ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2014 Математика и механика № 4(30)

УДК 512.541

К.С. Сорокин

SP-ГРУППЫ С ЧИСТЫМИ КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

Рассматриваются вопросы чистоты колец эндоморфизмов *SP*-групп – одного из известных классов смешанных абелевых групп. Доказано, что кольца эндоморфизмов самомалых *SP*-групп являются чистыми. Приведены достаточные условия, при которых справедливо обратное утверждение. Описано строение колец эндоморфизмов *SP*-групп ранга 1 с циклическими *p*-компонентами и доказана их чистота, найдено описание радикала Джекобсона колец эндоморфизмов данных групп. Определены достаточные условия чистоты эндоморфизмов *SP*-групп конечного ранга с циклическими *p*-компонентами.

Ключевые слова: *смешанная абелева группа*, *SP-группа*, *чистое кольцо*, *кольцо эндоморфизмов.*

Пусть R – кольцо с единицей. Элемент r кольца R называется *чистым*, если $r = u + e$, где e – идемпотент, а u – обратимый элемент кольца R. Кольцо R называется *чистым*, если всякий его элемент является чистым.

Понятие чистого кольца было предложено Николсоном в 1977 году как пример кольца, в котором идемпотенты поднимаются по модулю любого левого (правого) идеала [1], то есть каждое чистое кольцо является заменяемым кольцом. Кроме того, Николсоном было доказано [1], что кольцо с центральными идемпотентами [2] является чистым тогда и только тогда, когда оно заменяемо. В то же время имеется пример регулярного кольца, которое не является чистым [3]. Согласно [1], регулярные кольца являются заменяемыми кольцами, следовательно, класс чистых колец является собственным подклассом класса заменяемых колец.

Элемент r кольца R называется *обратимо-регулярным*, если $r = u \cdot e$, где e – идемпотент, а u – обратимый элемент кольца R. Кольцо R называется *обратимо-регулярным*, если всякий его элемент является обратимо-регулярным. Доказано, что обратимо-регулярное кольцо является чистым [4]. Так как полупростое кольцо является обратимо-регулярным и кольцо R является чистым тогда и только тогда, когда $R/J(R)$ – чистое и идемпотенты кольца R поднимаются по модулю $J(R)$ [5], полусовершенные кольца являются чистыми. Это означает, что, в частности, любое артиново (а значит, и любое конечное) кольцо является чистым. Кроме того, любое кольцо матриц над чистым кольцом является чистым [5].

В случае, когда R является кольцом эндоморфизмов некоторого модуля, появляются новые описания свойства чистоты, которые могут оказаться полезными при изучении условий чистоты кольца R. В частности, если f – чистый элемент кольца эндоморфизмов модуля M, это означает, что существует такой идемпотентный эндоморфизм e модуля M, что f совпадает на $Ker(e)$ с некоторым автоморфизмом модуля M. Эта тематика привлекла в последнее время внимание многих специалистов. Было доказано, что являются чистыми следующие кольца эндоморфизмов: проективного модуля над правым совершенным кольцом, векторного пространства над телом, непрерывного модуля [6, 7].

Поскольку абелевы группы являются **Z**-модулями, возникает естественная задача о нахождении необходимых и достаточных условий чистоты колец эндоморфизмов абелевых групп. Голдсмит и Вамош рассмотрели вопросы чистоты колец эндоморфизмов периодических абелевых групп [8]. Было показано, что кольцо эндоморфизмов тотально проективной периодической группы является чистым тогда и только тогда, когда эта группа ограничена. Автором данной статьи были изучены вопросы чистоты колец эндоморфизмов вполне разложимых групп без кручения [9].

Целью настоящей работы является изучение вопросов чистоты колец эндоморфизмов SP-групп конечного ранга без кручения – одного из классов смешанных абелевых групп [10–12].

Введём обозначения:

A – SP-группа,

R – кольцо эндоморфизмов группы A,

R_p – кольцо эндоморфизмов p-компоненты группы A,

R_t – идеал эндоморфизмов группы A, образы которых лежат в периодической части группы A.

S – фактор-кольцо R/R_t.

1. Самомалые *SP*-группы

Определение 1. Редуцированная смешанная абелева группа A с бесконечным числом ненулевых p-компонент называется SP-группой, если естественное вложение $\bigoplus\limits_p A_p \to \prod\limits_p A_p$ продолжается до сервантного вложения $A \to \prod\limits_p A_p$. Здесь и далее предполагается, что p пробегает множество всех простых чисел, относящихся к A, то есть таких, что $A_p \neq 0$.

Определение 2. Группа A называется самомалой, если образ каждого гомоморфизма $A \to \bigoplus\limits_{\mathfrak{R}} A$ ($\mathfrak{R}$ – произвольный кардинал) содержится в сумме конечного числа слагаемых A.

