

УДК 519.873

В.Н. Губин, Г.Г. Пестов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕЗЕРВИРУЕМЫХ УСТРОЙСТВ

Рассмотрены 3 модели резервированных устройств и исследованы их общие свойства с использованием сигма-оператора.

Ключевые слова: резервирование, система, надёжность, стратегия, среднее время безотказной работы, модель, критерий оптимизации, сигма-оператор, промежутки K_0 -постоянства.

Задача повышения надёжности сложных устройств остаётся актуальной, несмотря на прогресс в технологии изготовления элементов систем. Прогресс в повышении надёжности элементов систем компенсируется растущим усложнением структуры и возрастающими требованиями к надёжности систем. Среди моделей с управляемым резервом, рассмотренных в работах Райкина [1], Герцбаха [2], Томиленко [3], Ушаковой – Пестова [4], можно выделить один класс систем с управляемым резервом. Задача, аналогичная данной, решалась другими методами в работах [5–7].

Далее мы дадим описание систем этого класса. Время в системе дискретно и может принимать значения, кратные некоторой положительной константе Δ : $\Delta, 2\Delta, 3\Delta, \dots$. В каждый из этих моментов времени производится проверка исправности всех включённых в работу элементов и принимается решение о том, какое количество исправных элементов следует включить в работу. Исправные элементы в резерве (не включённые в работу) остаются исправными. Пусть состояние системы в данный момент времени полностью характеризуется набором параметров (r, s) , где r – количество исправных элементов в данный момент времени, как включённых, так и не включённых в работу, s – некоторый конечный вектор параметров системы, задаваемый в начале работы системы. В дальнейшем исследуются системы, у которых в процессе работы вектор параметров s не изменяется. Функцию $K(r, s)$, принимающую целые значения и такую, что для каждого натурального r выполнено неравенство $1 \leq K(r, s) \leq r$, назовём *стратегией резервирования* системы. Поскольку вектор параметров s не изменяется в процессе работы системы, то в перечне аргументов различных функций мы будем его опускать. Например, вместо $K(r, s)$ всюду пишем $K(r)$. Система рассматривается на этапе нормальной работы, когда элементы не стареют (или почти не стареют).

Заметим, что через K (K прописное с индексами) будем обозначать стратегию резервирования, в отличие от k строчного, обозначающего целочисленную константу.

Функционал T , заданный на множестве пар (r, K) и принимающий неотрицательные значения, назовём *критерием оптимизации*. Таким образом, если задано количество r исправных элементов и стратегия K , то задано и значение критерия $T(r, K)$. Рассмотрим несколько моделей, где функционал T имеет уже конкретный смысл. В каждой из моделей, рассмотренных ниже, задан свой критерий оптимизации.

Модель M_1 . Система S_m функционирует на конечном промежутке $[1, n]$, где n – натуральное число. Система S_m функционирует исправно тогда и только тогда, ко-

гда количество включённых в работу исправных элементов не меньше чем m . Для вычисления характеристик системы ещё необходимо знать распределения вероятностей отказов элементов за один шаг, если в работу включено k исправных элементов. Обозначим через $f(k, i)$ вероятность следующего события: в работу включено k исправных элементов, из них за один шаг отказало ровно i . Будем считать функцию $f(k, i)$ известной. В качестве критерия оптимизации в модели M_1 используем среднее время исправной работы системы. Обозначим через $T(r)$ математическое ожидание времени работы системы при стратегии, оптимальной по критерию среднего времени работы системы, если в начальный момент имеется ровно r исправных элементов. Через $T(k, r)$ обозначим математическое ожидание времени работы системы, если в начальный момент включено в работу k элементов, а в дальнейшем используется стратегия, оптимальная по критерию среднего времени работы системы. Из определения системы S_m следует, что $k \geq m$. По формуле полного математического ожидания [8] имеем

$$T(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m} T(r-i) F(k, i). \quad (a)$$

