

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.1+512.64

DOI 10.17223/20710410/69/1

КОМБИНАТОРНЫЕ АСПЕКТЫ q -ГАФНИАНА¹

Д. Б. Ефимов

*ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН, г. Сыктывкар, Россия***E-mail:** defimov@ipm.komisc.ru

Гафниан был введён в середине XX в. в работах итальянского физика-теоретика Э. Р. Каяньелло в связи с задачами квантовой теории поля. В дальнейшем гафниан нашёл применение в комбинаторике как перечисляющая функция числа совершенных паросочетаний графов. По своему виду гафниан близок к такой более известной функции, как пфаффиан. В отличие от последней, он задаётся на симметричных, а не кососимметричных матрицах и не учитывает знаки перестановок индексов в соответствующих мономах. В данной работе рассмотрен q -гафниан — обобщение гафниана, зависящее от формальных параметров и совпадающее с исходной функцией при единичных значениях параметров. Указан комбинаторный смысл q -гафниана как производящей функции числа перестановок и числа дуговых (линейных хордовых) диаграмм определённых классов. Доказаны несколько свойств одно- и двупараметрического q -гафниана, которые являются обобщениями свойств обычного гафниана. В частности, мы приводим аналог свойства разложения по строке и аналог свойства, выражающего гафниан матрицы смежности двудольного взвешенного графа с равными долями через перманент матрицы бисмежности. Данные понятия и свойства, помимо чисто теоретического интереса, могут быть использованы при разработке алгоритмов, изучающих статистику числа инверсий определённых классов перестановок и статистику числа взаимных пересечений и вложений рёбер определённых классов дуговых диаграмм.

Ключевые слова: q -аналог, гафниан, дуговая диаграмма, перестановка.

COMBINATORIAL ASPECTS OF THE q -HAFNIAN

D. B. Efimov

IPM FRC Komi SC UB RAS, Syktyvkar, Russia

The Hafnian was introduced in the middle of 20th century by the Italian theoretical physicist E. R. Caianiello in connection with problems of quantum field theory. Later, the Hafnian found its application in combinatorics as an enumeration function of the number of perfect matchings of graphs. In its form, the Hafnian is close to such a better-known function as the Pfaffian. Unlike the latter, it is defined on symmetric, not skew-symmetric matrices and does not take into account the signs of permutations of indices in the corresponding monomials. In this paper, we consider the q -Hafnian,

¹Работа выполнена в рамках госзадания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН, проект № 125031203621-2.

a generalization of the Hafnian that depends on formal parameters and coincides with the original function for unit values of the parameters. We indicate the combinatorial meaning of the q -Hafnian as a generating function of the number of permutations and the number of arc (linear chord) diagrams of certain classes. We prove several properties of the one- and two-parameter q -Hafnian that are generalizations of the properties of the usual Hafnian. In particular, we present an analog of the row decomposition property and an analog of the property expressing the Hafnian of the adjacency matrix of a bipartite weighted graph with equal parts through the permanent of the biadjacency matrix. These concepts and properties, in addition to their purely theoretical interest, can be used in developing algorithms that study the statistics of the number of inversions of certain classes of permutations and the statistics of the number of crossings and nestings in various classes of arc diagrams.

Keywords: q -analog, Hafnian, arc diagram, permutation.

Введение

У многих математических понятий имеются так называемые q -аналоги — естественным образом возникающие обобщения, зависящие от параметра q и совпадающие при $q = 1$ с исходным понятием. При этом данные обобщения, с одной стороны, обладают свойствами, сходными со свойствами первоначальных вариантов, с другой стороны, в них заложен дополнительный потенциал. Здесь можно привести такие классические примеры, как q -аналог неотрицательного целого числа, q -факториал, q -биномиальный коэффициент (гауссов биномиальный коэффициент). Одним из разделов математики, где q -аналоги находят приложение, является комбинаторика [1–4]. Здесь они выступают в роли производящих функций числа различных объектов и по сравнению с исходными (не q -) вариантами позволяют получать более подробные комбинаторные характеристики. Так, например, если обычный факториал $n!$ равен числу всех перестановок n -го порядка, то его q -аналог $[n]_q!$ перечисляет все перестановки n -го порядка с учётом числа инверсий.

В конце 80-х–начале 90-х годов XX в. произошёл всплеск интереса к q -математике в связи с изобретением квантовых групп [5, 6]. В качестве основной мотивации здесь выступали задачи квантовой теории поля. Одними из ключевых объектов данной богатой и содержательной теории являются q - или «квантовые» аналоги классических непрерывных групп и их представлений. При этом естественным образом возникает q -аналог определителя матрицы. Элементы матрицы рассматриваются как элементы некоммутативной алгебры, квантовый определитель понимается как центральный элемент этой же алгебры. При таком подходе удаётся получить аналоги многих свойств обычного определителя.

Примерно в это же время появляются публикации, посвященные q -определителю и схожему с ним q -перманенту, в которых рассматриваются чисто математические задачи и развиваются другие подходы. Так, в работах комбинаторной направленности q -аналог определителя (перманента) определяется на обычных числовых матрицах и рассматривается как производящая функция, перечисляющая те или иные объекты (например, перестановки), связанные с матрицами [7–9]. При этом приходится считаться с тем, что многие свойства, присущие обычному определителю, перестают выполняться. Для полноты картины отметим ещё один подход, когда q -аналоги перманента также применяются к обычным матричным элементам, но акцент делается не на комбинаторных, а на алгебраических вопросах [10–13]. Существует ряд работ, находящихся на стыке разных подходов к q -перманенту [14, 15].