В следующей лемме, как и далее в тексте, под рангом смешанной группы A понимается ранг без кручения, то есть ранг фактор-группы $A/T(A)$.

Лемма 1. Для группы A справедливы следующие утверждения:

1. $A = A_p \bigoplus B_p$ для всякого простого p, причём $pB_p = B_p$.

2. Если A – группа конечного ранга, то S – конечномерная $\boldsymbol{Q}$-алгебра.

Доказательство данной леммы непосредственно вытекает из определения SP-группы.

Теорема 2. Пусть A – самомалая SP-группа конечного ранга. Тогда кольцо R является чистым.

Доказательство. Пусть α – произвольный эндоморфизм группы A. Рассмотрим $\overline{\alpha} \in S$. Так как A – SP-группа конечного ранга, то по лемме 1 S – конечномерная $\boldsymbol{Q}$-алгебра. Поэтому (согласно [6]) S – чистое кольцо и $\overline{\alpha} = \overline{e} + \overline{u}$, где $\overline{e}$ – идемпотентный, а $\overline{u}$ – обратимый элементы кольца S. Это означает, что найдутся такие $r_i \in R_t$ ($i = \overline{1,4}$) и $v \in R$, что

$$\alpha = e + u + r_1,$$
$$e^2 - e = r_2,$$
$$uv = vu + r_3 = 1 + r_4,$$

где $\overline{v}$ – обратный к $\overline{u}$.

Так как A – самомалая SP-группа конечного ранга, то согласно [10] $R_t = \bigoplus_p R_p$. Значит, существует такое конечное подмножество простых чисел π, что $r_i A \subseteq \bigoplus_{p \in \pi} A_p$. В силу того, что A – SP-группа, по лемме 1 получаем, что $A = C \bigoplus B$, где $C = \bigoplus_{p \in \pi} A_p$, а B – p-делимая группа ($p \in \pi$), причём $r_i C \subseteq C$ и $r_i B = 0$ ($i = \overline{1,4}$), поскольку $r_i \in R_t$. Следует также отметить, что C и B – вполне характеристические подгруппы.

Рассмотрим теперь сужение эндоморфизма $\alpha|_B = e|_B + u|_B$. Имеют место следующие равенства:

$$e|_B^{\,2} - e|_B = 0,$$
$$u|_B \; v|_B = v|_B \; u|_B = 1|_B \,.$$

Следовательно, $\alpha|_B$ – чистый элемент кольца $E(B)$.

По условию теоремы группа A – самомалая SP-группа конечного ранга, поэтому, учитывая [10], R_p – конечные кольца, а следовательно, чистые [7]. Тогда и $E(C) = \prod_{p \in \pi} R_p$ – чистое кольцо [5].

Таким образом, мы показали, что $\alpha|_B$ – чистый элемент кольца $E(B)$, а $\alpha|_C$ – чистый элемент кольца $E(C)$. Принимая во внимание тот факт, что $A = C \bigoplus B$ и то, что C и B – вполне характеристические подгруппы группы A, согласно [5] получим, что α – чистый элемент кольца R. ■

Рассмотрим далее некоторые следствия доказанной теоремы.

Лемма 3. Пусть у группы A существует разложение $A = B \bigoplus C$, где C – самомалая SP-группа конечного ранга, а B – периодическая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если B – ограниченная группа, то $E(A)$ – чистое кольцо.

2. Если B содержит в качестве прямого слагаемого бесконечную прямую сумму циклических p-групп, порядки которых не ограничены в совокупности, то $E(A)$ не является чистым кольцом.

Доказательство. 1. Согласно [8], кольцо эндоморфизмов ограниченной периодической группы является чистым. Так как C – самомалая группа конечного ранга, то, как следует из теоремы 2, кольцо эндоморфизмов C также является чистым. Поскольку $A = B \bigoplus C$, то, принимая во внимание [5], получаем, что $E(A)$ – чистое кольцо.

2. Согласно [8], в случае, если p-группа содержит в качестве прямого слагаемого бесконечную прямую сумму циклических групп, чьи порядки не ограничены, то кольцо эндоморфизмов такой группы не является чистым. Тем самым $E(A_p)$ не является чистым кольцом. Поскольку A_p является вполне характери-

стическим прямым слагаемым группы A, то согласно [5], $E(A)$ не является чистым кольцом. ■

Следующая лемма даёт достаточное условие чистоты элемента кольца эндоморфизмов SP-группы.

Лемма 4. Пусть f – эндоморфизм группы A и fA – ограниченная группа. Тогда f – чистый элемент кольца $E(A)$.

