

УДК 539.384.4

Ю.И. Дорогов

ПРИМЕНЕНИЕ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ

Исследуется потеря устойчивости прямолинейного упругого стержня при условии неизменности его длины. Рассматриваются различные способы закрепления концов стержня при помощи жёстких и упругих опор. Исследуется влияние коэффициента упругости опор на процесс потери устойчивости и конфигурацию изогнутой оси стержня.

Ключевые слова: *устойчивость стержня, изопериметрическое условие, упругая опора, потеря устойчивости, длина стержня.*

1. Введение

В традиционной линеаризованной модели потери устойчивости прямолинейного стержня допускается, что в процессе выпучивания концы стержня не смещаются в направлении сжимающей нагрузки и либо остаются неподвижными, либо перемещаются в направлении перпендикулярном линии действия сжимающей силы [1–3]. Длина проекции изогнутого стержня на его первоначально прямолинейную ось предполагается постоянной и равной начальной длине стержня. Из этого допущения следует парадоксальный вывод об увеличении длины сжимаемого стержня в процессе его выпучивания.

Указанное допущение в постановке краевой задачи приводит, в конечном итоге, к выводу о безразличном состоянии равновесия стержня и возможности бесконечных прогибов при критическом значении нагрузки. При таких условиях стержень должен бы испытывать неограниченное удлинение в процессе своего сжатия. На самом деле, длина стержня изменяется несущественно, в сравнении с изменением длины проекции стержня на первоначально прямолинейную ось, так что этим изменением можно пренебречь и принять длину стержня постоянной.

Кроме того, принципиальная невозможность определения прогибов стержня при значении нагрузки, равной или превосходящей критическую, исключает возможность исследования поведения стержня после потери устойчивости прямолинейной формы равновесия.

Традиционно описанные результаты, противоречащие опыту, интерпретируют как следствие применения линеаризованного выражения для кривизны. Применение точного выражения для кривизны приводит к дифференциальному уравнению, интеграл которого непрерывно зависит от продольной нагрузки. При этом каждому значению нагрузки соответствует единственная форма равновесия стержня, а прогибы оси стержня являются конечными. Однако получающееся нелинейное дифференциальное уравнение довольно сложно поддаётся интегрированию [4–7].

2. Постановка задачи

В данной работе исследуется процесс потери устойчивости упругого прямолинейного стержня, сжимаемого силой P . Задача решается в эйлеровой постановке,

то есть исследуется возможность существования изогнутых форм равновесия стержня, смежных с прямолинейной формой. Рассматривается линеаризованная модель изгиба стержня, при которой кривизна оси стержня принимается равной второй производной функции прогиба. Во избежание неопределённости решения, на уравнение, описывающее изогнутую ось стержня, накладывается дополнительное изопериметрическое условие, выражающее постоянство длины оси. Один конец стержня предполагается неподвижным, а другой смещается. Расстояние между концами стержня l равно длине проекции изогнутой оси стержня на его первоначально прямолинейную ось. Граничные условия устанавливаются в соответствии с этим смещением.

3. Построение решения

Центр выбранной системы координат помещён в неподвижном конце стержня. Ось Ox направлена вдоль первоначально прямолинейной оси стержня в сторону его подвижного конца, а ось Oy направлена в сторону выпуклости стержня и перпендикулярна оси Ox .

Исследование возможности существования изогнутой формы равновесия сжимаемого стержня приводит к краевой задаче для линейного однородного дифференциального уравнения четвёртого порядка с постоянными коэффициентами и однородными граничными условиями. В частности, для шарнирно закреплённого стержня данная краевая задача выглядит следующим образом:

$$y^{(4)} + \alpha^2 y'' = 0, \quad (3.1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0. \quad (3.2)$$

Здесь $y(x)$ – ордината точек упругой оси изогнутого стержня; $\alpha = \sqrt{P/EJ}$; E – модуль упругости материала стержня; J – момент инерции поперечного сечения стержня.

Неизменность длины стержня в процессе его изгиба накладывает на кривую прогиба оси стержня дополнительное изопериметрическое условие

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + (y')^2} dx = \text{const}. \quad (3.3)$$

Здесь y' – тангенс угла наклона касательной к оси стержня; L – длина стержня.

