

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.172.3

DOI 10.17223/20710410/69/7

ЯВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СЕМЕЙСТВ
СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ОРГРАФОВ С ПАРАМЕТРАМИ

$$((v + (2^{n+1} - 4)t)2^{n-1}, k + (2^n - 2)t, t, \lambda, t)$$

В. А. Бызов, И. А. Пушкарев

*Вятский государственный университет, г. Киров, Россия***E-mail:** vbyzov@yandex.ru, god_sha@mail.ru

Описана явная конструкция бесконечных последовательностей сильно регулярных орграфов с наборами параметров $((v + (2^{n+1} - 4)t)2^{n-1}, k + (2^n - 2)t, t, \lambda, t)$. Для поиска начальных орграфов использована компьютерная программа, остальные члены последовательности получены с помощью рекуррентного алгоритма. Найдено 11 семейств сильно регулярных орграфов. В частности, эти семейства содержат орграфы $\text{dsrg}(40, 10, 3, 1, 3)$, $\text{dsrg}(72, 18, 5, 3, 5)$, $\text{dsrg}(76, 19, 5, 4, 5)$, $\text{dsrg}(92, 23, 6, 5, 6)$ и $\text{dsrg}(104, 26, 7, 5, 7)$, вопрос существования которых ранее был открыт.

Ключевые слова: *сильно регулярный орграф, рекуррентная последовательность, обменная матрица, произведение Кронекера, Artelys Knitro.*

EXPLICIT CONSTRUCTION OF INFINITE FAMILIES OF STRONGLY
REGULAR DIGRAPHS WITH PARAMETERS

$$((v + (2^{n+1} - 4)t)2^{n-1}, k + (2^n - 2)t, t, \lambda, t)$$

V. A. Byzov, I. A. Pushkarev

Vyatka State University, Kirov, Russia

An explicit construction of infinite sequences of strongly regular graphs with parameter sets $((v + (2^{n+1} - 4)t)2^{n-1}, k + (2^n - 2)t, t, \lambda, t)$ is described. A computer program was used to find the initial digraphs. The remaining terms of the sequence are obtained automatically by the constructed recurrent algorithm. Using the described approach, 11 families of strongly regular graphs have been found. In particular, these families contain digraphs $\text{dsrg}(40, 10, 3, 1, 3)$, $\text{dsrg}(72, 18, 5, 3, 5)$, $\text{dsrg}(76, 19, 5, 4, 5)$, $\text{dsrg}(92, 23, 6, 5, 6)$ and $\text{dsrg}(104, 26, 7, 5, 7)$, the question of the existence of which was previously open.

Keywords: *strongly regular digraph, recurrent sequence, exchange matrix, Kronecker product, Artelys Knitro.*

Введение

В работе описан способ, при помощи которого построено несколько бесконечных семейств орграфов. Дадим необходимые понятия и обозначения.

Рассматриваются ориентированные графы (орграфы) без петель и кратных дуг одного направления. Матрицей смежности орграфа называется булева матрица, в которой единица стоит на пересечении i -й строки и j -го столбца, если и только если в орграфе есть дуга от вершины i к вершине j . Будем использовать следующие стандартные обозначения для матриц специального вида:

- 1) I_m — единичная матрица порядка m ;
- 2) J_m — квадратная матрица порядка m , состоящая только из единиц;
- 3) $J_{m,l}$ — прямоугольная матрица размера $m \times l$, состоящая только из единиц;
- 4) K_m — обменная матрица порядка m , то есть квадратная матрица порядка m , в которой на побочной диагонали стоят единицы, а во всех остальных позициях — нули. Другими словами, $K_m(i, j) = \delta_{m+1-i, j}$, где δ — символ Кронекера.

Через $A \otimes B$ будем обозначать произведение Кронекера матриц A и B .

Понятие сильно регулярного орграфа является обобщением концепции сильно регулярного графа [1, 2]. Впервые оно, насколько нам известно, было дано А. М. Дювалем (A. M. Duval) в [3].

Определение 1. Сильно регулярным ориентированным графом с набором параметров (v, k, t, λ, μ) называется орграф на v вершинах, в котором выполняются следующие условия:

- 1) полустепень исхода и полустепень захода каждой вершины равны k ;
- 2) для каждой вершины x существует ровно t путей длины два из x в x ;
- 3) для каждой дуги $x \rightarrow y$ количество ориентированных путей из x в y длины два равно λ ;
- 4) для каждой упорядоченной пары вершин (x, y) , не образующей дугу орграфа, количество ориентированных путей из x в y длины два равно μ .

Равносильное определение сильно регулярного орграфа можно дать через набор условий, накладываемых на его матрицу смежности.

