

УДК 512.541

Д.С. Чистяков

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С UA-КОЛЬЦОМ ЭНДОМОРФИЗМОВ И ИХ ОДНОРОДНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ¹

Мультипликативные свойства колец играют важную роль в структурной теории колец. Под мультипликативными свойствами понимаются свойства мультипликативной полугруппы кольца. Прежде всего это касается свойств элементов, идеалов и самих колец. Следующий вопрос вызывает особый интерес: когда каждый мультипликативный изоморфизм полугрупп является изоморфизмом колец? Кольца, обладающие данным свойством, называют кольцами с однозначным сложением. В работе изучаются абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов, решаются близкие вопросы.

Ключевые слова: кольцо с однозначным сложением, однородное отображение.

Идея данной работы возникла на основе статьи [1]. Заключается она в следующем: исследовать UA-свойства абелевых групп и их колец эндоморфизмов, используя данные о почтикольце однородных отображений [2–5]. Таким образом, мы обобщаем понятие «обобщенной эндопримальности» абелевой группы, введенное и исследованное У. Альбрехтом, С. Бреазом, У. Уиклессом [1]. В то же время мы по-новому определяем эндоморфные модули [2]. Это позволяет рассматривать обобщенно эндопримальные абелевы группы и эндоморфные модули с единых позиций. Вначале сформулируем необходимые для дальнейшего изложения определения.

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, A и B – левые унитарные модули над кольцом R . Введем обозначение $M_R(A, B) = \{f: A \rightarrow B \mid f(ra) = rf(a), r \in R, a \in A\}$. Элементы множества $M_R(A, B)$ называются однородными отображениями. Множество

$$M_R(A) = \{f: A \rightarrow A \mid f(ra) = rf(a), r \in R, a \in A\}$$

образует почтикольцо относительно операций сложения и композиции отображений. Всегда имеет место включение $\text{End}_R(A) \subseteq M_R(A)$.

Определение 1. Пусть n – натуральное число. R -модуль A называется n -эндоморфным, если

$$M_R(A^n) = \text{End}_R(A^n).$$

Определение 2. R -модуль A называется эндоморфным, если он n -эндоморфен для всех $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, обобщенно эндопримальная абелева группа [1, определение 3] – это абелева группа, которая является эндоморфным модулем над своим кольцом эндоморфизмов. Исследованию абелевых групп как 1-эндоморфных модулей над своим кольцом эндоморфизмов посвящены работы [3–5].

¹ Работа выполнена при поддержке совместной программы «Михаил Ломоносов III» Министерства образования и науки Российской Федерации и DAAD: научно-исследовательские стипендии и научные стажировки (Michail Lomonosov III – Forschungsstipendien und Aufenthalte).

Лемма 3. Следующие условия эквивалентны:

- 1) A – n -эндоморфный R -модуль;
- 2) каждое отображение $f \in M_R(A^n, A)$ аддитивно;
- 3) каждое отображение $f \in M_R(A^n, A)$ может быть представлено в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n, \text{ где } u_1, \dots, u_n \in \text{End}_R(A).$$

Доказательство. Полагаем $B = \bigoplus_{i=1}^n A_i$, $A_i \cong A$, $e_i: B \rightarrow A$ – соответствующие проекции. Z -модульный изоморфизм

$$\Phi: M_R(B) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_R(B, A_i), f \rightarrow (e_1 f, \dots, e_n f)$$

дает равносильность первых двух условий леммы.

3) $\Rightarrow$ 2) Для $f(x_1, \dots, x_n) = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n \in M_R(A^n, A)$, где $u_1, \dots, u_n \in \text{End}_R(A)$ и $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n \in A$, имеем

$$\begin{aligned} f(a_1 + a'_1, \dots, a_n + a'_n) &= u_1(a_1 + a'_1) + \dots + u_n(a_n + a'_n) = \\ &= u_1 a_1 + \dots + u_n a_n + u_1 a'_1 + \dots + u_n a'_n = f(a_1, \dots, a_n) + f(a'_1, \dots, a'_n). \end{aligned}$$

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) следует из изоморфизма

$$M_R(A^n, A) = \text{Hom}_R(A^n, A) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}_R(A, A) = \bigoplus_{i=1}^n \text{End}_R(A).$$

Лемма доказана.