Поставленная краевая задача имеет нетривиальные решения, только при определённых значениях коэффициента α , которые называются собственными значениями. Собственные значения данной краевой задачи равны $\alpha_n = \pi n/l$. Минимальное собственное значение $\alpha_1 = \pi/l$ соответствует сжимающей силе $P = \pi^2 EJ/l^2$.

Вначале процесса изгиба длина проекции l равна длине стержня L , но с увеличением прогибов величина l уменьшается. Критическое значение $P_e = \pi^2 EJ/L^2$, называемое эйлеровой силой, соответствует потере устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня и началу процесса изгиба. По мере увеличения нагрузки $P > P_e$, стержень изгибается, а расстояние между его концами l уменьшается.

Продольная сила и длина проекции связаны соотношением $P = \pi^2 EJ/l^2 = P_e (L/l)^2$, из которого получаем выражение зависимости длины проекции стержня от сжимающей силы

$$l = L \sqrt{\frac{P_e}{P}}.$$

Обозначим $\eta = P/P_e$. Тогда $l = L/\sqrt{\eta}$.

Уравнение изогнутой оси стержня, удовлетворяющее дифференциальному уравнению (3.1) и граничным условиям (3.2), определяется с точностью до произвольного коэффициента и имеет вид

$$y(x) = C \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) определяет однопараметрическое семейство кривых, удовлетворяющих краевой задаче (1), (2). Только одна кривая из этого семейства соответствует реальной изогнутой оси стержня. Это та кривая, которая удовлетворяет изопериметрическому условию (3.3). Как и при выборе дифференциального уравнения, ограничимся рассмотрением только начального этапа изгиба стержня, для которого можно считать $y'(x) \ll 1$. Тогда условие (3.3), с учётом разложения подинтегрального выражения в ряд Маклорена с двумя первыми членами, можно заменить приближённым равенством

$$L \approx \int_0^l \left[1 + \frac{(y')^2}{2} \right] dx.$$

Для определения параметра C , соответствующего искомой кривой, выразим из выражения (3.4) первую производную и подставим в полученное приближённое равенство. Получим

$$L \approx \int_0^l \left[1 + \frac{\pi^2 C^2}{2l^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right] dx = l + \frac{\pi^2 C^2}{4l}.$$

Из последнего равенства выразим зависимость коэффициента C от длины проекции l :

$$C(l) = \frac{2}{\pi} \sqrt{l(L-l)}. \quad (3.5)$$

В силу вышеизложенного для линии прогиба получаем уравнение

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{l(L-l)} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (3.6)$$

В начале, когда продольная сила достигает критического значения и $l = L$, ось стержня прямолинейна, так как $y(x) = 0$.

С учётом выражения для длины проекции l , уравнение изогнутой оси (3.6) запишется в виде функции, зависящей от параметра продольной нагрузки η :

$$y(x) = \frac{2L}{\pi} \frac{\sqrt{\sqrt{\eta}-1}}{\sqrt{\eta}} \sin\left(\frac{\pi x \sqrt{\eta}}{L}\right).$$

Из последнего уравнения следует, что каждому значению сжимающей силы P соответствует одна, вполне определённая кривая прогибов стержня. При $\eta = 1$ ось стержня будет прямой. По мере увеличения $\eta > 1$ прогибы увеличиваются. В срединном сечении, для которого $x = l/2$, прогиб будет максимальным:

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{2L}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{\eta}-1}}{\sqrt{\eta}}.$$

Найденная изогнутая ось стержня отличается от эластики Эйлера [4], полученной при помощи точного дифференциального уравнения. Однако при малых значениях угла наклона оси, заданных на концах стержня, и заданном значении нагрузки прогиб рассматриваемой кривой в срединном сечении равен прогибу эластики.

4. Другие способы закрепления

Повторим выкладки, изложенные выше для шарнирно опёртого стержня, применительно к другим способам закрепления.

Стержень с двумя заделанными концами теряет устойчивость прямолинейной формы равновесия при значении сжимающей силы $P = 4P_e$. По мере увеличения сжимающей силы прогибы увеличиваются. Уравнение изогнутой оси стержня имеет вид

$$y(x) = C(l) \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right].$$

Значение коэффициента $C(l)$, полученное из условия постоянства длины стержня, равно

$$C(l) = \frac{1}{\pi} \sqrt{l(L-l)}.$$

Для стержня с одним свободным и одним заделанным концами функция прогибов принимает вид

$$y(x) = C(l) \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right),$$

где $C(l) = (4/\pi) \sqrt{l(L-l)}$ и $P > P_e/4$.