Определение 2. Сильно регулярным ориентированным графом с набором параметров (v, k, t, λ, μ) называется орграф, матрица смежности A которого удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} A^2 &= tI_v + \lambda A + \mu(J_v - I_v - A), \\ AJ_v &= J_v A = kJ_v. \end{aligned}$$

Вместо фразы «сильно регулярный орграф с набором параметров (v, k, t, λ, μ) » будем употреблять (как это часто делают) запись $\text{dsrg}(v, k, t, \lambda, \mu)$. Используя данное обозначение, будем иметь в виду не всё множество таких орграфов, а один из них — реализующийся в рамках описываемой конструкции.

В ряде работ (например, [3, 4] и др.) приведён ряд необходимых условий существования сильно регулярных орграфов с набором параметров (v, k, t, λ, μ) . Однако, как и в случае сильно регулярных графов, для большого количества наборов параметров вопрос существования соответствующего сильно регулярного орграфа остаётся открытым. В таблице на сайте [5] систематизируется информация об известных сильно регулярных орграфах и тех наборах параметров (v, k, t, λ, μ) , для которых задача существования сильно регулярного орграфа не решена.

В данной работе описывается приём, который (при определённой доле везения) можно использовать для формирования бесконечного семейства сильно регулярных

орграфов, удовлетворяющих условию $\mu = t$. Конструируемые орграфы устроены рекуррентно: каждый следующий орграф получается из предыдущего члена последовательности. Параметры t , λ и μ всех орграфов в последовательности одинаковые, а количество и степени вершин растут. Будем обозначать через $G_1, G_2, \dots$ сильно регулярные орграфы формируемой последовательности, а через $A_1, A_2, \dots$ — соответствующие матрицы смежности. Значительной трудностью описываемого метода является получение орграфа G_2 из орграфа G_1 : необходимо существование матриц, удовлетворяющих определённому набору условий. При этом нет гарантий, что данные матрицы вообще существуют. На текущем этапе авторы осуществляют поиск этих матриц при помощи компьютерной программы.

Работа имеет следующую структуру. В п. 1 описан способ получения матрицы A_2 через матрицу A_1 . В п. 2 доказано, что при условии существования матриц A_1 и A_2 (нужного вида) можно построить бесконечную последовательность сильно регулярных орграфов. В п. 3 описаны найденные при помощи компьютерной программы семейства орграфов.

1. Получение орграфа G_2

Для дальнейшего изложения понадобится вспомогательная последовательность матриц P_n , определяемая следующим образом:

$$P_n = J_{2^n,1} \otimes K_{2^n} \otimes J_{t,t \cdot 2^n}. \quad (1)$$

Матрицы данной последовательности обладают рядом полезных свойств.

Лемма 1. Матрица P_n , заданная формулой (1), — квадратная матрица порядка $t \cdot 4^n$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $P_n J_{t,4^n} = J_{t,4^n} P_n = t \cdot 2^n J_{t,4^n}$;
- 2) $P_n^2 = t J_{t,4^n}$.

Доказательство. Справедливость первого свойства почти очевидна: в каждой строке и в каждом столбце матрицы P_n по построению содержится ровно $t \cdot 2^n$ единиц.

Для доказательства второго пункта леммы воспользуемся свойствами произведения Кронекера [6]:

$$\begin{aligned} P_n^2 &= ((J_{2^n,1} \otimes K_{2^n}) \otimes J_{t,t \cdot 2^n})(J_{2^n,1} \otimes (K_{2^n} \otimes J_{t,t \cdot 2^n})) = ((J_{2^n,1} \otimes K_{2^n}) J_{2^n,1}) \otimes \\ &\otimes (J_{t,t \cdot 2^n} (K_{2^n} \otimes J_{t,t \cdot 2^n})) = J_{4^n,1} \otimes t J_{t,t \cdot 4^n} = t J_{t,4^n}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана. ■

Пусть G_1 — сильно регулярный орграф с набором параметров (v, k, t, λ, t) , A_1 — его матрица смежности. Известно [3], что должно выполняться условие $t > \lambda$. Введём обозначение $s = t - \lambda$ ($s > 0$). Из определения 2 следует, что матрица A_1 удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} A_1^2 + s A_1 &= t J_v, \\ d A_1 J_v &= J_v A_1 = k J_v. \end{aligned} \quad (2)$$