Заметим, что конечная прямая сумма копий эндоморфного модуля будет эндоморфным модулем.

Определение 4. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей. Кольцо R называется *кольцом с однозначным сложением* (UA-кольцом), если на его мультипликативной полугруппе $(R, *)$ можно задать единственную бинарную операцию $+$, превращающую ее в кольцо $(R, *, +)$.

Определение 5. Кольцо R называется UA-кольцом, если любой изоморфизм мультипликативных полугрупп колец $\alpha: R \rightarrow S$ является изоморфизмом колец.

Покажем равносильность определений 4 и 5. Если $\alpha: R \rightarrow S$ – мультипликативный, но не аддитивный изоморфизм колец, то новое сложение на полугруппе $(R, *)$ можно определить по правилу

$$x +' y = \alpha^{-1}(\alpha(x) + \alpha(y)).$$

Выполнение аксиом кольца проверяется непосредственно. С другой стороны, предположим, что на мультипликативной полугруппе $(R, *)$ можно определить две различные бинарные операции $+$ и $+'$ так, что тройки $(R, *, +)$ и $(R, *, +')$ образуют кольца. Тогда тождественное отображение $(R, *, +) \rightarrow (R, *, +')$ не является изоморфизмом колец.

Приведем некоторые примеры. Периодическая p -группа, имеющая прямое слагаемое $Z(p^\infty) \oplus Z(p^\infty)$, эндоморфна как модуль над своим кольцом эндоморфизмов [1, следствие 19]. Также p -группа, имеющая неограниченную базисную подгруппу, эндоморфна как модуль над своим кольцом эндоморфизмов [1, лемма 22]. Указанные группы имеют UA-кольцо эндоморфизмов [9]. Абелева группа $A = Z(p^\infty) \oplus B$, где $p^k B = 0$ для некоторого целого числа k , не является эндоморфным модулем над своим кольцом эндоморфизмов [1, лемма 20], ее кольцо эндоморфизмов не обладает свойством однозначности сложения [9].

Определение 6. R -модуль A называется *модулем с однозначным сложением* (UA-модулем), если на множестве A нельзя задать новое сложение, не изменяя действия кольца R на A .

Определение 7. R -модуль A называется UA-модулем, если каждая биекция из $M_R(A, B)$ является изоморфизмом для любого R -модуля B .

Покажем равносильность определений 6 и 7. Если $f: A \rightarrow B$ – R -однородное биективное отображение из R -модуля A в R -модуль B , не сохраняющее сложение, то новое сложение на множестве A можно определить по правилу

$$x + 'y = f^{-1}(f(x) + f(y)).$$

Легко видеть, что для $(A, +')$ выполняются все аксиомы модуля. При этом кольцо R действует на $(A, +)$ и $(A, +')$ одним и тем же образом. С другой стороны, если мы имеем два R -модуля $(A, +)$ и $(A, +')$ с одинаковым действием кольца R и различными операциями $+$ и $+$ ', то тождественное отображение из $(A, +)$ в $(A, +')$ не является изоморфизмом.

Кольцам с однозначным сложением посвящены работы [6 – 9]. Модули с однозначным сложением изучаются в [10 – 12]. В книгах [13] и [14] можно найти факты и понятия, используемые в данной статье.

Предложение 8. Каждый эндоморфный модуль является UA-модулем.

Доказательство. Пусть $(A, +)$ – эндоморфный модуль над кольцом R . Предположим, что существует другая бинарная операция $+$ ', такая, что $(A, +')$ – R -модуль с тем же действием кольца R на A . Рассмотрим отображение $f: A \rightarrow A$, действующее по правилу $f(x, y) = x + 'y$. В силу предположения, $f(x, y) = ux + vy$ для некоторых эндоморфизмов u и v . Заметим, что группы $(A, +)$ и $(A, +')$ имеют один и тот же нейтральный элемент 0 , поскольку кольцо R действует на них одним и тем же образом. Отсюда

$$x = x + '0 = f(x, 0) = ux, \quad x = 0 + 'x = f(0, x) = vx$$

для всех $x \in A$. Таким образом, u и v суть тождественные отображения, сложения $+$ и $+$ ' совпадают. Предложение доказано.

