

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 512.54

doi: 10.17223/19988621/96/1

MSC: 20C99

Линейное представление группы кактусов

Ксения Вячеславовна Зимирева

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия, k.zimireva@g.nsu.ru

Аннотация. Группа кактусов J_n , $n \geq 2$, может быть порождена $n - 1$ элементами. В предлагаемой работе, используя представление в этих порождающих, строится линейное представление группы кактусов. Доказано, что образ полученного представления изоморфен группе подстановок S_n и при всех $n \geq 3$ это представление не является точным.

Ключевые слова: группа кактусов, группа подстановок, представление порождающими и соотношениями, линейное представление, точное представление

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 24-21-00102, <https://rscf.ru/project/24-21-00102/>

Для цитирования: Зимирева К.В. Линейное представление группы кактусов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 96. С. 5–13. doi: 10.17223/19988621/96/1

Original article

Linear representation of cactus groups

Ksenia V. Zimireva

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation, k.zimireva@g.nsu.ru

Abstract. Braid groups have various applications in algebra and topology, and the cactus group can be considered as its analogue. A cactus group J_n , $n \geq 2$, is generated by the elements $a_i := s_{1,i}$, $i = 2, \dots, n$, and defined by the relations

$$a_i^2 = 1,$$

$$(a_i a_k a_j a_k)^2 = 1, \quad i \leq j, i + j \leq k,$$

$$a_i a_k a_j a_k = a_{i+j-k} a_j a_{i+j-k} a_i,$$

$$(1) 4 \leq j + 2 \leq i \leq n; \quad (2) j < k < i; \quad (3) 2 \leq i + j - k \leq n; \quad (4) 2k \leq i + j.$$

In the current work we apply this presentation to construct a linear representation of J_n . So, the main result of the current work is as follows: there exists a linear representation of the cactus group in the group of automorphisms of a free left module over the ring $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_{n-1}^{\pm 1}]$. It is proved that the image of the group J_n under the map f is isomorphic to the symmetric group S_n . In particular, f is not faithful for any $n \geq 3$.

Keywords: cactus group, symmetric group, presentation by generators and relations, linear representation, faithful representation

Acknowledgments: This work has been supported by the grant the Russian Science Foundation, RSF 24-21-00102, <https://rscf.ru/project/24-21-00102/>

For citation: Zimireva, K.V. (2025) Linear representation of cactus groups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 96. pp. 5–13. doi: 10.17223/19988621/96/1

1. Введение

Группа кактусов появилась в работах С.Л. Девадосса [1] и М. Дэвисса, Т. Янушкевича, Р. Скотта [2] при изучении мозаичной операды и группы отражений соответственно. Сам термин «группа кактусов» был введен в работе А. Энрикеса, Д. Камницера [3] при изучении структуры кограничных категорий.

Группы кактусов исследовались в контексте геометрической теории групп в работе [4]. В [5] П. Беллинджери, Х. Чемин и В. Лебедь решили проблему равенства слов, описали кручение и нашли центр группы кактусов. Также ими было получено представление групп кактусов J_n , $n \leq 4$, в порождающих, число которых нельзя уменьшить. Кроме того, они изучали связь группы кактусов с прямоугольными группами Кокстера, группами твинов и группами диаграмм Гаусса–Мостового.

Известно [7], что группа J_n может быть порождена $n - 1$ элементами, и это число уменьшить нельзя [7]. Возникает естественный вопрос о записи системы соотношений в этих порождающих. Во втором разделе настоящей работы будет выписана такая система соотношений (см. теорему 2.1). Данная система соотношений была найдена в [6]. В начале 2024 г. эта же система соотношений с полным доказательством появилась в работе [7].

Я. Мостовой [8] показал, что группа крашенных кактусов вкладывается в прямоугольную группу Кокстера.

Р. Ю [9] определил обобщенные группы кактусов, имеющие своим гомоморфным образом некоторую группу Кокстера. В частности, J_n является обобщенной группой кактусов, имеющей своим образом группу S_n . Р. Ю показал, что всякая обобщенная группа кактусов линейна, построив точное линейное представление в явном виде.

