a*) для момента времени  $t = 0$  ползун  $m_1$  находится в начальном положении  $x_{1н}$ , а рабочие тела  $m_2$  в положении  $x_{2н}$ . В этих положениях  $x_{1н}$  и  $x_{2н}$  скорости  $\dot{x}_{1н}, \dot{y}_{2н}$  ползуна  $m_1$  и рабочих тел  $m_2$  равны нулю:  $\dot{x}_{1н} = 0$  и  $\dot{y}_{2н} = 0$ . Коэффициент вязкого сопротивления движению ползуна  $m_1$  составляет  $\mu_1$ . Его величина лежит в пределах  $0 \leq \mu_1 \leq \infty$  и зависит от геометрической формы и размеров ползуна  $m_1$ . Для рабочих тел  $m_2$  его величина всегда равна нулю:  $\mu_2 = 0$ , что можно обеспечить, выполнив ползун  $m_1$  в виде герметичного полого корпуса, в котором размещены тела  $m_2$ .

В собственной системе отсчета  $K_1$  ползуна  $m_1$  (см. рис. 1, *b*) в начальный момент времени  $t = 0$  тела  $m_2$  заблокированы в положении  $x_{21}$ . Пружина 7 растянута. Ролик 8 на конце пружины 7 обеспечивает одинаковое натяжение  $T$  нити 6 на симметрично расположенных шкивах 4. При разблокировке тел  $m_2$  пружина 7 будет сжиматься. И так как один ее конец закреплен на опоре  $x_{21}$  ползуна  $m_1$ , на котором одновременно закреплены и оси 5 шкивов 4, то ролик 8 посредством одинаковых натяжений  $T$  нити 6 создаст на шкивах 4 двунаправленный уравновешенный момент

$M = \pm \frac{kxr}{2 \cos \alpha}$ , где  $k$  – жесткость пружины 7;  $x = r(\pi - \varphi_{21})$  – величина ее

растяжения в зависимости от угла  $\varphi_{21}$  поворота рабочих тел  $m_2$ ;  $\alpha \approx 30^\circ$  – угол наклона нити  $b$  к оси  $x$  системы отсчета  $K_1$ . Под действием двунаправленного момента  $M$  тела  $m_2$  будут совершать встречное синхронное вращательное движение из положения  $x_{21}$  в положение  $x_{22}$  на угол  $\varphi_{21} = \pm\pi$ . При этом угол  $\alpha$  изменяется на малую величину  $\Delta\alpha = \pm 3^\circ$ . Так как натяжения  $T$  нити  $b$  для верхнего и нижнего шкивов 4 равны, то они создают равные, но различные по знаку моменты

$M = \pm \frac{kxr}{2 \cos \alpha}$ . При этом результирующий активный момент, действующий на пол-

зуне  $m_1$ , будет равен нулю:  $\sum M = 0$ , и, следовательно, будет сохраняться кинетический момент  $dK_z / dt = \text{const}$  КПМ относительно оси  $z$  системы отсчета  $K_1$  (ось  $z$  направлена ортогонально к плоскости чертежа в сторону наблюдателя и на рис. 1 не показана). Сохранность  $dK_z / dt = \text{const}$  будет подробно проанализирована при математическом моделировании КПМ.

Жесткость  $k$  пружины 7 выбирается так, чтобы время поворота тел  $m_2$  на угол  $\varphi_{21} = \pm\pi$  для любых  $\mu_1$  и параметров КПМ составляло  $t_1 \leq 2\pi / \omega_{21} \leq 0.5$  с. Такой выбор сводит к минимуму влияние малого трения скольжения в шарнирном соединении шкивов 4 и осей 5 и влияние диссипативных потерь КПМ при его движении в диссипативной среде на угловую скорость  $\omega_{21}$  вращательного движения тел  $m_2$  в системе отсчета  $K_1$ .

### Математическая модель идеализированного КПМ

Выразим кинетическую энергию КПМ через сумму кинетических энергий ее двух зеркальных относительно  $x$  частей с массами  $\frac{1}{2}m_1$  и  $m_2$ . Для этого выразим скорости этих масс  $\frac{1}{2}m_1$  и  $m_2$  через их координаты в системе отсчета  $K$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = \dot{x}_1; \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - R\dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}; x_1 = x_1; x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}; \\ \dot{y}_1 = \dot{y}_1; \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + R\dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}; y_1 = y_1; y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}. \end{aligned} \quad (1)$$

Скорости  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$  (1) позволяют выразить кинетическую энергию КПМ

$$T = T^+ + T^- = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{m}_2\dot{\varphi}_{21}^2 R^2 - \tilde{m}_2\dot{x}_1\dot{\varphi}_{21}R \sin \varphi_{21}, \quad (2)$$

здесь суммарная масса КПМ  $m = m_1 + \tilde{m}_2$  условно сосредоточена в опорном теле  $m_1$ , в которой  $\tilde{m}_2 = 2m_2$  – суммарная масса рабочих тел  $m_2$ ;

$$T^\pm = \frac{1}{2}(0.5m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}_{21}^2 R^2 - m_2\dot{x}_1\dot{\varphi}_{21}R \sin \varphi_{21}.$$

Записывая лагранжиан  $L = T - U(R) - \Pi(x)$ , где  $\Pi(x) = \frac{1}{2}0.5kx^2$  – потенциальная энергия пружины 7 (см. рис. 1,  $b$ ) для каждой из двух симметричных частей

КПМ, а также составляя уравнения Лагранжа по координатам  $x_2, y_2$  и  $\varphi_{21}$ , получим следующую систему уравнений движения КПМ в стационарном состоянии:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1 \dot{x}_1 = a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21}; y_1 = 0; \\ \frac{d}{dt} K_z^\pm = \pm m_2 R [\dot{\varphi}_{21} R + \sin \varphi_{21} (2\gamma_1 \dot{x}_1 - a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21})] = \pm M, \end{cases} \quad (3)$$

аналогичную приведенной в работе [2], где  $\gamma_1 = \frac{\mu_1}{2(m_1 + \tilde{m}_2)}$  – коэффициент затухания и  $a = \frac{\tilde{m}_2 R}{m_1 + \tilde{m}_2}$ .

Для стационарного состояния в уравнении для кинетического момента  $K_z^\pm$  (3) следует принять  $\ddot{\varphi}_{21} = 0$ .

Система уравнений (3) сводит КПМ к ее двухмассовому аналогу МС2 с массами  $m_1$  и  $\tilde{m}_2 = 2m_2$ . При этом система сил, действующая на КПМ в стационарном состоянии, образует ИД с равнодействующей  $\vec{F}_{10} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1$  (1) (см. рис. 1, с [2]), образованный проекцией суммарной силы инерции  $\vec{\Phi}_{21} = -\tilde{m}_2 \omega_{21}^2 \vec{r}_{21}$  относительного вращательного движения тела с массой  $\tilde{m}_2 = 2m_2$  (верхнего) в собственной системе отсчета  $K_1$  ползуна  $m_1$  на ось координат  $x$  системы отсчета  $K$  и диссипативной силой  $\vec{F}_1 = -\mu_1 \vec{v}_1$ , действующей на ползун  $m_1$  вдоль этой же оси  $x$ . То, что в ползуне условно сосредоточена вся масса  $m = m_1 + \tilde{m}_2$  (2), сводит трехмассовую КПМ к одномассовому эквиваленту ( $m = m_1 + \tilde{m}_2$ ) с двумя с двумя степенями свободы по обобщенным координатам  $x_1$  и  $\varphi_{21}$  (1), движущемуся в поле ИД под действием силы  $\vec{F}_{10} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1$  [2].

Суммирование последнего уравнения (3) для двух зеркальных относительно  $x$  частей КПМ дает

$$\frac{d}{dt} K_z = \frac{d}{dt} K_z^+ + \frac{d}{dt} K_z^- = M - M = 0. \quad (4)$$

Из него следует равенство  $dK_z^+ / dt = -dK_z^- / dt$ , показывающее, что любому изменению  $\ddot{\varphi}_{21} = \dot{\omega}_{21}$  угловой скорости  $\omega_{21}$  рабочего тела  $m_2$  КПМ (кинетического момента  $dK_z^+ / dt$  его одной части), вызванному действием момента  $M$  (см. рис. 1, а), соответствует равное по величине и обратное по знаку изменение момента  $-dK_z^- / dt$  ее зеркальной части так, что результирующий кинетический момент КПМ для любых постоянных значений  $\mu_1$ , лежащих в пределах  $0 \leq \mu_1 \leq \infty$ , сохраняется,  $K_z = \text{const}$ , что обосновывает приемлемость допущения  $\omega_{21} = \omega_{\text{ср}} = \text{const}$ . В результате у КПМ (в отличие от МС2 [2]) для любых  $\ddot{\varphi}_{21}$  отсутствует вращение (откат) ползуна  $m_1$ .

При учете факторов неидеальности в виде веса шкива 4 и кривошипа 3 с длиной  $R$  следует:

- добавить к массе ползуна  $m_1$  суммарную массу  $2 m_{\text{ш}}$  шкивов 4 ( $m_1 + 2m_{\text{ш}}$ );
- учесть смещение центра тяжести системы кривошип 3 – тело  $m_2$  в сторону шкива 4 по формуле  $R_3 = (m_R x_R + m_2 x_2) / (m_R + m_2)$ , где  $R_3$  – эквивалентная длина

кривошипа 3;  $x_R = R/2$  – координата центра тяжести кривошипа 3, отсчитываемая от шкива 4;  $x_2 = R + l_2/2$  – координата центра тяжести тела  $m_2$ , также отсчитываемая от шкива 4;  $l_2$  – длина рабочего тела  $m_2$ .

Весом нити 6 и пружины 7 можно пренебречь, так как вес каждой из них более чем на 5–10 порядков меньше суммарного веса КПМ.

Для продолжения динамического анализа КПМ выделим из общего времени  $0 \leq t \leq \infty$  его движения в системе отсчета  $K$  вдоль ее оси  $x$  две фазы. Активная фаза – это движение КПМ за время  $0 \leq t < t_1$  (см. рис. 1, а), когда осуществляется вращательное перемещение его рабочих тел  $m_2$  из положения  $x_{21}$  в положение  $x_{22}$  в собственной системе отсчета  $K_1$  ползуна  $m_1$  (см. рис. 1, б). Пассивная фаза движения – это затухающее движение КПМ за время  $t_1 \leq t \leq \infty$  как целого после абсолютно неупругого уравновешенного центрального удара рабочих тел  $m_2$  в положении  $x_{22}$  (см. рис. 1, а, б).

### Активная фаза движения КПМ

Движение основания  $m_1$  КПМ в системе отсчета  $K$  (см. рис. 1, а) описывается первым уравнением (3). Его решение было получено в работах [2, 3]:

$$\begin{aligned} x_1(\varphi_{21}) &= A_1 \left( \cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \sin \varepsilon - \cos(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\ \dot{x}_1(\varphi_{21}) &= -A_1 \omega_{21} \left( \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21}) \sin \varepsilon - \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $A_1 = a / \sqrt{1 + \xi^2}$  – амплитудный коэффициент;  $\varepsilon = \arctg(\xi)$  – угол диссипативных потерь;  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$  – диссипативный параметр.

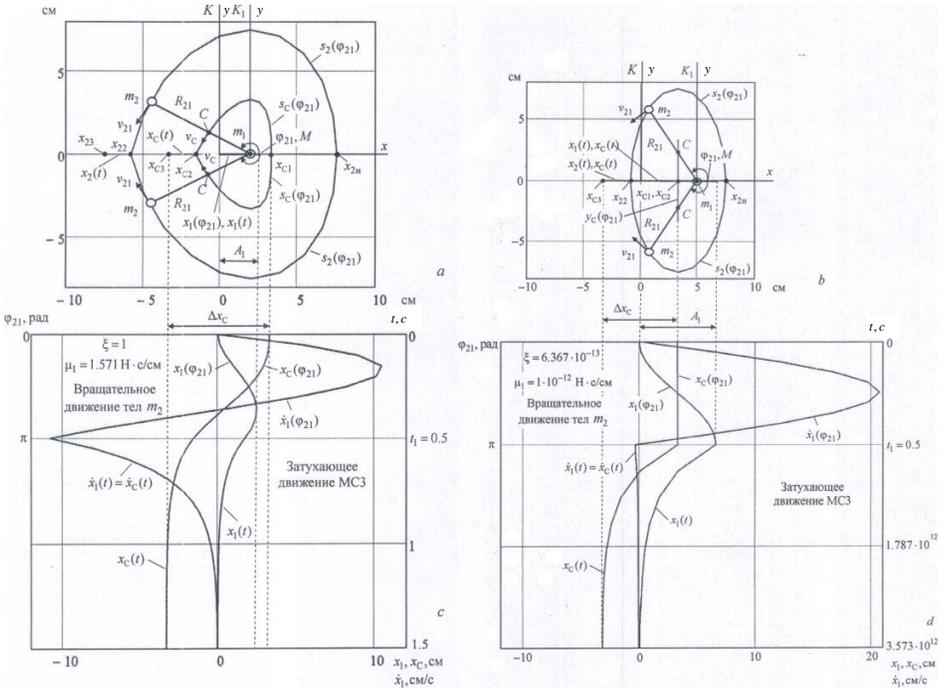
Координаты  $x_1(\varphi_{21})$  и скорости  $\dot{x}_1(\varphi_{21})$  ползуна  $m_1$  во время  $0 \leq t < t_1$  ( $t_1 = 0.5$  с) активной фазы движения КПМ были рассчитаны по решениям (5), а координаты  $x_C$  и скорости  $\dot{x}_C$  его ЦМ  $C$  – по известным формулам [4]

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{m_1 x_1 + \tilde{m}_2 x_2}{m_1 + \tilde{m}_2}; y_C = y_C^+ + y_C^- = 0; \\ \dot{x}_C &= \frac{m_1 \dot{x}_1 + \tilde{m}_2 \dot{x}_2}{m_1 + \tilde{m}_2}; \dot{y}_C = \dot{y}_C^+ + \dot{y}_C^- = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где координаты  $x_2 = x_1 + \cos \varphi_{21}$ ,  $y_2 = \sin \varphi_{21}$  и определенные по ним скорости  $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \omega_{21} \sin \varphi_{21}$ ,  $\dot{y}_2 = \omega_{21} \cos \varphi_{21}$ ;  $y_C^\pm = \frac{\tilde{m}_2 y_2}{m_1 + \tilde{m}_2}$  и  $\dot{y}_C^\pm = \pm \frac{\tilde{m}_2 \dot{y}_2}{m_1 + \tilde{m}_2}$  – координаты и скорости ЦМ  $C$  отдельно для верхней и нижней частей КПМ, зеркальных относительно  $x$ .

На рис. 2, а, б показаны траектории движения ползуна  $m_1$  и тел  $m_2$ , а также ЦМ  $C$ , а на рис. 2, в, д – графики рассчитанных из (5) и (6) координат (положений)  $x_1(\varphi_{21})$ ,  $x_C(\varphi_{21})$  и скоростей  $\dot{x}_1(\varphi_{21})$  ползуна  $m_1$  и тел  $m_2$ , для углов их встречного поворота на угол  $0 \leq \varphi_{21}(t) \leq \pi$  за время  $0 \leq t < t_1$ ;  $t_1 = 0.5$  с активной фазы. Их расчет

выполнен для собственных параметров КПМ:  $m_1 = 0.14$  кг;  $\tilde{m}_2 = 2m_2 = 0.11$  кг;  $R = 7.5$  см, которые в дальнейшем неизменны.



