ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2014 Математика и механика № 4(30)

УДК 515.127

А.В. Титова

ЛИНЕЙНЫЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЧТИ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И СОВПАДЕНИЕ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Рассматривается пространство всех непрерывных функций $C_p(X, G)$, где G – некоторое топологическое пространство. Если множество G наделено структурой почти кольца, то можество $C_p(X, G)$ является топологическим почти модулем. Доказано, что размерность dim топологического пространства X является изоморфным инвариантом его топологического почти модуля $C_p(X, I)$, где $I = [0,1)$ – естественно определенное почти кольцо.

Ключевые слова: *почти кольцо, топологический почти модуль, непрерывный гомоморфизм, пространство непрерывных функций, топология поточечной сходимости.*

Все неопределенные в статье понятия можно найти в [1].

В статье В.Г. Пестова [2] было доказано, что из линейной гомеоморфности пространств непрерывных функций $C_p(X, \boldsymbol{R})$ и $C_p(Y, \boldsymbol{R})$ следует совпадение размерностей $\dim X = \dim Y$, где $\dim X$ обозначает обычную лебегову размерность [1]. В данной статье вместо поля $\boldsymbol{R}$ рассматривается почти кольцо $I = <[0, 1), +, \cdot>$ и вместо топологического векторного пространства $C_p(X, \boldsymbol{R})$ – топологический почти модуль $C_p(X, I)$ и доказывается аналогичный результат о совпадении размерностей.

Под почти кольцом G понимается абелева группа по сложению и полугруппа по умножению $< G, +, \cdot>$, причем существование единицы в G не предполагается (и закон дистрибутивности, вообще говоря, не имеет места). Если G наделено топологией и обе операции в G непрерывны, то G называется топологическим почти кольцом.

Будем называть непустое множество A почти модулем над почти кольцом G, если выполнены следующие условия:

1) $<A, +>$ является абелевой группой;

2) для любых $\alpha, \beta \in K$, $x \in A$, выполнено $(x\alpha)\beta = x(\alpha\beta)$ и $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

Пусть X – вполне регулярное T_1-пространство и G – произвольное топологическое почти кольцо. Рассмотрим пространство всех непрерывных функций $\{f \mid f : X \to G\}$, наделённое топологией поточечной сходимости. введём на этом пространстве две операции: операцию сложения, в которой для любых $g, h \in \{f \mid f : X \to G\}$ положим $(g+h)(x) = g(x) + h(x)$ и внешнюю операцию умножения $(\alpha, g) \to \alpha \cdot g(x)$ на число α из $[0,1)$ соответственно. Получаем топологический почти модуль, который будем обозначать $C_p(X, G)$.

Определение 1. Топологические пространства X и Y называются G-эквивалентными, если топологические почти модули $C_p(X, G)$ и $C_p(Y, G)$ топологически линейно гомеоморфны.

Далее в качестве G будем рассматривать топологическое почти кольцо $I = <[0, 1), +, \cdot>$, где умножение определяется стандартным образом, а сложение – следующим образом: для любых $x, y \in I$ положим

$$x + y = \begin{cases} x + y, \text{ если } x + y < 1; \\ x + y - 1, \text{ если } x + y \geq 1. \end{cases}$$

Далее рассматривается только I-эквивалентность.

Перейдем к изложению нашей модификации упомянутой выше теоремы В.Г. Пестова [2]. Отметим, что теорема Пестова являлась обобщением ряда предшествующих результатов [3–5] и была обобщена на случай равномерных гомеоморфизмов в [6].

Рассмотрим множество линейных непрерывных гомоморфизмов $L_p(X,I) = \{f \mid f : C_p(X,I) \to I\}$, которое наделено топологией поточечной сходимости. Аналогично известной теореме об общем виде функционала на пространстве $C_p(X, \boldsymbol{R})$ [7] сформулируем следующее утверждение.

Лемма 1. Если $f : C_p(X,I) \to I$ – непрерывный гомоморфизм, то $f(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(x_i)$ для всякого $\varphi \in C_p(X,I)$ и для некоторых $x_i \in X, \alpha_i \in I$, $i = 1, 2,\dots, n$.