Доказательство. Пусть f – эндоморфизм группы A и fA – ограниченная группа. В таком случае найдётся такое конечное множество простых чисел $\Lambda \subset \mathrm{P}$, что $f\,A \subseteq \bigoplus_{p\in\Lambda} A_p$. Обозначим группу $\bigoplus_{p\in\Lambda} A_p$ через C. Тогда, согласно лемме 1, группу A можно представить в виде $A = C \bigoplus D$, где группы C и D являются вполне характеристическими.

Согласно результатам, представленным в [5], $f|_C$ – чистый элемент $E(C)$. При этом $f|_D = 0 = 1 + (-1)$ – также чистый элемент $E(D)$. Тогда, согласно [5], f – чистый элемент кольца $E(A)$. ■

Возникает вопрос, в каких случаях справедлива импликация, обратная сформулированной в теореме 2. Другими словами, при каких условиях свойства чистоты кольца эндоморфизмов и самомалость группы совпадают? Следующий результат даёт частичный ответ на данный вопрос.

Теорема 5. Пусть A – SP-группа конечного ранга, не имеющая бесконечных периодических прямых слагаемых, и $A_p \cong \boldsymbol{Z}_p$ для $\forall p \in P$. Если при этом кольцо R является чистым, то A – самомалая группа.

Доказательство. Предположим противное. В этом случае, согласно [10], найдётся такой эндоморфизм $f \in R_t$, что $f(A_p) \neq 0$ для бесконечного числа простых чисел p, множество которых мы обозначим через Λ.

По условию теоремы f – чистый элемент кольца R, следовательно, найдутся такие обратимый и идемпотентный элементы u и e кольца R, что $f = e + u$, причём, поскольку $A_p \cong \boldsymbol{Z}_p$ для $\forall p \in P$, идемпотент e действует на A_p либо как тождественный, либо как нулевой эндоморфизм (то есть группа A_p допускает только тривиальное разложение). Пользуясь свойствами идемпотента e, можно записать

$$A = Ker\, e \bigoplus Im\, e,$$

причём
$$f|_{Ker\, e} = (u+e)|_{Ker\, e} = u|_{Ker\, e},$$
$$f|_{Im\, e} = (u+e)|_{Im\, e} = (u+1)|_{Im\, e}.$$

Поскольку f совпадает на подгруппе $Ker\, e$ с автоморфизмом u, то

$$Ker\, e \cap Ker\, f = 0$$

и
$$Ker\, e = f(Ker\, e) \subseteq T(A).$$

В таком случае, поскольку $Ker\, e$ – периодическая группа, то по условию теоремы это конечная группа. Значит,

$$Ker\, e = \bigoplus_{p\in\pi} A_p,$$

где $\pi \subset \Lambda$ – конечное подмножество простых чисел. Тогда оставшиеся p-компоненты A_p лежат в $\operatorname{Im} e$ для всякого $p \in \Lambda' = \Lambda \setminus \pi$.

Предположим, что существует ненулевой элемент $a \in A_p$, такой, что $fa = 0$. Поскольку $a \in \operatorname{Im} e$, то

$$fa = (u+1)a = 0,$$

откуда следует, что $ua = -a$. Поскольку $A_p \cong Z_p$, то $uc = -c$, где c – образующий элемент группы A_p. Тогда

$$fc = (u+1)c = -c + c = 0,$$

что противоречит выбору множества Λ. Следовательно,

$$A_p \cap Ker\ f = 0 \tag{1}$$

для всякого $p \in \Lambda'$. С другой стороны,

$$f(A) \subseteq T(A), \tag{2}$$

откуда следует, что $A \bigcap \prod_{p \in \Lambda'} A_p$ не содержит бесконечных векторов из A, иначе мы получили бы противоречие с (1) или (2). Таким образом,

$$A \bigcap \prod_{p \in \Lambda'} A_p = \bigoplus_{p \in \Lambda'} A_p,$$

причем справедливо равенство

$$A = (A \bigcap \prod_{p \in \Lambda'} A_p) \oplus (A \bigcap \prod_{p \in \mathrm{P} \setminus \Lambda'} A_p).$$

Действительно, обозначим $A \bigcap \prod_{p \in \Lambda'} A_p$ через B, а $A \bigcap \prod_{p \in \mathrm{P} \setminus \Lambda'} A_p$ через C. Ясно, что $B \cap C = 0$. Покажем, что $A = B + C$. Пусть $a \in A$ и предположим, что a – конечный вектор. Тогда справедливо

$$a \in \bigoplus_{p \in \mathrm{P}} A_p \subseteq (\bigoplus_{p \in \Lambda'} A_p) \oplus (\bigoplus_{p \in \mathrm{P} \setminus \Lambda'} A_p) \subseteq B \oplus C.$$

Рассмотрим теперь случай, когда a – бесконечный вектор. В таком случае, только на конечном числе позиций, соответствующих $p \in \Lambda'$, вектор a отличается от нуля. Следовательно, существует такой вектор $a' \in \bigoplus_{p \in \Lambda'} A_p$, что вектор $a'' = a - a'$ на всех позициях, соответствующих $p \in \Lambda'$, равен нулю – значит, принадлежит $A \bigcap \prod_{p \in \mathrm{P} \setminus \Lambda'} A_p$. Получаем, что $a = a' + a'' \in B + C$.