Для стержня с одним шарнирно опёртым и одним заделанным концами функция прогибов принимает вид

$$y(x) = C(l) \left[\frac{x}{l} - \frac{\sin(\nu x/l)}{\sin \nu} \right],$$

где $C(l) = (2/\nu) \sqrt{l(L-l)}$, $\nu = 4,4934$ и $P > (\nu/\pi)^2 P_e$.

5. Потеря устойчивости стержня с упругой опорой на конце

В [8–10] исследовалась потеря устойчивости стержней с разрушающимися опорами или заделками. В данном пункте рассматривается стержень с двумя шарнирными опорами. Одна опора жёсткая, а другая – упругая с коэффициентом уп-

ругости k (рис. 1). При данных условиях закрепления возможны два способа потери устойчивости равновесия стержня.

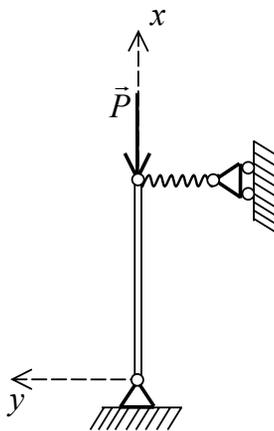


Рис. 1

Во-первых, стержень может потерять устойчивость равновесия и оказаться в состоянии безразличного равновесия, оставаясь прямолинейным или почти прямолинейным [11]. Это произойдёт, если сжимающая сила достигнет значения $P = kL$. Когда сжимающая сила P превысит критическое значение kL , стержень ускоренно поворачивается и равновесие становится невозможным.

Во-вторых, стержень может потерять устойчивость прямолинейной формы равновесия, когда $P > P_e$. В этом случае стержень изгибается, но не поворачивается как целое.

Если $kL < P_e$, то по мере увеличения сжимающей силы до значений, превосходящих величину $P = kL$, первоначальное положение равновесия стержня становится неустойчивым. Незначительные случайные возмущения приведут к тому, что стержень начнёт ускоренно отклоняться от первоначального положения. Равновесие стержня становится невозможным.

Если $kL = P_e$, то при достижении нагрузкой значения $P = kL = P_e$, первоначальное положение равновесия стержня оказывается безразличным. При этом стержень остаётся прямолинейным. По мере увеличения нагрузки случайные возмущения вызовут изгиб стержня и его ускоренный поворот. Равновесие стержня становится невозможным.

Если $kL > P_e$, то при достижении сжимающей силой значений из интервала $(P_e; kL)$, прямолинейная форма равновесия стержня становится невозможной. Стержень изгибается.

Уравнение равновесия момента нормальных напряжений в поперечном сечении стержня и момента внешних сил запишется как

$$EJy'' + Py - Fx = 0.$$

Здесь $F = ky_1$ – сила упругости, возникающая в упругой опоре; y_1 – удлинение упругой опоры, равное перемещению подвижного конца стержня.

Дифференцируя уравнение моментов дважды, приведём его к виду (3.1).

Граничные условия запишутся

$$y(0) = 0, \quad y(l) = y_1, \quad y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0.$$

Нетривиальное решение дифференциального уравнения (3.1), удовлетворяющее данным граничным условиям возможно, если $\alpha l = \pi$. Это решение имеет вид:

$$y(x) = \frac{y_1}{l}x + C \sin \alpha x.$$

С другой стороны, рассматривая вращение стержня вокруг неподвижной опоры, получим уравнение динамики:

$$\sum m_i = Py_1 - Fl = I\varepsilon.$$

Здесь I – момент инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через шарнир у жёсткой опоры; ε – угловое ускорение вращения стержня.

Учитывая значение F , последнее уравнение можно переписать в виде

$$y_1(P - kl) = I\varepsilon.$$

Из полученного равенства видно, что если $P < kl$, то знаки углового ускорения ε и отклонения y_1 противоположны. Следовательно, внешние силы препятствуют возникновению отклонения y_1 , и кривая прогиба имеет вид (3.4) или (3.6).

Таким образом, коэффициент упругости опоры k влияет на характер потери устойчивости стержня. Значение

$$k_* = \frac{P_e}{L} = \frac{\pi^2 EJ}{L^3},$$

определяемое из равенства $kL = P_e$, является критериальным значением.