Доказательство. Возьмем $g \equiv 0 \in C_p(X,I)$. Тогда $f(g) = 0$ (в силу линейности f), и, так как f непрерывно, то существуют $x_1, x_2, \dots, x_n \in X, \varepsilon > 0$, такие, что $f(\mathrm{O}(g, x_1,..., x_n, \varepsilon)) \subseteq [0,\frac{1}{3}) \bigcup (\frac{2}{3},1)$, где $\mathrm{O}(g, x_1,..., x_n, \varepsilon)$ – окрестность функции g в $C_p(X,I)$. Можно считать, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Возьмем теперь $\varphi \in C_p(X,I)$ так, что $\varphi(x_i) = 0, \quad i = 1,..., n.$ Покажем,что тогда $f(\varphi) = 0.$ Ясно, что $f(\varphi) \subseteq [0,\frac{1}{3}) \bigcup (\frac{2}{3},1).$ Если $k \in \mathbb{N}$, то $k\varphi \in O(g, x_1,..., x_n, \varepsilon)$ для любого k, и поэтому $| f(k\varphi) | < \frac{1}{3}$.

Если предположить, что $f(\varphi) \neq 0,$ то для некоторого k: $f(k\varphi) \subset [\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$. Получаем противоречие.

Таким образом, $f(\varphi) = 0$.

Выберем $\varphi_i \in C_p(X,I)$ так, чтобы было $\varphi_i(x_i) = \frac{1}{2}, \varphi_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$, $i = 1,...n,$ и положим $\alpha_i = 2f(\varphi_i).$

Покажем, что для всякой функции $\varphi \in C_p(X,I),$ $f(\varphi) = \alpha_1 \cdot \varphi(x_1) + \dots$ $\dots + \alpha_n \cdot \varphi(x_n).$ Положим $\psi = \frac{1}{2}\varphi - \varphi(x_1)\varphi_1 - \dots - \varphi(x_n)\varphi_n.$ Очевидно, что $\psi \in C_p(X,I)$ и $\psi(x_i) = 0$ при всех $i = 1,...n.$ Действительно,

$$\psi(x_i) = \frac{1}{2}\varphi(x_i) - \varphi(x_1)\varphi_1(x_i) - \dots - \varphi(x_n)\varphi_n(x_i) = \frac{1}{2}\varphi(x_i) - \varphi(x_i)\frac{1}{2} = 0.$$

Тогда $$0 = f(\psi) = \frac{1}{2} f(\varphi) - \varphi(x_1) f(\varphi_1) - \ldots - \varphi(x_n) f(\varphi_n),$$

получаем $f(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} 2\varphi(x_i) f(\varphi_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(x_i)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим следующее множество линейных непрерывных гомоморфизмов:
$$L_p(X, I) = \{f \mid f : C_p(X, I) \to I\}.$$

Это множество является абелевой топологической группой относительно операции сложения над почти кольцом I, то есть топологическим почти модулем. Назовем его сопряженным к $C_p(X, I)$. Ясно, что если $C_p(X, I) \cong C_p(Y, I)$, то $L_p(X, I) \cong L_p(Y, I)$.

Пусть теперь пространства X и Y являются I-эквивалентными. Введем следующее обозначение: $L = L_p(X, I)$ (или $L_p(Y, I)$). Тогда X – максимальная линейно независимая система элементов в L. Отметим, что элементы из $L_p(X, I)$ и $L_p(Y, I)$ будем обозначать как $\hat{x}$ и $\hat{y}$ соответственно. Для элементов из X или Y «крышку» сверху мы будем просто опускать.

Обозначим теперь через
$$B_n(X) = \{\hat{x} \mid \hat{x} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in L, \alpha_i \in I, x_i \in X, i = 1, \ldots, n\}.$$

Заметим, что система ненулевых элементов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ группы L называется линейно независимой, если из равенства $k_1 x_1 + \ldots + k_n x_n = 0$ $(k_i \in I)$ следует, что $k_1 x_1 = \ldots = k_n x_n = 0$. Точнее, это означает, что $k_i = 0$, если порядок элемента $o(x_i) = \infty$, или $o(x_i)$ делит k_i, если порядок $o(x_i)$ элемента x_i конечен.