Таким образом, в A нашлось бесконечное периодическое прямое слагаемое, что противоречит условиям теоремы. ■

2. *SP*-группы ранга 1

Пусть $\tilde{a}$ – бесконечный вектор из $\prod_{p \in \mathrm{P}} A_p$, где $A_p = \boldsymbol{Z}_{p^{k_p}}$, $k_p \in N$, P – некоторое бесконечное множество простых чисел. При этом $\pi_p\, \tilde{a} \neq 0$ для бесконечного множества чисел $p \in \Lambda$, где Λ – бесконечное подмножество P, например равное самому P.

Пусть для группы A выполнено условие:

$$A/\bigoplus_{p\in \mathrm{P}} A_p \cong W, \tag{3}$$

где W – одномерное подпространство $\boldsymbol{Q}$-пространства $\prod_{p\in\mathrm{P}} A_p / \bigoplus_{p\in\mathrm{P}} A_p$, порожденное вектором $\tilde{a}+\bigoplus_{p\in\mathrm{P}} A_p$.

Легко показать, что группа A является SP-группой. Кроме того, из условия (3) и одномерности подпространства W следует, что ранг группы A равен 1. Ясно, что в свою очередь любая SP-группа A ранга 1 удовлетворяет условию (3), поэтому в дальнейшем изложении будем пользоваться представлением группы A, описанным выше. В данном разделе через A будем обозначать некоторую SP-группу ранга 1.

Дополнительно будем полагать, что Λ и P различаются лишь на конечном множестве элементов. Другими словами, почти все проекции вектора $\tilde{a}$ ненулевые. Из данного условия вытекает также, что группа A не содержит бесконечных периодических прямых слагаемых.

Теорема 6. Для любого эндоморфизма f группы A найдётся такое конечное множество $\Omega\subset P,$ что справедливо одно из условий:

- f – автоморфизм группы C (если $f\notin R_t$),
- $1-f$ – автоморфизм группы C (если $f\in R_t$),

где $A=\left(\oplus_{p\in\Omega} A_p\right)\oplus C,$ C – дополнительное прямое слагаемое к $\oplus_{p\in\Omega} A_p$.

Доказательство. Пусть f – эндоморфизм группы A. Рассмотрим действие f на каждой p-компоненте группы A:

$$\pi_p f c_p = n_p c_p, \tag{4}$$

где $0\le n_p < p^{k_p}$, а c_p – образующие групп A_p.

Рассмотрим случай, когда $f\in R_t$. Имеем $fa\in T(A)$ для любого элемента $a\in A,$ в частности для $a=\tilde{a}.$ Это означает, что почти для всех $p\in P$ справедливы равенства

$$\pi_p fa = f\pi_p\tilde{a}=0.$$

Рассмотрим проекции вектора a :

$$\pi_p\tilde{a}=\beta_p p^{k_p-s_p} c_p, \tag{5}$$

где $(\beta_p, p)=1$, а $0<s_p\le k_p$. В таком случае справедливы равенства

$$0=f(\beta_p p^{k_p-s_p} c_p)=\beta_p p^{k_p-s_p} f(c_p)=\beta_p p^{k_p-s_p} n_p c_p.$$

Поэтому $\beta_p n_p \,\vdots\, p^{s_p}$, следовательно, $n_p \,\vdots\, p^{s_p}$ и $n_p=\alpha_p p^{s_p}$.

Рассмотрим эндоморфизм $u=f-1$. Покажем, что u – автоморфизм группы $C,$ где $C=A\bigcap\prod_{p\in\mathrm{P}\setminus\Omega} A_p$ – прямое слагаемое группы A (Ω – конечное подмножество множества P). Рассмотрим равенства для p-компонент:

$$uc_p = (\alpha_p p^{s_p} - 1)c_p.$$

Данное равенство справедливо почти для всех $p \in P$. Обозначим множество простых чисел, для которых данное равенство не выполняется, через Ω. Для начала убедимся, что u – мономорфизм группы C.