При $k < k_*$ стержень не будет терять устойчивость прямолинейной формы равновесия в процессе сжатия. Он будет поворачиваться, когда значения нагрузки превзойдут величину $P = kl$.

При $k > k_*$ потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня начнётся раньше, чем поворот стержня как целого.

При $k = k_*$ оба вида потери устойчивости начнутся одновременно.

С увеличением значения сжимающей силы $P > P_e$ длина проекции l уменьшается. В определённый момент сжимающая сила принимает значение $P = kl$. По мере увеличения нагрузки стержень начинает поворачиваться. Равновесие становится невозможным.

Учитывая, что $l = L/\sqrt{\eta}$, из последнего равенства получим

$$P_e \eta = k \frac{L}{\sqrt{\eta}}.$$

Отсюда

$$\eta = \left(\frac{kL}{P_e} \right)^{2/3} = \left(\frac{k}{k_*} \right)^{2/3}.$$

Тогда значение критической силы равно

$$P_{кр} = P_e \eta = \sqrt[3]{\pi^2 k^2 EJ}.$$

Пока $P \leq P_e$ стержень сохраняет устойчивую прямолинейную форму. Каждому значению нагрузки из интервала $P \in (P_e; P_{кр}]$, соответствует устойчивая изогнутая форма равновесия. При $P > P_{кр}$ стержень не имеет устойчивых форм равновесия.

Заметим, что рассматриваемая критическая сила не зависит от длины стержня.

6. Потеря устойчивости стержня с упругой опорой посередине.

Рассмотрим стержень с двумя жёсткими шарнирными опорами на концах и упругой промежуточной опорой посередине стержня (рис. 2).

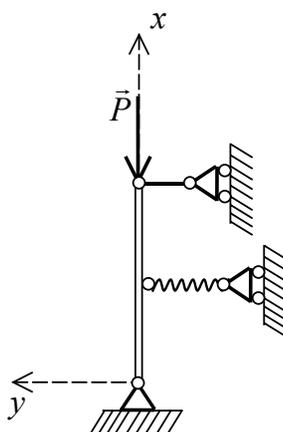


Рис. 2

Вероятно, коэффициент упругости опоры повлияет на конфигурацию изогнутой оси стержня при потере устойчивости. Незначительному коэффициенту упругости срединной опоры будет соответствовать линия прогиба с односторонней выпуклостью. Срединная опора с большим коэффициентом упругости способствует изгибу оси стержня по линии двоякой выпуклости.

Составим уравнение равновесия моментов, действующих на поперечное сечение стержня. Для сечения, расположенного на участке $0 \leq x \leq l/2$:

$$EJy'' + Py - Rx = 0;$$

для сечения, расположенного на участке $l/2 < x \leq l$:

$$EJy'' + Py - Rx + F\left(x - \frac{l}{2}\right) = 0.$$

Здесь $F = ky(l/2)$ – сила упругости, возникающая в промежуточной опоре; $R = 0, 5F = 0, 5ky(l/2)$ – реакции концевых шарнирных опор.

Дифференцируем оба уравнения дважды и преобразуем их к единому виду (3.1). При этом справедливы граничные условия (3.2), выражающие отсутствие прогибов и моментов на концах стержня.

Нетривиальное решение дифференциального уравнения (3.1), удовлетворяющее граничным условиям (3.2), возможно, если $\alpha = \pi n/l$ ($n = 1, 2, \dots$). Это решение имеет вид

$$y(x) = C \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Множитель C не может быть определён из граничных условий. Полагая, что C зависит от длины проекции оси стержня на координатную ось Ox , применим для его определения изложенный выше метод.

Если упругая промежуточная опора отсутствует, то натуральное число n принимается равным 1, и линия прогиба представляет собой одну полуволну синусоиды. Если посередине жёсткая опора, то принимают $n = 2$, и линия прогиба представляет собой одну полную волну синусоиды. В рассматриваемом случае представляются возможными обе конфигурации линии прогиба оси стержня.

При $n = 1$ линия прогиба стержня определяется формулами (3.4). Очевидно, что в этом случае константа C представляет собой величину прогиба в срединном сечении, равную удлинению упругой промежуточной опоры. То есть $C = y(l/2)$. Повторяя рассуждения, изложенные выше для случая шарнирно опёртого стержня, получим для C выражение (3.5). Тогда уравнение изогнутой оси стержня определяется формулой (3.6).