Далее положим
$$l_X(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : \hat{x} \in B_n(X)\},\ A_n(X) = \{\hat{x} \in L : l_X(\hat{x}) = n\}.$$

Определение 2. Пространство X назовем максимальной топологической системой образующих в L (или кратко максимальной ТСО), если X есть максимальная линейно независимая система элементов в L и для всех $n \in \mathbb{N}$ базу открытых окрестностей каждой точки $\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in A_n(X)$ образуют в $B_n(X)$ множества вида $\sum_{i=1}^{n} A_i U_i$, где $\alpha_i \in A_i$, A_i открыты в $I|\{0\}$, $x_i \in U_i$, U_i открыты в X и $U_i \cap U_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 2. Если X есть максимальная ТСО в L, то каждое $B_n(X)$ замкнуто в L, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $\hat{x} \in L \setminus B_n(X)$, тогда $\hat{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \alpha_i \in I \mid \{0\}, x_i \in X, i = 1,..k, k \neq n\}$. Так как X есть максимальная ТСО, то $O_x = \sum_{i=1}^{k} A_i U_i, k \neq n,$ A_i открыты в $I|\{0\}$, U_i *открыты в* X и $U_i \cap U_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно, $O_x \subset L \setminus B_n(X)$.

Определение 3. Пространства X и Y назовем L^*-эквивалентными, если X и Y вкладываются в некоторый топологический почти модуль L в качестве максимальных топологических систем образующих.

Пусть теперь X и Y вложены в топологический почти модуль L как максимальные ТСО, $n \in \mathbb{N}$, $\delta = (m_1, m_2, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$.

Через L_δ обозначим множество

$$\{\hat{x} \in L : l_X(\hat{x}) = n, \hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \alpha_i \in I \,|\, \{0\}, x_i \in X, l_Y(x_i) = m_i, i = 1,..n.\}$$

Лемма 3. $L = \cup\{L_\delta : n \in \mathbb{N}, \delta \in N^n\}$.

Доказательство. Докажем, что $L \subset \cup\{L_\delta : n \in \mathbb{N}, \delta \in \mathbb{N}^n\}$. Так как X есть максимальная ТСО в L, то для всякого $\hat{x} \in L$ выбираем минимальное разложение $l_X(\hat{x}) = n$, $\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in I \,|\, \{0\}$, $x_i \in X, i = 1,..n$. Так как Y есть ТСО в L, разложим x_i: для каждого x_i существует m_i, такой, что $l_Y(x_i) = m_i$, $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} \beta_j y_j$, $\beta_j \in I \setminus \{0\}$, $y_j \in Y$, $j = 1,..m_i, i = 1,..,n.\}$ Тогда в качестве δ возьмем $(m_1, m_2, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$. Следовательно, $\hat{x} \in L_\delta$ и $\hat{x} \in \cup\{L_\delta : n \in \mathbb{N}, \delta \in \mathbb{N}^n\}$.

Лемма 4. Если X имеет счетную базу, то каждое L_δ имеет тип F_σ в L.

Доказательство. Рассмотрим множества

$$F_1 = \{\hat{x} \in L : l_X(\hat{x}) \le n,\ \hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$
$$\alpha_i \in I \,|\, \{0\},\ x_i \in X,\ l_Y(x_i) = m_i,\ i = 1,..n.\}$$

и

$$F_2 = \{\hat{x} \in L : l_X(\hat{x}) \le n-1,\ \hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$
$$\alpha_i \in I \,|\, \{0\},\ x_i \in X,\ l_Y(x_i) = m_i,\ i = 1,..n-1\}.$$

Рассмотрим их разность

$$F_1 \setminus F_2 = \{\hat{x} \in L : l_X(\hat{x}) = n, \hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$
$$\alpha_i \in I \,|\, \{0\},\ x_i \in X,\ l_Y(x_i) = m_i,\ i = 1,..n.\} = L_\delta.$$

Тогда, учитывая, что X имеет счетную базу и что F_1, F_2 замкнуты в L, имеем

$$L_\delta = F_1 \setminus F_2 = F_1 \cap (X \setminus F_2) = F_1 \cap (\cup_{n=1}^{\infty} M_n) = \cup_{n=1}^{\infty} (F_1 \cap M_n) \in F_\sigma,$$

где $X \setminus F_2 = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$, M_n замкнуто в $X \setminus F_2$.