**Рис. 2.** Кинематическая схема КПМ (a, b) и графики положения  $x_1$  и скорости  $\dot{x}_1$  его ползуна  $m_1$ , а также положения  $x_C$  его ЦМ  $C$  за общее время активной и пассивной фаз его движения:  $0 \leq t \leq 1.5$  с при  $\xi = 1$  ( $\mu_1 = 1.571$  Н · с/см) (c);  $0 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$  с при  $\xi = 6.367 \cdot 10^{-13}$  ( $\mu_1 = 1 \cdot 10^{-12}$  Н · с/см) (d)

**Fig. 2.** (a), (b) Kinematic diagrams of the CSM and graphs of position  $x_1$  and speed  $\dot{x}_1$  of its slider  $m_1$ , as well as position  $x_C$  of its center of mass (CM)  $C$  for the total time of the active and passive phases of motion: (c)  $0 \leq t \leq 1.5$  s with  $\xi = 1$  ( $\mu_1 = 1.571$  N · s/cm) and (d)  $0 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$  s with  $\xi = 6.367 \cdot 10^{-13}$  ( $\mu_1 = 1 \cdot 10^{-12}$  N · s/cm)

### Пассивная фаза движения КПМ

В результате встречного абсолютно неупругого центрального удара рабочих тел  $m_2$  в положении  $x_{22}$  (см. рис. 1, a, b) при их повороте на угол  $\varphi_{21} = \omega_{21}t_1 = \pi$  угловая скорость  $\omega_{21}$  их вращательного перемещения обратится в нуль:  $\omega_{21} = 0$ . Тогда во время  $t_1 \leq t \leq \infty$ ;  $t_1 = 0.5$  с пассивной фазы движения КПМ он будет совместно с его ЦМ  $C$  совершать в системе отсчета  $K$  вдоль ее оси  $x$  затухающее поступательное движение (см. рис. 2, c, d) по инерции как единое целое со скоростью

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = \dot{x}_C(t). \quad (7)$$

Как известно, затухающее движение КПМ во время  $t_1 \leq t \leq \infty$ ;  $t_1 = 0.5$  с пассивной фазы движения можно представить однородным уравнением  $\ddot{x}_1 + 2\gamma_1 \dot{x}_1 = 0$  с решениями

$$x_1(t) = C_1 + C_2 \exp(-2\gamma_1(t-t_1)); \quad x_c(t) = C_3 + C_2 \exp(-2\gamma_1(t-t_1)). \quad (8)$$

Дифференцирование  $dx_1(t)/dt$  и  $dx_c(t)/dt$  решений (8) по времени  $t$  позволяет представить равенство (7) в виде:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_c(t) = -2C_2\gamma_1 \exp(-2\gamma_1(t-t_1)). \quad (9)$$

Подстановка времени  $t = t_1$  в решения (8) и равенство (9) позволяет определить коэффициенты  $C_1-C_3$  в виде:

$$x_1(t_1) = x_1(\alpha) = C_1 + C_2; \quad x_c(t_1) = x_c(\alpha) = C_3 + C_2; \quad (10)$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_c(t_1) = \dot{x}_c(\alpha) = -2C_2\gamma_1,$$

здесь начальное положение  $x_1(\alpha)$  и  $x_c(\alpha)$  ползуна  $m_1$  и ЦМ  $C$ , а также его начальная скорость  $\dot{x}_c(\alpha)$  определены решениями (5) и формулами (6) при фиксированном повороте рабочих тел  $m_2$  на угол  $\varphi_{21} = \omega_{21}t = \alpha = \pi$ .

Решая уравнения (10), получим

$$C_1 = x_1(\alpha) + \dot{x}_c(\alpha) / 2\gamma_1; \quad C_2 = -\dot{x}_c(\alpha) / 2\gamma_1; \quad C_3 = x_c(\alpha) + \dot{x}_c(\alpha) / 2\gamma_1. \quad (11)$$

Подстановка (11) в (8) и (9) дает

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_c(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t-t_1))]; \\ \dot{x}_1(t) &= \dot{x}_c(t) = \dot{x}_c(\alpha) \exp(-2\gamma_1(t-t_1)); \\ x_c(t) &= x_c(\alpha) + \frac{\dot{x}_c(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t-t_1))]. \end{aligned} \quad (12)$$

В решении (12) допустимое время  $t \geq t_1$ . Положения  $x_1(\alpha)$ ,  $x_c(\alpha)$  и скорость  $\dot{x}_c(\alpha)$  рассчитаны из (5) и (6) при  $t_1 = 0.5$  с,  $\alpha = \pi$ . Их рассчитанные значения составляют: для рис. 2, *c* при  $\xi = 1$  –  $x_1(\pi) = 1.72$  см,  $x_c(\pi) = -1.58$  см и  $\dot{x}_c(\pi) = -10.82$  см/с; для рис. 2, *d* при  $\xi = 1$  –  $x_1(\pi) = 6.6$  см,  $x_c(\pi) = 3.3$  см и  $\dot{x}_c(\pi) = -2.64 \cdot 10^{-11}$ .

Рассчитанные из решений (5), (12) и формул (6) значения  $x_1(t)$ ,  $\dot{x}_1(t)$ ,  $x_c(t)$  показаны графиками на рис. 2, *c* в системе отсчета  $K$  для времени  $t_1 \leq t \leq 1.5$ ;  $t_1 = 0.5$  с активной фазы движения КПМ и на рис. 2, *c* для времени  $t_1 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$ ;  $t_1 = 0.5$  с пассивной фазы его движения. Расчет произведен с использованием двух значений диссипативного параметра  $\xi$  (5): для рис. 2, *c* –  $\xi = 1$ ,  $\mu_1 = 1.571$  Н·с/см и для рис. 2, *d* –  $\xi = 6.367 \cdot 10^{-13}$ ,  $\mu_1 = 1 \cdot 10^{-12}$  Н·с/см при ранее заданных собственных параметрах КПМ.

### Эффект смещения ЦМ МСЗ

Величину смещения  $\Delta x_C$  ЦМ  $C$  МСЗ в системе отсчета  $K$  выразим для двух значений диссипативного параметра  $\xi = 1$  и  $\xi = 6.367 \cdot 10^{-13}$ , которые приведены на

рис. 2, *c, d*. Для  $\xi = 1$  (см. рис. 2, *c*) его величина за общее время  $0 \leq t \leq 1.5$  с складывается из времени  $0 \leq t < 0.5$  с активной фазы движения КПМ и времени  $0.5 \leq t \leq 1.5$  с пассивной фазы его движения (см. рис. 2, *c*). Аналогично для  $\xi = 6.367 \cdot 10^{-13}$  за общее время  $0 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$  с активной  $0 \leq t < 0.5$  с и пассивной  $0.5 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$  с фаз (см. рис. 2, *d*). Для этих двух случаев величина смещения  $\Delta x_C$  ЦМ *C* составляет [3]

$$\Delta x_C = x_{C3} - x_{C1} = \Delta x_r + \Delta x_e. \quad (13)$$

Первое слагаемое  $\Delta x_r = -a(1 - \cos \alpha)$  (13) есть относительное смещение ЦМ *C* в системе отсчета  $K_1$  за время  $0 \leq t < 0.5$  с активной фазы движения КПМ. Знак «минус» этого слагаемого указывает на то, что смещение ЦМ *C* происходит в сторону отрицательных значений координатной оси *x* системы отсчета  $K_1$ . Второе слагаемое  $\Delta x_e = x_{C3} - x_{C2} = \Delta x_1$  является переносным смещением ЦМ *C* в системе отсчета *K*. Оно в системе отсчета *K* равно смещению  $\Delta x_1$  опорного тела  $m_1$  за общее время активной и пассивной фаз движения КПМ.

Согласно рис. 2, *c, d*, смещение  $\Delta x_1$  опорного тела  $m_1$  за общее время действия и последствия  $0 \leq t \leq 1.5$  с (для рис. 2, *c*) и  $0 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$  с (для рис. 2, *d*) для  $1 \cdot 10^{-12} \leq \mu_1 \leq 1.571$  Н·с/см равно нулю:  $\Delta x_1 = 0$ . Следовательно, смещение  $\Delta x_C$  (13) ЦМ при  $\xi_{\text{п}} \leq \xi \leq \infty$  сохраняется постоянным:  $\Delta x_C = \text{const} = 0$ . Величина  $\xi_{\text{п}}$  является некоторым пороговым значением диссипативного параметра  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$  (5). Это пороговое значение  $\xi_{\text{п}}$  для выбранной модели МСЗ будет определено ниже. При  $\xi \geq \xi_{\text{п}}$  смещение ЦМ *C*  $\Delta x_C = \Delta x_r = -a(1 - \cos \alpha) = \text{const}$  и не зависит от коэффициента сопротивления  $\mu_1$  диссипативной среды движению ползуна  $m_1$  [3].

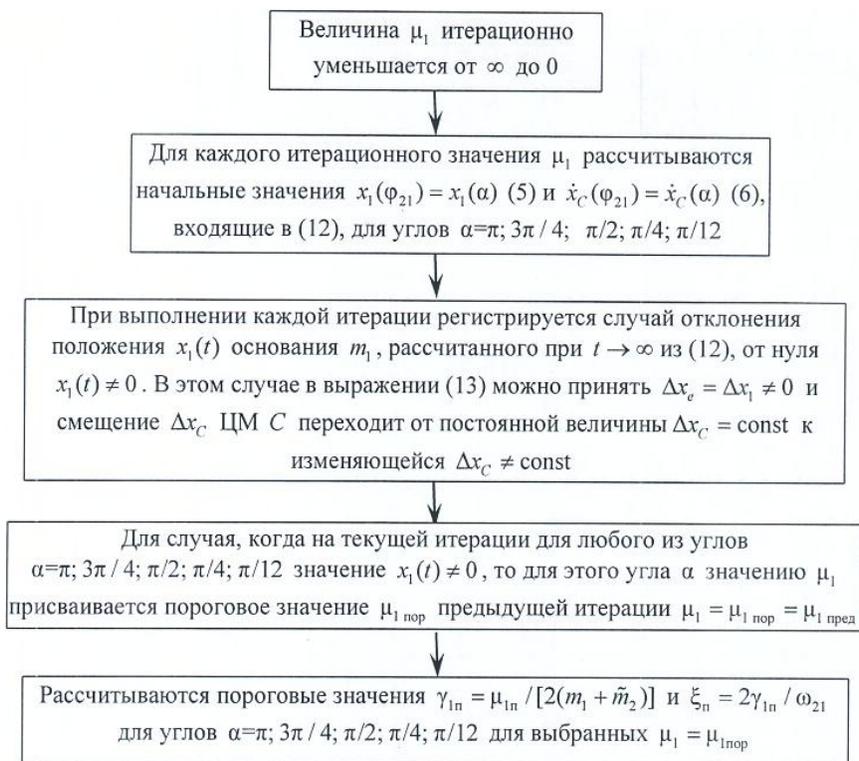
Эффект постоянного смещения  $\Delta x_C = \Delta x_r = -a(1 - \cos \alpha) = \text{const}$  (13) ЦМ *C* при  $\xi_{\text{п}} \leq \xi \leq \infty$  обеспечивает вклад угла диссипативных потерь  $\varepsilon = \text{arctg}(\xi)$  (5) в угол  $\varphi = \varphi_{10} - \varphi_{21} = \pi + \varepsilon$ , характеризующий запаздывание фазы  $\varphi_{10} = \varphi_{21} + \pi + \varepsilon$  прямолинейного движения ползуна  $m_1$  (вдоль оси *x*) относительно фазы  $\varphi_{21}$  встречного вращательного движения рабочих тел  $m_2$  в системе координат  $K_O$ , связанной с центром *O* ИД (1). При таком запаздывании скорость  $\dot{x}_1(\varphi_{21} = \pi) = \dot{x}_C(\varphi_{21} = \pi) < 0$  основания  $m_1$  при  $\varphi_{21} = \alpha = \pi$  является отрицательной, как показано на рис. 2, *c, d*. Для отрицательного значения скорости  $\dot{x}_1(\varphi_{21} = \pi) = \dot{x}_C(\varphi_{21} = \pi) < 0$  всегда выполняется условие

$$x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t - t_1))] \right] = x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} = 0; \quad \xi \geq \xi_{\text{п}}. \quad (14)$$

Условие (14) получено из (12) при  $t \rightarrow \infty$ . Согласно ему, смещение  $\Delta x_C$  ЦМ *C* КПМ для всех  $\xi \geq \xi_{\text{п}}$  равно  $\Delta x_C = \text{const}$ , а при  $\xi < \xi_{\text{п}}$  оно  $\Delta x_C \rightarrow 0$ .

Условие (14) отражает тот факт, что ползун  $m_1$  при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к началу координат неподвижной системы отсчета *K*, которое определено начальном положением ползуна  $m_1$  в момент времени  $t = 0$  (см. рис. 2, *c, d*). Такое поведение КПМ не противоречит выводам работ [3, 5, 6].

Пороговое значение  $\xi_n$  было найдено на основе численного моделирования смещения  $\Delta x_C$  (13) ЦМ С. Оно искалось как функция от коэффициента сопротивления  $\mu_1$ , который определяет коэффициент затухания  $\gamma_1 = \mu_1 / [2(m_1 + \tilde{m}_2)]$  (3) и одновременно диссипативный параметр  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$  (5). На рис. 3 приведен алгоритм численного моделирования.



**Рис. 3.** Блок-схема алгоритма численного моделирования  
**Fig. 3.** Block diagram for a numerical simulation algorithm

Результаты численного моделирования приведены на рис. 4.

В дополнение к рис. 4 в таблице приведены рассчитанные значения смещений  $\Delta x_C$  ЦМ С МСЗ для различных углов поворота  $\alpha$  в виде функций от диссипативного параметра  $\xi \geq \xi_n$ .

Согласно рис. 4 и таблице, величина смещения  $\Delta x_C$  ЦМ С для каждого из углов  $\alpha = \pi; 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$  в диапазоне изменения  $\xi_n \leq \xi \leq \infty$  диссипативного параметра  $\xi$  сохраняется постоянным,  $\Delta x_C = \text{const}$ . Из рис. 3 видно, что в малом интервале  $\Delta \xi = 0.061 \cdot 10^{-13}$  –  $\alpha = \pi$  и  $\Delta \xi = 0.084 \cdot 10^{-4}$  –  $\alpha = 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$  уменьшения диссипативного параметра  $\xi$  смещение  $\Delta x_C$  ЦМ С линейно стремится к нулю,  $\Delta x_C \rightarrow 0$  (в интервале  $\Delta \xi$  график на рис. 3 показан штрихпунктирной линией).