С парой схожих по виду функций от матричных элементов определитель / перманент тесно связана пара также схожих по виду функций от матричных элементов пфаффиан / гафниан [16, 17]. Одной из первых публикаций, в которой появляется понятие q -пфаффиана, является работа [18]. В ней используется теоретико-физический (квантовый) подход, т. е. рассматриваются матрицы с элементами из некоммутативного координатного кольца; q -пфаффиан вводится индуктивно (свойство разложения по строке берётся за определение). В работе [19] N. Jing и J. Zhang, опять же в рамках квантового подхода, устанавливают связь между q -определителем и q -пфаффианом. В качестве теоремы приводится выражение квантового пфаффиана через квантовую алгебру Грассмана (по аналогии с классическим случаем). В одной из своих следующих работ [20] данные авторы вводят понятие квантового гафниана и рассматривают некоторые его свойства, например связь с квантовым перманентом.

Предметом исследования данной работы также является q -гафниан. Но мы рассматриваем его не в рамках квантового подхода, а делаем акцент на комбинаторных свойствах (в духе работ [7–9]). Работа организована следующим образом. В п. 1 мы даём определение q -гафниана и приводим его комбинаторные интерпретации на языке перестановок и теории графов. В п. 2 приводятся простейшие свойства q -гафниана и демонстрируется их применение на некоторых характерных примерах. В п. 3 рассматривается двухпараметрический вариант q -гафниана.

1. Определение q -гафниана и комбинаторный смысл

Пусть K — поле нулевой характеристики; $K[q]$ — кольцо многочленов от одной переменной q над K ; $\text{Sym}_n(K)$ — множество симметричных $(n \times n)$ -матриц над K ; S_n — множество перестановок из n элементов. Перестановка $\rho \in S_n$ имеет инверсию на паре элементов $\rho(i)$ и $\rho(j)$, если целые числа $\rho(i) - \rho(j)$ и $i - j$ имеют противоположные знаки. Общее число инверсий перестановки ρ будем обозначать через $\ell(\rho)$. Пусть n — чётное натуральное число ($n = 2m$). Через $\mathcal{P}_n$ обозначим множество перестановок $\sigma \in S_n$ вида

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \dots & i_m & j_m \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ и $i_k < j_k$ для всех k от 1 до m . Будем записывать такие перестановки в виде $\sigma = (i_1, j_1; i_2, j_2; \dots; i_m, j_m)$. Как следует из определения, инверсии в таких перестановках могут возникать только на парах элементов j_k и i_l при $k < l$ и на парах различных элементов j_k и j_l .

Пусть $A = (a_{ij}) \in \text{Sym}_n(K)$. Назовём q -гафнианом функцию

$$\text{Hf}_q : \text{Sym}_n(K) \rightarrow K[q], \quad \text{Hf}_q(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} q^{\ell(\sigma)} a_\sigma, \quad (2)$$

где $a_\sigma = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_m j_m}$. Так, например, если $A \in \text{Sym}_4(K)$, то $\text{Hf}_q(A) = a_{12} a_{34} + q a_{13} a_{24} + q^2 a_{14} a_{23}$. Название оправдывает себя тем, что если мы подставим $q = 1$ в (2), то получим определение обычного гафниана [21]. При $q = -1$ формально получаем определение пфаффиана [22, с. 2087] с той оговоркой, что пфаффиан обычно задаётся на кососимметричных матрицах.

Определим комбинаторный смысл q -гафниана. Каждой перестановке вида (1) можно однозначно сопоставить симметричную $(0, 1)$ -матрицу порядка n по следующему правилу: элементы матрицы с индексами (i_k, j_k) , (j_k, i_k) , $k = 1, 2, \dots, m$, равны 1, а все остальные элементы равны 0. Назовём такую матрицу матрицей соответствующей перестановки (отметим, что это определение отличается от общепринятого). Так, перестановке $(1, 3; 2, 4)$ однозначно соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть A — симметричная $(0, 1)$ -матрица порядка n . Тогда она задаёт некоторое семейство перестановок $\mathcal{P}_A \subset \mathcal{P}_n$, а именно: в это семейство входят те и только те перестановки из $\mathcal{P}_n$, матрицы которых поэлементно не превосходят A . Нетрудно видеть, что $\text{Hf}_q(A)$ является производящей функцией количества перестановок из $\mathcal{P}_A$ с заданным числом инверсий:

$$\text{Hf}_q(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_A} q^{\ell(\sigma)}. \quad (3)$$

Дадим комбинаторную интерпретацию q -гафниана на языке теории графов. Пусть n — чётное натуральное число. *Дуговой диаграммой* на n вершинах назовём 1-регулярный граф, вершины которого пронумерованы числами от 1 до n и равномерно расположены в возрастающем порядке слева направо вдоль отрезка горизонтальной прямой, а рёбра изображены в виде дуг. Высота каждой дуги (максимальная длина перпендикуляра, опущенного из точки дуги на прямую, проходящую через все вершины диаграммы) пропорциональна расстоянию между вершинами, которые соединяет дуга (рис. 1). Такие диаграммы называют также линейными хордовыми диаграммами [23, 24] или просто линейными диаграммами [25]. Ребро дуговой диаграммы, соединяющее вершины с номерами i и j ($i < j$), будем обозначать через (i, j) ; длиной ребра назовём число $j - i$. Множество всех дуговых диаграмм на n вершинах обозначим через $\mathcal{D}_n$.