Найдём второй член последовательности орграфов — $\text{dsrg}(2v + 8t, k + 2t, t, \lambda, t)$. Его матрицу смежности обозначим через A_2 и будем искать её в следующем виде:

$$A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & C_1 & 0 & P_1 \\ C_1 & 0 & P_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где B_1 и C_1 — неизвестные матрицы размеров $v \times 4t$ и $4t \times v$ соответственно. По определению 2 для матрицы A_2 должны выполняться соотношения

$$A_2^2 + sA_2 = tJ_{2v+8t}; \quad (4)$$

$$A_2 J_{2v+8t} = J_{2v+8t} A_2 = (k + 2t) J_{2v+8t}. \quad (5)$$

Используя блочное представление (3) матрицы A_2 , перепишем уравнение (4) в следующем виде:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1^2 + sA_1 & B_1 C_1 & A_1 B_1 + sB_1 & B_1 P_1 \\ \hline B_1 C_1 & A_1^2 + sA_1 & B_1 P_1 & A_1 B_1 + sB_1 \\ \hline P_1 C_1 & C_1 A_1 + sC_1 & P_1^2 & C_1 B_1 + sP_1 \\ \hline C_1 A_1 + sC_1 & P_1 C_1 & C_1 B_1 + sP_1 & P_1^2 \end{array} \right) = tJ_{2v+8t}.$$

Из леммы 1 и соотношения (2) следует, что диагональные блоки полученной блочной матрицы имеют нужный вид. Таким образом, матрицы B_1 и C_1 должны удовлетворять следующей системе матричных уравнений:

$$\begin{cases} B_1 C_1 = tJ_v, \\ B_1 P_1 = tJ_{v,4t}, \\ P_1 C_1 = tJ_{4t,v}, \\ A_1 B_1 + sB_1 = tJ_{v,4t}, \\ C_1 A_1 + sC_1 = tJ_{4t,v}, \\ C_1 B_1 + sP_1 = tJ_{4t}. \end{cases} \quad (6)$$

Кроме того, из (5) и вида матриц A_1 и P_1 следует, что матрицы B_1 и C_1 должны удовлетворять условиям

$$B_1 J_{4t} = 2tJ_{v,4t}, \quad J_v B_1 = kJ_{v,4t}, \quad C_1 J_v = kJ_{4t,v}, \quad J_{4t} C_1 = 2tJ_{4t,v}. \quad (7)$$

Добавим два дополнительных условия, которым должны удовлетворять матрицы B_1 и C_1 . Эти условия не являются необходимыми для существования орграфа G_2 , но понадобятся для формирования следующих орграфов в последовательности:

- 1) если любую строку матрицы B_1 разделить на два блока длины $2t$, то получится ровно один блок, состоящий целиком из единиц, и ровно один блок, состоящий целиком из нулей;
- 2) если любой столбец матрицы C_1 разделить на два блока длины $2t$, то в каждом блоке будет ровно t единиц.

Для удобства назовём данные условия, накладываемые на матрицы B_1 и C_1 , *условиями блочности* этих матриц.

Замечание 1. Если матрицы B_1 и C_1 удовлетворяют условиям блочности, то первые три равенства в (6) выполняются автоматически. Это следует из того, что матрица P_1 тоже удовлетворяет обоим приведённым условиям.

Таким образом, искомые матрицы B_1 и C_1 должны удовлетворять соотношениям в (6) и (7) и условиям блочности. Если удастся найти такие матрицы, то получим матрицу смежности A_2 сильно регулярного орграфа G_2 . В п. 2 показано, как продолжить эту последовательность орграфов.

2. Рекуррентные формулы для построения семейства орграфов

$$\text{dsrg}((v + (2^{n+1} - 4)t)2^{n-1}, k + (2^n - 2)t, t, \lambda, t)$$

Введём новую операцию над матрицами. Пусть X — матрица размера $m \times l$. Обозначим через $\alpha_s(X)$ матрицу, полученную путём взятия первых m/s строк матрицы X (подразумевается, что m делится на s).

Дадим рекуррентное определение последовательности матриц P_n .

Лемма 2. Пусть P'_n — последовательность матриц, заданная следующим образом:

$$P'_1 = J_{2,1} \otimes K_2 \otimes J_{t,2t}, \quad P'_n = J_{2^n,1} \otimes K_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P'_{n-1}) \otimes J_{1,2}.$$

Тогда последовательность P'_n совпадает с определённой ранее последовательностью матриц P_n .

Доказательство. Индукция по n .

База индукции верна: $P'_1 = P_1$.