Поскольку $(\alpha_p p^{s_p} - 1, p) = 1$ для всякого $p \in P \setminus \Omega$, то $u|_{A_p}$ – автоморфизм группы A_p. Следовательно, u – мономорфизм группы C.

Покажем теперь, что u – эпиморфизм группы C. Пусть $a \in C$. Если $a \in T(C)$, то существует элемент $u^{-1}a \in T(C)$, поскольку $u|_{A_p}$ – автоморфизм группы A_p для всякого $p \in P \setminus \Omega$.

Рассмотрим случай, когда $a \notin T(C)$, то есть a – элемент бесконечного порядка. Покажем, что $u^{-1}a \in C$. В этом случае найдутся $a_t \in T(C)$, а также $m, n \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}$, такие, что $ma = n\tilde{a}_C + a_t$, где $\tilde{a}_C$ – проекция вектора $\tilde{a}$ на прямое слагаемое C.

При этом

$$u\pi_p \tilde{a}_C = (\alpha_p p^{s_p} - 1)\beta_p p^{k_p - s_p} c_p = -1\beta_p p^{k_p - s_p} c_p = -\pi_p \tilde{a}_C$$

для всякого $p \in P \setminus \Omega$. Тогда справедливы равенства

$$mu^{-1}(a) = nu^{-1}(\tilde{a}) + u^{-1}(a_t) = -n\tilde{a} + u^{-1}(a_t).$$

Согласно условию (3), $u^{-1}(a) \in C$. Следовательно, u – автоморфизм группы C.

Рассмотрим случай, когда $f \notin T(A)$. Тогда $f\tilde{a}$ – бесконечный вектор, а значит, найдутся $a_t \in T(A)$, а также $m, n \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}$, такие, что $mf\tilde{a} = n\tilde{a} + a_t$. Тогда почти для всех $p \in P$ справедливо равенство

$$\pi_p mfa = nf\pi_p \tilde{a}.$$

Подставим в последнее равенство выражения для $\tilde{a}$ и f согласно (4) и (5):

$$mn_p \beta_p p^{k_p - s_p} c_p = n\beta_p p^{k_p - s_p} c_p.$$

Получим $\beta_p p^{k_p - s_p}(mn_p - n)c_p = 0$ почти для всех $p \in P$. Отсюда следует, что

$$(mn_p - n) \vdots p^{s_p}. \tag{6}$$

Поскольку разложениям m и n в произведения степеней простых чисел соответствуют конечные наборы простых чисел, то $(m, p) = 1$ и $(n, p) = 1$ почти для всех $p \in P$. Обозначим множество простых чисел, для которых данные равенства не выполняются, через Ω'. Тогда для любого $p \in P \setminus \Omega'$ справедливы равенства

$$(n_p, p) = 1.$$

Действительно, в противном случае, согласно (6), $n \vdots p$.

Рассмотрим эндоморфизм $u = f$. Доказательство того, что u – мономорфизм группы C, где $C = A\bigcap\prod_{p\in P\setminus\Omega} A_p$, в точности повторяет рассуждения, приведённые выше для случая, когда $fA \subseteq T(A)$.

Покажем теперь, что u – эпиморфизм группы C. Пусть $a \in C$. Если $a \in T(C)$, то существует $u^{-1}a \in T(C)$, поскольку $u|_{A_p}$ – автоморфизм группы A_p для всякого $p \in P\setminus\Omega'$.

Рассмотрим случай, когда $a \notin T(C)$, то есть a – элемент бесконечного порядка. Покажем, что $u^{-1}a \in C$. В этом случае найдутся $a_t' \in T(C)$, а также $m', n' \in \boldsymbol{Z}\setminus\{0\}$, такие, что $m'a = n'\tilde{a}_C + a_t'$, где $\tilde{a}_C$ – проекция вектора $\tilde{a}$ на прямое слагаемое C. При этом

$$mu\tilde{a}_C = mf\tilde{a}_C = n\tilde{a}_C.$$

В силу выбора множества Ω' в группе C существует элемент c, такой, что $nc = \tilde{a}_C$. Поэтому

$$nu(mc) = mu(nc) = n\tilde{a}_C.$$

Следовательно, $n(u(mc) - \tilde{a}_C) = 0$, а значит, $u(mc) - \tilde{a}_C \in \oplus_{p\in\Omega} A_p$. Поскольку $c, \tilde{a}_C \in C$, то $u(mc) - \tilde{a}_C = 0$.

Тогда справедливы равенства

$$nm'u^{-1}(\tilde{a}_C) = nn'u^{-1}(\tilde{a}_C) + u^{-1}(ma_t) = n'\tilde{a}_C + u^{-1}(a_t).$$

Согласно условию (3), $u^{-1}(a) \in C$. Поэтому u – автоморфизм группы C. ■

Пусть группа A такая, как в теореме 6. Тогда справедлив следующий результат.