Предложение 1. Пусть топологические пространства X и Y являются L^*-эквивалентными. Тогда Y является объединением счетного множества своих подпространств $Y_\delta, \delta \in A$, причем для каждого $\delta \in A$ и $y \in Y_\delta$ существует открытая в Y_δ окрестность O точки y, являющаяся объединением конечного семейства своих замкнутых подмножеств, каждое из которых гомеоморфно некоторому подпространству X. Если X имеет счетную базу, то каждое $Y_\delta, \delta \in A$, есть множество типа F_σ в Y.

Доказательство. Вложим X и Y в топологический почти модуль L в качестве максимальной ТСО. Положим $A = \cup\{\mathbb{N}^n : n \in \mathbb{N}\}$ и $Y_\delta = Y \cap L_\delta, \delta \in A$. Пусть $\hat{y} \in Y_\delta$, $\hat{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in I \,|\, \{0\}$, $x_i \in X$, $x_i \ne x_j$ при $i \ne j$.

Фиксируем дизъюнктное семейство U_1, $U_{2, \, ...,}$ U_n, открытых в X окрестностей соответственно точек x_1, x_2, ..., x_n. Множество $U = \sum_{i=1}^{n} I \,|\, \{0\} U_i$ – окрестность $\hat{y}$

в $A_n(X)$. Каждый элемент $y' \in U$ имеет единственное представление вида $y' = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i y'_i,\ \alpha'_i \in I \mid \{0\},\ y'_i \in U_i$; определим для $i = 1,2,\ \ldots,\ n$ отображения $\pi_i : U \to U_i$, положив $\pi_i(y') = y'_i$. По определению непрерывности π_i непрерывно.

Пусть при $1 \le i \le n$ $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} \beta_{ij} y_{ij},\ \beta_{ij} \in I \mid \{0\},\ y_{ij} \in Y,\ j = 1,..m_i,\ i = 1,..,n.$

Для каждого $i = 1,2,\ \ldots,\ n$ фиксируем открытые, попарно не пересекающиеся множества V_{ij}, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m_i$, в Y и такие, что $y_{ij} \in V_{ij}$, и, если обозначить $V_i = \sum_{j=1}^{m_i} I \mid \{0\} \cdot V_{ij}$, то $x_i \in X \cap V_i \subset U_i$.

Определим естественные непрерывные отображения $\omega_{ij} : V_i \to V_{ij}$ аналогично отображениям π_i. Пусть при $1 \le i \le n$ W_i открыто в X, $W_i \subset U_i$ и $W_i \cap A_{m_i}(Y) = V_i \cap U_i$.

Положим $O = Y_\delta \cap \sum_{i=1}^{n} I \mid \{0\} W_i$, где $\sum_{i=1}^{n} I \mid \{0\} W_i$ открыто, тогда O открыто в Y_δ и непусто: $O \ni \hat{y}$.

Пусть $y' \in O,\ y' = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i x'_i,\ x'_i \in X$ и для каждого i: $x'_i = \sum_{j=1}^{m_i} \beta'_{ij} y'_{ij},\ y'_{ij} \in Y$, тогда

$$y' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha'_i \beta'_{ij} y'_{ij} = y'_{ij}$$

для некоторых i, j.

Итак, $\forall y' \in O\ \exists i, j : \omega_{ij}(\pi_i |_O (y')) = \omega_{ij}(y'_i) = y'_{ij} = y'$, обозначим через A_{ij} – множество всех неподвижных точек отображения $\omega_{ij} \circ \pi_i |_O$. В силу произвольности выбора y' имеем $O = \cup_{i,j} A_{ij}$. Каждое A_{ij}, замкнутое в O как множество неподвижных точек, а отображение π_i на A_{ij} есть гомеоморфизм (так как композиция $\omega_{ij} \circ \pi_i |_O$ есть гомеоморфизм.)