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии изгиба стержня и упругой энергии, накапливающейся в срединной опоре:

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx + \frac{ky^2(l/2)}{2}.$$

Подставляя в последнее выражение значение прогиба в срединном сечении и вторую производную от функции прогибов (3.6), после интегрирования и преобразования получим

$$U = C^2 \left(\frac{\pi^4 EJ}{4l^3} + \frac{k}{2} \right) = \frac{4}{\pi^2} l(L-l) \left(\frac{\pi^4 EJ}{4l^3} + \frac{k}{2} \right). \quad (6.1)$$

Работа сжимающей силы

$$A = \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx = P(L-l).$$

Приравняв работу к потенциальной энергии и преобразовывая полученное равенство, найдём значение критической силы, при которой стержень теряет устойчивость:

$$P = P_e + \frac{2}{\pi^2} kl.$$

Это значение совпадает с одним из значений критической силы, найденных в [12].

При $n = 2$ конфигурация линии прогиба оси стержня представляет собой одну полную волну синусоиды и её уравнение

$$y(x) = C(l) \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right).$$

Из условия постоянства длины стержня для коэффициента $C(l)$ получим

$$C(l) = \frac{1}{\pi} \sqrt{l(L-l)}.$$

В этом случае упругая опора не деформируется. Потенциальная энергия изгиба стержня принимает вид

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{4\pi^4 EJ}{l^3} C^2 = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} (L-l). \quad (6.2)$$

Как было замечено ранее, форма линии прогиба оси стержня при продольном изгибе, последующем за потерей устойчивости прямолинейной формы, зависит от коэффициента упругости срединной опоры k . Из двух возможных конфигураций линии прогиба соответствовать приложенной нагрузке будет та, которая даёт наименьшее значение потенциальной энергии рассматриваемой конструкции. Приравняв выражения потенциальной энергии, определяемые формулами (6.1) и (6.2), получим равенство для определения критического значения коэффициента упругости опоры k_* . Из него находим

$$k_* = \frac{3\pi^4 EJ}{2l^3}.$$

В частности, когда $l = L$, критическое значение коэффициента упругости

$$k_* = 1,5\pi^2 \frac{P_e}{L} = 1,5\pi^4 \frac{k_0}{\lambda^2}. \quad (6.3)$$

Здесь k_0 – коэффициент упругости стержня при растяжении; λ – гибкость стержня.

Значение (6.3) мало отличается от значения критической жёсткости, найденного в [12].

При $k < k_*$ конфигурация линии прогиба стержня представляет собой одну полуволну синусоиды, как и в случае отсутствия упругой опоры посередине. При $k > k_*$ конфигурация линии прогиба стержня представляет собой одну полную волну синусоиды, как в случае стержня, жёстко закрепленного посередине при помощи шарнирной опоры.

Заключение

На основании проведённого исследования можно сделать следующие выводы.

1. Учёт смещения концов стержня и условия неизменности его длины в линеаризованной модели потери устойчивости позволяет получить вполне определённое уравнение изогнутой оси стержня. Каждому значению нагрузки, превышающему критическое, соответствует единственная кривая прогиба, которая является устойчивой.

2. Использование изопериметрического условия позволяет исследовать поведение стержня после потери криволинейной формы равновесия.

3. Потеря устойчивости стержня с упругой опорой на одном конце может иметь различный характер в зависимости от коэффициента упругости этой опоры. Если значение коэффициента упругости относительно небольшое $k < k_*$, то стержень не теряет устойчивость прямолинейной формы равновесия в процессе сжатия, а поворачивается как твёрдое тело вокруг неподвижного шарнира. При больших значениях коэффициента упругости $k > k_*$, потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня начнётся раньше, чем поворот стержня как целого.