В настоящей работе строится линейное представление $f : J_n \rightarrow \text{Aut}(V)$ группы кактусов J_n в группе автоморфизмов свободного левого модуля V над кольцом Лорановых многочленов $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_{n-1}^{\pm 1}]$. Доказано, что образ группы J_n при отображении f изоморфен группе S_n . Установлено, что построенное представление не является точным при $n \geq 3$.

2. Группы кактусов

Группа кактусов J_n , $n \geq 2$, порождается элементами $s_{p,q}$, $1 \leq p < q \leq n$, и определяется соотношениями

$$s_{p,q}^2 = 1,$$

$$s_{p,q}s_{m,r} = s_{m,r}s_{p,q}, \text{ при } [p,q] \cap [m,r] = \emptyset,$$

$$s_{p,q}s_{m,r} = s_{p+q-r, p+q-m}s_{p,q}, \text{ при } [m,r] \subset [p,q].$$

Здесь мы пользуемся обозначением $[p,q] = \{p, p+1, \dots, q-1, q\}$.

Существует следующая геометрическая интерпретация элементов группы кактусов. Порождающий $s_{p,q}$ изображается набором n нитей, среди которых нити с номерами $p, p+1, \dots, q$ пересекаются в одной точке, меняя свой порядок на обратный (рис. 1). Произведение элементов в группе кактусов определяется так же, как и в группе кос. Рассматриваем два кактуса с одинаковым числом нитей, помещаем один кактус над другим и соединяем концы нитей.

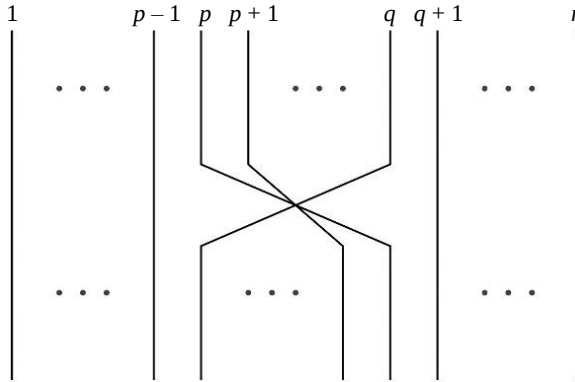


Рис. 1. Интерпретация элемента $s_{p,q}$

Fig. 1. Interpretation of the element $s_{p,q}$

Можно заметить, что часть порождающих группы кактусов можно выразить через другие. Тогда получим представление группы J_n , заданное следующим образом:

Теорема 2.1 ([6], [7]). *Группа кактусов J_n , $n \geq 2$, порождается элементами $a_i := s_{1,i}$, $i = 2, \dots, n$, и определяется соотношениями*

$$a_i^2 = 1, \tag{j1}$$

$$(a_i a_k a_j a_k)^2 = 1, \quad i \leq j, \quad i + j \leq k, \tag{j2}$$

$$a_i a_k a_j a_k = a_{i+j-k} a_j a_{i+j-k} a_i, \tag{j3}$$

$$(1) \ 4 \leq j+2 \leq i \leq n; \quad (2) \ j < k < i; \quad (3) \ 2 \leq i+j-k \leq n; \quad (4) \ 2k \leq i+j.$$

Лемма 2.1 ([7]). *Группа кактусов J_n не может быть порождена меньше чем $n-1$ элементами.*

3. Линейные представления группы кактусов

Действие отображения f и композицию отображений f и g мы применяем слева направо, т.е. $xf = (x)f$ и $(x)(fg) = (xf)g$.

Теорема 3.1. Пусть V – свободный левый модуль с базисом e_i , $1 \leq i \leq n$, над кольцом $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_{n-1}^{\pm 1}]$. Отображение $f : J_n \rightarrow \text{Aut}(V)$ является линейным представлением группы кактусов J_n , действующим по правилу $a_k \mapsto f_k$, где $f_k = (a_k)f$ и определяется действием на базисе модуля V :

$$(e_u)f_v = \begin{cases} t_{u-1}t_{v-u}^{-1}e_{v-u+1}, & 1 \leq u \leq v, \\ e_u, & v < u \leq n, \end{cases} \quad (1)$$

где $v = 2, \dots, n$. Также положим $t_0 = 1$.