Пусть $P'_n = P_n$. Опираясь на соотношение (1), преобразуем P'_{n+1} :

$$\begin{aligned} P'_{n+1} &= J_{2^{n+1},1} \otimes K_2 \otimes \alpha_{2^n}(P'_n) \otimes J_{1,2} = \\ &= J_{2^{n+1},1} \otimes K_2 \otimes \alpha_{2^n}(J_{2^n,1} \otimes K_{2^n} \otimes J_{t,t \cdot 2^n}) \otimes J_{1,2} = J_{2^{n+1},1} \otimes K_2 \otimes K_{2^n} \otimes J_{t,t \cdot 2^n} \otimes J_{1,2} = \\ &= J_{2^{n+1},1} \otimes K_{2^{n+1}} \otimes J_{t,t \cdot 2^{n+1}} = P_{n+1}. \end{aligned}$$

Индукционный переход доказан. ■

Предположим, что нам удалось найти матрицы B_1 и C_1 , удовлетворяющие соотношениям в (6) и (7) и условиям блочности (размеры этих матриц — $v \times 4t$ и $4t \times v$ соответственно). Построим две последовательности матриц B_n и C_n по следующим рекуррентным правилам (здесь используется блочное представление матриц):

$$B_n = \left(\frac{K_2 \otimes B_{n-1} \otimes J_{1,2}}{I_2 \otimes P_{n-1} \otimes J_{1,2}} \right) \text{ при } n \geq 2; \quad (8)$$

$$C_n = (J_{2^n,1} \otimes I_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(C_{n-1}) \mid J_{2^n,1} \otimes I_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1})) \text{ при } n \geq 2. \quad (9)$$

Нетрудно показать, что матрица B_n имеет размер $(v + (2^{n+1} - 4)t)2^{n-1} \times t \cdot 4^n$, а матрица C_n — размер $t \cdot 4^n \times (v + (2^{n+1} - 4)t)2^{n-1}$. Для этого можно воспользоваться индукцией по n .

Замечание 2. Операция $\alpha_{2^{n-1}}$ в определении последовательности C_n корректна, поскольку количество строк матрицы C_{n-1} делится на 2^{n-1} (корректность операции доказывается индуктивно). Кроме того, видно, что в определении операции α_{2^n} применительно к последовательности C_n можно было брать не первый блок строк матрицы, а любой другой.

Лемма 3. Матрицы B_n и C_n обладают следующими свойствами:

- 1) в каждой строке матрицы B_n ровно $t \cdot 2^n$ единиц;
- 2) в каждом столбце матрицы B_n ровно $k + (2^n - 2)t$ единиц;
- 3) в каждой строке матрицы C_n ровно $k + (2^n - 2)t$ единиц;
- 4) в каждом столбце матрицы C_n ровно $t \cdot 2^n$ единиц.

Доказательство. Индукция по n .

База индукции при $n = 1$ верна (см. (7)).

Индукционный переход доказывается достаточно просто: последовательности B_n и C_n определены рекуррентно при помощи произведения Кронекера, что позволяет

проследить, как меняется количество единиц в строках и столбцах матриц: нужно воспользоваться первым пунктом леммы 1 (в нём содержится информация о количестве единиц в строках и столбцах матрицы P_n). ■

Для построенных последовательностей матриц справедлива

Лемма 4.

- 1) Матрицы B_n и P_n обладают следующим свойством: если любую строку этих матриц разбить на идущие подряд блоки длины $t \cdot 2^n$, то получится ровно один блок, состоящий целиком из единиц, а все остальные блоки будут состоять целиком из нулей.
- 2) Матрицы C_n и P_n обладают следующим свойством: если любой столбец этих матриц разбить на идущие подряд блоки длины $t \cdot 2^n$, то в каждом блоке будет ровно t единиц.

Доказательство. Во-первых, заметим, что размеры матриц меняются таким образом, что разбиение строк (столбцов) на блоки нужной длины всегда можно корректно выполнить.

Справедливость приведённых свойств для матрицы P_n следует из формулы (1).

Тот факт, что последовательности B_n и C_n удовлетворяют заявленным свойствам, можно доказать индукцией по n .

База индукции при $n = 1$ верна, поскольку по предположению матрицы B_1 и C_1 удовлетворяют условиям блочности.

Индукционный переход следует из вида рекуррентных соотношений (8) и (9). Действительно, если в строке матрицы B_{n-1} (матрицы P_{n-1}) есть блок из единиц, то в матрице $K_2 \otimes B_{n-1} \otimes J_{1,2}$ (в матрице $I_2 \otimes P_{n-1} \otimes J_{1,2}$) он преобразуется в блок, в котором в 2 раза больше единиц. Пусть в столбцах матрицы C_{n-1} (матрицы P_{n-1}) каждый блок содержит по t единиц. Тогда матрица $\alpha_{2^{n-1}}(C_{n-1})$ (матрица $\alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1})$) содержит первые блоки столбцов, а столбцы матрицы $J_{2^n,1} \otimes I_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(C_{n-1})$ (матрицы $J_{2^n,1} \otimes I_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1})$) можно разбить на блоки в 2 раза большей длины, которые по-прежнему содержат по t единиц. ■

Перейдём к главному результату работы.