Следствие 7. Кольцо эндоморфизмов группы A является чистым.

Доказательство. Поскольку условия теоремы 6 выполнены, то для произвольного эндоморфизма f группы A имеет место разложение

$$A = B \oplus C,$$

где

$$B = \prod_{p\in\Omega} A_p, \text{ а } C = A \cap \prod_{p\in P\setminus\Omega} A_p.$$

Причем на C либо f, либо $1-f$ является автоморфизмом. В таком случае $f|_C$ является чистым элементом $E(C)$. Поскольку B – конечная группа, тогда кольцо $E(B)$ – чистое (см. [8]).

Таким образом, мы показали, что $f|_B$ – чистый элемент кольца $E(B)$ и $f|_C$ – чистый элемент кольца $E(C)$. Принимая во внимание тот факт, что $A = C \oplus B$, и то, что C и B – вполне характеристические подгруппы группы A, получим, что f – чистый элемент кольца $E(A)$. ■

Напомним определение идеала Пирса p-группы A:

$$H(A) = \{\alpha \in E(A) \mid x \in A[p], h(x) < \infty \Rightarrow h(x) < h(\alpha x)\}.$$

Для SP-группы имеется определение аналога идеала Пирса, предложенное П.А. Крыловым в [11]. Если A – SP-группа, то

$$H(A) = \{\alpha \in E(A) \mid \alpha|_{A[p]} \in H(A_p) \text{ для каждого } p \in P\}.$$

Пусть группа A такая, как в теореме 7. Тогда справедлив следующий результат.

Теорема 8. $J(E(A)) = H(A).$

Доказательство. П.А. Крылов доказал [11], что $J(E(A)) \subseteq H(A).$ Поэтому для завершения доказательства необходимо убедиться в справедливости обратного включения $H(A) \subseteq J(E(A)).$ Последнее условие равносильно следующему: для любого эндоморфизма $\alpha \in H(A)$ следует, что $1-\alpha$ – автоморфизм группы A.

Покажем, что $\alpha A \subseteq T(A).$ Действительно, предположим противное. Тогда, согласно теореме 2, α является автоморфизмом на прямом слагаемом группы A, содержащем почти все p-компоненты, что невозможно, поскольку $\alpha \in H(A).$

Итак, $\alpha A \subseteq T(A).$ Тогда по теореме 6 $1-\alpha$ является автоморфизмом на прямом слагаемом группы A, содержащем почти все p-компоненты.

Рассмотрим конечную прямую сумму оставшихся p-компонент. Отметим, что в силу определения $H(A)$ для SP-группы сужение α на каждую из указанных p-компонент будет принадлежать идеалу Пирса этой p-компоненты, а значит, и её радикалу Джекобсона, поскольку это ограниченная группа. Следовательно, для данных p-компонент $1-\alpha$ также является автоморфизмом. ■

3. *SP*-группы конечного ранга

Рассмотрим теперь случай, когда группа A удовлетворяет условию

$$A/\bigoplus_{p\in \mathrm{P}} A_p \cong W, \tag{3}$$

где W – конечномерное подпространство $\boldsymbol{Q}$-пространства $\prod_{p\in \mathrm{P}} A_p/\bigoplus_{p\in \mathrm{P}} A_p$, порожденное конечным множеством линейно независимых векторов $\tilde{a}_i + \bigoplus_{p\in \mathrm{P}} A_p$, $i = \overline{1,n}$.

Считаем, что $\tilde{a}_i$ – бесконечные векторы из $\prod_{p\in \mathrm{P}} A_p$, где $A_p = \boldsymbol{Z}_{p^{k_p}}$, $k_p \in N$, P – некоторое бесконечное множество простых чисел. При этом $\pi_p \tilde{a}_i \neq 0$ для бесконечного множества чисел $p \in \Lambda_i$, где Λ_i – бесконечные подмножества P.

Используя рассуждения, аналогичные изложенным в доказательстве предложения 1, легко показать, что A – SP-группа конечного ранга.

Ясно, что в свою очередь любая SP-группа A конечного ранга удовлетворяет условию (3), поэтому в дальнейшем изложении будем пользоваться представлением группы A, описанным выше.

Здесь и далее через A будем обозначать SP-группу конечного ранга. Кроме того, будем полагать, что $\bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i$ и Р различаются лишь на конечном множестве элементов. Другими словами, почти все проекции векторов $\tilde{a}_i$ ненулевые. Из данного условия, аналогично предыдущему случаю, вытекает также, что группа A не содержит бесконечных периодических прямых слагаемых.