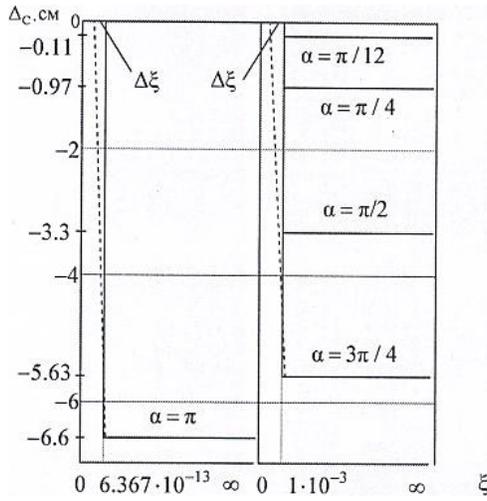


Рис. 4. Смещение  $\Delta x_C$  ЦМ  $C$  для фиксированных углов  $\alpha$  в виде функции от диссипативного параметра  $\xi$

Fig. 4. Offset  $\Delta x_C$  of the CM  $C$  for fixed angles  $\alpha$  as a function of dissipative parameter  $\xi$

**Смещения центра масс для различных углов поворота  $\alpha$**

Рисунок	Угол	Диссипативный параметр	Смещение ЦМ $C$	Общее время
Рис. 2, <i>c</i>	$\alpha = \pi$	$\xi = 1$	$\Delta x_C = -6.6 \text{ см} = \text{const}$	$t = 1.5 \text{ с}$
Рис. 2, <i>d</i>	$\alpha = \pi$	$\xi = \xi_{\text{н}} = 6.367 \cdot 10^{-13}$	$\Delta x_C = -6.6 \text{ см} = \text{const}$	$t = 3.543 \cdot 10^{12} \text{ с}$
Рис. 4	$\alpha = 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$	$\xi_{\text{н}} \leq \xi \leq 1$ $\xi_{\text{н}} = 1 \cdot 10^{-3}$	$\Delta x_C = -5.633; -3.3; -0.967; -0.112 \text{ см}$	$t = 2 \cdot 10^3$

Также согласно рис. 4, рис. 2, *c*, *d* и таблице, наименьшее пороговое значение  $\xi_{\text{н min}} = 6.367 \cdot 10^{-13}$  диссипативного параметра  $\xi$  наблюдается при угле  $\alpha = \pi$ , когда смещение  $\Delta x_{C \text{ max}} = -6.6 \text{ см} = \text{const}$ , ЦМ  $C$  максимально. При стремлении  $\xi \rightarrow \xi_{\text{н}}$  начальная скорость  $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi)$ , изменяясь по закону  $-\sin 2\alpha$ , стремится к нулю:  $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi) \rightarrow 0$ . Она за малый интервал  $\Delta \xi$  приращения  $\xi$  обращается в нуль:  $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi) = 0$ . При этом в этом же малом интервале  $\Delta \xi$  смещение ЦМ  $C$   $\Delta x_C$  также стремится к нулю,  $\Delta x_C \rightarrow 0$ , обращаясь в нуль,  $\Delta x_C = 0$ , при  $\xi_{\text{н}} - \Delta \xi$  (см. рис. 4).

**Заключение**

Таким образом, получено решение задачи для трехмассового КПМ типа «инерциоид Толчина» [1]. Показано, что КПМ сводится к двухмассовому аналогу, а затем к одномассовому эквиваленту [2], масса  $m$  которого движется в центральном поле инерционного домена с уравнением движения (1) и его решением (5). Показано, что смещение  $\Delta x_C$  (13) центра  $O_C$  масс  $C$  КПМ в среде со значением

диссипативного параметра больше порогового  $\xi_{\text{п}} \leq \xi \leq \infty$  остается постоянным:  $\Delta x_C = -a(1 - \cos \alpha) = \text{const}$ , что согласуется с работой [3]. Это обеспечивает эффективное движение инерциоида Толчина [1] посредством выбора разных угловых скоростей  $\omega_{21}$  для прямого и обратного перемещения его рабочих тел  $m_2$ . Например, для одного из них  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21} \geq \xi_{\text{п}}$ , когда смещение  $\Delta x_C$  его ЦМ  $C$  постоянно,  $\Delta x_C = \text{const}$ , а для другого  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21} < \xi_{\text{п}}$ , когда оно стремится к нулю,  $\Delta x_C \rightarrow 0$ . Полученные результаты базируются на аксиоме связей для сил инерции, которая является обобщением результатов работы [2], позволяют наиболее наглядно продемонстрировать физический принцип действия КПМ и ставят под сомнение выводы работ [7–9].

### Список источников

1. Толчин В.Н. Инерциоид. Силы инерции как источник поступательного движения. Пермь: Кн. изд-во, 1977. 100 с.
2. Савелькаев С.В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 135–149. doi: 10.17223/19988621/87/11
3. Савелькаев С.В. Эффект независимости величины смещения центра масс механической системы от диссипативности внешней среды // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 4 (17). С. 42–48.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высш. школа, 1990. 607 с.
5. Егоров А.Г., Захарова О.С. Энергетически оптимальное движение вибратора в среде с наследственным законом сопротивления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 3. С. 168–176.
6. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, вып. 2. С. 202–215.
7. Гулиа Н.В. Инерция. М.: Наука, 1982. 152 с. (Наука и технический прогресс).
8. Шипов Г.И. Теория физического вакуума. М.: НТ-Центр, 1993. 362 с.
9. Иванов Н.И. Ритмодинамика. М.: Энергия, 2007. 221 с.

### References

1. Tolchin V.N. (1977) Inertsoid. Sily inertsii kak istochnik postupatel'nogo dvizheniya [*Inertoid. Forces of inertia as a source of translational motion*]. Perm: Permskoe knizhnoe izdatel'stvo.
2. Savel'kaev S.V. (2024) Dinamicheskiy analiz dvukhmassovoy mekhanicheskoy sistemy v dissipativnoy srede s uchetom sil inertsii [*Dynamic analysis of a two-mass mechanical system in a dissipative medium taking into account inertial forces*]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 87. pp. 135–149. doi: 10.17223/19988621/87/11
3. Savel'kaev S.V. (2011) Effekt nezavisimosti velichiny smeshcheniya tsentra mass mekhanicheskoy sistemy ot dissipativnosti vneshney sredy [*The effect of independence of the displacement of the center of mass of a mechanical system from the dissipativity of the external environment*]. Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov – Mechanics of Machines, Mechanisms, and Materials. 4(17).
4. Nikitin N.N. (1990) Kurs teoreticheskoy mekhaniki [*Course of theoretical mechanics*]. Moscow: Vysshaya shkola.
5. Egorov A.G., Zakharova O.S. (2015) Energeticheski optimal'noe dvizhenie vibratora v srede s nasledstvennym zakonom soprotivleniya [*Energetically optimal movement of a vibrator in*

- a medium with a hereditary law of resistance*]. Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems. 3. pp. 168–176.
6. Chernous'ko F.L. (2008) *Optimal'nye periodicheskie dvizheniya dvukhmassovoy sistemy v so-protivlyayushcheysya srede* [The optimal periodic motions of a two-mass system in a resisting medium]. Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 72(2). pp. 202–215.
  7. Gulia N.V. (1982) *Inertsiya* [Inertia]. Moscow: Nauka.
  8. Shipov G.I. (1993) *Teoriya fizicheskogo vakuuma* [Theory of physical vacuum]. Moscow: NT-Tsentr.
  9. Ivanov N.I. (2007) *Ritmodinamika* [Rhythmodynamics]. Moscow: Energiya.

**Сведения об авторе:**

**Савелькаев Сергей Викторович** – доктор технических наук, доцент ВАК, профессор кафедры специальных устройств, инноватики и метрологии Сибирского государственного университета геосистем и технологий (Новосибирск, Россия). E-mail: sergei.savelkaev@yandex.ru

**Information about the author:**

**Savel'kaev Sergey V.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, Innovations and Metrology of the Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: sergei.savelkaev@yandex.ru

*Статья поступила в редакцию 28.03.2024; принята к публикации 01.08.2025*

*The article was submitted 28.03.2024; accepted for publication 01.08.2025*

Научная статья

УДК 539.376

doi: 10.17223/19988621/96/11

## Аналитический принцип соответствия упругих и вязкоупругих задач

Александр Андреевич Светашков<sup>1</sup>, Михаил Сергеевич Павлов<sup>2</sup>,  
Ольга Сергеевна Пустовых<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> *Томский политехнический университет, Томск, Россия*

<sup>2</sup> *Томский государственный университет, Томск, Россия*

<sup>1</sup> *svetashkov@tpu.ru*

<sup>2</sup> *mspavlov@tpu.ru*

<sup>3</sup> *BOS1983@tpu.ru*

**Аннотация.** Рассмотрено теоретическое обоснование подхода к решению задач расчета прочности конструкций из вязкоупругих материалов. Сформулирован аналитический метод решения вязкоупругих задач. Суть его в том, что найдены функции времени, при которых определяющие уравнения упругости и вязкоупругости тождественны в любой момент времени. При реализации предложенного принципа нет ограничений на представление упругого решения в виде аналитической функции упругих постоянных.

**Ключевые слова:** эффективные по времени модули, тождественность определяющих уравнений, взаимобратимость определяющих уравнений упругости и вязкоупругости, граничные задачи I и II рода

**Для цитирования:** Светашков А.А., Павлов М.С., Пустовых О.С. Аналитический принцип соответствия упругих и вязкоупругих задач // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 131–144. doi: 10.17223/19988621/96/11

Original article

## Analytical correspondence principle for the elastic and viscoelastic problems

Aleksandr A. Svetashkov<sup>1</sup>, Mikhail S. Pavlov<sup>2</sup>, Ol'ga S. Pustovoykh<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> *Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation*

<sup>2</sup> *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

<sup>1</sup> *svetashkov@tpu.ru*

<sup>2</sup> *mspavlov@tpu.ru*

<sup>3</sup> *BOS1983@tpu.ru*

**Abstract.** This paper deals with the development of a method for solving the problems of isotropic and anisotropic viscoelastic bodies based on the separation of spatial and

temporal variables. In contrast to the classical method of separation of variables implying the transformation of systems of partial differential equations, a specific scheme of transformation of the constitutive equations for a viscoelastic body is proposed. As a result of these transformations, the elastic body equations are obtained, in which some known time functions are used in terms of the material constants of elasticity.

First, the constitutive equations of a linear viscoelastic body are considered. Using identical transformations, the equivalence of the constitutive equations for a viscoelastic medium and a comparative elastic medium is proved if the stresses are set at the boundary. In the same manner, the equivalence of viscoelastic and elastic media is proved if the displacements are specified at the boundary. Finally, a relation is identified between the parameters of the comparative elastic media for these two cases, and their mutual converse is justified. The real-problem example is solved and presented at the end of the paper.

**Keywords:** time-efficient moduli, identity of constitutive equations, interchangeability of constitutive equations of elasticity and viscoelasticity, the first and second boundary-value problems

**For citation:** Svetashkov, A.A., Pavlov, M.S., Pustovykh, O.S. (2025) Analytical correspondence principle for the elastic and viscoelastic problems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 131–144. doi: 10.17223/19988621/96/11

## Введение

Первые исследования по механике вязкоупругих материалов, обладающих как упругими, так и вязкими свойствами, были проведены Дж. Максвеллом [1], Л. Больцманом [2], В. Вольтерра [3, 4]. В середине прошлого века были опубликованы классические работы Т. Алфрея [5], Д. Ферри [6], А.Р. Ржаницына [7] Д. Бленда [8], Н.Х. Арутюняна [9].

В связи с широким применением полимерных и композитных материалов дальнейшее развитие теории вязкоупругости было продолжено в работах J. Reddy [10], A. Pipkin [11], W. Flugge [12], R. Christensen [13], М.А. Колтунова [14], R. Schapery [15], А.А. Ильюшина, Б.Е. Победри [16], И.И. Бугакова [17], Ю.Н. Работнова [18, 19], В.В. Москвитина [20] и др. В настоящее время развитие методов анализа изделий из материалов, проявляющих вязкоупругие свойства, продолжается [21, 22], в том числе с применением нейросетей [23, 24].

Известны основные методы, составляющие основу математического аппарата решения граничных задач вязкоупругости. Широко известен аналитический метод Вольтерра [3, 4], суть которого в замене в упругом решении материальных констант на интегральные операторы и последующей расшифровке полученного решения. Единственным ограничением на его применение является необходимость иметь упругое решение в виде аналитической функции материальных постоянных. Также весьма распространен метод преобразования Лапласа, А.А. Ильюшиным сформулирован метод аппроксимаций, основой которого служит некоторый способ задания зависимости упругих решений от упругих постоянных [25]. В.И. Малый, Н.А. Труфанов [26] предложили метод квазиконстантных операторов, который состоит в обосновании возможности выноса ядра из подынтегрального выражения, входящего в определяющие уравнения вязкоупругого тела.

Настоящая публикация посвящена развитию подхода к решению задач вязкоупругости изотропных [27] и анизотропных [28] тел, основанного на разделении

пространственных и временных переменных. В отличие от классического метода разделения переменных, в котором проводится преобразование систем уравнений в частных производных, предложена схема преобразований определяющих уравнений вязкоупругого тела. В результате проведенных преобразований получены уравнения упругого тела, в которые вместо постоянных упругости входят некоторые известные функции времени. С учетом условий на границе имеем два типа модулей, эффективных по времени [27, 29]. В последующем изложении будем обозначать и называть их  $g_c(t)$ ,  $k_c(t)$  и  $g_l(t)$ ,  $k_l(t)$ , подразумевая, что данные функции времени относятся соответственно к типу Кастильяно и типу Лагранжа [30].

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим граничную задачу линейной теории вязкоупругости II рода. Напряжения и деформации связаны уравнениями

$$s_{ij} = 2G^* e_{ij}, \quad (1)$$

$$\sigma = 3K^* \theta. \quad (2)$$

Здесь  $s_{ij}$ ,  $e_{ij}$  – девиаторы напряжений и деформаций,  $\sigma$ ,  $\theta$  – первые инварианты тензора напряжений и деформаций соответственно,  $G^*$ ,  $K^*$  – интегральные операторы релаксации, сдвиговой и объемной соответственно.

$$\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij},$$

$\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  – соответственно тензоры напряжений и деформаций,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

$$G^* e_{ij} \equiv G \left[ e_{ij}(t) - \int_0^t R(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \right],$$

$$K^* \theta \equiv K \left[ \theta(t) - \int_0^t R_1(t-\tau) \theta(\tau) d\tau \right].$$

Здесь  $K$  – модуль объемного сжатия,  $G$  – модуль сдвига.  $R(t)$ ,  $R_1(t)$  – ядра операторов релаксации (или функции памяти), определяемые из опыта.

Уравнения равновесия в перемещениях при отсутствии объемных сил

$$\left( K^* + \frac{1}{3} G^* \right) \theta_{,i} + G^* \Delta u_i = 0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle. \quad (3)$$

Здесь  $u_i(u, v, w)$  – компоненты вектора перемещений,  $\Delta$  – оператор Лапласа, запятая означает дифференцирование по пространственной координате  $x_i$ , соответствующей индексу после запятой:

$$\theta_{,i} = \frac{\partial \theta}{\partial x_i}.$$

Если в тексте встречаются индексы, помещенные в круглые скобки, то это подразумевает суммирование от 1 до 3. Если же упомянутые индексы заключены в угловые скобки, то суммирование не производится.

Условия на границе в напряжениях:

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Gamma} = S_i^0(x_1, x_2, x_3, t), \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Здесь  $n_j$  – косинусы углов между осями координат и нормалью к границе,  $S_i^0$  – граничные нагрузки, зависящие от пространственных координат  $x_1, x_2, x_3$  и времени  $t$ .