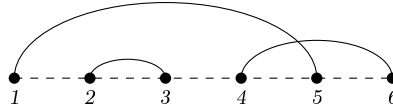


Рис. 1. Дуговая диаграмма на шести вершинах

Каждой перестановке $\sigma = (i_1, j_1; i_2, j_2; \dots; i_m, j_m)$ из $\mathcal{P}_n$ взаимно-однозначно соответствует дуговая диаграмма из $\mathcal{D}_n$ с рёбрами (i_k, j_k) , $k = 1, \dots, m$. Так, перестановка $(1, 5; 2, 3; 4, 6)$ соответствует диаграмме на рис. 1. Соответственно любая $(0, 1)$ -матрица $A \in \text{Sym}_n(K)$ задаёт некоторое семейство дуговых диаграмм на n вершинах. Обозначим это семейство через $\mathcal{D}_A$.

Пусть $k < l$. Из определения следует, что возможны три варианта взаимного расположения двух пар смежных индексов (i_k, j_k) и (i_l, j_l) :

- 1) $i_k < j_k < i_l < j_l$. В этом случае перестановка σ не имеет инверсий на данных индексах, а в соответствующей диаграмме ребро (i_k, j_k) расположено полностью левее ребра (i_l, j_l) (рис. 2, а);
- 2) $i_k < i_l < j_k < j_l$. В этом случае перестановка σ имеет инверсию на индексах j_k и i_l , а в диаграмме рёбра (i_k, j_k) и (i_l, j_l) пересекаются (рис. 2, б);
- 3) $i_k < i_l < j_l < j_k$. В этом случае перестановка σ имеет инверсии на индексах j_k и i_l и на индексах j_k и j_l . В диаграмме ребро (i_k, j_k) накрывает ребро (i_l, j_l) (или, по-другому, ребро (i_l, j_l) вложено в ребро (i_k, j_k)) (рис. 2, в).

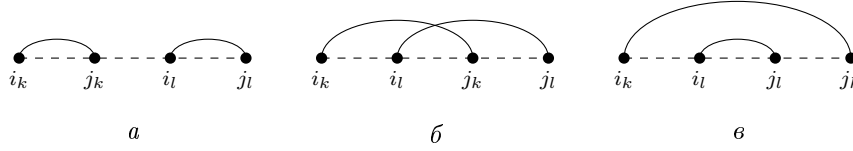


Рис. 2. Взаимное расположение двух рёбер дуговой диаграммы

Пусть δ — дуговая диаграмма. Обозначим через $s(\delta)$ общее количество взаимных пересечений рёбер, а через $t(\delta)$ — общее количество взаимных вложений-накрытий рёбер диаграммы δ . Из вышесказанного следует, что $\text{Hf}_q(A)$ является производящей функцией количества дуговых диаграмм из $\mathcal{D}_A$ с заданным числом $s(\delta) + 2t(\delta)$:

$$\text{Hf}_q(A) = \sum_{\delta \in \mathcal{D}_A} q^{s(\delta) + 2t(\delta)}. \quad (4)$$

В заключение данного пункта отметим, что если рассматривать кольцо многочленов от переменной q как множество всевозможных значений q -гафниана и профакторизовать его по идеалу, порождённому q^2 , то получим частный случай приведённых интерпретаций, связанный с перечислением чётных и нечётных перестановок и перечислением диаграмм с чётным и нечётным числом пересечений дуг. На примере сходных с дуговыми хордовых диаграмм и с использованием другой техники данный частный случай рассмотрен в работе [17].

2. Свойства q -гафниана

Напомним, что если $B = (b_{ij})$ — произвольная $(m \times m)$ -матрица над полем K , то её q -перманентом называется следующий многочлен от переменной q над K :

$$\text{per}_q(B) = \sum_{\rho \in S_m} q^{\ell(\rho)} b_{1\rho(1)} b_{2\rho(2)} \dots b_{m\rho(m)}.$$

Утверждение 1.

1) Пусть $A = (a_{ij}) \in \text{Sym}_n(K)$. Тогда справедливо следующее разложение q -гафниана по первой строке:

$$\text{Hf}_q(A) = \sum_{k=2}^n q^{k-2} a_{1k} \text{Hf}_q(A(1, k)).$$

Здесь $A(1, k)$ — матрица, получаемая из A вычеркиванием строк и столбцов с номерами 1 и k .

2) Пусть A — симметричная блочно-диагональная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\text{Hf}_q(A) = \text{Hf}_q(A_1) \text{Hf}_q(A_2) \dots \text{Hf}_q(A_k).$$

3) q -Гафниан матрицы не меняется при её отражении относительно побочной диагонали:

$$\text{Hf}_q(A) = \text{Hf}_q(JA^T J),$$

где J — перъединичная матрица, т. е. матрица с единицами на побочной диагонали и остальными нулевыми элементами.

4) Рассмотрим симметричную $(2m \times 2m)$ -матрицу над полем K вида

$$A = \begin{pmatrix} C & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix},$$

где B — произвольная $(m \times m)$ -матрица; C — произвольная симметричная $(m \times m)$ -матрица. Справедливо равенство

$$\text{Hf}_q(A) = q^{m(m-1)/2} \text{per}_q(B).$$

Доказательство.