Теорема 1. Пусть A_n — последовательность матриц, в которой A_1 — матрица смежности орграфа $\text{dsrg}(v, k, t, \lambda, t)$, а при $n \geq 1$ верно, что

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & 0 & B_n & 0 \\ 0 & A_n & 0 & B_n \\ 0 & C_n & 0 & P_n \\ C_n & 0 & P_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 \otimes A_n & I_2 \otimes B_n \\ K_2 \otimes C_n & K_2 \otimes P_n \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где B_n , C_n и P_n — определённые ранее последовательности (предполагаем, что матрицы B_1 и C_1 существуют).

Тогда матрицы A_n являются матрицами смежности сильно регулярных орграфов с наборами параметров $((v + (2^{n+1} - 4)t)2^{n-1}, k + (2^n - 2)t, t, \lambda, t)$.

Доказательство. Введём обозначение для порядка матрицы A_n (нетрудно показать, что он будет именно такой):

$$v_n = (v + (2^{n+1} - 4)t)2^{n-1}.$$

Необходимо доказать два утверждения (см. определение 2):

- 1) в каждой строке и в каждом столбце матрицы A_n ровно $k + (2^n - 2)t$ единиц;
- 2) $A_n^2 + sA_n = tJ_{v_n}$.

Докажем первое утверждение индукцией по n . Для матриц A_1 и A_2 этот факт верен. Пусть в каждой строке и в каждом столбце матрицы A_n ровно $k + (2^n - 2)t$ единиц. Тогда, воспользовавшись леммой 1, леммой 3 и формулой (10), получаем, что в каждой строке и в каждом столбце матрицы A_{n+1} тоже нужное число единиц.

Доказательство второго утверждения тоже проведём индукцией по n .

База индукции доказана в п. 1 путём конструирования матрицы смежности орграфа $\text{dsrg}(2v + 8t, k + 2t, t, \lambda, t)$ в приведённом в формуле (10) виде.

Предположим, что $A_n^2 + sA_n = tJ_{v_n}$. Преобразуем выражение $A_{n+1}^2 + sA_{n+1}$:

$$A_{n+1}^2 + sA_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_n^2 + sA_n & B_n C_n & A_n B_n + sB_n & B_n P_n \\ \hline B_n C_n & A_n^2 + sA_n & B_n P_n & A_n B_n + sB_n \\ \hline P_n C_n & C_n A_n + sC_n & P_n^2 & C_n B_n + sP_n \\ \hline C_n A_n + sC_n & P_n C_n & C_n B_n + sP_n & P_n^2 \end{array} \right).$$

Необходимо доказать, что все блоки полученной матрицы имеют вид tJ . Блоки, лежащие на главной диагонали, имеют нужный вид по индукционному предположению и по лемме 1. Таким образом, нужно доказать следующие шесть равенств:

$$B_n C_n = tJ_{v_n}; \quad (11)$$

$$B_n P_n = tJ_{v_n, t \cdot 4^n}; \quad (12)$$

$$P_n C_n = tJ_{t \cdot 4^n, v_n}; \quad (13)$$

$$A_n B_n + sB_n = tJ_{v_n, t \cdot 4^n}; \quad (14)$$

$$C_n A_n + sC_n = tJ_{t \cdot 4^n, v_n}; \quad (15)$$

$$C_n B_n + sP_n = tJ_{t \cdot 4^n}. \quad (16)$$

Справедливость равенств (11)–(13) автоматически следует из леммы 4. Опираясь на индукционное предположение, докажем равенства (14)–(16). В процессе доказательства будем также пользоваться леммами 1 и 2.

Равенство (14):