Относительно вида внешних граничных нагрузок  $S_i^0$  принимаются следующие предположения:

$$S_i^0(x_1, x_2, x_3, t) = \tilde{S}_i^k(x_1, x_2, x_3) H_i^k(t), \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где  $\tilde{S}_i^k(x_1, x_2, x_3)$  – некоторые функции, определяющие усилия на границе и зависящие только от пространственных координат,  $H_i^k(t)$  – функции, зависящие только от времени,  $n$  – число членов разложения в аналитическом представлении нагрузки на границе. Если представление (5) невыполнимо, мы можем потребовать выполнение условий разложимости  $S_i^0 = S_i^0(x_1, x_2, x_3, t)$  в ряд Фурье.

В дальнейших рассуждениях примем более простую форму граничных условий в напряжениях:

$$S_i^0(x_1, x_2, x_3, t) = \tilde{S}_i^0(x_1, x_2, x_3) H(t), \quad (6)$$

где  $H(t)$  – какая-либо из входящих в (5) функций  $H_i^k(t)$ . Для линейных задач справедлив принцип суперпозиции, следовательно, результаты, полученные для задачи с граничными условиями вида (6), легко распространяются на задачи с граничными условиями вида (5).

## 2. Процедура получения эффективных по времени модулей на основе анализа физических уравнений

Рассмотрим некоторую задачу вязкоупругости, постановка которой определяется уравнениями (1)–(3). Пусть на границе заданы только напряжения (задача II рода). Выражения  $g_c(t)$ ,  $k_c(t)$ ,  $g_l(t)$ ,  $k_l(t)$  эффективных по времени модулей для этого случая найдены в [27] на основе решений двух вариационных задач о близости функционалов потенциальных энергий напряжений исходной вязкоупругой среды и упругой среды сравнения.

Получим теперь выражения эффективных по времени модулей для этой задачи путем преобразований определяющих уравнений. Таким образом будет доказана тождественность определяющих уравнений линейно вязкоупругой среды и упругой среды сравнения.

В соответствии с граничными условиями (6) будем искать решение в следующем виде:

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t) = \tilde{\sigma}_{ij}(x_1, x_2, x_3) H(t), \quad (7)$$

где  $\tilde{\sigma}_{ij}$  – тензор напряжений, компоненты которого не зависят от времени.

Подставим соотношение (7) в (1). Производя свертку материального оператора  $G^*$  с функцией  $H(t)$ , получим

$$e_{ij}(t) = \frac{1}{2G^*} s_{ij} = \tilde{s}_{ij} \frac{1}{2G^*} H,$$

где  $\tilde{s}_{ij}$  – девиатор напряжений, не зависящих от времени. После тождественных преобразований имеем

$$e_{ij}(t) = \frac{1}{2} s_{ij} \frac{G^{*-1} H}{H(t)}. \quad (8)$$

Обозначим

$$g_c(t) = \frac{H(t)}{G^{*-1}H}. \quad (9)$$

Функцию  $g_c(t)$  далее будем называть «эффективный по времени модуль сдвига кастильянового типа». Тогда (8) запишется как

$$e_{ij}(t) = \frac{1}{2g_c(t)} s_{ij}(t). \quad (10)$$

Соотношения (10) представляют собой упругий закон Гука для девиаторов напряжений и деформаций, в которых упругая постоянная заменена некоторой известной функцией времени.

Проанализируем физико-математический смысл выражения эффективного модуля  $g_c(t)$ . Зависимость решений граничных задач линейной вязкоупругости от времени складывается из следующих факторов:

а) зависимостей определяющих уравнений от времени, обусловленных природой упруго-наследственных тел;

б) зависимостей граничных нагрузок от времени, причем даже при постоянных по времени нагрузках последние можно представить как произведение некоторых функций координат на ступенчатую функцию Хевисайда  $h(t)$ .

Таким образом, можно констатировать следующий факт:  $g_c(t)$  учитывает как влияние упруго-наследственных свойств за счет материального оператора сдвиговой релаксации  $G^*$ , так и влияние зависимости от времени граничных нагрузок посредством учета функции  $H(t)$ .

Аналогичным образом проведем тождественное преобразование определяющих уравнений вязкоупругости для шаровых тензоров (2). Повторяя все предыдущие рассуждения, получим

$$\theta = \frac{1}{3K^*} \sigma = \frac{1}{3k_c(t)} \sigma(t), \quad k_c(t) = \frac{H(t)}{K^{*-1}H}. \quad (11)$$

Здесь  $k_c(t)$  – объемный модуль кастильянового типа.

Чтобы установить вид уравнений равновесия, перейдем к определяющим уравнениям вязкоупругости и упругости, выраженным через тензоры напряжений и деформаций. Имеем для вязкоупругости

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}(3K^* - 2G^*)\theta\delta_{ij} + 2G^*\varepsilon_{ij}, \quad (12)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3}(3K_1^* - 2G_1^*)\sigma\delta_{ij} + 2G_1^*\sigma_{ij}. \quad (13)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,

$$3K_1^* = \frac{1}{3K^*}, \quad 2G_1^* = \frac{1}{2G^*}.$$

Воспользуемся тем, что определяющие уравнения (13) по доказанному тождественны упругим уравнениям, которые на основании (10), (11) можно записать как

$$\varepsilon_{ij} = \left( \frac{1}{9k_c(t)} - \frac{1}{6g_c(t)} \right) \sigma\delta_{ij} + \frac{1}{2g_c(t)} \sigma_{ij}. \quad (14)$$

Теперь, если мы разрешим систему (14) относительно напряжений, то получим искомые определяющие уравнения упругого тела, выраженные через эффективные модули  $g_c(t)$ ,  $k_c(t)$ :

$$\sigma_{ij}(t) = \left( k_c(t) - \frac{2}{3} g_c(t) \right) \theta \delta_{ij} + 2 g_c(t) \varepsilon_{ij}. \quad (15)$$

Далее с помощью стандартной процедуры вывода системы уравнений равновесия в форме Ламе выразим деформации через производные от перемещений. Полученные таким способом компоненты тензора напряжений подставим в систему статических уравнений равновесия. В результате получим

$$\left( k_c(t) + \frac{1}{3} g_c(t) \right) \theta_{,i} + g_c(t) \Delta u_i = 0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle. \quad (16)$$

В силу тождественности проведенных преобразований можно считать доказанным следующее утверждение: две граничные задачи II рода в одной и той же расчетной области с одинаковыми условиями на границе вида (4), одна из которых есть задача теории вязкоупругости с определяющими уравнениями (1)–(2) и уравнениями равновесия (3), а другая – задача теории упругости с определяющими уравнениями (10)–(11) и уравнениями равновесия (16), дают тождественные решения при условии представления напряжений на границе в виде (6).

### 3. Граничная задача вязкоупругости I рода

Рассмотрим некоторую задачу вязкоупругости, постановка которой определяется уравнениями (1)–(3). Пусть условия на границе для нее заданы перемещениями

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) \Big|_{\Gamma} = \tilde{u}_i^m(x_1, x_2, x_3) T_i^m(t), \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (m = 1, 2, \dots, n), \quad (17)$$

где  $\tilde{u}_i^m(x_1, x_2, x_3)$  – функции перемещений на границе, зависящие только от пространственных координат,  $T_i^m(t)$  – некоторые функции, зависящие только от времени,  $n$  – число членов разложения в аналитическом представлении заданных перемещений. В дальнейшем (в силу линейности задачи и выполнения принципа суперпозиции) будем использовать граничные условия вида:

$$u_i \Big|_{\Gamma} = \tilde{u}_i(x_1, x_2, x_3) T(t), \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (18)$$

где  $\tilde{u}_i(x_1, x_2, x_3)$  – одна из функций  $\tilde{u}_i^m(x_1, x_2, x_3)$ , а  $T(t)$ , соответственно, – одна из функций  $T_i^m(t)$ . Для вязкоупругих перемещений согласно [31] справедливы естественные начальные условия

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) \Big|_{t=0} = \tilde{u}_i^0(x_1, x_2, x_3), \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle,$$

где  $\tilde{u}_i^0(x_1, x_2, x_3)$  – решение упругой задачи, соответствующее граничным условиям  $u_i(x_1, x_2, x_3, 0) \Big|_{\Gamma}$ .

Рассмотрим процедуру вывода  $g(t)$ ,  $k(t)$  на основе определяющих уравнений (1)–(2). Будем искать решение задачи в следующем виде:

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \tilde{u}_i(x_1, x_2, x_3) T(t). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (1), (2), имеем

$$s_{ij}(t) = 2G^* e_{ij} = 2\tilde{e}_{ij}(x_1, x_2, x_3) G^* T.$$

Здесь

$$e_{ij}(t) = \tilde{e}_{ij}(\tilde{u}(x_1, x_2, x_3))T(t).$$

где  $\tilde{e}_{ij}(\tilde{u}(x_1, x_2, x_3))$  – тензор деформаций, чьи компоненты зависят только от пространственных координат. Операция свертки  $G^*$  с функцией  $T(t)$  получается после тождественных преобразований

$$g_l(t) = \frac{G^*T}{T(t)}, \quad (20)$$

$$s_{ij}(t) = 2g_l(t)e_{ij}(t). \quad (21)$$

Здесь  $g_l(t)$  – эффективный по времени модуль сдвига лагранжевого типа, а (21) представляет собой определяющие уравнения упругого тела для девиаторов.

Аналогично рассуждая, находим упругий вид определяющих уравнений для шаровых тензоров:

$$\sigma(t) = 3k_l(t)\theta(t). \quad (22)$$

Здесь  $k_l(t)$  – эффективный по времени объемный модуль лагранжевого типа

$$k_l(t) = \frac{K^*T}{T(t)}. \quad (23)$$

Система уравнений равновесия в соответствии с определяющими уравнениями (21)–(22) примет следующий вид:

$$\left(k_l(t) + \frac{1}{3}g_l(t)\right)\theta_{,i} + g_l(t)\Delta u_i = 0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle. \quad (24)$$

В силу того, что физические уравнения (1)–(2) и (21)–(22) представляют собой тождественные соотношения при  $t \in [0, \infty]$ , можно считать доказанным следующее утверждение: для одной и той же расчетной области при условии представления перемещений в виде (19) решение задачи теории упругости с физическими уравнениями (21)–(22) и уравнениями равновесия вида (24) тождественно решению задачи вязкоупругости с физическими соотношениями в форме (1)–(2) и уравнениями равновесия вида (3).

#### 4. Анализ прямых и обратных определяющих уравнений теории упругости и вязкоупругости

Рассмотрим определяющие уравнения вязкоупругого тела (12)–(13). Эти соотношения являются взаимнообратными. Рассмотрим следующий вопрос: будут ли взаимнообратными с (12)–(13) определяющие уравнения упругого тела с модулями  $g_c(t)$ ,  $g_l(t)$ ?

В качестве примера исследуем данный вопрос для определяющих уравнений, разрешенных относительно деформаций упругого тела с эффективными по времени модулями кастильянового типа,

$$\varepsilon_{ij} = \left( \frac{1}{9k_c(t)} - \frac{1}{6g_c(t)} \right) \sigma \delta_{ij} + \frac{1}{2g_c(t)} \sigma_{ij}. \quad (25)$$

Будем рассматривать II граничную задачу, когда напряжение разыскиваются в виде (7). Так как мы установили, что определяющие уравнения (13) и (25)

тождественны, то это означает, что и определяющие уравнения (12) и (25) должны быть также взаимнообратны.

Для проверки подставим (25) в (12) и учтем, что напряжения отыскиваются в виде:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}(x_1, x_2, x_3)H(t).$$

Рассмотрим подстановку (25) в (12) на примере уравнения, получающегося, если положить  $i = j = 1$ . Учтем выражение  $\theta$  через  $\sigma$  через соотношение (11).

Имеем

$$\sigma_{11} = \left( K^* - \frac{2}{3}G^* \right) \frac{H(t)}{3k_c(t)} \tilde{\sigma} + 2G^* \left[ \frac{1}{2g_c(t)} \tilde{\sigma}_{11} + \left( \frac{1}{9k_c(t)} - \frac{1}{6g_c(t)} \right) \tilde{\sigma} \right] H(t). \quad (26)$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие  $\tilde{\sigma}$ :

$$\left[ \frac{1}{3} \left( K^* - \frac{2}{3}G^* \right) \frac{H}{k_c} + \frac{2}{9}G^* \frac{H}{k_c} - \frac{1}{3}G^* \frac{H}{g_c} \right] \tilde{\sigma}.$$

Приведем подобные:

$$\tilde{\sigma} \left[ \frac{1}{3} K^* \frac{H}{k_c} + G^* \left( -\frac{2}{9} \frac{H}{k_c} + \frac{2}{9} \frac{H}{k_c} - \frac{1}{3} \frac{H}{g_c} \right) \right] = \tilde{\sigma} \left[ \frac{1}{3} K^* \frac{H}{k_c} - \frac{1}{3} G^* \frac{H}{g_c} \right].$$

В силу легко проверяемого соотношения

$$K^* \frac{H}{k_c} = G^* \frac{H}{g_c} = H(t)$$

получаем, что коэффициент при  $\tilde{\sigma}$  равен 0. Таким образом, соотношение (26) приводится к выражению

$$\sigma_{11} = 2G^* \frac{H}{2g_c} \tilde{\sigma}_{11} = \tilde{\sigma}_{11} H(t) = \sigma_{11}.$$

Полученное тождество доказывает взаимнообратность соотношений (12)–(25).

Аналогичным образом мы можем доказать взаимнообратность определяющего уравнения линейной вязкоупругости (13) и определяющего уравнения линейно упругого тела, которое можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = \left( k_c(t) - \frac{2}{3}g_c(t) \right) \theta \delta_{ij} + 2g_c(t) \varepsilon_{ij}. \quad (27)$$

Мы рассмотрели взаимнообратность определяющих уравнений теории вязкоупругости и теории упругости на примере граничной задачи II рода. Для граничных задач I рода все рассуждения остаются в силе.

Полученный в работе результат взаимнообратности определяющих уравнений теории вязкоупругости и теории упругости представляется полезным и при решении граничных задач другими методами. Дело в том, что определение взаимнообратных определяющих уравнений, имеющих вид интегральных уравнений Вольтера II рода, связано с нахождением резольвентных ядер. Не для всех типов ядер ползучести могут быть определены выражения соответствующих ядер релаксации. Особенно остро вопрос о нахождении резольвентных ядер стоит в теории вязкоупругости стареющих тел.

Предложенный в настоящей работе аналитический принцип соответствия позволяет обойти проблему нахождения резольвентных ядер интегральных операторов

ввиду того, что мы располагаем тождественными определяющими уравнениями упругого тела, которые взаимобратны соответствующим определяющим уравнениям теории вязкоупругости.

### 5. Пример реализации решения

Рассмотрим задачу о действии сосредоточенной силы  $F$  на некоторую точку вязкоупругой среды [32] в декартовой системе координат, начало которой совпадает с точкой приложения силы, а ось  $z$  совпадает с ее направлением.