Рассмотрим максимум величины $T(k, r)$ по k . Этот максимум существует в силу конечности модели S_m . Очевидно, что $\max_k T(k, r) = T(r)$.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что исправные элементы в резерве остаются исправными, а каждый исправный элемент, включённый в работу, отказывает за один шаг с вероятностью $q = 1-p$, независимо от состояния других элементов, и остаётся исправным с вероятностью p . Итак, если в работу включено k элементов, то количество элементов, отказавших за один шаг, подчиняется биномиальному распределению. Значит, $F(k, i) = C_k^i p^{k-i} q^i$, и также

$$T(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i). \quad (b)$$

Модель M_2 . Система функционирует на промежутке $[1, \infty)$. Как и в модели M_2 , вводим характеристики системы: $T(k, r)$ – математическое ожидание времени работы системы, если в начальный момент включено в работу k элементов, а в дальнейшем используется стратегия, оптимальная по критерию среднего времени работы системы; обозначим через $T(r)$ математическое ожидание времени работы системы при стратегии, оптимальной по критерию среднего времени работы системы, если в начальный момент имеется ровно r исправных элементов. По формуле полного математического ожидания [8] имеем

$$T(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i). \quad (c)$$

Модель M_3 . Пусть система функционирует на промежутке $[1, n]$, где n – натуральное число. Пусть K есть стратегия резервирования. Иначе, K есть функция, заданная на множестве натуральных чисел N , такая, что для каждого r из N величина $K(r)$ есть количество исправных элементов, которые следует включить в работу, если количество исправных элементов равно r . Обозначим через $T(K, r)$ вероятность того, что система не откажет на $[1, n]$ при стратегии K , если в начальный момент имеется r исправных элементов. Как и раньше, будем считать известной функцию $f(k, l)$ – вероятность такого события: если в работу включено k исправных элементов, то из них за один шаг отказало ровно l . Обозначим через $T(r)$ ма-

тематическое ожидание времени исправной работы системы при стратегии, оптимальной по времени работы системы, если в начальный момент имеется r исправных элементов.

По формуле полной вероятности имеем

$$T(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i). \quad (d)$$

В каждой модели стратегию, обеспечивающую максимум заданного в этой модели критерия оптимизации, назовём **оптимальной стратегией** (подробнее: стратегией, оптимальной по заданному критерию). Оптимальную стратегию обозначим через K_0 . Естественно, в различных моделях различны и оптимальные стратегии.

1. Некоторые свойства функций $T(r)$, $T(r, k)$

В моделях резервированных систем M_1, M_2, M_3 величины $T(r)$, $T(r, k)$ имеют различный смысл. Тем не менее для них выполнены следующие общие свойства:

1) По физическому смыслу $T(r) > 0$, $T(r)$ возрастает с ростом r .

2) Экспериментальные данные приводят к гипотезе: если $K_0(r)$ постоянна на некотором промежутке $[r_1, r_2]$ и $p > 0,5$, то имеет место неравенство

$$T(r+2) - T(r+1) \leq T(r+1) - T(r) \quad (1)$$

или

$$T(r+2) - 2T(r+1) + T(r) \leq 0, \quad (2)$$

$$r \in [r_1, r_2 - 2].$$

Геометрически (1) означает, что график функции $T(r)$ – выпуклый.

С физической стороны неравенство (2) означает, что скорость роста показателя качества уменьшается с ростом r .

3) В каждой из моделей M_1, M_2, M_3 введём оператор σ на множестве функций $\{T(r)\}$ следующим образом. Для каждого положительного r положим по определению $\sigma T(r+1) = T(r)$. Далее оператор σ продолжаем как линейный оператор на

множество функций вида $\sum_{i=0}^m a_i T(r+b_i)$, где a_i, b_i – вещественные константы.

$$\text{Таким образом, } \sigma \sum_{i=0}^m a_i T(r+b_i) = \sum_{i=0}^m a_i T(r+b_i-1).$$

$$\text{В частности, } \sigma T(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i-1) = T(k, r-1).$$

Итак, при $r > 1$ имеем

$$\sigma T(k, r) = T(k, r-1).$$

Запишем свойство 2) с помощью оператора σ :

$$(\sigma - 1)^2 T(r+2) \leq 0. \quad (1.1)$$

$$4) \text{ Так как } T(r) \text{ строго возрастает, то из 2) следует } \frac{T(r+2)}{T(r+1)} < \frac{T(r+1)}{T(r)}.$$

Итак, функция $T(r+1)/T(r)$ строго убывает с ростом r . Данное свойство в частном случае доказано в [4].