$$\begin{aligned} (A_n + sI_{v_n})B_n &= \left(\frac{I_2 \otimes (A_{n-1} + sI_{v_{n-1}})}{K_2 \otimes C_{n-1}} \middle| \frac{I_2 \otimes B_{n-1}}{K_2 \otimes P_{n-1} + sI_{2t \cdot 4^{n-1}}} \right) \left(\frac{K_2 \otimes B_{n-1} \otimes J_{1,2}}{I_2 \otimes P_{n-1} \otimes J_{1,2}} \right) = \\ &= \left(\frac{(I_2 \otimes (A_{n-1} + sI_{v_{n-1}}))(K_2 \otimes (B_{n-1} \otimes J_{1,2})) + (I_2 \otimes B_{n-1})(I_2 \otimes (P_{n-1} \otimes J_{1,2}))}{(K_2 \otimes C_{n-1})(K_2 \otimes (B_{n-1} \otimes J_{1,2})) + (K_2 \otimes P_{n-1} + sI_{2t \cdot 4^{n-1}})(I_2 \otimes (P_{n-1} \otimes J_{1,2}))} \right) = \\ &= \left(\frac{K_2 \otimes ((A_{n-1} + sI_{v_{n-1}})(B_{n-1} \otimes J_{1,2})) + I_2 \otimes (B_{n-1}(P_{n-1} \otimes J_{1,2}))}{I_2 \otimes (C_{n-1}(B_{n-1} \otimes J_{1,2})) + K_2 \otimes (P_{n-1}(P_{n-1} \otimes J_{1,2})) + sI_2 \otimes P_{n-1} \otimes J_{1,2}} \right) = \\ &= \left(\frac{K_2 \otimes ((A_{n-1} + sI_{v_{n-1}})B_{n-1}) \otimes J_{1,2} + I_2 \otimes (B_{n-1} \cdot P_{n-1}) \otimes J_{1,2}}{I_2 \otimes (C_{n-1}B_{n-1} + sP_{n-1}) \otimes J_{1,2} + K_2 \otimes (P_{n-1} \cdot P_{n-1}) \otimes J_{1,2}} \right) = \\ &= \left(\frac{K_2 \otimes tJ_{v_{n-1}, t \cdot 4^{n-1}} \otimes J_{1,2} + I_2 \otimes tJ_{v_{n-1}, t \cdot 4^{n-1}} \otimes J_{1,2}}{I_2 \otimes tJ_{t \cdot 4^{n-1}} \otimes J_{1,2} + K_2 \otimes tJ_{t \cdot 4^{n-1}} \otimes J_{1,2}} \right) = \left(\frac{J_2 \otimes tJ_{v_{n-1}, t \cdot 4^{n-1}} \otimes J_{1,2}}{J_2 \otimes tJ_{t \cdot 4^{n-1}} \otimes J_{1,2}} \right) = \\ &= tJ_{v_n, t \cdot 4^n}. \end{aligned}$$

Равенство (15):

$$\begin{aligned}
C_n(A_n + sI_{v_n}) &= (J_{2^n,1} \otimes I_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(C_{n-1}) \mid J_{2^n,1} \otimes I_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1})) \times \\
&\quad \times \left(\frac{I_2 \otimes (A_{n-1} + sI_{v_{n-1}})}{K_2 \otimes C_{n-1}} \mid \frac{I_2 \otimes B_{n-1}}{K_2 \otimes P_{n-1} + sI_{2t \cdot 4^{n-1}}} \right) = \\
&= (((J_{2^n,1} \otimes I_2) \otimes \alpha_{2^{n-1}}(C_{n-1}))(I_2 \otimes (A_{n-1} + sI_{v_{n-1}})) + ((J_{2^n,1} \otimes I_2) \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1}))(K_2 \otimes C_{n-1}) \mid \\
&\quad \mid ((J_{2^n,1} \otimes I_2) \otimes \alpha_{2^{n-1}}(C_{n-1}))(I_2 \otimes B_{n-1}) + ((J_{2^n,1} \otimes I_2) \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1}))(K_2 \otimes P_{n-1} + sI_{2t \cdot 4^{n-1}})) = \\
&= (((J_{2^n,1} \otimes I_2) \otimes \alpha_{2^{n-1}}(C_{n-1}))(A_{n-1} + sI_{v_{n-1}})) + ((J_{2^n,1} \otimes I_2) \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1}))(K_2 \otimes C_{n-1}) \mid \\
&\quad \mid ((J_{2^n,1} \otimes I_2) \otimes \alpha_{2^{n-1}}(C_{n-1}))(B_{n-1}) + ((J_{2^n,1} \otimes I_2) \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1}))(K_2 \otimes P_{n-1} + sI_{2t \cdot 4^{n-1}})) + \\
&\quad + sJ_{2^n,1} \otimes I_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1}) = \\
&= (J_{2^n,1} \otimes I_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(tJ_{t \cdot 4^{n-1}, v_{n-1}}) + J_{2^n,1} \otimes K_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(tJ_{t \cdot 4^{n-1}, v_{n-1}}) \mid \\
&\quad \mid J_{2^n,1} \otimes I_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(tJ_{t \cdot 4^{n-1}}) + J_{2^n,1} \otimes K_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(tJ_{t \cdot 4^{n-1}})) = \\
&= (J_{2^n,1} \otimes J_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(tJ_{t \cdot 4^{n-1}, v_{n-1}}) \mid J_{2^n,1} \otimes J_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(tJ_{t \cdot 4^{n-1}})) = tJ_{t \cdot 4^n, v_n}.
\end{aligned}$$