1) По определению любая перестановка из $\mathcal{P}_n$ имеет вид $(1, k; \dots)$, $2 \leq k \leq n$. Уберём в этой перестановке пару индексов 1 и k , а оставшиеся индексы перенумеруем числами от 1 до $n - 2$ в порядке возрастания, начиная с самого маленького индекса. В результате получим некоторую перестановку из $\mathcal{P}_{n-2}$. Например, из перестановки $(1, 4; 2, 5; 3, 6) \in \mathcal{P}_6$ при таком преобразовании получим перестановку $(1, 3; 2, 4) \in \mathcal{P}_4$. Очевидно, что индекс k образует в исходной перестановке инверсии с индексами $2, 3, \dots, k - 1$: всего $k - 2$ инверсии. Также очевидно, что при перенумерации новых инверсий не появляется, а имеющиеся не пропадают. Поэтому новая перестановка содержит на $k - 2$ инверсии меньше, чем исходная. Обозначим через $\mathcal{P}_{n,k}$ множество перестановок из $\mathcal{P}_n$ вида $(1, k; \dots)$, а общий элемент матрицы $A(1, k)$ обозначим через $a(1, k)_{i,j}$. Тогда можем записать

$$\text{Hf}_q(A) = \sum_{k=2}^n \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{n,k}} q^{\ell(\sigma)} a_\sigma = \sum_{k=2}^n q^{k-2} a_{1k} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{n-2}} q^{\ell(\sigma)} a(1, k)_\sigma = \sum_{k=2}^n q^{k-2} a_{1k} \text{Hf}_q(A(1, k)).$$

2) Данное свойство непосредственно следует из определения q -гафниана.

3) Рассмотрим слагаемое $q^{\ell(\sigma)} a_\sigma$ из представления (2) q -гафниана $\text{Hf}_q(A)$. При отражении матрицы A относительно побочной диагонали оно «перейдёт» в некоторое слагаемое $q^{\ell(\sigma')} a_{\sigma'}$ q -гафниана $\text{Hf}_q(JA^T J)$. При этом, очевидно, $a_\sigma = a_{\sigma'}$. Перестановка σ' получается из перестановки $\sigma = (i_1, j_1; i_2, j_2; \dots; i_m, j_m)$ заменой всех пар (i_k, j_k) на пары $(n - j_k + 1, n - i_k + 1)$ и упорядочиванием их слева направо по возрастанию по первому индексу. Нетрудно видеть, что общее число инверсий в перестановке σ равно общему числу инверсий в перестановке σ' . Таким образом, $q^{\ell(\sigma)} a_\sigma = q^{\ell(\sigma')} a_{\sigma'}$. Отсюда следует, что q -гафниан не меняется при отражении матрицы относительно побочной диагонали.

4) Рассмотрим произвольную перестановку $(i_1, j_1; i_2, j_2; \dots; i_m, j_m) \in \mathcal{P}_{2m}$. Предположим, что $i_k > m$ для некоторого k . Тогда $j_k > m$ по определению $\mathcal{P}_{2m}$. Но в этом случае элемент $a_{i_k j_k}$ матрицы A равен 0. Таким образом, мономы, содержащие такие элементы, можно не учитывать и считать, что $i_k \leq m$. А так как по определению индексы i_k упорядочены по возрастанию, то $i_k = k$, $j_k > m$ для любого k . Отсюда следует, что матрица C не оказывает никакого влияния на значение q -гафниана.

Рассмотрим перестановку $\sigma = (1, j_1; 2, j_2; \dots; m, j_m)$. В данном случае каждый индекс j_k образует $m - k$ инверсий с индексами $k + 1, k + 2, \dots, m$; общее число таких инверсий в перестановке равно $m(m - 1)/2$. Кроме этого, инверсии могут быть между различными индексами j_k . Пусть $B = (b_{ij})$. Сделаем замену $l_k = j_k - m$. Тогда l_k принимают значения от 1 до m и $a_{k j_k} = b_{kl_k}$, $k = 1, 2, \dots, m$. При этом очевидно, что число

инверсий между индексами l_k равно числу инверсий между индексами j_k . Рассмотрим перестановку $\rho \in S_m$, такую, что $\rho(k) = l_k$. Из сказанного следует, что числа инверсий перестановок σ и ρ связаны соотношением $\ell(\sigma) = \ell(\rho) + m(m-1)/2$. Отсюда получаем

$$\text{Hf}_q(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} q^{\ell(\sigma)} a_\sigma = \sum_{\rho \in S_m} q^{\ell(\rho) + m(m-1)/2} b_{1\rho(1)} b_{2\rho(2)} \dots b_{m\rho(m)} = q^{m(m-1)/2} \text{per}_q(B).$$

Утверждение 1 доказано. ■

Замечание 1. В силу симметричности матрицы A и свойства 3 аналоги свойства 1 справедливы для разложения q -гафниана по первому столбцу, а также по последней строке и последнему столбцу.