5) Из свойства 4) непосредственно следует, что функция $\ln T(r)$ выпукла.

6) Так как $T(r+1)/T(r) > 1$, строго убывает с ростом r , то по теореме Больца-но – Вейерштрасса существует $\lim_{r \rightarrow \infty} T(r+1)/T(r)$. Обозначим этот предел через l .

Докажем, что этот предел равен 1.

Теорема. При $r \rightarrow \infty$ имеет место соотношение $T(r+1)/T(r) \rightarrow 1$.

Доказательство:

По теореме возможны два случая:

1) $k_0(r+1) = k_0(r) = k$.

Тогда, используя сигма-оператор, получим

$$\begin{aligned} T(k, r+1) - T(k, r) &\leq T(k, r+1) - T(k-1, r) = [(p+q\sigma)^{k-1} (p+q\sigma-\sigma)]T(r+1) \\ &\quad - (q\sigma)^{k-1} (q\sigma-\sigma)T(r+1) = p(p+q\sigma)^{k-1} (1-\sigma)T(r+1) + p(q\sigma)^{k-1} T(r) = \\ &= p(p+q\sigma)^{k-1} T(r+1) - p(q\sigma)^{k-1} T(r+1) + p(q\sigma)^{k-1} T(r+1) - p(p+q\sigma)^{k-1} T(r) + p(q\sigma)^{k-1} T(r) = \\ &= p(T(k-1, r+1) - T(k-1, r) + q^{k-1} T(r-k+2)). \end{aligned}$$

Имеем $T(k, r+1) - T(k, r) \leq p(T(k-1, r+1) - T(k-1, r) + q^{k-1} T(r-k+2))$.

Продолжая неравенство, имеем

$$\begin{aligned} T(k, r+1) - T(k, r) &\leq p^2(T(k-2, r+1) - T(k-2, r) + q^{k-2} T(r-k+3)) + p q^{k-1} T(r-k+2) \leq \dots \\ &\leq p q^{k-1} T(r+1 - (k-1)) + p^2 q^{k-2} T(r+1 - (k-2)) + \dots + p^{k-1} q T(r) + p^{k-1} (T(1, r+1) - T(1, r)) \\ &\leq (p q^{k-1} + p^2 q^{k-2} + \dots + p^{k-1} q) T(r) = p q (p^{k-1} - q^{k-1}) / (p - q) \rightarrow 0, \\ &\text{при } r \rightarrow \infty \text{ по лемме 1.} \end{aligned}$$

2) $k_0(r) = k$, $k_0(r+1) = k+1$.

Доказательство проводится аналогично.

2. Возрастание $k_0(r)$ с ростом r

Обозначим через S_m модель, в которой система исправна, если и только если в работу включено не менее m исправных элементов.

Рассмотрим разность

$$T_m(k+1, r) - T_m(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m+1} C_{k+1}^i p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) - \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i).$$

Воспользуемся свойством биномиальных коэффициентов:

$$C_{k+1}^i = C_k^i + C_k^{i-1},$$

$$\begin{aligned} &T_m(k+1, r) - T_m(k, r) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-m+1} C_k^i p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) + \sum_{i=1}^{k-m+1} C_k^{i-1} p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) - \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-m+1} C_k^i p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) + \sum_{i=1}^{k-m+1} C_k^{i-1} p^{k+1-i} q^i T_m(r-i) - \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i) = \\ &= -q \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i) + q \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T_m(r-i-1) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T_m(r-k+m-1) = \\ &= q(T_m(k, r-1) - T_m(k, r)) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T_m(r-k-i-1). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$T_m(k+1, r) - T_m(k, r) = q(\sigma-1)T_m(k, r) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T_m(r-k-i-1). \quad (2.1)$$

Так как в выражении (2.1) разность $T_m(k, r-1) - T_m(k, r)$ возрастает с ростом r , то и $T_m(k+1, r) - T_m(k, r)$ возрастает при увеличении r .