Заметим, что кольцо $Z(2)$ является UA-кольцом, однако векторное пространство $Z(2) \oplus Z(2)$ не является 1-эндоморфным модулем. Отображение $f: Z(2) \oplus Z(2) \rightarrow Z(2) \oplus Z(2)$, действующее по правилу $f(1, 1) = (1, 1)$ и $f(x) = (0, 0)$ во всех остальных случаях, не сохраняет сложение.

Во многих случаях абелевы группы, эндоморфные как модули над своим кольцом эндоморфизмов, имеют UA-кольцо эндоморфизмов.

Предложение 9. Пусть A – периодическая группа, такая, что ее 2-компонента не изоморфна группе $Z(2)$, а 3-компонента не изоморфна группе $Z(3)$. Следующие условия равносильны:

1. A – эндоморфный модуль над кольцом $End(A)$;
2. $End(A)$ – UA-кольцо.

Доказательство следует из результатов работ [1, §3; 9].

Хорошо известен класс $\mathbf{g}$, состоящий из самых смешанных редуцированных абелевых групп, часть без кручения которых является делимой группой конечного ранга.

Предложение 10. Пусть группа A принадлежит классу $\mathbf{g}$ и ее 2-компонента не изоморфна группе $Z(2)$, а 3-компонента не изоморфна группе $Z(3)$. Следующие условия эквивалентны:

1. A – эндоморфный модуль над кольцом $End(A)$;
2. $End(A)$ – UA-кольцо;

3. Если p -компонента $t_p(A)$ группы A отлична от нуля, то она содержит прямое слагаемое $Z(p^k) \oplus Z(p^k)$, где p^k – наибольший из порядков элементов группы $t_p(A)$.

Для доказательства данного факта нам понадобится следующее утверждение [8, лемма 1].

Лемма 11. Предположим, что кольцо K обладает такой системой идемпотентов $F = \{e_i \mid i \in I\}$, что

- 1) для любого $0 \neq k \in K$ найдется идемпотент $e_i \in F$, для которого $ke_i \neq 0$;
- 2) для всякого идемпотента $e_i \in F$ существует ортогональный ему идемпотент $e_j \in F$, такой, что для $x \in K$ из $e_i x e_i K e_j = 0 = e_j K e_i x e_i$ следует, что $e_i x e_i = 0$.

Тогда K – УА-кольцо.

Доказательство предложения 10. Эквивалентность условий 1 и 3 следует из [1, теорема 40].

Пусть $End(A)$ – УА-кольцо. Предположим, что некоторая ненулевая p -компонента $t_p(A)$ не содержит слагаемое $Z(p^k) \oplus Z(p^k)$, где p^k – наибольший из порядков элементов группы $t_p(A)$. В этом случае кольцо $End(t_p(A))$ не является УА-кольцом [9]. Имеет место прямое разложение $A \cong t_p(A) \oplus B$, где B – некоторая p -делимая группа. Откуда

$$End(A) \cong End(t_p(A)) \times End(B).$$

Построим отображение

$$\beta: End(t_p(A)) \times End(B) \rightarrow End(t_p(A)) \times End(B), (r, s) \rightarrow (\alpha(r), s),$$

где $\alpha: End(t_p(A)) \rightarrow End(t_p(A))$ – мультипликативный, но не аддитивный автоморфизм. Легко видеть, что отображение β является мультипликативным автоморфизмом, не сохраняющим сложение. Противоречие.

Пусть выполнено условие 3. Каждая ненулевая p -компонента группы A имеет вид

$$t_p(A) \cong Z(p^k) \oplus Z(p^k) \oplus A'_p$$

для некоторой p -группы A'_p , не содержащей элементы, порядок которых превосходит p^k . Пусть F – множество всех примитивных идемпотентов кольца $End(A)$. Для любого $0 \neq \varphi \in End(A)$ выполнено условие 1) леммы 11. В противном случае эндоморфизм φ аннулирует периодическую часть $t(A)$ группы A и, следовательно, существует ненулевой гомоморфизм $A/t(A) \rightarrow A$, что невозможно, поскольку группа A – редуцированная, а группа $A/t(A)$ – делимая.