В случае упругой среды нормальные напряжения определяются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Fz}{8\pi r^3} \left[ 1 - \frac{3}{(1-2\nu)} \frac{x^2}{r^2} \right], & \sigma_y &= \frac{Fz}{8\pi r^3} \left[ 1 - \frac{3}{(1-2\nu)} \frac{y^2}{r^2} \right], \\ \sigma_z &= -\frac{Fz}{8\pi r^3} \left[ 1 + \frac{3}{(1-2\nu)} \frac{z^2}{r^2} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Чтобы получить решение для вязкоупругой среды, представим (28) в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Fz}{8\pi r^3} \left[ \frac{r^2 - x^2}{r^2} - \frac{2}{\omega} \frac{x^2}{r^2} \right], & \sigma_y &= \frac{Fz}{8\pi r^3} \left[ \frac{r^2 - y^2}{r^2} - \frac{2}{\omega} \frac{y^2}{r^2} \right], \\ \sigma_z &= -\frac{Fz}{8\pi r^3} \left[ \frac{r^2 + z^2}{r^2} + \frac{2}{\omega} \frac{z^2}{r^2} \right], \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\omega = 2G/3K.$$

Точное решение для напряжений на основе принципа Вольтерра получается путем подстановки в (29) вместо постоянных упругости соответствующих интегральных операторов. Пусть сила  $F$  представима в виде:

$$F(t) = F_0 H(t),$$

где  $F_0$  – некоторая константа. Тогда точное решение

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{F_0 z}{8\pi r^3} \left[ \frac{r^2 - x^2}{r^2} H(t) - 2 \frac{x^2}{r^2} \omega^{*-1} H \right], \\ \sigma_y &= \frac{F_0 z}{8\pi r^3} \left[ \frac{r^2 - y^2}{r^2} H(t) - 2 \frac{y^2}{r^2} \omega^{*-1} H \right], \\ \sigma_z &= -\frac{F_0 z}{8\pi r^3} \left[ \frac{r^2 + z^2}{r^2} H(t) + 2 \frac{z^2}{r^2} \omega^{*-1} H \right], \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\omega^*$  – интегральный оператор, определяемый как произведение операторов  $2G^*$  и  $3K_1^*$ .

Решение на основе обобщенного принципа соответствия получится путем замены в (29) упругой постоянной  $\omega$  на  $\omega_c(t) = 2g_c(t)/(3K)$ :

$$\sigma_x = \frac{F_0 H(t) z}{8\pi r^3} \left[ \frac{r^2 - x^2}{r^2} - 2 \frac{x^2}{r^2} \frac{1}{\omega_c(t)} \right],$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{F_0 H(t) z}{8\pi r^3} \left[ \frac{r^2 - y^2}{r^2} - 2 \frac{y^2}{r^2} \frac{1}{\omega_c(t)} \right], \\ \sigma_z &= -\frac{F_0 H(t) z}{8\pi r^3} \left[ \frac{r^2 + z^2}{r^2} + 2 \frac{z^2}{r^2} \frac{1}{\omega_c(t)} \right],\end{aligned}\tag{31}$$

где

$$\omega_c(t) = 2g_c(t)/3k_c(t).\tag{32}$$

Во многих случаях объемные свойства материала не зависят от времени. Тогда

$$\omega^* x = \frac{2}{3K} G^* H, \quad \omega^{*-1} = \frac{3K}{2} G^{*-1} H.$$

Легко видеть, что если в (32)  $k_c(t) = K$ , а  $g_c(t)$  определяется в соответствии с (9), то выражения (30) и (31) тождественны. Перемещения в рассмотренном примере могут быть определены с помощью формул Чезаро.

### Заключение

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Решения двух типов упругих граничных задач I и II рода, найденных посредством  $g_c(t)$ ,  $g_l(t)$ , тождественны решениям соответствующих вязкоупругих задач. Доказательство данного утверждения базируется на том, что

– определяющие уравнения вязкоупругого тела и упругого тела с модулями, зависящими от времени, в любой момент истории нагружения равны между собой, если решение граничной задачи вязкоупругости отыскивается в виде произведения решения упругой задачи на функцию, которая зависит только от времени и которая входит в формулировку граничных условий.

– системы уравнений равновесия упругого и вязкоупругого тел, хотя и различны для каждого из двух типов граничных задач, также тождественны;

– граничные условия в рассмотренных двух случаях также одинаковы.

2. Решение вязкоупругой граничной задачи III рода (когда на одной части границы заданы напряжения, на другой – перемещения), в случае линейности соответствующей упругой задачи может быть найдено на основе принципа суперпозиции.

3. Тестирование предложенного метода решения граничных задач вязкоупругости можно провести двумя способами:

а) непосредственное решение двух типов систем уравнений равновесия в соответствии с типами граничных условий;

б) так как мы фактически решаем граничную задачу теории упругости (в каждый момент времени  $t$ ), то погрешность может возникать только из-за погрешности определения упругого решения, для которого справедлива теорема единственности;

в) при сравнении решений с уже имеющимися возникают невысокие погрешности, обусловленные тем, что преобразование точных решений с помощью алгебры интегральных операторов само по себе содержит некоторые погрешности, примером которых может служить двойственность формулы перемножения двух интегральных операторов.

Обобщая представленные выводы, можно утверждать, что описанный в настоящей работе аналитический принцип соответствия упругих и вязкоупругих задач может быть применен для практических задач при следующих ограничениях:

- задача является квазистатической;
- определяющие уравнения имеют линейный вид;
- граничные условия представимы в виде произведения функции пространственных координат на функцию времени или суммы таких произведений.

#### Список источников

1. *Maxwell J.C.* On the dynamical theory of gases // *Philosophical Transactions*. 1867. № 157. P. 49–88.
2. *Boltzman L.* Zur theorie der elastischen nachwirkung // *Wiener Berichte*. 1874. № 70. P. 275–306. doi: 10.1002/andp.18782411107
3. *Volterra V.* Lecons sur les fonctions de lignes. Paris: Gautierr Villars, 1912. 230 p.
4. *Volterra V.* Theory of functionals and of integral and integrodifferential equations. London–Glasgow: Blackie & Son Limited, 1930. 226 p.
5. *Алфрей Т.* Механические свойства высокополимеров. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 239 с.
6. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров / пер. с 2-го изд. под ред. В.Е. Гуля. М.: Из-во иностр. лит., 1963. 535 с.
7. *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 416 с.
8. *Бленд Д.* Теория линейной вязко-упругости // пер. с англ. И.И. Гольберга, Н.И. Малинина; под ред. Э.И. Григолюка. М.: Мир, 1965. 199 с.
9. *Арутюнян Н.Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1952. 324 с.
10. *Reddy J.N.* An introduction to continuum mechanics. New York: Cambridge University Press, 2008. 449 p.
11. *Pipkin A.C.* Lectures of viscoelasticity theory. New York: Springer Verlag, 1986. 181 p.
12. *Flugge W.* Viscoelasticity. New York: Blaisdell Press, 1967. 187 p.
13. *Christensen R.M.* Theory of viscoelasticity: an introduction. New York: Academic, 1980. 364 p.
14. *Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г.* Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Высш. школа, 1983. 239 с.
15. *Schaperly R.A.* Stress analysis of viscoelastic composite materials // *Journal of Composite Materials*. 1967. V. 1 (3). P. 228–267.
16. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термо-вязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
17. *Бугаков И.И.* Ползучесть полимерных материалов (теория и приложения). М.: Наука, 1973. 288 с.
18. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
19. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
20. *Москвитин В.В.* Сопротивление вязкоупругих материалов: применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. 328 с.
21. *Talybly L.Kh., Mamedova M.A.* Study on the Method for a Solution to Some Class of Quasi-Static Problems in Linear Viscoelasticity Theory, as Applied to Problems of Linear Torsion of a Prismatic Solid // *Recent Advances in Mathematical Research and Computer Science* / ed. by L.G. Rodino. Book Publisher International, 2021. V. 1. P. 63–72.
22. *Lin C.-Y.* Rethinking and researching the physical meaning of the standard linear solid model in viscoelasticity // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2024. V. 31 (11). P. 2370–2385.
23. *Chen G.* Recurrent neural networks (RNNs) learn the constitutive law of viscoelasticity // *Comput. Mech*. 2021. V. 67 (3). P. 1009–1019.

24. Xu K. et al. Learning viscoelasticity models from indirect data using deep neural networks // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2021. V. 387. Art. 114124.
25. Ильюшин А.А. Метод аппроксимаций для расчета конструкций по линейной теории термо-вязко-упругости // Механика полимеров. 1968. № 6. С. 210–221.
26. Малый В.И., Труфанов Н.А. Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости анизотропных нестареющих материалов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1987. № 6. С. 148–154.
27. Svetashkov A.A., Kupriyanov N.A., Pavlov M.S., Vakurov A.A. Variable separation method for solving boundary value problems of isotropic linearly viscoelastic bodies // Acta Mechanica. 2020. V. 231 (9). С. 3583–3606.
28. Светашков А.А., Куприянов Н.А., Павлов М.С. Метод разделения переменных для задач линейно вязкоупругого анизотропного тела // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 123–138. doi: 10/17223/19988621/84/10
29. Svetashkov A., Kupriyanov N., Pavlov M. Generalization of the variable separation method for solving boundary value problems of linear viscoelasticity of kinds I and III // Acta Mechanica. 2024. V. 235. P. 1–17.
30. Светашков А.А. Прикладные задачи механики вязкоупругих материалов. Томск: Изд-во ТПУ, 2012. 205 с.
31. Дюво Г. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
32. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высш. школа, 1976. 277 с.

### References

1. Maxwell J.C. (1867) On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions*. 157. pp. 49–88. doi: 10.1098/rstl.1867.0004
2. Boltzman L. (1874) Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung. *Wiener Berichte*. 70. pp. 275–306. doi: 10.1002/andp.18782411107
3. Volterra V. (1912) *Lecons sur Les Fonctions de Lignes*. Paris: Gautierr Villars.
4. Volterra V. (1930) *Theory of Functionals and of Integral and integrodifferential Equations*. London – Glasgow: Blackie & Son Limited.
5. Alfrey T. (1948) *Mechanical Behavior of High Polymers*. New York: Interscience Publishers.
6. Ferry J.D. (1980) *Viscoelastic Properties of Polymers*. John Wiley & Sons.
7. Rzhantsyn A.R. (1968) *Teoriya polzuchesti* [Creep theory]. Moscow: Stroyizdat.
8. Blend D.R. (2016) *The Theory of Linear Viscoelasticity*. New York: Courier Dover Publications
9. Arutunyan N.Kh (1952) *Nekotorye voprosy teorii polzuchesti* [Some issues of the creep theory]. Moscow – Leningrad: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury.
10. Reddy J.N. (2008) *An Introduction to Continuum Mechanics*. New York: Cambridge University Press.
11. Pipkin A.C. (1986) *Lectures of Viscoelasticity Theory*. New York: Springer Verlag.
12. Flugge W. (1967) *Viscoelasticity*. New York: Blaisdell Press.
13. Christensen R.M. (1980) *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*. New York: Academic.
14. Koltunov M.A., Mayboroda V.P., Zubchaninov V.G. (1983) *Prochnostnye raschety izdeliy iz polimernykh materialov* [Strength calculations for the products made of polymeric materials]. Moscow: Vysshaya shkola.
15. Schapery R.A. (1967) Stress analysis of viscoelastic composite materials. *Journal of Composite Materials*. 1(3) pp. 228–267. doi: 10.1177/002199836700100302
16. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. (1970) *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* [Foundations of the mathematical theory of thermal viscoelasticity]. Moscow: Nauka.
17. Bugakov I.I. (1973) *Polzuchest' polimernykh materialov (teoriya i prilozheniya)* [Creep of polymer materials (theory and application)]. Moscow: Nauka.
18. Rabotnov Yu.N. (1966) *Polzuchest' elementov konstruksiy* [Creep of construction elements]. Moscow: Nauka.

19. Rabotnov Yu.N. (1977) *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow: Nauka.
20. Moskvitin V.V. (1972) *Soprotivlenie vyazkoupругikh materialov: Primenitel'no k zaryadam raketnykh dvigateley na tverdom toplive* [Strength of viscoelastic materials: Applied to discharges of solid-propellant rocket engines]. Moscow: Nauka.
21. Talybly L.Kh., Mamedova M.A. (2021) Study on the method for a solution to some class of quasi-static problems in linear viscoelasticity theory, as applied to problems of linear torsion of a prismatic solid. *Recent Advances in Mathematical Research and Computer Science 1: Book Publisher International (a part of SCIENCEDOMAIN International)*. pp. 63–72.
22. Lin C.-Y. (2024) Rethinking and researching the physical meaning of the standard linear solid model in viscoelasticity. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 31(11). pp. 2370–2385. doi: 10.1080/15376494.2022.2156638
23. Chen G. (2021) Recurrent neural networks (RNNs) learn the constitutive law of viscoelasticity. *Computational Mechanics*. 67(3). pp. 1009–1019. doi: 10.1007/s00466-021-01981-y
24. Xu K., Tartakovsky A.M., Burghard J., Darve E. (2021) Learning viscoelasticity models from indirect data using deep neural networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 387. Article 114124. doi: 10.1016/j.cma.2021.114124
25. Il'yushin A.A. (1968) *Metod approksimatsiy dlya rascheta konstruksiy po lineynoy teorii termo-vyazko-uprugosti* [Approximation method for calculating structures according to the linear theory of thermo-viscosity-elasticity]. *Mekhanika polimerov*. 6. pp. 210–221.
26. Malyy V.I., Trufanov N.A. (1987) *Metod kvazikonstantnykh operatorov v teorii vyazkoupругosti anizotropnykh nestareyushchikh materialov* [Methods of quasi-constant operators in the theory of viscoelasticity of anisotropic materials]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 6. pp. 148–154.
27. Svetashkov A.A., Kupriyanov N.A., Pavlov M.S., Vakurov A.A. (2020) Variable separation method for solving boundary value problems of isotropic linearly viscoelastic bodies. *Acta Mechanica*. 231(9). pp. 3583–3606. doi: 10.1007/s00707-020-02698-4
28. Svetashkov A.A., Kupriyanov N.A., Pavlov M.S. (2023) Metod razdeleniya peremennykh dlya zadach lineyno vyazkoupругogo anizotropnogo tela [The method of separation of variables for linear viscoelastic anisotropic body problems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 123–138. doi: 10.17223/19988621/84/10
29. Svetashkov A., Kupriyanov N., Pavlov M. (2024) Generalization of the variable separation method for solving boundary value problems of linear viscoelasticity of kinds I and III. *Acta Mechanica*. 235(1). pp. 3573–3589. doi: 10.1007/s00707-024-03895-1
30. Svetashkov A.A. (2012) *Prikladnye zadachi mekhaniki vyazkoupругikh materialov* [Applied problems of mechanics of viscoelastic materials]. Tomsk: Tomsk Polytechnic University.
31. Duvoux N. (2017) Chapitre II-Le retour des inégalités économiques dans les pays développés. *Que sais-je?*. pp. 33–55.
32. Koltunov M.A. (1976) *Polzuchest' i relaksatsiya* [Creep and relaxation]. Moscow: Vysshaya shkola.