Докажем теперь, что $k_0(r)$ возрастает с увеличением параметра r .

Пусть $T_m(k, r)$ достигает максимума при $k = k_0(r)$. Тогда

$$T_m(k_0(r), r) - T_m(k_0(r)-1, r) \geq 0.$$

Отсюда в силу предыдущего свойства получаем, что

$$T_m(k_0(r), r+1) - T_m(k_0(r)-1, r+1) \geq 0.$$

Значит, $k_0(r+1) \geq k_0(r)$, то есть, $k_0(r+1) \geq k_0(r)$. Итак, в модели S_m функция $k_0(r)$ возрастает (нестрого) с ростом r .

3. Выпуклость $T(k, r)$ по k в S_m

Теорема: При $p \geq \frac{k}{2k-m+1}$ функция $T_m(k, r)$ для системы S_m имеет не более двух максимумов при фиксированном r , причем она выпукла вверх по k в области $m \leq k \leq k_0^m(r)+1$ и не возрастает при $k_0^m(r) < k \leq r$.

Доказательство:

Воспользуемся соотношением (2.1):

$$T(k+1, r) - T(k, r) = q(\sigma-1)T(k, r) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T(r-k-1+m).$$

Преобразуем с помощью него следующую разность:

$$\begin{aligned} & [T(k+1, r) - T(k, r)] - p[T(k, r) - T(k-1, r)] = \\ & = q(\sigma-1)T(k, r) + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T(r-k-1+m) - pq(\sigma-1)T(k-1, r) - \\ & \quad - pC_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} T(r-k+m) = q(\sigma-1)[T(k, r) - pT(k-1, r)] + \\ & \quad + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T(r-k-1+m) - pC_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} T(r-k+m). \end{aligned}$$

Упростим выражение в квадратных скобках:

$$\begin{aligned} T(k, r) - pT(k-1, r) &= \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) - p \sum_{i=0}^{k-m-1} C_{k-1}^i p^{k-i-1} q^i T(r-i) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-m} C_{k-1}^i p^{k-i} q^i T(r-i) + \sum_{i=1}^{k-m} C_{k-1}^{i-1} p^{k-i} q^i T(r-i) - \sum_{i=0}^{k-m-1} C_{k-1}^i p^{k-i} q^i T(r-i) = \\ &= \sum_{j=0}^{k-m-1} C_{k-1}^j p^{k-j-1} q^{j+1} T(r-j-1) + C_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} T(r-k+m) = \\ &= qT(k-1, r-1) + C_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} T(r-k+m). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} & [T(k+1, r) - T(k, r)] - p[T(k, r) - T(k-1, r)] = \\ & = q(\sigma-1)[qT(k-1, r-1) + C_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} T(r-k+m)] + \\ & \quad + C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} T(r-k-1+m) - pC_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} T(r-k+m). \end{aligned} \quad (3.1)$$

В (3.1) слагаемое $q(\sigma-1)[qT(k-1, r-1) + C_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} T(r-k+m)] \leq 0$. Потребуем, чтобы $C_k^{k+1-m} p^m q^{k+1-m} - pC_{k-1}^{k-m} p^m q^{k-m} \leq 0$. Это выполнено тогда и только

тогда, когда

$$k - p(2k - m + 1) \leq 0 \quad \text{или} \quad p \geq \frac{k}{2k - m + 1}.$$

Таким образом, если $T(k, r) - T(k - 1, r) > 0$ и $p \geq \frac{k}{2k - m + 1}$, то выполнено

$$T(k + 1, r) - T(k, r) \leq p[T(k, r) - T(k - 1, r)] \leq T(k, r) - T(k - 1, r). \quad (3.2)$$