Для любого $e \in F$ группа $e(A)$ изоморфна группе $Z(p^k)$ для некоторых p и k . Далее, $A \cong e(A) \oplus A'$. Группа A' содержит прямое слагаемое $e'(A)$, изоморфное $Z(p^m)$, где $m \geq k$ и $e' \in F$. Заметим, что

$$eEnd(A)e' \cong Hom(Z(p^m), Z(p^k)), eEnd(A)e \cong Z(p^k).$$

В силу точности $Z(p^k)$ -модуля $Hom(Z(p^m), Z(p^k))$ условие 2) леммы 11 выполнено, $End(A)$ – УА-кольцо. Предложение доказано.

Пусть A – абелева группа без кручения ранга 1. Согласно [2, теорема 3.5; 8], $End(A)$ -модуль A не является эндоморфным, а кольцо $End(A)$ не обладает свойством однозначности сложения.

Пусть A – сепарабельная абелева группа без кручения. Прямое слагаемое B ранга 1 группы A назовем *полусвязанным*, если в его дополнительном прямом слагаемом найдется прямое слагаемое ранга 1, тип которого сравним с типом B . Группу G назовем *полусвязанной*, если всякое ее прямое слагаемое ранга 1 полусвязанно.

Предложение 12. Пусть A – сепарабельная абелева группа без кручения. Следующие условия эквивалентны:

1. A – эндоморфный модуль над кольцом $End(A)$;
2. $End(A)$ – УА-кольцо;
3. A – полусвязанная группа.

Доказательство следует из результатов работ [1, предложение 29; 8].

Будем говорить, что группа A квазиравна группе B ($A \approx B$), если A квазисодержится в B и B квазисодержится в A (т.е. если $nA \subseteq B$, $mB \subseteq A$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$). Квазиравенство $A \approx \bigoplus_{i \in I} A_i$, где I – конечное множество, называется квазиразложением или квазипрямым разложением группы A . При этом подгруппы A_i называются квазислагаемыми группы A [14, §4].

Абелеву группу без кручения A можно естественным образом вложить в $\mathcal{Q}$ -пространство $\mathcal{Q} \otimes A = \mathcal{Q}A$, которое является делимой оболочкой группы A . Естественный образ вложения подразумевает отождествление элемента $a \in A$ с элементом $1 \otimes a \in \mathcal{Q}A$. Каждый эндоморфизм $\alpha \in \text{End}(A)$ единственным образом продолжается до линейного преобразования $1 \otimes \alpha$ $\mathcal{Q}$ -пространства $\mathcal{Q}A$. Кольцо $\text{End}(A)$ содержится в $\text{End}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q}A)$ [14, §5].

Таким образом, $\text{End}(A) = \{\alpha \in \text{End}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q}A) \mid \alpha A \subseteq A\}$. $\mathcal{Q}$ -алгебра $\mathcal{Q} \otimes \text{End}(A) = \mathcal{Q} \text{End}(A)$ называется кольцом квазиэндоморфизмов группы A .

Далее речь пойдет о сильно неразложимых абелевых группах без кручения конечного ранга. Факты, касающиеся этого класса групп и используемые в работе, могут быть найдены в книге [14].

Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, такая, что $N(\text{End}(A)) = 0$. В этой ситуации группа A квазиравна прямой сумме $\bigoplus_{i=1}^l A_i^{n(i)}$ сильно неразложимых групп A_i , при этом каждое из колец $\mathcal{Q} \text{End}(A_i)$ является телом и группы $A_1, \dots, A_l$ образуют жесткую систему [14, теорема 7.3].

Предложение 13. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга и $N(\text{End}(A)) = 0$.

1. $\text{End}(A)$ -модуль A эндоморфен тогда и только тогда, когда $n(i) > 1$ для всех $i = 1, \dots, l$.

2. Если $\text{End}(A)$ -модуль A не является эндоморфным, то кольцо $\mathcal{Q} \text{End}(A)$ не обладает свойством однозначности сложения.