#### **Сведения об авторах:**

**Светашков Александр Андреевич** – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор отделения машиностроения Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: svetashkov@tpu.ru

**Павлов Михаил Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Научного центра вычислительной механики и компьютерного инжиниринга Томского политехнического университета; доцент кафедры автоматизации технологических процессов Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: mspavlov@tpu.ru

**Пустовых Ольга Сергеевна** – старший преподаватель отделения машиностроения Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: BOS1983@tpu.ru

***Information about the authors:***

**Svetashkov Aleksandr A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: svetashkov@tpu.ru

**Pavlov Mikhail S.** (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mspavlov@tpu.ru

**Pustovykh Ol'ga S.** (Tomsk Polytechnic University, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: BOS1983@tpu.ru

*Статья поступила в редакцию 06.02.2024; принята к публикации 01.08.2025*

*The article was submitted 06.02.2024; accepted for publication 01.08.2025*

Научная статья

УДК 532.517.2+621.928.93

doi: 10.17223/19988621/96/12

## Моделирование аэродинамики закрученного турбулентного потока в расширяющемся канале воздушно-центробежного классификатора

Артём Евгеньевич Соломаха<sup>1</sup>, Александр Вениаминович Шваб<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> *Томский государственный университет, Томск, Россия*

<sup>1</sup> *solomahaartem@yandex.ru*

<sup>2</sup> *avshvab@inbox.ru*

**Аннотация.** Рассматривается аэродинамика закрученного турбулентного газового потока в модифицированной геометрии рабочей камеры воздушно-центробежного классификатора с линейным и степенным расширением области классификации порошкового материала. Уравнения переноса импульса получены с помощью преобразования уравнений Рейнольдса из декартовой системы координат в ортогональную криволинейную систему координат вращения. Для моделирования турбулентности выбран метод RANS с использованием модели  $k-\omega$ . Предложена методика оценки аэродинамики закрученного течения с точки зрения эффективности сепарации частиц порошковых материалов.

**Ключевые слова:** численное моделирование, уравнения Рейнольдса, модель турбулентности, криволинейные координаты, центробежный классификатор

**Для цитирования:** Соломаха А.Е., Шваб А.В. Моделирование аэродинамики закрученного турбулентного потока в расширяющемся канале воздушно-центробежного классификатора // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 145–159. doi: 10.17223/19988621/96/12

Original article

## Simulation of aerodynamics of a swirling turbulent flow in the expanding channel of an air-centrifugal classifier

Artyom E. Solomakha<sup>1</sup>, Aleksandr V. Shvab<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

<sup>1</sup> *solomahaartem@yandex.ru*

<sup>2</sup> *avshvab@inbox.ru*

**Abstract.** Air-centrifugal classifiers are promising devices for the highly efficient fractional separation of powder materials by size. To improve the sharpness of the separation of solid particles in centrifugal devices, a uniform distribution of the carrier gas flow velocities is required. This article studies the aerodynamics of a swirling turbulent flow in a classifier with a particle separation zone of various geometries. The turbulence is simulated

using the RANS method and the Wilcox turbulence model. To assess the classification efficiency, an engineering approach determining the average velocity of the particles with sizes close to a limiting size is proposed. A comparison of the modeling results with the experimental data and test study results justifies their reliability.

**Keywords:** numerical modeling, Reynolds equations, turbulence model, curvilinear coordinates centrifugal classifier

**For citation:** Solomakha, A.E., Shvab, A.V. (2025) Simulation of aerodynamics of a swirling turbulent flow in the expanding channel of an air-centrifugal classifier. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 145–159. doi: 10.17223/19988621/96/12

## Введение

В настоящее время порошковые материалы конструкционного назначения всё больше находят применение в изготовлении конструктивных элементов машин и механизмов, подшипников, инструментов и других изделий промышленного назначения в различных отраслях промышленности [1–5]. Процессом воздушной классификации порошковых материалов называется разделение их по фракциям в зависимости от размерных параметров в закрытых аппаратах, которые называются воздушно-центробежными классификаторами [6–9]. Совершенствование современных технологий получения мелкодисперсных порошков осуществляется с помощью математического моделирования протекающих при классификации процессов, основной из которых – качественная аэродинамика несущего газового потока [10–14]. Эффективность классификации порошковых материалов напрямую зависит от равномерности и однородности поля скорости закрученного турбулентного потока.

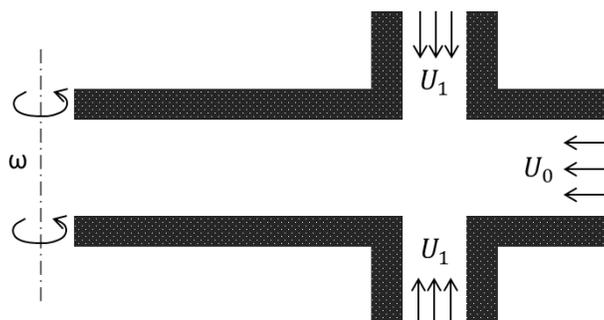
Остротой сепарации порошковых материалов в данной работе будем называть количественную оценку эффективности процесса классификации твердой фракции по размерам, которая представляет собой отношение тех размеров частиц, для которых вероятность попадания в мелкий продукт разделения равноудалена от таковой вероятности для частиц граничного размера, например 0.25 и 0.75.

Цель настоящего исследования – получение методов, позволяющих достоверно проводить оценку аэродинамики турбулентных течений и ее влияния на эффективность процесса классификации твёрдых частиц с помощью математического моделирования процессов, протекающих при классификации порошковых материалов в воздушно-центробежных установках. Основной задачей является оценка влияния аэродинамики закрученного турбулентного потока на процесс классификации частиц в аппаратах сложной геометрии, а также создание экономичной технологии для определения остроты сепарации порошковых материалов, с помощью которой можно получать результаты удовлетворительной точности.

## Физико-математическая постановка задачи

Процесс классификации частиц порошкового материала происходит в рабочей камере центробежного аппарата, которая называется зоной сепарации. Такая цилиндрическая область представляет собой набор вращающихся дисков, между

которыми движется воздушный поток, содержащий в себе исходный материал. Подача двухфазного потока в зону сепарации производится через дополнительный перпендикулярный патрубок [8]. В работе [10] предложена оригинальная геометрия воздушно-центробежного классификатора (рис. 1) с дополнительным симметрично-расположенным вертикальным кольцевым каналом, добавление которого позволяет добиться более однородных и симметричных полей скоростей, что, как известно, является одним из основных критериев высокоэффективного процесса классификации частиц порошковых материалов по размерам.



**Рис. 1.** Схема зоны сепарации воздушного классификатора без расширения  
**Fig. 1.** Schematic diagram of the separation zone in an air classifier without expansion

С другой стороны, на снижение остроты сепарации влияют концентрация твердой фазы, взаимодействие частиц между собой и другие факторы. Следует отметить, что влияние большинства этих факторов удается снизить за счет уменьшения массовой концентрации частиц до величины 0.2–0.4 кг/кг [8]. Таким образом, высокая эффективность работы классификатора связана, прежде всего, с аэродинамикой закрученного турбулентного потока [11]. Поэтому важнейшей задачей в области сепарации частиц являются достоверное определение аэродинамики закрученного турбулентного течения газа в сепараторе и получение оценки ее влияния на эффективность фракционной классификации. Известно, что в работах [8, 11] для повышения остроты сепарации используется расширение рабочей области к оси вращения по закону  $\text{const}/r$ , что позволяет получать постоянную среднюю радиальную скорость газа по рабочей камере. Однако наиболее перспективной аэродинамикой будет та, которая удовлетворит постоянству баланса центробежных и аэродинамических сил. Поэтому в работе рассматривается разная степень расширения зоны сепарации и предложена инженерная методика расчета баланса между центробежными и аэродинамическими силами, которая позволяет оценивать, насколько перспективна та или другая аэродинамическая обстановка в сепарационной области.

Для получения точного решения системы уравнений переноса импульса, которая описывает движение закрученного турбулентного потока в сепарационной камере с расширением, необходим переход от цилиндрической системы координат  $(r, z)$  к ортогональной криволинейной системе координат вращения  $(q_1, q_2)$  [15–16].

Методом изогональных траекторий [17] представлено два типа ортогональных систем координат: степенной и линейный. Для степенного расширения новые координаты имеют вид:

$$q_1 = r^2 - m(z - z_1)^2; \quad q_2 = (z - z_1) \left( \frac{r}{r_a} \right)^m, \quad (1)$$

где  $m$  – степень расширения рабочей зоны аппарата.

Соответственно, для линейного расширения имеем

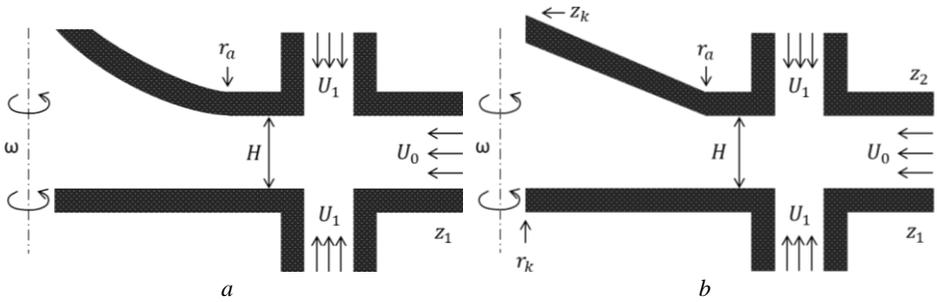
$$q_1 = \frac{(z - z_1)^2 + r^2 + \frac{2r}{B}(A - z_1) - \xi_{\min}}{\xi_{\max} - \xi_{\min}}; \quad q_2 = \frac{z - z_1}{A + Br - z_1}. \quad (2)$$

Здесь приняты обозначения:

$$A = z_2 + r_a \operatorname{tg} \alpha; \quad B = -\operatorname{tg} \alpha; \quad z_k = z_1 + A + B \cdot r_k;$$

$$\xi_{\min} = (z_k - z_1)^2 + r_k^2 + \frac{2r_k}{B}(A - z_1); \quad \xi_{\max} = (z_2 - z_1)^2 + r_a^2 + \frac{2r_a}{B}(A - z_1),$$

где  $\alpha$  – угол наклона прямой, определяющей расширение верхней границы (рис. 2, *b*) относительно оригинальной геометрии (см. рис. 1);  $z_1, z_2, z_k, r_a$  и  $r_k$  – координаты точек, определяющих геометрию сепарационной зоны центробежного классификатора (рис. 2).



**Рис. 2.** Схема зоны сепарации воздушного классификатора со степенным (*a*) и линейным расширением (*b*) канала  
**Fig. 2.** Schematic diagram of the separation zone in the air classifier with (*a*) power-law and (*b*) linear expansion of the channel

Достоверность ортогональности полученных криволинейных систем координат подтверждается равенством

$$\frac{\partial q_1}{\partial r} \frac{\partial q_2}{\partial r} + \frac{\partial q_1}{\partial z} \frac{\partial q_2}{\partial z} \equiv 0. \quad (3)$$

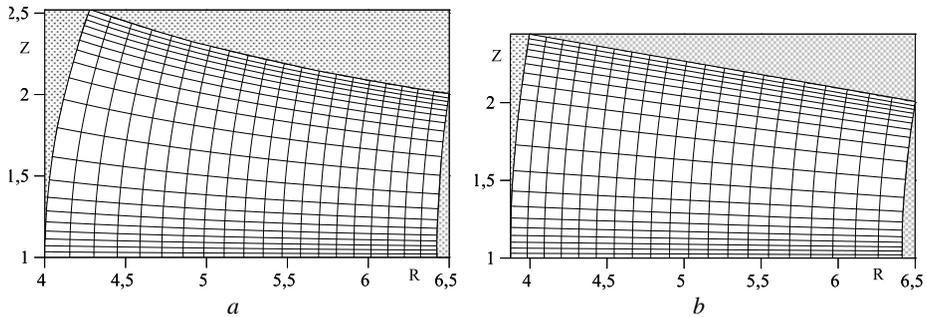
Разностные сетки в случае степенного и линейного расширения показаны на рис. 3.

Для учета уровня турбулентности в вязком подслое и буферной области вблизи стенок использовалось сгущение расчетной сетки на основе формулы преобразования [11]

$$q_2 = \frac{1}{s} \log \left[ (e^s - 1)(\eta - 0.5) + \sqrt{e^s + (e^s - 1)^2 (\eta - 0.5)^2} \right],$$

где параметр  $s$  характеризует степень сгущения координаты  $q_2$  относительно равномерной координаты  $\eta \in [0, 1]$ . При стремлении параметра  $s \rightarrow 0$  сгущения сетки

по координате  $q_2$  не происходит, при значении параметра  $s > 1$  линии семейства  $q_2$  сгущаются в направлении твердых стенок (см. рис. 3).



**Рис. 3.** Расчетная сетка в ортогональной криволинейной системе координат вращения со степенным (а) и линейным расширением (b) канала при  $s = 5$

**Fig. 3.** Calculated grid in the orthogonal curvilinear coordinate system of rotation with (a) power-law and (b) linear expansion of the channel for  $s = 5$

Различное расширение сепарационной зоны позволит найти более перспективную геометрию с целью определения более стабильного баланса аэродинамических и центробежных сил по длине рабочей камеры.

Для численного решения система уравнений Рейнольдса для закрученного турбулентного течения газового потока в камере воздушно-центробежного классификатора была преобразована к новой ортогональной системе координат вращения [18].

Уравнение переноса импульса в радиальном направлении движения газа для составляющей осредненной скорости  $U_1$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & H_1 H_2 H_3 \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial (U_1^2 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (U_1 U_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial}{\partial q_1} \left( 2(1 + \nu_t) \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial U_1}{\partial q_1} \right) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial q_2} \left( (1 + \nu_t) \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial U_1}{\partial q_2} \right) = - \frac{H_2 H_3}{\rho} \frac{\partial p}{\partial q_1} - \frac{2}{3} H_2 H_3 \frac{\partial k}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left( 2(1 + \nu_t) \frac{U_2 H_3}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( (1 + \nu_t) H_1 H_3 \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_2}{\partial q_1} - \frac{U_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{U_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) \right) + \\
 & + (1 + \nu_t) H_3 \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_1}{\partial q_2} - \frac{U_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{U_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \\
 & - 2(1 + \nu_t) H_3 \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_2}{\partial q_2} + \frac{U_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - 2(1 + \nu_t) H_2 \left( \frac{U_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{U_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right) \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \\
 & + U_3^2 H_2 \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + U_2^2 H_3 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - U_1 U_2 H_3 \frac{\partial H_1}{\partial q_2}.
 \end{aligned}$$

Уравнение для поперечной скорости  $U_2$ :

$$\begin{aligned}
 & H_1 H_2 H_3 \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial (U_1 U_2 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (U_2^2 H_1 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial}{\partial q_1} \left( (1 + \nu_t) \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial U_2}{\partial q_1} \right) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial q_2} \left( 2(1 + \nu_t) \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial U_2}{\partial q_2} \right) = - \frac{H_1 H_3}{\rho} \frac{\partial p}{\partial q_2} - \frac{2}{3} H_1 H_3 \frac{\partial k}{\partial q_2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial q_1} \left( (1+v_i) H_2 H_3 \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_1}{\partial q_2} - \frac{U_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{U_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( 2(1+v_i) \frac{U_1 H_3}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) + \\
 & + (1+v_i) H_3 \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_1}{\partial q_2} - \frac{U_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{U_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \\
 & - 2(1+v_i) H_3 \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_1}{\partial q_1} + \frac{U_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - 2(1+v_i) H_1 \left( \frac{U_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{U_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right) \frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \\
 & - U_1 U_2 H_3 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + U_1^2 H_3 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + U_3^2 H_1 \frac{\partial H_3}{\partial q_2}.
 \end{aligned}$$