Это значит, что функция $T(k, r)$ при фиксированном r выпукла по k на промежутке $m \leq k \leq k_0^m(r) + 1$, где $k_0^m(r)$ – значение параметра k , при котором функция $T(k, r)$ в системе S_m достигает максимума при фиксированном r . Также из (3.2) следует, что когда $T(k, r) - T(k - 1, r) \leq 0$, разность $T(k + 1, r) - T(k, r) < 0$, а это означает, что при $k_0^m(r) < k \leq r$ функция $T(k, r)$ убывает по k .

Свойство системы, состоящее в том, что при возрастании резерва на единицу оптимальное количество элементов, включаемых в работу, возрастает не более чем на 1, доказано в работе [1] для модели 3. Выкладки для моделей 1, 2 аналогичны, поэтому в данной работе доказательство этого свойства опустим.

4. Поведение функции $T(r)$ на скачках функции $K_0(r)$

Рассмотрим поведение функции $(\sigma - 1)^2 T(r)$ при тех r , где $K_0(r)$ возрастает на единицу. Так как $K_0(r) \leq K_0(r + 1) \leq K_0(r) + 1$, то возможны три случая:

- 1) $K_0(r - 1) = k - 1, K_0(r) = k, K_0(r + 1) = k$.
- 2) $K_0(r - 1) = k - 1, K_0(r) = k - 1, K_0(r + 1) = k$.
- 3) $K_0(r - 1) = k, K_0(r) = k, K_0(r + 1) = k$.

В случае 1 получаем

$$\begin{aligned} (\sigma - 1)^2 T(r + 1) &= T(k, r + 1) - 2T(k, r) + T(k - 1, r - 1) = \\ &= (p + q\sigma)^{k-1} (p + (q - 2p)\sigma + (p - q)\sigma^2) T(r + 1) - (q\sigma)^{k-1} (q\sigma + (p - q)\sigma^2) T(r + 1). \end{aligned}$$

Так как $\sigma T(r + 1) = \alpha T(r + 1)$, $\sigma^2 T(r + 1) = \alpha\beta T(r + 1)$, то в правой части имеем

$$(p + q\sigma)^{k-1} (p + (q - 2p)\alpha + (p - q)\alpha\beta) T(r + 1) - (q\sigma)^{k-1} (q\alpha + (p - q)\alpha\beta) T(r + 1).$$

Оценим $\Delta_1 = p + (q - 2p)\alpha + (p - q)\alpha\beta$, учитывая, что $\alpha > \beta$:

$$\Delta_1 = p + (q - 2p)\alpha + (p - q)\alpha\beta = p(1 - \alpha) + (q - p)\alpha(1 - \beta) < (1 - \alpha)(p + (q - p)\alpha).$$

Так как $\alpha \rightarrow 1$, то начиная с некоторого r , выполнено неравенство $1 - \alpha < q\alpha$.

Тогда

$$\Delta_1 < 2q\alpha(1 - \alpha) < 2q(1 - \alpha).$$

Оценим

$$\Delta_2 = (q\alpha + (p - q)\alpha\beta)(q\sigma)^{k-1} T(r + 1) > p\alpha\beta(q\sigma)^{k-1} T(r + 1) > p^3(q\sigma)^{k-1} T(r + 1).$$

Используя оценку $\sigma T(r + 1) > pT(r + 1)$, имеем

$$(\sigma - 1)^2 T(r + 1) < [2q(1 - \alpha) - p^{k+2}q^{k-1}] T(r + 1). \quad (4.1)$$

Таким образом, если

$$2q(1-\alpha) < p^{k+2}q^{k-1}, \quad (4.2),$$

то из неравенства (4.1) следует, что $(\sigma-1)^2 T(r+1) < 0$.

Неравенство (4.2) выполняется, начиная с некоторого $r = r_0$, в силу того, что величина $p^{k+2}q^{k-1}$ с ростом r либо не изменяется, либо уменьшается в pq раз.