Доказательство. Первое утверждение доказано в [1, теорема 32]. Предположим, что $n(k) = 1$ для некоторого $k \in \{1, \dots, l\}$. Тогда $\mathcal{Q} \text{End}(A) \cong \mathcal{Q} \text{End}(A_k) \times T$. Кольцо $\mathcal{Q} \text{End}(A_k)$ не является кольцом с однозначным сложением, поскольку тело является UA-кольцом тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет полиномиальному тождеству $x(x+1)(x^2+x+1) = 0$ [7, теорема 5.2]. Следовательно, кольцо $\mathcal{Q} \text{End}(A)$ не обладает свойством однозначности сложения. Предложение доказано.

Теорема 14. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, такая, что

$$\mathcal{Q} \text{End}(A) / \mathcal{Q}N(\text{End}(A)) \cong \mathcal{Q}.$$

Тогда $\mathcal{Q} \text{End}(A)$ не является UA-кольцом и группа A не является эндоморфным модулем над своим кольцом эндоморфизмов.

Доказательство. Напомним, что из условий теоремы непосредственно вытекает, что кольцо $\mathcal{Q} \text{End}(A)$ артиново и не содержит нетривиальных идемпотентов [14, замечание перед леммой 5.1, следствие 5.12]. Кроме того, данное кольцо является локальным с единственным максимальным идеалом $\mathcal{Q}N(\text{End}(A))$. На основании [14, теорема 5.18, следствие 5.19] заключаем, что ниль-радикал $N(\text{End}(A))$ нильпотентен. Следовательно, $\mathcal{Q}N(\text{End}(A))^k = 0$ для некоторого натурального числа k .

Кроме того, имеется прямое разложение аддитивной группы $\mathcal{Q} \text{End}(A) = R \oplus \mathcal{Q} \text{End}(A)$, где R – подкольцо кольца $\mathcal{Q} \text{End}(A)$, состоящее из всех квазиэндоморфизмов вида $q \otimes 1$. Каждый квазиэндоморфизм $u \in \mathcal{Q} \text{End}(A)$ представим в виде $u = a + b$, где $a \in R$, $b \in \mathcal{Q}N(\text{End}(A))$. Заметим, что кольцо R содержится в центре кольца $\mathcal{Q} \text{End}(A)$.

В случае, когда $\mathbf{QN}(\text{End}(A)) = 0$, получаем $\mathbf{QEnd}(A) \cong \mathbf{Q}$. Но поле рациональных чисел не является UA-кольцом [7, теорема 5.2].

Пусть $\mathbf{QN}(\text{End}(A)) \neq 0$ и $\mathbf{QN}(\text{End}(A))^2 = 0$. Определим биекцию $t: \mathbf{QEnd}(A) \rightarrow \mathbf{QEnd}(A)$ по правилу

$t(x) = x$, если $x \in \mathbf{QEnd}(A) \setminus \mathbf{QN}(\text{End}(A))$, и $t(x) = -x$ в противном случае.

Покажем, что отображение t сохраняет умножение.

Зафиксируем обозначения: $u = a_1 + b_1$, $v = a_2 + b_2$, где $a_1, a_2 \in R$, $b_1, b_2 \in \mathbf{QN}(\text{End}(A))$. Тогда

1) если $a_1, a_2 \neq 0$, то uv – обратимый элемент и $t(uv) = uv = t(u)t(v)$;

2) если $a_1 = 0, a_2 \neq 0$, то $t(uv) = -uv = t(u)t(v)$;

3) если $a_2 = 0, a_1 \neq 0$, то $t(uv) = -uv = t(u)t(v)$;

4) если $a_1, a_2 = 0$, то $t(uv) = t(0) = 0 = (-u)(-v) = t(u)t(v)$.

Однако $t(1+x) = 1+x \neq 1-x = t(1)+t(x)$, $0 \neq x \in \mathbf{QN}(\text{End}(A))$.

Пусть $\mathbf{QN}(\text{End}(A))^k = 0$, $k > 2$, причем k – наименьшее натуральное число с таким условием. В этом случае найдется элемент $d \in \mathbf{QN}(\text{End}(A))$, такой, что $d = c_1 \dots c_{k-1} \neq 0$, где $c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbf{QN}(\text{End}(A))$.