Пример 1. Вычислим q -гафниан матрицы n -го порядка $\mathbf{1}_n$, все элементы которой равны 1:

$$\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с приведённым в п.1 правилом матрица $\mathbf{1}_n$ задаёт множество всех перестановок $\mathcal{P}_n$ или множество $\mathcal{D}_n$ всех дуговых диаграмм на n вершинах. Соответственно q -гафниан такой матрицы является производящей функцией числа перестановок вида (1) с заданным числом инверсий или производящей функцией числа дуговых диаграмм δ на n вершинах с заданным числом $s(\delta) + 2t(\delta)$. Раскладывая q -гафниан по первой строке, получаем следующее равенство:

$$\text{Hf}_q(\mathbf{1}_n) = (1 + q + q^2)(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) \dots (1 + q + \dots + q^{n-2}).$$

Выражение в правой части данного равенства является q -аналогом двойного факториала нечётного числа $n-1$ и обозначается через $[n-1]_q!!$. Таким образом, с учётом (3) и (4) можем записать

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} q^{\ell(\sigma)} = \sum_{\delta \in \mathcal{D}_n} q^{s(\delta) + 2t(\delta)} = [n-1]_q!!$$

Пример 2. Рассмотрим класс дуговых диаграмм на n вершинах, которые содержат только дуги смежных длин k или $k+1$ для некоторого целого $k \geq 1$. Класс таких диаграмм задаётся симметричной теплицевой $(0,1)$ -матрицей n -го порядка, у которой в первой строке единичные элементы стоят только в столбцах с номерами из множества $\{2, 3, \dots, n\} \cap \{k+1, k+2\}$. Например, если $k=1$, то такая матрица 4-го порядка имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в таких диаграммах нет вложений (накрытий) дуг (рис. 2, *в*), поэтому в силу формулы (4) q -гафниан $(0,1)$ -матрицы, задающей соответствующий класс, перечисляет дуговые диаграммы данного класса с заданным числом пересечений дуг (рис. 2, *б*).

При $k = 1$ обозначим q -гафниан матрицы рассматриваемого типа порядка $2m$ через $\text{Hf}_q(m)$. Применяя правило разложения q -гафниана по первой строке, приходим к следующему рекуррентному соотношению:

$$\text{Hf}_q(m+2) = \text{Hf}_q(m+1) + q\text{Hf}_q(m), \quad \text{Hf}_q(1) = 1, \quad \text{Hf}_q(2) = 1 + q.$$

Таким образом, в данном случае последовательность q -гафнианов представляет собой последовательность одного из типов многочленов Фибоначчи [26, 27].

3. Двупараметрический q -гафниан

Понятие q -гафниана можно естественным образом обобщить на большее число параметров. Для описания аналога свойства разложения по строке необходимо в данном случае расширить область определения гафниана и рассматривать его не над матрицами с элементами из поля, а над матрицами с элементами из кольца многочленов.

Пусть q_1, q_2 — два формальных параметра; $K[q_1, q_2]$ — кольцо многочленов от q_1 и q_2 над полем K ; $A = (a_{ij}) \in \text{Sym}_n(K[q_1, q_2])$. Назовём *двупараметрическим q -гафнианом* следующую функцию:

$$\text{Hf}_{q_1, q_2} : \text{Sym}_n(K[q_1, q_2]) \rightarrow K[q_1, q_2], \quad \text{Hf}_{q_1, q_2}(A) = \sum_{\delta \in \mathcal{D}_n} q_1^{s(\delta)} q_2^{t(\delta)} a_\delta.$$

Здесь суммирование идёт по всем дуговым диаграммам на $n = 2m$ вершинах; через $s(\delta)$ и $t(\delta)$, как и раньше, обозначено общее количество взаимных пересечений рёбер и общее количество взаимных вложений-накрытий рёбер диаграммы δ соответственно; $a_\delta = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_m j_m}$ для диаграммы δ с рёбрами $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \dots (i_m, j_m)$.

Из определения следует, что если $\mathcal{D}_A$ — семейство дуговых диаграмм, задаваемое симметричной $(0, 1)$ -матрицей A , то $\text{Hf}_{q_1, q_2}(A)$ является производящей функцией числа дуговых диаграмм из $\mathcal{D}_A$ с заданным числом пересечений и вложений рёбер:

$$\text{Hf}_{q_1, q_2}(A) = \sum_{\delta \in \mathcal{D}_A} q_1^{s(\delta)} q_2^{t(\delta)}. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что для функции Hf_{q_1, q_2} сохраняются свойства 2 и 3 функции Hf_q из утверждения 1. Для того чтобы получить аналог разложения по первой строке, заметим, что вычёркивание строк и столбцов с номерами 1 и k разбивает матрицу A на три области (рис. 3). В первой области расположены недиагональные элементы a_{ij} , один из индексов которых находится в промежутке от 1 до k , а второй больше k : $1 < i < k < j$ или $1 < j < k < i$. С точки зрения дуговых диаграмм ребро (i, j) (или (j, i)) пересекается с ребром $(1, k)$. Умножим все элементы этой области на формальный параметр q_1 . Во второй области расположены недиагональные элементы a_{ij} , номера строк и столбцов которых находятся в промежутке между 1 и k : $1 < i < j < k$ или $1 < j < i < k$. С точки зрения дуговых диаграмм ребро (i, j) (или (j, i)) накрыто ребром $(1, k)$. Умножим все элементы этой области на формальный параметр q_2 . В третьей области расположены недиагональные элементы a_{ij} , номера строк и столбцов которых больше k . С точки зрения дуговых диаграмм ребро (i, j) (или (j, i)) не пересекается с ребром $(1, k)$, не накрывает его и не накрывается им. Элементы этой области оставляем без изменения.