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения.

Определение. Через $\hat{r}_i$ обозначим значение r , при котором оптимальное значение $K_0(r)$ изменяется с i на $i+1$.

Изучение экспериментальных данных приводит к следующим предположениям:

1) Расстояние между соседними скачками $|\hat{r}_{i+1} - \hat{r}_i|$ увеличивается при возрастании i ;

2) функция $1 - \alpha(\hat{r}_i)$ всё быстрее убывает при увеличении i .

Случай 2. Пусть $K_0(r-1) = k-1$, $K_0(r) = k-1$, $K_0(r+1) = k$. Тогда

$$\begin{aligned} (\sigma-1)^2 T(r+1) &= T(k, r+1) - 2T(k-1, r) + T(k-1, r-1) = \\ &= (p+q\sigma)^{k-1} (p - (1+p)\sigma + \sigma^2) T(r+1) + (q\sigma)^{k-1} ((1+p)\sigma - \sigma^2) T(r+1) = \\ &= [(p+q\sigma)^{k-1} (p - (1+p)\alpha + \alpha\beta) + (q\sigma)^{k-1} ((1+p)\alpha - \alpha\beta)] T(r+1). \end{aligned}$$

Оценим каждое из слагаемых в прямых скобках. Для первого имеем

$$\begin{aligned} (p - (1+p)\alpha + \alpha\beta)(p+q\sigma)^{k-1} T(r+1) &= (p(1-\alpha) - \alpha(1-\beta))(p+q\sigma)^{k-1} T(r+1) > \\ &> -\alpha(1-\beta)(p+q\sigma)^{k-1} T(r+1) > -(1-\beta)(p+q\sigma)^{k-1} T(r+1) > -(1-\beta)T(r+1). \end{aligned}$$

Для второго слагаемого выполнено

$$\begin{aligned} (q\sigma)^{k-1} ((1+p)\alpha - \alpha\beta) T(r+1) &= (q\sigma)^{k-1} ((1-\beta) + p) T(r) > \\ &> p(q\sigma)^{k-1} T(r) = pq^{k-1} \sigma^k T(r+1). \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством: $\sigma^k T(r+1) > p^k T(r+1)$. Тогда

$$(\sigma-1)^2 T(r+1) > [p^{k+1}q^{k-1} - (1-\beta)] T(r+1). \quad (4.3)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках с ростом k уменьшается в pq раз, а второе – с возрастанием k всё быстрее стремится к нулю. Поэтому первое слагаемое, начиная с некоторого r , будет превосходить второе. Из неравенства (4.3) вытекает, что существует такое r_0 , что при $r > r_0$ первое слагаемое больше второго и, следовательно, $(\sigma-1)^2 T(r+1)$ положительно.

Введем **определение**.

Назовем максимальный промежуток $[r_1, r_2]$, на котором функция $K_0(r)$ постоянна, промежутком K_0 -постоянства.

Таким образом,

1) промежуток $[0, +\infty)$ разбивается на непересекающиеся промежутки K_0 -постоянства;

2) при входе в очередной промежуток постоянства значение функции $(\sigma-1)^2 T(r+1)$ становится положительным;

3) внутри промежутка и на выходе из него функция $(\sigma-1)^2 T(r+1)$ остается отрицательной.

Случай 3 исследуется аналогично.

5. Алгоритм вычисления оптимальной стратегии резервирования

Построим алгоритм вычисления оптимальной стратегии резервирования по заданному критерию $T(r)$ в модели S_m с помощью метода динамического программирования Беллмана [9].

Для вычисления оптимальной стратегии будем использовать равенства (b),(c),(d).

1) Пусть количество исправных элементов r равно m . По построению S_m имеем $k_0(m) = m$.

Далее для каждой модели необходимо вычислить $T(m)$. В данной работе ограничимся вычислением $T(m)$ для модели 2.