Уравнение для окружной составляющей скорости  $U_3$ :

$$\begin{aligned}
 & H_1 H_2 H_3 \frac{\partial U_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1} (U_1 U_3 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (U_2 U_3 H_1 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_1} \left( (1+v_i) \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial U_3}{\partial q_1} \right) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial q_2} \left( (1+v_i) \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial U_3}{\partial q_2} \right) = - \frac{\partial}{\partial q_1} \left( (1+v_i) \frac{U_3 H_2}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial q_2} \left( (1+v_i) \frac{U_3 H_1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right) + (1+v_i) H_2 \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_3}{\partial q_1} - \frac{U_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right) \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \\
 & + (1+v_i) H_1 \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_3}{\partial q_2} - \frac{U_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right) \frac{\partial H_3}{\partial q_2} - U_1 U_3 H_2 \frac{\partial H_3}{\partial q_1} - U_2 U_3 H_1 \frac{\partial H_3}{\partial q_2}.
 \end{aligned}$$

Закон сохранения массы газового потока:

$$\operatorname{div}(U) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left( \frac{\partial}{\partial q_1} (U_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (U_2 H_1 H_3) \right) = 0.$$

В качестве описания турбулентности для уравнений Рейнольдса используется двухпараметрическая модель турбулентности Уилкокса ( $k-\omega$ ). Таким образом, система уравнений для кинетической энергии турбулентности  $k$  и ее удельной скорости диссипации  $\omega$  в ортогональной криволинейной системе координат вращения имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & H_1 H_2 H_3 \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1} (k U_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (k U_2 H_1 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_1} \left( (1+v_i \sigma^*) \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial k}{\partial q_1} \right) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial q_2} \left( (1+v_i \sigma^*) \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial k}{\partial q_2} \right) = H_1 H_2 H_3 (G - \beta^* k \omega); \\
 & H_1 H_2 H_3 \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1} (\omega U_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\omega U_2 H_1 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_1} \left( (1+v_i \sigma) \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \omega}{\partial q_1} \right) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial q_2} \left( (1+v_i \sigma) \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \omega}{\partial q_2} \right) = H_1 H_2 H_3 \left( \alpha \frac{\omega}{k} G - \beta \omega^2 - \frac{1}{2} \beta \omega |\Omega| \right);
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$v_i = \operatorname{Re} \frac{k}{\omega}.$$

Здесь влияние кривизны линий тока на уровень турбулентности [19] учитывает последнее слагаемое в уравнении (4), причем  $\Omega$  – вихрь,  $G$  – слагаемое, учитывающее генерацию энергии турбулентности:

$$\begin{aligned}
 |\Omega| &= \sqrt{\left(\text{rot}(U)_{q_1}\right)^2 + \left(\text{rot}(U)_{q_2}\right)^2 + \left(\text{rot}(U)_{q_3}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_2} (U_3 H_3)\right)^2 + \left(\frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (U_3 H_3)\right)^2 + \left(\frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (U_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (U_1 H_1)\right)\right)^2}; \\
 G &= 2\nu_t \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial U_1}{\partial q_1} + \frac{U_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)^2 + \nu_t \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial U_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_1}{\partial q_2} - \frac{U_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{U_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)^2 + \\
 &+ \nu_t \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial U_3}{\partial q_1} - \frac{U_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right)^2 + 2\nu_t \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial U_2}{\partial q_2} + \frac{U_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)^2 + \nu_t \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial U_3}{\partial q_2} - \frac{U_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right)^2 + \\
 &+ 2\nu_t \left(\frac{U_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{U_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right)^2,
 \end{aligned}$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\beta^*$ ,  $\sigma^*$  – постоянные модели турбулентности Уилкокка.

В представленных уравнениях Рейнольдса и модели Уилкокка присутствуют значения функций  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$ , которые характеризуют коэффициенты перехода от декартовой к ортогональной криволинейной системе координат и называются коэффициентами Ламе:

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial q_1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_1}{\partial z}\right)^2}}; \quad H_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial q_2}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_2}{\partial z}\right)^2}}; \quad H_3 = r.$$

Для решения полученных систем уравнений в безразмерном виде в качестве масштаба длины выбирается высота канала  $H$ , в качестве масштаба скорости – горизонтальная скорость на входе  $U_0$  (см. рис. 2).

### Граничные и начальные условия

Для получения единственного решения аэродинамики закрученного турбулентного потока для схем воздушно-центробежного классификатора с расширением используются следующие граничные условия.

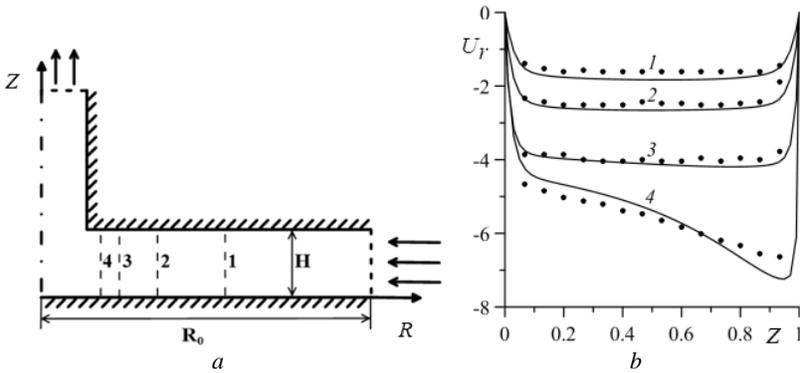
На входе в расширяющуюся область производится билинейная интерполяция всех функций, найденных после решения системы уравнений Рейнольдса и модели турбулентности Уилкокка в цилиндрической системе координат. На твердых стенках используется условие прилипания, в выходном сечении для всех функций – граничное условие установления (условия Неймана). Для кинетической энергии турбулентности и ее удельной скорости диссипации граничные условия задавались формулами и постоянными величинами, взятыми из опытных данных [20].

Получение профилей аэродинамических скоростей закрученного турбулентного течения производится с помощью решения системы стационарных уравнений переноса импульса методом установления по времени. В качестве начальных условий для всех искомых функций принимаются значения, равные нулю.

Метод численного решения аэродинамики газа и твердых частиц подробно описан в работах [21–22].

## Анализ полученных результатов

Обоснованность и достоверность результатов численного моделирования аэродинамики турбулентного потока в зоне сепарации воздушного классификатора подтверждается как теоретическими исследованиями и сравнением с численными данными аэродинамики между плоскими дисками [10, 11], так и сравнением с экспериментальными результатами для радиальной составляющей вектора скорости [23] между двумя вращающимися параллельными дисками (рис. 4, *a*), где  $H = 1$ ,  $R_0 = 10$ . Сравнение численных и опытных данных для экспериментальной установки изображено на рис. 4, *b* в различных сечениях 1–4 по длине канала для  $r_1 = 6.0$ ,  $r_2 = 4.0$ ,  $r_3 = 2.75$  и  $r_4 = 1.85$  соответственно.



**Рис. 4.** Апробация результатов численного моделирования: *a* – схема установки; *b* – распределение радиальной составляющей вектора скорости при  $Re = 2\,204$  (сплошной линией представлены результаты расчета, а точками – экспериментальные данные)

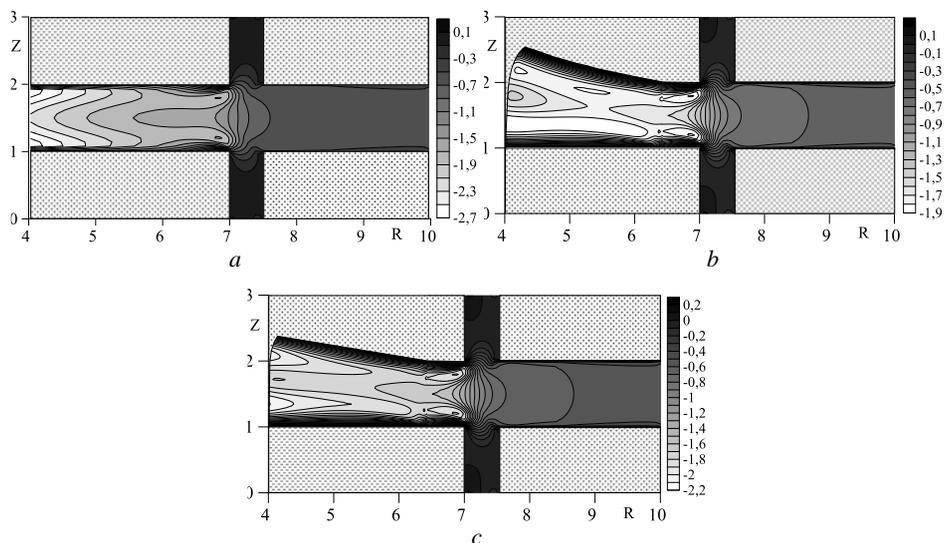
**Fig. 4.** Aprrobation of the numerical simulation results: (*a*) experimental setup design and (*b*) radial velocity distribution at  $Re = 2204$  (the solid line indicates the calculated results, and the dotted line, the experimental data)

Качество процесса классификации порошковых материалов напрямую зависит от однородности поля скорости и баланса центробежных и аэродинамических сил в сепарационной зоне центробежного аппарата. Острота сепарации порошковых материалов в воздушно-центробежном классификаторе при малой концентрации твердой фазы полностью зависит от распределения радиальной и окружной скоростей при данной конструкции зоны сепарации. Ниже представлены численные результаты моделирования аэродинамики закрученного турбулентного потока в расширяющейся зоне сепарации воздушного классификатора.

На рис. 5 изображены изолинии радиальной компоненты вектора скорости для схемы воздушно-центробежного классификатора без расширения (см. рис. 1), со степенным (см. рис. 2, *a*) и линейным расширением (см. рис. 2, *b*) сепарационной зоны. Для геометрии со степенным расширением выбраны следующие параметры:  $m = 1$ ,  $z_1 = 1$ ,  $r_a = 6.5$ ; для геометрии с линейным расширением:  $\alpha = 10^\circ$ ,  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 2$ ,  $r_k = 4$ ,  $r_a = 6.5$ .

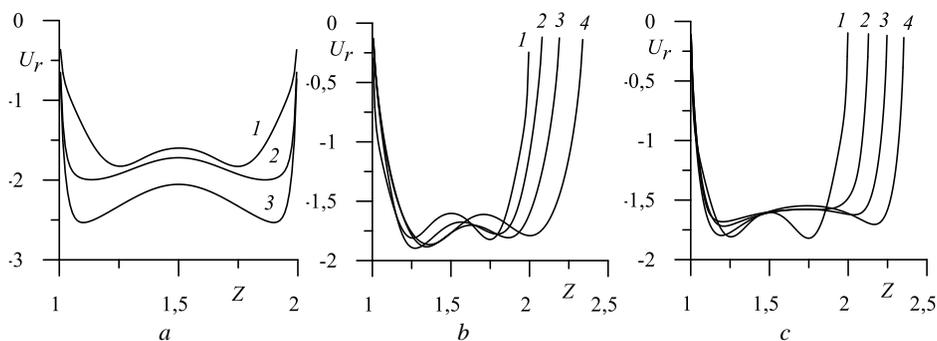
На рис. 6 приведены графики развития радиальной компоненты вектора скорости по длине канала для рассматриваемых схем воздушно-центробежного классификатора. Для классификатора без расширения (см. рис. 6, *a*): сечение 1 соответ-

ствует  $r = 6.5$ , сечение 2 –  $r = 5.5$ , сечение 3 –  $r = 4.5$ . Для классификаторов со степенным (см. рис. 6, *b*) и линейным расширением (см. рис. 6, *c*): сечение 1 соответствует  $r = 6.5$ , сечение 2 –  $r = 5.875$ , сечение 3 –  $r = 5.25$ , сечение 4 –  $r = 4.625$ .



**Рис. 5.** Изолинии радиальной компоненты вектора скорости для классификатора без расширения (*a*), со степенным (*b*) и линейным расширением (*c*) при параметрах  $Re = 5000$ ,  $R\omega = 0.25$

**Fig. 5.** Isolines of the radial velocity for the classifier (*a*) without expansion, (*b*) with power-law expansion, and (*c*) with linear expansion at  $Re = 5000$ ,  $R\omega = 0.25$



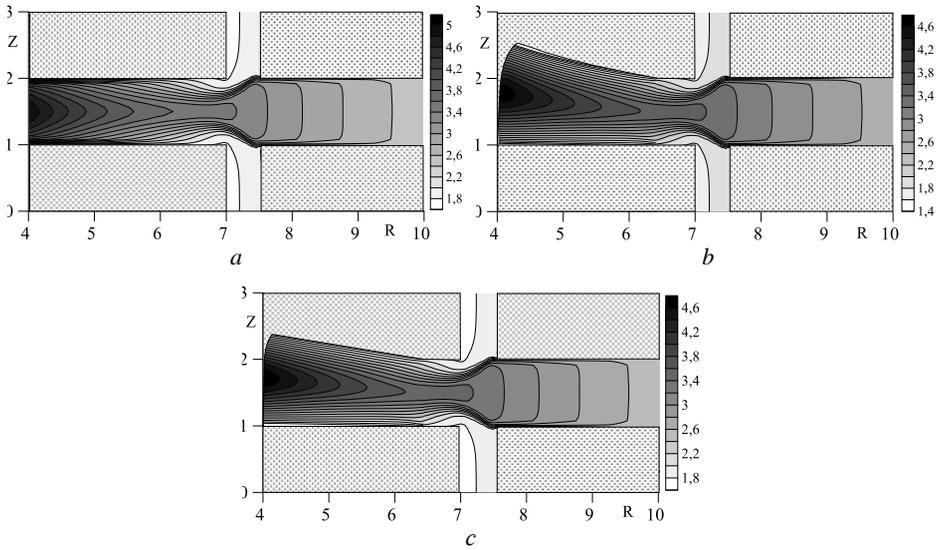
**Рис. 6.** Графики радиальной компоненты вектора скорости для классификатора без расширения (*a*), со степенным (*b*) и линейным расширением (*c*) при параметрах  $Re = 5000$ ,  $R\omega = 0.25$

**Fig. 6.** Graphs of the radial velocity for the classifier (*a*) without expansion, (*b*) with power-law expansion, and (*c*) with linear expansion at  $Re = 5000$ ,  $R\omega = 0.25$

Как видно из полученных результатов, профиль радиальной компоненты вектора скорости в случае использования схем воздушно-центробежного классификатора со степенным и линейным расширением выходного канала имеет более

однородное распределение по длине канала в отличие от схемы без расширения. Разность между максимальным и минимальным значением радиальной компоненты вектора скорости в выходном сечении канала для центральной области потока, отдаленной от пограничного слоя вблизи твердых стенок, составляет: для канала без расширения – 0.49, со степенным расширением – 0.254, с линейным расширением – 0.25. Следовательно, по высоте канала профили скорости также имеют более однородное распределение для схем со степенным и линейным расширением.

На рис. 7 изображены изолинии окружной компоненты вектора скорости для рассматриваемых схем модифицированной геометрии сепарационной камеры классификатора. Как видно из результатов, расширение геометрии выходного канала влечет за собой некоторое уменьшение значений окружной компоненты вектора скорости.