Равенство (16):

$$\begin{aligned}
C_n B_n + sP_n &= (J_{2^n,1} \otimes I_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(C_{n-1}) \mid J_{2^n,1} \otimes I_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1})) \times \\
&\quad \times \left(\frac{K_2 \otimes B_{n-1} \otimes J_{1,2}}{I_2 \otimes P_{n-1} \otimes J_{1,2}} \right) + sJ_{2^n,1} \otimes K_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1}) \otimes J_{1,2} = \\
&= ((J_{2^n,1} \otimes I_2) \otimes \alpha_{2^{n-1}}(C_{n-1}))(K_2 \otimes (B_{n-1} \otimes J_{1,2})) + \\
&+ ((J_{2^n,1} \otimes I_2) \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1}))(I_2 \otimes (P_{n-1} \otimes J_{1,2})) + sJ_{2^n,1} \otimes K_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1}) \otimes J_{1,2} = \\
&= ((J_{2^n,1} \otimes I_2) \otimes \alpha_{2^{n-1}}(C_{n-1}))(K_2 \otimes (B_{n-1} \otimes J_{1,2})) + \\
&+ ((J_{2^n,1} \otimes I_2) \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1}))(I_2 \otimes (P_{n-1} \otimes J_{1,2})) + sJ_{2^n,1} \otimes K_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(P_{n-1}) \otimes J_{1,2} = \\
&= J_{2^n,1} \otimes K_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(tJ_{t \cdot 4^{n-1}}) \otimes J_{1,2} + J_{2^n,1} \otimes I_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(tJ_{t \cdot 4^{n-1}}) \otimes J_{1,2} = \\
&= J_{2^n,1} \otimes J_2 \otimes \alpha_{2^{n-1}}(tJ_{t \cdot 4^{n-1}}) \otimes J_{1,2} = tJ_{t \cdot 4^n}.
\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана. ■

3. Результаты работы программы

Для поиска семейств сильно регулярных орграфов по описанному методу написана программа на языке Julia. На вход она принимает матрицу смежности A_1 первого орграфа в последовательности, далее осуществляется поиск матрицы A_2 нужного вида и, если поиск завершился успешно, по рекуррентной формуле (см. теорему 1) строятся матрицы смежности $A_3, \dots, A_6$.

Для формирования матрицы A_2 выполняется поиск бинарных матриц B_1 и C_1 , которые удовлетворяют соотношениям (6) и (7) и условиям блочности. Для упрощения поиска применена библиотека оптимизации Artelys Knitro [7] (использована бесплатная пробная версия). В качестве целевой функции была взята формальная функция $F = 1$, а все условия, накладываемые на матрицы B_1 и C_1 , добавлены как ограничения в оптимизационную задачу. Благодаря эффективным алгоритмам Artelys Knitro, используемым для нахождения точки в области допустимых решений, удалось избежать полного перебора при поиске матриц B_1 и C_1 . Исходный код программы и матрицы смежности полученных орграфов доступны в репозитории [8].

Результаты работы программы приведены в таблице, где указаны параметры первых двух орграфов и параметры n -го члена последовательности. Во втором столбце

обведены те наборы параметров, для которых вопрос существования соответствующих орграфов ранее был открыт (согласно таблице на сайте [5] на момент написания работы).

В последнем столбце таблицы приводится время поиска второго орграфа в последовательности при помощи библиотеки Artelys Knitro. Запуск программы осуществлялся на компьютере с процессором Intel Core i5-7400 (3.00 ГГц), объём оперативной памяти равен 32 Гбайт (для разных наборов параметров использовались разные настройки библиотеки Artelys Knitro).

Обнаруженные семейства сильно регулярных орграфов

Параметры G_1	Параметры G_2	Параметры G_n	Время поиска G_2 , с
(6, 3, 2, 1, 2)	(28, 7, 2, 1, 2)	$(2^n(2^{n+1} - 1), 2^{n+1} - 1, 2, 1, 2)$	3,89
(8, 4, 3, 1, 3)	(40, 10, 3, 1, 3)	$(2^n(3 \cdot 2^n - 2), 3 \cdot 2^n - 2, 3, 1, 3)$	4,03
(10, 5, 3, 2, 3)	(44, 11, 3, 2, 3)	$(2^n(3 \cdot 2^n - 1), 3 \cdot 2^n - 1, 3, 2, 3)$	9,27
(12, 6, 4, 2, 4)	(56, 14, 4, 2, 4)	$(2^n(4 \cdot 2^n - 2), 4 \cdot 2^n - 2, 4, 2, 4)$	16,23
(14, 7, 4, 3, 4)	(60, 15, 4, 3, 4)	$(2^n(4 \cdot 2^n - 1), 4 \cdot 2^n - 1, 4, 3, 4)$	2496,14
(16, 8, 5, 3, 5)	(72, 18, 5, 3, 5)	$(2^n(5 \cdot 2^n - 2), 5 \cdot 2^n - 2, 5, 3, 5)$	52,38
(18, 9, 5, 4, 5)	(76, 19, 5, 4, 5)	$(2^n(5 \cdot 2^n - 1), 5 \cdot 2^n - 1, 5, 4, 5)$	840,40
(18, 9, 6, 3, 6)	(84, 21, 6, 3, 6)	$(2^n(6 \cdot 2^n - 3), 6 \cdot 2^n - 3, 6, 3, 6)$	233,92
(20, 10, 6, 4, 6)	(88, 22, 6, 4, 6)	$(2^n(6 \cdot 2^n - 2), 6 \cdot 2^n - 2, 6, 4, 6)$	151,42
(22, 11, 6, 5, 6)	(92, 23, 6, 5, 6)	$(2^n(6 \cdot 2^n - 1), 6 \cdot 2^n - 1, 6, 5, 6)$	1260,85
(24, 12, 7, 5, 7)	(104, 26, 7, 5, 7)	$(2^n(7 \cdot 2^n - 2), 7 \cdot 2^n - 2, 7, 5, 7)$	525,10