В модели 2 система S_m работает на бесконечном промежутке и в качестве критерия выступает среднее время безотказной работы системы на бесконечном промежутке. Рассмотрим события вида $A_{lm} = \{\text{система из } m \text{ элементов проработала безотказно } l \text{ шагов, а на следующем шаге отказала}\}$:

$$P(A_{lm}) = p^{ml}(1 - p^m).$$

$$\text{Тогда } T(m) = \sum_{l=1}^{\infty} lP(A_{lm}) = (1 - p^m) \sum_{l=1}^{\infty} lp^{ml}.$$

Переобозначим $p^m = x$. Используя почленное интегрирование ряда, вычисляем сумму

$$\sum_{l=1}^{\infty} lx^l = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Тогда выражение для $T(m)$ принимает вид

$$T(m) = \frac{p^m}{(1 - p^m)}.$$

Замечательно, что дальнейшие вычисления для всех рассмотренных моделей производятся одинаково.

$$2) \text{ Имеем } T(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) = p^k T(r) + \sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i): \quad (5.1)$$

а) Подставляя в (5.1) $k = k_0(r) = k_0$, получим

$$T(r) = p^{k_0} T(r) + \sum_{i=1}^{k_0-m} C_{k_0}^i p^{k_0-i} q^i T(r-i),$$

$$\text{откуда находим } T(r) = \frac{1}{1 - p^{k_0}} \sum_{i=1}^{k_0-m} C_{k_0}^i p^{k_0-i} q^i T(r-i).$$

б) Подставим теперь в (5.1) значение $k_1 \neq k_0(r)$. Получим неравенство

$$T(r) \geq T(k_1, r) = \frac{1}{1 - p^{k_1}} \sum_{i=1}^{k_1-m} C_{k_1}^i p^{k_1-i} q^i T(r-i).$$

Таким образом,

$$T(r) = \max \frac{1}{1 - p^k} \sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i), \quad (5.2)$$

где максимум берётся по всем натуральным k , таким, что $k \geq m$.

$$\text{Обозначим } f(k, r) = \frac{1}{1-p^k} \sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i).$$

Пусть уже вычислены $k_0(m)$, $k_0(m+1)$, ..., $k_0(r-1)$, $T(m)$, $T(m+1)$, ..., $T(r-1)$. Вычислим $k_0(r)$ и $T(r)$. Для этого вычисляем $f(k_0(r-1), r)$ и $f(k_0(r-1)+1, r)$.

Если $f(k_0(r-1), r) \geq f(k_0(r-1)+1, r)$, то полагаем

$$k_0(r) = k_0(r-1) \text{ и } T(r) = f(k_0(r-1), r).$$

Если же $f(k_0(r-1)+1, r) \geq f(k_0(r-1), r)$, полагаем

$$k_0(r) = k_0(r-1)+1, \text{ и } T(r) = f(k_0(r-1)+1, r).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Райкин А.Л. Элементы теории надёжности технических систем. М.: Сов. радио, 1978.
2. Герцбах И.Б. Об оптимальном управлении включением резервных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1966. № 5.
3. Томиленко В.А. Об одной задаче динамического резервирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1975. № 4.
4. Пестов Г.Г., Ушакова Л.В. Исследование оптимальных стратегий в задаче динамического резервирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1973. № 5.
5. Конев В.В. Об оптимальном включении резервных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 4. С. 75–83.
6. Конев В.В. Об оптимальном программном включении резервных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1975. № 3. С. 109–117.
7. Конев В.В., Овчинников А.В. Оптимальное резервирование группы однотипных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1976. № 4. С. 75–84.
8. Renyi A. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.
9. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. 458 с.

Статья поступила 03.06.2014 г.

Gubin V.N., Pestov G.G. ON A CLASS OF RESERVED DEVICES

In this paper, we consider three models of redundancy:

- (1) By use of the mean time between system failures on a finite interval;
- (2) By use of the mean time between system failures on a infinite interval;
- (3) By use of the system reliability on a finite interval.

For all three models, the redundancy criterion has the following form:

$$T(k, r) = \sum_{i=0}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i). \quad (1)$$

Using the sigma-operator turns out to be an effective way for proving many properties of optimal strategies. Let $T(r) > 0$ and $T(r)$ increase.