Полагаем $c = c_1 \dots c_{k-2}$. Рассмотрим биективное отображение $t: \mathbf{QEnd}(A) \rightarrow \mathbf{QEnd}(A)$, определяемое правилом

$t(x) = x$, если $x \in \mathbf{QEnd}(A) \setminus \mathbf{QN}(\text{End}(A))$,

и $t(x) = (c+1)x$ в противном случае.

Покажем, что отображение t сохраняет умножение. Так же, как и выше:

1) если $a_1, a_2 \neq 0$, то uv – обратимый элемент и $t(uv) = uv = t(u)t(v)$;

2) если $a_1 = 0, a_2 \neq 0$, то $t(uv) = (c+1)b_1(a_2+b_2) = t(u)t(v)$;

3) если $a_1 \neq 0, a_2 = 0$, то $t(uv) = (c+1)(a_1+b_1)b_2 = c a_1 b_2 + a_1 b_2 + b_1 b_2 = t(u)t(v)$;

4) если $a_1, a_2 = 0$, то $t(uv) = (c+1) b_1 b_2 = b_1 b_2 = t(u)t(v)$.

Остается заметить, что

$$t(1+c_{k-1}) = 1+c_{k-1} \neq 1+d+c_{k-1} = t(1)+t(c_{k-1}).$$

Кольцо $\mathbf{QEnd}(A)$ не обладает свойством однозначности сложения. Второе утверждение следует из [1, теорема 33]. Теорема доказана.

Заметим, что условиям теоремы 14 удовлетворяют сильно неразложимые абелевы группы без кручения A конечного ранга p , где p – простое число и $N(\text{End}(A)) \neq 0$ [16, теорема 4.4.12].

Автор благодарен коллективу кафедры алгебры Томского государственного университета за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Albrecht U., Breaz S., Wickless W. Generalized endoprimal abelian groups // J. Alg. and Its Appl. 2006. V. 5. No. 1. P. 1–17.
2. Hausen J. and Johnson J.A. Centralizer near-rings that are rings // J. Austr. Math. Soc. 1995. V. 59. P. 173–183.
3. Чистяков Д.С. Эндопримальные абелевы группы и модули // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 3(19). С. 31–34.
4. Чистяков Д.С., Любимцев О.В. Абелевы группы как эндоморфные модули над своим кольцом эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Т. 13. № 1. С. 229–233.
5. Чистяков Д.С. Однородные отображения абелевых групп // Изв. вузов. Математика. 2014. № 2. С. 61–68.
6. Stephenson W. Unique addition rings // Can. J. Math. 1969. V. 21. No. 6. P. 1455–1461.
7. Михалев А.В. Мультипликативная классификация ассоциативных колец // Мат. сб. 1988. Т. 135 (177). № 2. С. 210–224.

8. Любимцев О.В. Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов // *Фундамент. и прикл. матем.* 1998. Т. 4. № 4. С. 1419–1422.
9. Любимцев О.В. Периодические абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов // *Матем. заметки.* 2001. Т. 70. № 5. С. 736–741.
10. B. van der Merwe. Unique addition modules // *Communications in Algebra.* 1999. 27(9). P. 4103–4115.
11. Любимцев О.В., Чистяков Д.С. Абелевы группы как UA-модули над кольцом $\mathbb{Z}$ // *Матем. заметки.* 2010. Т. 87. № 3. С. 412–416.
12. Чистяков Д.С. Абелевы группы как UA-модули над своим кольцом эндоморфизмов // *Матем. заметки.* 2012. Т. 91. № 6. С. 934–941.
13. Туганбаев А.А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009.
14. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал пресс, 2006.
15. Чистяков Д.С., Любимцев О.В. Об абелевых группах без кручения с UA-кольцом эндоморфизмов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2011. № 2. С. 55–58.
16. Faticoni T. Direct Sum Decompositions of Torsion-Free Finite Rank Groups, Taylor&Francis Group, 2007.

Статья поступила 11.03.2014 г.