Обозначим через $A(1, k, q_1, q_2)$ матрицу, получаемую из A вычёркиванием строк и столбцов с номерами 1 и k и умножением оставшихся элементов на формальные параметры q_1, q_2 указанным способом. Тогда

$$\text{Hf}_{q_1, q_2}(A) = \sum_{k=2}^n a_{1k} \text{Hf}_{q_1, q_2}(A(1, k, q_1, q_2)). \quad (6)$$

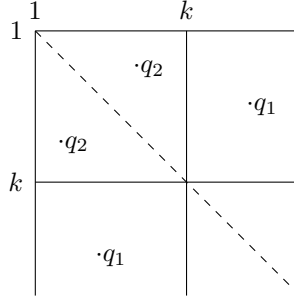


Рис. 3. Правило умножения элементов матрицы на параметры q_1 и q_2 при разложении двухпараметрического q -гафниана по первой строке

Продemonстрируем свойство (6) на примере, вычислив с помощью разложения по первой строке двухпараметрический q -гафниан матриц $\mathbf{1}_4$ и $\mathbf{1}_6$.

Пример 3. Разложение $\text{Hf}_{q_1, q_2}(\mathbf{1}_4)$ по первой строке даёт следующий результат:

$$\text{Hf}_{q_1, q_2}(\mathbf{1}_4) = \text{Hf}_{q_1, q_2}(\mathbf{1}_2) + \text{Hf}_{q_1, q_2} \begin{pmatrix} 1 & q_1 \\ q_1 & 1 \end{pmatrix} + \text{Hf}_{q_1, q_2} \begin{pmatrix} 1 & q_2 \\ q_2 & 1 \end{pmatrix} = 1 + q_1 + q_2.$$

Раскладывая $\text{Hf}_{q_1, q_2}(\mathbf{1}_6)$ по первой строке, получаем

$$\begin{aligned} \text{Hf}_{q_1, q_2}(\mathbf{1}_6) = & \text{Hf}_{q_1, q_2}(\mathbf{1}_4) + \text{Hf}_{q_1, q_2} \begin{pmatrix} 1 & q_1 & q_1 & q_1 \\ q_1 & 1 & 1 & 1 \\ q_1 & 1 & 1 & 1 \\ q_1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \text{Hf}_{q_1, q_2} \begin{pmatrix} 1 & q_2 & q_1 & q_1 \\ q_2 & 1 & q_1 & q_1 \\ q_1 & q_1 & 1 & 1 \\ q_1 & q_1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \\ & + \text{Hf}_{q_1, q_2} \begin{pmatrix} 1 & q_2 & q_2 & q_1 \\ q_2 & 1 & q_2 & q_1 \\ q_2 & q_2 & 1 & q_1 \\ q_1 & q_1 & q_1 & 1 \end{pmatrix} + \text{Hf}_{q_1, q_2} \begin{pmatrix} 1 & q_2 & q_2 & q_2 \\ q_2 & 1 & q_2 & q_2 \\ q_2 & q_2 & 1 & q_2 \\ q_2 & q_2 & q_2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Продолжая раскладывать вновь получающиеся двухпараметрические q -гафнианы по первой строке и приводя подобные слагаемые, получаем следующее выражение:

$$\text{Hf}_{q_1, q_2}(\mathbf{1}_6) = 1 + 2q_1 + 2q_2 + 2q_1q_2 + q_1^2 + q_2^2 + 2q_1q_2^2 + 2q_1^2q_2 + q_1^3 + q_2^3.$$

Согласно (5), данное выражение представляет собой производящую функцию числа дуговых диаграмм на шести вершинах с заданным числом пересечений и накрытий рёбер. Например, присутствие слагаемого $2q_1^2q_2$ говорит о том, что имеется всего две дуговые диаграммы на шести вершинах с двумя пересечениями рёбер и одним накрытием. Эти диаграммы приведены на рис. 4.



Рис. 4. Дуговые диаграммы на шести вершинах с двумя пересечениями рёбер и одним накрытием

Заметим, что многочлены $\text{Hf}_{q_1, q_2}(\mathbf{1}_4)$ и $\text{Hf}_{q_1, q_2}(\mathbf{1}_6)$ являются симметрическими. Как показано в [28], это свойство справедливо для любой матрицы $\mathbf{1}_n$.

Заклучение

Мы рассмотрели одно- и двухпараметрические q -аналоги гафниана, дали их комбинаторную интерпретацию и доказали несколько свойств. В соответствии с концепцией q -математики при значениях параметров, равных единице, мы приходим к известным свойствам обычного гафниана. q -Аналоги по сравнению со стандартным случаем позволяют проводить более «тонкий» комбинаторный анализ. Отметим, что с вычислительной точки зрения задача нахождения значения гафниана или эквивалентная ей задача определения числа паросочетаний в графе в общем случае являются труднорешаемыми [29, 30]. Соответственно определение значения q -гафниана представляет собой задачу не меньшей вычислительной сложности. Представленный материал, помимо чисто теоретического интереса, может быть использован для построения алгоритмов, вычисляющих q -гафниан или изучающих статистики числа инверсий определённых классов перестановок и числа взаимных пересечений и вложений рёбер некоторых классов дуговых диаграмм. Дуговые (или идентичные им хордовые) диаграммы часто выступают в качестве удобной математической модели, например при кодировании топологических узлов [31] или визуализации вторичной структуры молекул РНК [32, 33]. Поэтому рассмотренные вопросы перечисления дуговых диаграмм, возможно, смогут найти применение в различных разделах математики или других науках, например биоинформатике.

Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное прочтение статьи и ряд полезных замечаний и рекомендаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982. 384 с.
2. Смирнов Е. Ю. Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакопеременные матрицы. М.: МЦНМО, 2014. 64 с.
3. Игнатьев М. В. Квантовая комбинаторика // Матем. просв. Сер. 3. 2014. Вып. 18. С. 66–111.
4. Haglund J. The q, t -Catalan Numbers and the Space of Diagonal Harmonics. AMS, 2007. 167 p.
5. Manin Yu. I. Quantum Groups and Non-Commutative Geometry. Montréal: CRM, 1988. 91 p.
6. Демидов Е. Е. Квантовые группы. М.: Факториал, 1998. 128 с.
7. Yang K. -W. q -Determinants and permutations // Fibonacci Quart. 1991. V. 29. No. 2. P. 160–163.
8. Tagawa H. A multivariable quantum determinant over a commutative ring // RIMS Kôkyûroku. 1991. V. 765. P. 91–103.
9. Shevelev V. Combinatorial minors for matrix functions and their applications // Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Seria: Matematyka Stosowana. 2014. No. 4. P. 5–16.
10. Bapat R. B. and Lal A. K. Inequalities for the q -permanent // Linear Algebra Appl. 1994. V. 197/198. P. 397–409.
11. Lal A. K. Inequalities for the q -permanent. II // Linear Algebra Appl. 1998. V. 274. P. 1–16.
12. Da Fonseca C. M. The μ -permanent of a tridiagonal matrix, orthogonal polynomials, and chain sequences // Linear Algebra Appl. 2010. V. 432. P. 1258–1266.
13. Da Fonseca C. M. The μ -permanent, a new graph labeling, and a known integer sequence // Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie. 2018. V. 61(109). No. 3. P. 255–262.

14. *De Sá E. M.* Noncrossing partitions, noncrossing graphs, and q -permanental equations // Linear Algebra Appl. 2018. V. 541. P. 36–53.
15. *De Sá E. M.* Linear preservers for the q -permanent, cycle q -permanent expansions, and positive crossings in digraphs // Linear Algebra Appl. 2019. V. 561. P. 228–252.
16. *Kocharovsky Vit. V., Kocharovsky V. V., and Tarasov S. V.* The Hafnian Master Theorem // Linear Algebra Appl. 2022. V. 651. P. 144–161.
17. *Efimov D. B.* Enumeration of even and odd chord diagrams // J. Appl. Industr. Math. 2024. V. 18. No. 2. P. 216–226.
18. *Strickland E.* Classical invariant theory for the quantum symplectic group // Adv. Math. 1996. V. 123. P. 78–90.
19. *Jing N. and Zhang J.* Quantum Pfaffians and hyper-Pfaffians // Adv. Math. 2014. V. 265. P. 336–361.
20. *Jing N. and Zhang J.* Quantum permanents and Hafnians via Pfaffians // Lett. Math. Phys. 2016. V. 106. P. 1451–1464.
21. *Barvinok A.* Combinatorics and Complexity of Partition Functions. Cham: Springer, 2016. 309 p.
22. *Tribe R. and Zaboronski O.* Pfaffian formulae for one dimensional coalescing and annihilating systems // Electronic J. Probability. 2011. V. 16. P. 2080–2103.
23. *Sullivan E.* Linear chord diagrams with long chords // Electronic J. Combinatorics. 2017. V. 24. No. 4. Article #P4.20.
24. *Cameron N. T. and Killpatrick K.* Statistics on linear chord diagrams // Discrete Math. Theoret. Computer Sci. 2019. V. 21. No. 2. Article #11.
25. *Краско Е. С., Лабутин И. Н., Омельченко А. В.* Перечисление помеченных и непомеченных гамильтоновых циклов в полных k -дольных графах // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2019. Т. 488. С. 119–142.
26. *Nalli A. and Haukkanen P.* On generalized Fibonacci and Lucas polynomials // Chaos, Solitons and Fractals. 2009. V. 42. P. 3179–3186.
27. *Bednarz U. and Wołowicz-Musiał M.* Distance Fibonacci polynomials // Symmetry. 2020. V. 12. No. 9. P. 1540.
28. *Klazar M.* On identities concerning the numbers of crossing and nesting of two edges in matchings // SIAM J. Discret. Math. 2005. V. 20. P. 960–976.
29. *Björklund A., Gupt B., and Quesada N.* A faster Hafnian formula for complex matrices and its benchmarking // J. Experimental Algorithmics. 2019. V. 24. Art. No. 1.11. P. 1–17.
30. *Perepechko S. N.* Counting near-perfect matchings on $C_m \times C_n$ tori of odd order in the Maple system // Programming and Computer Software. 2019. V. 45. No. 2. P. 65–72.
31. *Chmutov S., Duzhin S., and Mostovoy J.* Introduction to Vassiliev Knot Invariants. Cambridge University Press, 2012. 504 p.
32. *Reidys C.* Combinatorial Computational Biology of RNA. N.Y.: Springer, 2011. 257 p.
33. *Léger S., Costa M. B. W., and Tulpan D.* Pairwise visual comparison of small RNA secondary structures with base pair probabilities // BMC Bioinformatics. 2019. V. 20. Article No. 293.