The following properties are proved:

- (1) If $p \geq \frac{k}{2k-m+1}$, then the function $T_m(k, r)$ for the system S_m has at most two maximums

for a fixed r , it is convex on the interval $m \leq k \leq k_0^m(r)+1$ and nonincreasing on $k_0^m(r) < k \leq r$.

- (2) Since $T(r+1)/T(r) > 1$ and strictly decreases, $\lim_{r \rightarrow \infty} T(r+1)/T(r)$ exists by the Bolzano–

Weierstrass theorem and this limit is equal to 1.

From convexity of the function $T(r)$, it is easy to prove that

$$(3) \frac{T(r+2)}{T(r+1)} < \frac{T(r+1)}{T(r)}.$$

Under more restrictive conditions, this inequality was obtained in the thesis of L.V. Ushakova.

(4) The function $\ln T(r)$ is convex;

(5) $T(k+1, r) - T(k, r)$ increases with an increase in r .

To find the optimal strategy, a simplified algorithm is obtained using the properties. This algorithm is based on a modification of the Bellman dynamic programming method mentioned in V.V. Travkina's work. The essence of the algorithm is as follows.

(1) If there are m elements, then we have $k_0(m) = m$. For each model, $T(m)$ is calculated.

(2) All further calculations for the three models are similar. Then it is necessary to calculate the values of the function $T(r)$ **by means** of its previous values using the formula

$$T(k, r) = \frac{1}{1 - p^k} \sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i), \quad (2)$$

(3) Suppose that $k_0(m)$, $k_0(m+1)$, ..., $k_0(r-1)$, $T(m)$, $T(m+1)$, ..., $T(r-1)$ have already calculated.

To find $k_0(r)$, we need to calculate $k_0(r-1)$ and $k_0(r-1)+1$. Then, using (2), we calculate $T(k_0(r-1), r)$ and $T(k_0(r-1)+1, r)$ and compare them. If $T(k_0(r-1), r) \geq T(k_0(r-1)+1, r)$ then $k_0(r) = k_0(r-1)$ and $T(r) = T(k_0(r-1), r)$. If $T(k_0(r-1)+1, r) \geq T(k_0(r-1), r)$ then $k_0(r) = k_0(r-1)+1$, and $T(r) = T(k_0(r-1)+1, r)$.

Keywords: redundancy, system, reliability, strategy, mean time between failures, optimization criterion, model, sigma-operator, K_0 -constancy interval.

Gubin Vladimir Nikolaevich (M.Sc., Tomsk State University,
Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)
Email: vovantus@sibmail.com

Pestov German Gavrilovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof.,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
Email: gpestov@mail.ru

REFERENCES

1. Raykin A.L. *Elementy teorii nadezhnosti tekhnicheskikh sistem*. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1978. (in Russian)
2. Gertsbakh I.B. Ob optimal'nom upravlenii vklucheniem rezervnykh elementov (1966) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 5. (in Russian)
3. Tomilenko V.A. Ob odnoy zadache dinamicheskogo rezervirovaniya (1975) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 4. (in Russian)
4. Pestov G.G., Ushakova L.V. Issledovanie optimal'nykh strategiy v zadache dinamicheskogo rezervirovaniya (1973) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 5. (in Russian)
5. Konev V.V. Ob optimal'nom vkluchenii rezervnykh elementov (1974) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 4, p. 75–83. (in Russian)
6. Konev V.V. Ob optimal'nom programnom vkluchenii rezervnykh elementov (1975) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 3, pp. 109–117. (in Russian)
7. Konev V.V., Ovchinnikov A.V. Optimal'noe rezervirovanie gruppy odnotipnykh elementov (1976) *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 4, p. 75–84. (in Russian)
8. Renyi A. *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.
9. Bellman R., Dreyfus S. *Prikladnye zadachi dinamicheskogo programmirovaniya*. Moscow, Nauka Publ., 1965. 458 p. (in Russian)