Chistyakov D.S. ABELIAN GROUPS WITH UA-RING OF ENDOMORPHISMS AND THEIR HOMOGENEOUS MAPPINGS

A ring R is said to be a unique addition ring (UA-ring) if a multiplicative semigroup isomorphism $(R, *) \cong (S, *)$ is a ring isomorphism for any ring S . Moreover, a semigroup $(R, *)$ is said to be a UA-ring if there exists a unique binary operation $+$ turning $(R, *, +)$ into a ring. An R -module A is called an n -endomorphical if any R -homogeneous mapping from A^n to itself is linear. An R -module A is called endomorphical if it is n -endomorphical for each positive integer n . In this paper, we consider the following classes of Abelian groups: torsion groups, torsion-free separable groups, and some indecomposable torsion-free groups of finite rank. We show that if an Abelian group is an endomorphical module over its endomorphism ring, then this ring is a UA-ring, and vice versa.

Keywords: unique addition ring, homogeneous mapping.

CHISTYAKOV Denis Sergeevich (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russian Federation)

E-mail: chistyakovds@yandex.ru

REFERENCES

1. Albrecht U., Breaz S., Wickless W. Generalized endoprimal abelian groups (2006) *J. Alg. and Its Appl.*, v. 5, no. 1, pp. 1–17.
2. Hausen J. and Johnson J.A. Centralizer near-rings that are rings (1995) *J. Austr. Math. Soc.*, v. 59., pp. 173–183.
3. Chistyakov D.S. Endoprimal'nye abelevy gruppy i moduli (2012) *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, no. 3(19), pp. 31–34. (in Russian)
4. Chistyakov D.S., Lyubimtsev O.V. Abelevy gruppy kak endomorfnye moduli nad svoim kol'tsom endomorfizmov (2007) *Fundament. i prikl. matem.*, v. 13, no. 1, pp. 229–233. (in Russian)
5. Chistyakov D.S., Odnorodnye otobrazheniya abelevykh grupp (2014) *Izv. vuzov. Matematika*, no. 2, pp. 61–68. (in Russian)
6. Stephenson W. Unique addition rings (1969) *Can. J. Math.*, v. 21, no. 6, pp. 1455–1461.
7. Mikhalev A.V. Mul'tiplikativnaya klassifikatsiya assotsiativnykh kolets (1988) *Mat. sb.*, v. 135 (177), no. 2, pp. 210–224. (in Russian)

8. Lyubimtsev O.V. Separabel'nye abelevy gruppy bez krucheniya s UA-kol'tsami endomorfizmov (1998) *Fundament. i prikl. matem.*, v. 4, no. 4, pp. 1419–1422. (in Russian)
9. Lyubimtsev O.V., Periodicheskie abelevy gruppy s UA-kol'tsami endomorfizmov (2001) *Matem. zametki*, v. 70, no. 5, pp. 736–741. (in Russian)
10. B. van der Merwe. Unique addition modules (1999) *Communications in Algebra*, v. 27(9), pp. 4103–4115.
11. Lyubimtsev O.V., Chistyakov D.S. Abelevy gruppy kak UA-moduli nad kol'tsom $\mathbb{Z}$ (2010) *Matem. zametki*, v. 87, no. 3, pp. 412–416. (in Russian)
12. Chistyakov D.S. Abelevy gruppy kak UA-moduli nad svoim kol'tsom endomorfizmov (2012) *Matem. zametki*, v. 91, no. 6, pp. 934–941. (in Russian)
13. Tuganbaev A.A. *Teoriya kolets. Arifmeticheskie moduli i kol'tsa*. Moscow, MTsNMO Publ., 2009. (in Russian)
14. Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A. *Abelevy gruppy i ikh kol'tsa endomorfizmov*. Moscow, Faktorial press Publ., 2006. (in Russian)
15. Chistyakov D.S., Lyubimtsev O.V. Ob abelevykh gruppakh bez krucheniya s UA-kol'tsom endomorfizmov (2011) *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, no. 2, pp. 55–58. (in Russian)
16. Faticoni T. *Direct Sum Decompositions of Torsion-Free Finite Rank Groups*. Taylor&Francis Group, 2007.