Программа запускалась и для наборов параметров, которые не приведены в таблице, однако в других случаях поиск матрицы A_2 не завершился успехом.

Отметим, что все сильно регулярные орграфы G_1 , для которых описанный метод сработал, имеют параметры вида $(2(t + \lambda), t + \lambda, t, \lambda, t)$. Авторам пока неизвестно, работает ли метод для наборов параметров, имеющих другой вид, или такое соотношение между параметрами является необходимым условием применимости описанного подхода.

Заключение

В работе рассмотрена конструкция, при помощи которой возможно построение бесконечных последовательностей сильно регулярных орграфов. Чтобы воспользоваться этой конструкцией, необходимо взять матрицу смежности A_1 первого орграфа в последовательности и выразить матрицу смежности A_2 второго орграфа через A_1 в определённом виде. Если получается это сделать, то другие орграфы в последовательности можно найти по доказанной рекуррентной формуле. При помощи описанного метода построено 11 последовательностей сильно регулярных орграфов; как минимум для пяти наборов параметров впервые найдены соответствующие сильно регулярные орграфы.

Авторы видят определённую перспективу дальнейших исследований в поиске условий, которым должен удовлетворять граф G_1 , чтобы приведённый в работе приём сработал, и поиске способа выразить матрицу A_2 через матрицу A_1 без использования компьютерной программы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bose R. C. Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs // Pacific J. Math. 1963. V. 13. No. 2. P. 389–419.

2. *Brouwer A. E. and Maldeghem H. V.* Strongly Regular Graphs. Cambridge: Cambridge University Press, 2022. 425 p.
3. *Duval A. M.* A directed graph version of strongly regular graphs // J. Combinatorial Theory. Ser. A. 1988. V. 47. No. 1. P. 71–100.
4. *Jørgensen L. K.* Non-existence of directed strongly regular graphs // Discrete Math. 2003. V. 264. No. 1–3. P. 111–126.
5. <https://homepages.cwi.nl/~aeb/math/dsrg/dsrg.html> — Parameters of directed strongly regular graphs. 2025.
6. *Zhang H. and Ding F.* On the Kronecker products and their applications // J. Appl. Math. 2013. V. 2013. P. 1–8.
7. <https://www.artelys.com/solvers/knitro/> — Artelys Knitro. 2025.
8. https://github.com/byzovv/dsrg_recurrent — Explicit construction of infinite families of strongly regular digraphs. 2025.

REFERENCES

1. *Bose R. C.* Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs. Pacific J. Math., 1963, vol. 13, no. 2, pp. 389–419.
2. *Brouwer A. E. and Maldeghem H. V.* Strongly Regular Graphs. Cambridge, Cambridge University Press, 2022. 425 p.
3. *Duval A. M.* A directed graph version of strongly regular graphs. J. Combinatorial Theory, ser. A, 1988, vol. 47, no. 1, pp. 71–100.
4. *Jørgensen L. K.* Non-existence of directed strongly regular graphs. Discrete Math., 2003, vol. 264, no. 1–3, pp. 111–126.
5. <https://homepages.cwi.nl/~aeb/math/dsrg/dsrg.html> — Parameters of directed strongly regular graphs, 2025.
6. *Zhang H. and Ding F.* On the Kronecker products and their applications. J. Appl. Math., 2013, vol. 2013, pp. 1–8.
7. <https://www.artelys.com/solvers/knitro/> — Artelys Knitro, 2025.
8. https://github.com/byzovv/dsrg_recurrent — Explicit construction of infinite families of strongly regular digraphs, 2025.