Из леммы 4 следует, что каждое $Y_\delta,\ \delta \in A,$ есть множество типа F_σ в Y.

Теорема 1. Пусть X и Y – пространства со счетной базой являются L^*-эквивалентными.

Тогда $\dim X = \dim Y$.

Доказательство. Следует из предложения 1 и теоремы суммы для размерности dim, учитывая, что для пространств со счетной базой размерность наследственна [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
2. *Пестов В.Г.* Совпадение размерностей dim l-эквивалентных топологических пространств // ДАН СССР. 1982. Т. 266. № 3. С. 553–556.
3. *Павловский Д.С.* О пространствах непрерывных функций // ДАН СССР. 1980. Т. 253. № 1. С. 38–41.
4. *Архангельский А.В.* Принцип τ-аппроксимации и признак равенства размерности бикомпактов // ДАН СССР. 1980. Т. 252. № 4. С. 777–780.

5. *Замбахидзе Л.Г.* О соотношениях между размерностями и кардинальнозначными функциями пространств, погружаемых в пространства специального вида // Сообщ. АН ГСССР. 1980. Т. 100. № 3. С. 557–560.
6. *Гулько С.П.* О равномерных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций // Труды Математического института РАН. 1992. Т. 193. С. 82–88.
7. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 25.

Статья поступила 15.05.2014 г.

Titova A.V. LINEAR HOMEOMORPHISMS OF TOPOLOGICAL ALMOST MODULES OF CONTINUOUS FUNCTIONS AND COINCIDENCE OF DIMENSION

In this paper, the space of continuous functions $C_p(X, G)$, where G is a topological space, is considered. If the set G is endowed with an almost ring structure, the set $C_p(X, G)$ is a topological almost module. It is proved that the dimension *dim* of the topological space X is an isomorphic invariant of its topological almost module $C_p(X, I)$, where $I = [0, 1)$ is a naturally defined almost ring.

This statement is based on ideas of G.G. Pestov's work «The coincidence of dimension *dim* of *l*-equivalent topological spaces», where the following theorem was formulated: if $C_p(X, \boldsymbol{R})$ and $C_p(Y, \boldsymbol{R})$ are linearly homeomorphic spaces, then $dim\ X = dim\ Y$. Here, X and Y are arbitrary totally regular spaces, and $C_p(X, \boldsymbol{R})$ is the space of all continuous real functions on X with the pointwise convergence topology. Note that Pestov's theorem was generalized to the case of uniform homeomorphisms by S. P. Gul'ko.

Keywords: almost ring, topological almost module, continuous homomorphism, space of continuous functions, pointwise convergence topology.

A.V. Titova (M. Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: asya_mis@mail.ru

REFERENCES

1. Engel'king R. *Obshchaya topologiya.* Moscow, Mir Publ., 1986. (in Russian)
2. Pestov V.G. Sovpadenie razmernostey dim l-ekvivalentnykh topologicheskikh prostranstv (1982) *DAN SSSR*, v. 266, no. 3, pp. 553 – 556. (in Russian)
3. Pavlovskiy D.S. O prostranstvakh nepreryvnykh funktsiy (1980) *DAN SSSR*, v. 253, no. 1, pp. 38–41. (in Russian)
4. Arkhangel'skiy A.V. Printsip τ-approksimatsii i priznak ravenstva razmernosti bikompaktov (1980) *DAN SSSR*, v. 252, no. 4, pp. 777–780. (in Russian)
5. *Zambakhidze L.G.* O sootnosheniyakh mezhdu razmernostyami i kardinal'noznachnymi funktsiyami prostranstv, pogruzhaemykh v prostranstva spetsial'nogo vida (1980) *Soobshch. AN GSSSR*, v. 100, no. 3, pp. 557–560. (in Russian)
6. *Gul'ko S.P.* O ravnomernykh gomeomorfizmakh prostranstv nepreryvnykh funktsiy (1992) *Trudy Matematicheskogo instituta RAN*, v. 193, pp. 82–88. (in Russian)
7. Arkhangel'skiy A.V. *Topologicheskie prostranstva funktsiy*. Moscow, MGU Publ., 1989, p. 25. (in Russian)