4. При потере устойчивости шарнирно опёртого стержня, имеющего упругую дополнительную опору посередине, возможны две конфигурации изогнутой оси стержня. В зависимости от коэффициента упругости дополнительной опоры изогнутая ось может быть односторонне выпуклой или двояко выпуклой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. 808 с.
2. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.
3. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. М.: Машиностроение, 1968. Т. 3. 831 с.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
5. Dorogov Yu.I. The stability of the shape of an unattached elastic rod with stiff flanges on its ends // J. Applied Mathematics and Mechanics. 2013. № 3. P. 338–345.
6. Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня с жёсткими окончаниями // Строительная механика и расчёт сооружений. 2013. № 3 С.16–21.
7. Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня с искривленными торцами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. № 2. С. 255–266.
8. Дорогов Ю.И. Устойчивость упругого стержня с разрушающейся опорой // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. № 1. С. 84–96.
9. Дорогов Ю.И. Продольный изгиб стержня с разрушающимися заделками // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. № 4. С. 575–586.
10. Дорогов Ю.И. О несущей способности стержня с инородной прослойкой // Изв. вузов. Машиностроение. 2001. № 5. С. 11–15.
11. Дорогов Ю.И. О потере устойчивости абсолютно жёсткого стержня с разрушающейся опорой // Механика композиционных материалов и конструкций. 2006. № 3. С. 300–311.
12. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 988 с.

Статья поступила 10.06.2014 г.

Dorogov Yu. I. APPLICATION OF THE ISOPERIMETRIC CONDITION IN PROBLEMS OF BUCKLING FOR A ROD

When studying buckling of a rectilinear elastic rod, the so-called linearized differential equation in which the first derivative of deflection is neglected in the expression for the curvature is considered together with the exact differential equation. The linearized equation is a linear differential equation of the second order with constant coefficients; it can be reduced to a uniform differential equation of the fourth order. Conditions under which it is possible to solve the boundary value problem for this equation allow one to obtain an exact value of the critical force. In this case, the solution of the boundary value problem is defined only with an accuracy of up to an unknown coefficient which cannot be determined from the boundary conditions. This unknown coefficient can be found from an additional condition expressing the invariance of the rod length.

In this work, buckling of a rectilinear rod squeezed by a longitudinal force is investigated. The problem is solved in the Euler formulation, i.e., the possibility of the existence of curved balance forms adjacent to the rectilinear form is investigated. Solutions of the boundary value problem for the linearized differential equation of the curved rod axis are constructed using an additional condition of the invariance of the rod length. Various ways of fixing of the rod ends by means of a rigid and elastic supports are considered. The influence of the elasticity coefficient of the support on the buckling process and configuration of a curved axis of the rod is investigated.

Keywords: stability of a rod, isoperimetric condition, elastic support, buckling loss, rod length.

DOROGOV Yury Ivanovich

(Candidate of Technical Sciences, Branch of Moscow Power Engineering Institute
(National Research University) in Volzhskiy, Volzhskiy, Russian Federation)

E-mail: ydorogov@yandex.ru

REFERENCES

1. Timoshenko S.P. *Ustoychivost' stержney, plastin i obolochek*. Moscow, Nauka Publ., 1971, 808 p. (in Russian)
2. Panovko Ya. G., Gubanov I. I. *Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh system*. Moscow, Nauka Publ., 1987. 352 p. (in Russian)
3. Birger I.A., Panovko Ya.G. *Prochnost', ustoychivost', kolebaniya*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968. V. 3. 831 p. (in Russian)
4. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela*. Moscow, Nauka Publ., 1988. 712 p. (in Russian)
5. Dorogov Yu.I. The stability of the shape of an unattached elastic rod with stiff flanges on its ends (2013) *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, no. 3, pp. 338–345. (in Russian)
6. Dorogov Yu.I. Ustoychivost' stержnya s zhestkimi okonchaniyami (2013) *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, no. 3, pp. 16–21. (in Russian)
7. Dorogov Yu.I. Ustoychivost' stержnya s iskrivlennymi tortsami (2012) *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*, no. 2, pp. 255–266. (in Russian)
8. Dorogov Yu.I. Ustoychivost' uprugogo stержnya s razrushayushcheysoy oporoy (2010) *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*, no. 1, pp. 84–96. (in Russian)
9. Dorogov Yu.I. Prodol'nyy izgib stержnya s razrushayushchimisya zadelkami (2010) *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*, no. 4, pp. 575–586. (in Russian)
10. Dorogov Yu.I. O nesushchey sposobnosti stержnya s inorodnoy prosloykoy (2001) *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie*, no. 5, pp. 11–15. (in Russian)
11. Dorogov Yu.I. O potere ustoychivosti absolyutno zhestkogo stержnya s razrushayushcheysoy oporoy (2006) *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*, no. 3, pp. 300–311. (in Russian)
12. Vol'mir A.S. *Ustoychivost' deformiruemyykh system*. Moscow, Nauka Publ., 1967. 988 p. (in Russian)