REFERENCES

1. *Sachkov V. N.* Vvedenie v kombinatornye metody diskretnoy matematiki. [Introduction to Combinatorial Methods of Discrete Mathematics]. Moscow, Nauka, 1982. 384 p. (in Russian)
2. *Smirnov E. Yu.* Diagrammy Yunga, ploskie razbieniya i znakocheduyushchiesya matritsy [Young Diagrams, Flat Partitions and Alternating Matrices]. Moscow, MCCME, 2014. 64 p. (in Russian)

3. *Ignat'ev M. V.* Kvantovaya kombinatorika [Quantum combinatorics]. Matem. Prosv., ser. 3, 2014, vol. 18, pp. 66–111. (in Russian)
4. *Haglund J.* The q, t -Catalan Numbers and the Space of Diagonal Harmonics. AMS, 2007. 167 p.
5. *Manin Yu. I.* Quantum Groups and Non-Commutative Geometry. Montréal, CRM, 1988. 91 p.
6. *Demidov E. E.* Kvantovye gruppy [Quantum Groups]. Moscow, Factorial, 1998. 128 p. (in Russian)
7. *Yang K. -W.* q -Determinants and permutations. Fibonacci Quart., 1991, vol. 29, no. 2, pp. 160–163.
8. *Tagawa H.* A multivariable quantum determinant over a commutative ring. RIMS Kôkyûroku, 1991, vol. 765, pp. 91–103.
9. *Shevelev V.* Combinatorial minors for matrix functions and their applications. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Seria: Matematyka Stosowana, 2014, no. 4, pp. 5–16.
10. *Bapat R. B. and Lal A. K.* Inequalities for the q -permanent. Linear Algebra Appl., 1994, vol. 197/198, pp. 397–409.
11. *Lal A. K.* Inequalities for the q -permanent. II. Linear Algebra Appl., 1998, vol. 274, pp. 1–16.
12. *Da Fonseca C. M.* The μ -permanent of a tridiagonal matrix, orthogonal polynomials, and chain sequences. Linear Algebra Appl., 2010, vol. 432, pp. 1258–1266.
13. *Da Fonseca C. M.* The μ -permanent, a new graph labeling, and a known integer sequence. Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, 2018, vol. 61(109), no. 3, pp. 255–262.
14. *De Sá E. M.* Noncrossing partitions, noncrossing graphs, and q -permanental equations. Linear Algebra Appl., 2018, vol. 541, pp. 36–53.
15. *De Sá E. M.* Linear preservers for the q -permanent, cycle q -permanent expansions, and positive crossings in digraphs. Linear Algebra Appl., 2019, vol. 561, pp. 228–252.
16. *Kocharovsky Vit. V., Kocharovsky V. V., and Tarasov S. V.* The Hafnian Master Theorem. Linear Algebra Appl., 2022, vol. 651, pp. 144–161.
17. *Efimov D. B.* Enumeration of even and odd chord diagrams. J. Appl. Industr. Math., 2024, vol. 18, no. 2, pp. 216–226.
18. *Strickland E.* Classical invariant theory for the quantum symplectic group. Adv. Math., 1996, vol. 123, pp. 78–90.
19. *Jing N. and Zhang J.* Quantum Pfaffians and hyper-Pfaffians. Adv. Math., 2014, vol. 265, pp. 336–361.
20. *Jing N. and Zhang J.* Quantum permanents and Hafnians via Pfaffians. Lett. Math. Phys., 2016, vol. 106, pp. 1451–1464.
21. *Barvinok A.* Combinatorics and Complexity of Partition Functions. Cham, Springer, 2016. 309 p.
22. *Tribe R. and Zaboronski O.* Pfaffian formulae for one dimensional coalescing and annihilating systems. Electronic J. Probability, 2011, vol. 16, pp. 2080–2103.
23. *Sullivan E.* Linear chord diagrams with long chords. Electronic J. Combinatorics, 2017, vol. 24, no. 4, article #P4.20.
24. *Cameron N. T. and Killpatrick K.* Statistics on linear chord diagrams. Discrete Math. Theoret. Computer Sci., 2019, vol. 21, no. 2, article #11.
25. *Krasko E. S., Labutin I. N., and Omel'chenko A. V.* Perechislenie pomechennyh i nepomechennyh gamiltonovykh ciklov v polnykh k -dol'nykh grafah [Enumeration of labeled and unlabeled Hamiltonian cycles in complete k -partite graphs]. Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, 2019, vol. 488, pp. 119–142. (in Russian)

-
26. *Nalli A. and Haukkanen P.* On generalized Fibonacci and Lucas polynomials. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, vol. 42, pp. 3179–3186.
 27. *Bednarz U. and Wołowiec-Musiak M.* Distance Fibonacci polynomials. *Symmetry*, 2020, vol. 12, no. 9, pp. 1540.
 28. *Klazar M.* On identities concerning the numbers of crossing and nesting of two edges in matchings. *SIAM J. Discret. Math.*, 2005, vol. 20, pp. 960–976.
 29. *Björklund A., Gupt B., and Quesada N.* A faster Hafnian formula for complex matrices and its benchmarking. *J. Experimental Algorithmics*, 2019, vol. 24, art. no. 1.11, pp. 1–17.
 30. *Perepechko S. N.* Counting near-perfect matchings on $C_m \times C_n$ tori of odd order in the Maple system. *Programming and Computer Software*, 2019, vol. 45, no. 2, pp. 65–72.
 31. *Chmutov S., Duzhin S., and Mostovoy J.* Introduction to Vassiliev Knot Invariants. Cambridge University Press, 2012. 504 p.
 32. *Reidys C.* Combinatorial Computational Biology of RNA. N.Y., Springer, 2011. 257 p.
 33. *Léger S., Costa M. B. W., and Tulpan D.* Pairwise visual comparison of small RNA secondary structures with base pair probabilities. *BMC Bioinformatics*, 2019, vol. 20, article no. 293.