**Рис. 7.** Изолинии окружной компоненты вектора скорости для классификатора без расширения (a), со степенным (b) и линейным расширением (c) при параметрах  $Re = 5000$ ,  $R\omega = 0.25$

**Fig. 7.** Isolines of the rotational velocity for the classifier (a) without expansion, (b) with power-law expansion, and (c) with linear expansion at  $Re = 5000$ ,  $R\omega = 0.25$

Рассмотрим предлагаемую инженерную методику оценки эффективности работы классификатора на основе баланса центробежных и аэродинамических сил. Следует отметить, что эффективность классификации центробежного аппарата определяется исходя из того, насколько велика область диапазона частиц приграничного размера. Поэтому будем рассматривать частицы, размер которых близок к граничному размеру, т.е. к размеру частиц, вероятность которых попасть в мелкий и крупный продукт равняется 50%. Для них, очевидно, приблизительно выполняется равенство центробежных и аэродинамических сил. Из этого следует, что радиальная скорость частиц приграничного размера мало отличается от нулевого значения, а окружная скорость этих частиц будет близка к окружной скорости газа.

С другой стороны, малая радиальная скорость частиц позволяет не учитывать инерционную силу, и тогда уравнение для движения частиц приграничного размера будет иметь вид:

$$-\frac{u_\phi^2}{r} = \frac{u_r - w_r}{Stk} \xi, \quad (5)$$

где  $w_r$  – радиальная составляющая вектора скорости частицы,  $\xi$  – коэффициент отклонения аэродинамического сопротивления частицы от закона сопротивления, определенного Стоксом,  $Re_p$  – критерий Рейнольдса, составленный для частицы диаметром  $\delta$ ,  $Stk$  – критерий Стокса:

$$Re_p = \frac{|V - W|\delta}{\nu}; \quad Stk = \frac{\rho_p \delta^2 U}{18\rho\nu H}; \quad \xi = 1 + 0.197 Re_p^{0.63} + 0.64 \cdot 10^{-4} Re_p^{1.38},$$

$\rho_p$  – плотность частицы,  $g$  – ускорение силы тяжести, действующее на рассматриваемую частицу.

Из уравнения (5) для известных значений радиальной и окружной полей скорости газа  $u_\phi$  и  $u_r$  может быть определена радиальная составляющая скорости частицы  $w_r$  в каждой точке разностной сетки сепарационной зоны сепаратора. Для большей наглядности удобно получить среднее значение радиальной составляющей скорости частиц  $w_r$  по высоте сепарационной камеры.

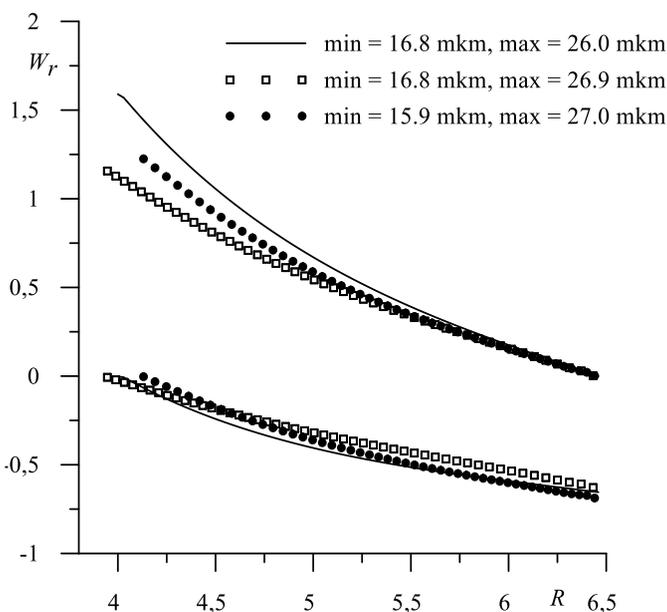


Рис. 8. Распределение средней скорости частиц при параметрах  $Re = 5\,000$ ,  $R\omega = 0.25$   
 Fig. 8. Distribution of the average velocity of particles at  $Re = 5\,000$ ,  $R\omega = 0.25$

На рис. 8 изображено распределение по высоте средних скоростей частиц, размеры которых выбраны таким образом, чтобы вдоль всей длины канала значения этих скоростей были либо только положительными, либо только отрицательными. Частицы, имеющие положительные значения средней скорости, соответствуют частицам, которые независимо от их геометрического положения будут выгружаться

в крупный продукт разделения. Отрицательные же значения скорости  $w_r$  характерны для частиц, выгружаемых в мелкий продукт разделения. Сплошная кривая показывает распределение средней скорости частиц для классификатора без расширения, диаметр которых составляет 16.8 и 26 мкм; круги – для аппарата со степенным расширением для частиц 15.9 и 27 мкм; квадраты – для аппарата с линейным расширением для частиц 16.8 и 26.9 мкм. Из этого графика легко обнаружить тот диапазон размера частиц, для которых имеются как отрицательные, так и положительные значения скоростей, что свидетельствует о вероятности их попадания как в мелкий, так и в крупный продукт разделения частиц. Следовательно, коэффициент остроты сепарации определяется отношением полученного минимального и максимального размеров частиц и для данного режима аэродинамики составляет от  $15.9/27 = 0.59$  до  $16.8/26 = 0.65$  (см. рис. 8). Проведенная оценка остроты сепарации хорошо коррелирует с оценкой, представленной авторами в работе [10] и опытными данными [8].

Таким образом, рассмотренный режим закрученного течения показал, что расширение сепарационной области несущественно изменяет аэродинамический баланс центробежных и аэродинамических сил, однако существенно увеличивает объем сепарационной камеры, что приводит к уменьшению взаимодействия частиц между собой и других особенностей стесненности твердой фазы, и вследствие этого имеет место повышение эффективности сепарации частиц.

### Заключение

С помощью математического моделирования процессов, протекающих при классификации частиц порошковых материалов в зоне сепарации воздушно-центробежных аппаратов, получена методика для качественной оценки эффективности процесса разделения двухфазных закрученных турбулентных газовых потоков на примере предложенных схем классификатора с использованием степенного и линейного профилирования выходного канала. Апробация результатов численного расчета аэродинамики подтверждается сравнением с тестовыми численными результатами, а также с опытными данными, полученными с помощью экспериментальной установки движения газового потока между вращающимися параллельными дисками. Показано, что без трудоемких и многочисленных расчетов двухфазных закрученных турбулентных потоков можно качественно оценивать остроту сепарации только по расчетам аэродинамики сепарационной камеры, что позволяет находить оптимальные рабочие режимы и геометрию зоны сепарации центробежного аппарата, а отдельные расчеты двухфазного потока использовать для проверки достоверности инженерной методики.

### Список источников

1. Гропянов А.В., Ситов Н.Н., Жукова М.Н. Порошковые материалы : учеб. пособие. СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2017. 74 с.
2. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 2004. 750 с.
3. Алексеенко С.В., Окулов В.Л. Закрученные потоки в технических приложениях (обзор) // Теплофизика и аэромеханика. 1966. Т. 3, № 2. С. 101–138.

4. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения и теплообмен в каналах и вращающихся полостях. М.: Физматлит, 2010. 488 с.
5. Кафаров В.В., Дорохов И.Н. Системный анализ процессов химической технологии. М.: Наука, 1976. 499 с.
6. Гунта А., Лилли Д., Сайред Н. Закрученные потоки. М.: Мир, 1987. 588 с.
7. Пономарев В.Б. Расчет и проектирование оборудования для воздушной сепарации сыпучих материалов. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2017. 96 с.
8. Росляк А.Т., Зятиков П.Н. Воздушно-центробежная классификация микропорошков. Томск: ТМЛ-Пресс, 2010. 140 с.
9. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течение газа с частицами. М.: Физматлит, 2008. 600 с.
10. Соломаха А.Е., Шваб А.В. Моделирование аэродинамики закрученного турбулентного потока в воздушно-центробежном классификаторе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 150–162. doi: 10.17223/19988621/87/12
11. Shvab A.V., Khairullina V.Yu. Effect of an unsteady swirled turbulent flow on the motion of a single solid particle // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2011. V. 52 (1). P. 37–42.
12. Евсеев Н.С., Жуков И.А., Бельчиков И.А. Исследование аэродинамики и процесса фракционного разделения мелкодисперсных частиц в сепарационной камере // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 74–85. doi: 10.17223/19988621/83/7
13. Василевский М.В., Полошко В.А., Романдин В.И., Евсеев Н.С., Жуков И.А., Зияудинов М.Х., Марченко Е.С., Жилина Л.А. Теоретические и экспериментальные исследования процесса классификации в зависимости от характера скоростного взаимодействия частиц TiN в пневмоизмельчителе с псевдооживленным слоем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 74–89. doi: 10.17223/19988621/85/6
14. Маликов З.М., Мадалиев М.Э. Математическое моделирование турбулентного течения в центробежном сепараторе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 71. С. 121–138. doi: 10.17223/19988621/71/10
15. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1987. Т. 2. 552 с.
16. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 2. 726 с.
17. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 1959. 468 с.
18. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
19. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries, 2006. xxii, 515 p.
20. Avelius K., Johansson A.V. Direct numerical simulation of rotating channel flow at various Reynolds numbers and rotation number: PhD thesis / Dept. of Mechanics, KTH, Stockholm, 1999.
21. Турубаев Р.Р., Шваб А.В. Численное исследование аэродинамики закрученного потока в вихревой камере комбинированного пневматического аппарата // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 47. С. 87–98. doi: 10.17223/19988621/47/9
22. Шваб А.В., Соломаха А.Е. Численное моделирование аэродинамики воздушно-центробежного классификатора // Известия вузов. Физика. 2021. Т. 64, № 2-2. С. 155–161. doi: 10.17223/00213411/64/2-2/155
23. Singh A., Vyas B.D., Powle U.S. Investigations on inward flow between two stationary parallel disks // J. Heat Fluid Flow. 1999. V. 20. P. 395–401.

## References

1. Gropyanov A.V., Sitov N.N., Zhukova M.N. (2017) *Poroshkovyye materialy; uchebnoe posobie* [Powder materials: textbook]. Saint Petersburg: VSHTe SPbGUPTD.

2. Kasatkin A.G. (2004) *Osnovnye protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii* [Fundamental processes and devices for chemical technology]. Moscow: Khimiya.
3. Alekseenko S.V., Okulov V.L. (1966) Zakruchennyye potoki v tekhnicheskikh prilozheniyakh (obzor) [Swirling flows in technical applications (review)]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 2. pp. 101–138.
4. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2010) *Techniya i teploobmen v kanalakh i vrashchayushchikhsya polostyakh* [Flows and heat transfer in channels and rotating cavities]. Moscow: FIZMATLIT.
5. Kafarov V.V., Dorokhov I.N. (1976) *Sistemnyy analiz protsessov khimicheskoy tekhnologii* [System analysis of chemical technology processes]. Moscow: Nauka.
6. Gupta A.K., Lilley D.G., Syred N. (1984) *Swirl Flows*. Tunbridge Wells: Abacus Press. doi: 10.1016/0010-2180(86)90133-1
7. Ponomarev V.B. (2017) *Raschet i proektirovanie oborudovaniya dlya vozduшной separatsii sypuchikh materialov* [Calculation and design of equipment for air separation of bulk materials]. Ekaterinburg: Ural.
8. Roslyak A.T., Zyatikov P.N. (2010) *Vozduшно-tsentrobezhnaya klassifikatsiya mikroporoshkov* [Air-centrifugal classification of micro-powders]. Tomsk: TML-Press.
9. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2008) *Technie gaza s chastitsami* [Flow of gas with particles]. Moscow: FIZMATLIT.
10. Solomakha A.E., Shvab A.V. (2024) Modelirovanie aerodinamiki zakruchennogo turbulentnogo potoka v vozduшно-tsentrobezhnom klassifikatore [Simulation of the aerodynamics of a swirling turbulent flow in an air-centrifugal classifier]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 150–162. doi: 10.17223/19988621/87/12
11. Shvab A.V., Khayrullina V.Yu. (2011) Effect of an unsteady swirled turbulent flow on the motion of a single solid particle. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 52(1). pp. 37–42. doi: 10.1134/S0021894411010068
12. Evseev N.S., Zhukov I.A., Bel'chikov I.A. (2023) Issledovanie aerodinamiki i protsessa fraktsionnogo razdeleniya melkodispersnykh chastits v separatsionnoy kamere [A study of aerodynamics and fractional separation of fine particles in a separation chamber]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 74–85. doi: 10.17223/19988621/83/7
13. Vasilevskiy M.V., Polyushko V.A., Romandin V.I., Evseev N.S., Zhukov I.A., Ziatdinov M.Kh., Marchenko E.S., Zhilina L.A. (2023) Teoreticheskie i eksperimental'nye issledovaniya protsessa klassifikatsii v zavisimosti ot kharaktera skorostnogo vzaimodeystviya chastits TiN v pnevmoizmel'chitele s psevdoozhizhennym sloem [Theoretical and experimental studies of the classification process depending on the nature of the high-speed interaction of TiN particles in a pneumogrinder with a fluidized bed]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 74–89. doi: 10.17223/19988621/85/6
14. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) Matematicheskoe modelirovanie turbulentnogo techeniya v tsentrobezhnom separatore [Mathematical modeling of a turbulent flow in a centrifugal separator]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 71. pp. 121–138. doi: 10.17223/19988621/71/10
15. Fletcher C.A.J. (1991) *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. New York: Springer-Verlag Inc.
16. Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H. (1984) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
17. Stepanov V.V. (1959) *Kurs differentsial'nykh uravneniy* [Course of differential equations]. Moscow: FIZMATLIT.
18. Loitsyanskiy L.G. (1987) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Nauka.

19. Wilcox D.C. (2006) *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries.
20. Avelius K., Johansson A.V. (1999) *Direct Numerical Simulation of Rotating Channel Flow at Various Reynolds Numbers and Rotation Number*. Ph.D. thesis Stockholm, Sweden.
21. Turubaev R.R., Shvab A.V. (2017) Chislennoe issledovanie aerodinamiki zakruchennogo potoka v vikhrevoy kamere kombinirovannogo pnevmaticheskogo apparata [Numerical study of swirled flow aerodynamics in the vortex chamber of the combined pneumatic machine]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 87–98. doi: 10.17223/19988621/47/9
22. Shvab A.V., Solomakha A.E. (2021) Chislennoe modelirovanie aerodinamiki vozdušno-tsentrobrezhnogo klassifikatora [Numerical modeling of aerodynamics of an air-jet classifier]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika*. 64(2-2). pp. 155–161. doi: 10.17223/00213411
23. Singh A., Vyas B.D., Powle U.S. (1999) Investigations on inward flow between two stationary parallel disks. *Journal Heat Fluid Flow*. 20(4). pp. 395–401. doi: 10.1016/S0142-727X(98)10058-9

**Сведения об авторах:**

**Соломаха Артём Евгеньевич** – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: solomahaartem@yandex.ru

**Шваб Александр Вениаминович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: avshvab@inbox.ru

**Information about the authors:**

**Solomakha Artyom E.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: solomahaartem@yandex.ru

**Shvab Aleksandr V.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: avshvab@inbox.ru

*Статья поступила в редакцию 30.01.2025; принята к публикации 01.08.2025*

*The article was submitted 30.01.2025; accepted for publication 01.08.2025*

*Научный журнал*

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.  
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

**2025. № 96**

Редактор Е.Г. Шумская  
Оригинал-макет Е.Г. Шумской  
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 29.08.2025 г. Формат 70×100<sup>1/16</sup>.  
Печ. л. 10,0; усл. печ. л. 9,3. Цена свободная.  
Тираж 250 экз. Заказ № 6425.

Дата выхода в свет 12.09.2025 г.

**Адрес издателя и редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36  
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании  
Издательства Томского государственного университета  
634050, г. Томск, Ленина, 36  
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75  
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)