Теорема 9. Для любого эндоморфизма $f \in R_t$ группы A найдётся такое конечное множество $\Omega \subset P$, что $1-f$ – автоморфизм группы C, где $A = (\oplus_{p\in\Omega} A_p) \oplus C$, C – дополнительное прямое слагаемое к $\oplus_{p\in\Omega} A_p$.

Доказательство. Пусть f – эндоморфизм группы A. Рассмотрим действие f на каждой p-компоненте группы A:

$$\pi_p f c_p = n_p c_p, \tag{7}$$

где $0 \le n_p < p^{k_p}$, а c_p – образующие групп A_p.

Пусть $fA \subseteq T(A)$, тогда $f\tilde{a}_i \in T(A)$ для любого $i = \overline{1,n}$. Это означает, что почти для всех $p \in \Lambda_i$ справедливы равенства

$$\pi_p f\tilde{a}_i = f\pi_p \tilde{a}_i = 0.$$

Рассмотрим проекции векторов $\tilde{a}_i$:

$$\pi_p \tilde{a}_i = \beta_p^i p^{k_p - s_p^i} c_p, \tag{8}$$

где $(\beta_p^i, p) = 1$, а $0 < s_p^i \le k_p$.

С учётом равенств (8) можно записать почти для всех $p \in P$ следующие равенства:

$$0 = f(\beta_p^i p^{k_p - s_p^i} c_p) = \beta_p^i p^{k_p - s_p^i} f(c_p) = \beta_p^i p^{k_p - s_p^i} n_p c_p.$$

Поэтому $\beta_p^i n_p \vdots p^{s_p^i}$, следовательно, $n_p \vdots p^{s_p^i}$ для всех $i = 1,\ldots,n$ и $n_p = \alpha_p^i p^{s_p^i}$, где $p^{s_p^i}$ соответствует максимальному из n значений.

Рассмотрим эндоморфизм $u = f - 1$. Покажем, что u – автоморфизм группы C, где $C = A \bigcap \prod_{p\in \mathrm{P}\setminus\Omega} A_p$ – прямое слагаемое группы A (Ω – конечное подмножество множества P). Запишем равенства для p-компонент:

$$uc_p = (\alpha_p^i p^{s_p^i} - 1)c_p.$$

Данное равенство справедливо почти для всех $p \in P$. Обозначим множество простых чисел, для которых данное равенство не выполняется, через Ω. Для начала убедимся, что u – мономорфизм группы C.

Поскольку $(\alpha_p^i p^{s_p^i} - 1, p) = 1$ для всякого $p \in P \setminus \Omega$, то $u|_{A_p}$ – автоморфизм группы A_p. Следовательно, u – мономорфизм группы C.

Покажем теперь, что u – эпиморфизм группы C. Пусть $a \in C$. Если $a \in T(C)$, то существует $u^{-1}a \in T(C)$, поскольку $u|_{A_p}$ – автоморфизм группы A_p для всякого $p \in P \setminus \Omega$.

Рассмотрим случай, когда $a \notin T(C)$, то есть a – элемент бесконечного порядка. Покажем, что $u^{-1}a \in C$. В этом случае найдутся $a_t \in T(C)$, а также $m, m_i \in \boldsymbol{Z}$

(при этом $m_i \neq 0$ хотя бы для одного i и $m \neq 0$), такие, что

$$ma = \sum_{i=1}^{n} m_i \tilde{a}_C^i + a_t ,$$

где $\tilde{a}_C^i$ – проекция вектора $\tilde{a}_i$ на прямое слагаемое C.

При этом

$$u\pi_p \tilde{a}_C^i = (\alpha_p^i p^{s_p^i} - 1)\beta_p^i p^{k_p - s_p^i} c_p = -1\beta_p p^{k_p - s_p^i} c_p = -\pi_p \tilde{a}_C^i$$

для всякого $p \in P \setminus \Omega$.

Справедливы также равенства

$$mu^{-1}(a) = \sum_{i=1}^{n} m_i u^{-1}(\tilde{a}) + u^{-1}(a_t) = -\sum_{i=1}^{n} m_i \tilde{a}_i + u^{-1}(a_t).$$

Согласно условию (3), $u^{-1}(a) \in C$. Следовательно, u – автоморфизм группы C. ■

Пусть группа A обладает свойствами, перечисленными в теореме 9. Тогда справедлив следующий результат.

Следствие 10. Любой эндоморфизм $f \in R_t$ группы A является чистым.

Доказательство. Доказательство данного утверждения в точности повторяет доказательство, изложенное в следствии 7, если ввести обозначение $\bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i = \Lambda$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nicholson W.K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. No. 229. P. 269–278.
2. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48. № 4 С. 520–539.
3. *Handelman D.* Perspectivity and cancellation in regular rings // J. Algebra. 1977. No. 48. P. 1–16.
4. *Camillo V.P., Khurana D.* A characterization of unit-regular rings // Commun. Algebra. 2001. V. 29. No. 6. P. 2293–2295.
5. *Han J., Nicholson W.K.* Extension of clean rings // Commun. Algebra. 2001. V. 29. No. 6. P. 2589–2595.
6. *Nicholson W.K., Varadarajan K., Zhou Y.* Clean endomorphism rings // Arch. Math. 2004. No. 83. P. 340–343.
7. *Camillo V.P., Khurana D., Lam T.Y., Nicholson W.K., Zhou Y.* Continuous modules are clean // J. Algebra. 2006. No. 304. P. 94–111.
8. *Goldsmith B., Vámos P.* A note on clean abelian groups // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. 2007. No. 117. P. 181–191.
9. *Сорокин К.С.* Вполне разложимые абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Т. 17. № 8. С. 105–108.
10. *Крылов П.А.* Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. 2000. Т. 269. С. 29–34.
11. *Крылов П.А.* Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы // Алгебра и логика. 2004. Т. 43. № 1. С. 60–76.
12. *Крылов П.А.* Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 17–27.
13. *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов М.: Факториал Пресс, 2006.

Статья поступила 26.03.2014 г.

Sorokin K.S. SP-GROUPS WITH CLEAN ENDOMORPHISM RINGS

The notion of a clean ring was introduced by W.K. Nicholson in 1977 as an example of a ring with idempotents, that can be lifted modulo any left (right) ideal [1]. The class of clean rings is a proper subclass of the class of exchange rings [1, 2].

In the case when R is an endomorphism ring of some module, new descriptions of the cleanness property appear. They can be useful for the study of conditions for cleanness of a ring R. This subject recently attracted attention of many specialists [5, 6].

In this work, some aspects of cleanness of endomorphism rings of *SP*-groups are considered. These groups are one of classes of mixed Abelian groups [7, 8]. The cleanness of endomorphism rings of self-small *SP*-groups is proved. Some sufficient conditions are found for the converse proposition to hold. The structure of endomorphism rings of rank one *SP*-groups with cyclic p-groups is described and their cleanness is proved, the description of Jacobson radical of endomorphism rings of such groups is found. Some sufficient conditions of cleanness for endomorphisms of finite rank SP-groups with cyclic p-groups are obtained.

Keywords: mixed Abelian group, *SP*-group, clean ring, endomorphism ring.

SOROKIN Konstantin Sergeevich (M. Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: Sorokin_k@list.ru

REFERENCES

1. Nicholson W.K. Lifting idempotents and exchange rings (1977) *Trans. Amer. Math. Soc.*, no. 229, pp. 269–278.
2. Chekhlov A.R. Ob abelevykh gruppakh s normal'nym kol'tsom endomorfizmov (2009) *Algebra i logika*, v. 48, no. 4, pp. 520–539. (in Russian)
3. Handelman D. Perspectivity and cancellation in regular rings (1977) *J. Algebra*, no. 48, pp. 1–16.
4. Camillo V.P., Khurana D.A characterization of unit–regular rings (2001) *Commun. Algebra*, v. 29, no. 6, pp. 2293–2295.
5. Han J., Nicholson W.K. Extension of clean rings (2001) *Commun. Algebra*, v. 29, no. 6, pp. 2589–2595.
6. Nicholson W.K., Varadarajan K., Zhou Y. Clean endomorphism rings (2004) *Arch. Math.*, no. 83, pp. 340–343.
7. Camillo V.P., Khurana D., Lam T.Y., Nicholson W.K., Zhou Y. Continuous modules are clean (2006) *J. Algebra*, no. 304, pp. 94–111.
8. Goldsmith B., Vámos P. A note on clean abelian groups (2007) *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, no. 117, pp. 181–191.
9. Sorokin K.S. Vpolne razlozhimye abelevy gruppy s chistymi kol'tsami endomorfizmov (2011/2012) *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, v. 17, no. 8, pp. 105–108. (in Russian)
10. Krylov P.A. Ob odnom klasse smeshannykh abelevykh grupp (2000) *Vestnik TGU*, v. 269, pp. 29–34. (in Russian)
11. Krylov P.A. Radikal Dzhekobsona kol'tsa endomorfizmov abelevoy gruppy (2004) *Algebra i logika*, v. 43, no. 1, pp. 60–76. (in Russian)
12. Krylov P.A. Radikaly kolets endomorfizmov abelevykh grupp (2007) *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, no. 1, pp. 17–27. (in Russian)
13. Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A. *Abelevy gruppy i ikh kol'tsa endomorfizmov*. Moscow: Faktorial Press Publ., 2006. (in Russian)