Доказательство. Проверим, что f – гомоморфизм. Для этого покажем, что соотношения группы J_n сохраняются под действием f . Сначала докажем, что соотношения (j2) переходят в соотношения $f_i f_k f_j f_k = f_k f_j f_k f_i$. Указанное равенство будет выполнено, если для всех e_u , $1 \leq u \leq n$, справедливо равенство

$$(e_u)f_i f_k f_j f_k = (e_u)f_k f_j f_k f_i, \\ i \leq j, \quad i + j \leq k.$$

В зависимости от значения $1 \leq u \leq n$ рассмотрим несколько случаев:

1) $1 \leq u \leq i$, 2) $i < u \leq k - j$, 3) $k - j < u \leq k$, 4) $k < u \leq n$.

Здесь и далее будем указывать над знаком равенства номер ограничения на индексы формулы (1), которое выполняется для рассматриваемого выражения. Например, пусть $1 \leq w \leq i$ и мы действуем f_k на e_{i-w+1} , где $i < k$, тогда $(e_{i-w+1})f_k \stackrel{(1.1)}{=} t_{i-w}t_{k-i+w-1}^{-1}e_{k-i+w}$. Здесь над знаком равенства стоит (1.1), поскольку когда мы пользуемся формулой (1), то $u = i - w + 1$, $v = k$ и выполнено неравенство $1 \leq u \leq v$ (первая строка формулы (1)).

Будем последовательно выписывать результаты вычислений для левой и правой частей.

Случай 1. Пусть $1 \leq u \leq i$:

$$\begin{aligned} (e_u)f_i f_k f_j f_k &\stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1}t_{i-u}^{-1}e_{i-u+1})f_k f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1}t_{k-i+u-1}^{-1}e_{k-i+u})f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} \\ &\stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1}t_{k-i+u-1}^{-1}e_{k-i+u})f_k \stackrel{(1.1)}{=} t_{u-1}t_{i-u}^{-1}e_{i-u+1}, \\ (e_u)f_k f_j f_k f_i &\stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1}t_{k-u}^{-1}e_{k-u+1})f_j f_k f_i \stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1}t_{k-u}^{-1}e_{k-u+1})f_k f_i \stackrel{(1.1)}{=} (e_u)f_i \stackrel{(1.1)}{=} t_{u-1}t_{i-u}^{-1}e_{i-u+1}. \end{aligned}$$

Случай 2. Пусть $i < u \leq k - j$:

$$\begin{aligned} (e_u)f_i f_k f_j f_k &\stackrel{(1.2)}{=} (e_u)f_k f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1}t_{k-u}^{-1}e_{k-u+1})f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1}t_{k-u}^{-1}e_{k-u+1})f_k \stackrel{(1.1)}{=} e_u, \\ (e_u)f_k f_j f_k f_i &\stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1}t_{k-u}^{-1}e_{k-u+1})f_j f_k f_i \stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1}t_{k-u}^{-1}e_{k-u+1})f_k f_i \stackrel{(1.1)}{=} (e_u)f_i \stackrel{(1.2)}{=} e_u. \end{aligned}$$

Случай 3. Пусть $k - j < u \leq k$:

$$\begin{aligned}
 (e_u) f_i f_k f_j f_k & \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_k f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{k-u}^{-1} e_{k-u+1}) f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} \\
 & \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{j-k+u-1}^{-1} e_{j-k+u}) f_k = t_{u-1} t_{2k-j-u}^{-1} e_{2k-j-u+1}, \\
 (e_u) f_k f_j f_k f_i & \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{k-u}^{-1} e_{k-u+1}) f_j f_k f_i \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{j-k+u-1}^{-1} e_{j-k+u}) f_k f_i \stackrel{(1.1)}{=} \\
 & \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{2k-j-u}^{-1} e_{2k-j-u+1}) f_i \stackrel{(1.2)}{=} t_{u-1} t_{2k-j-u}^{-1} e_{2k-j-u+1}.
 \end{aligned}$$

Случай 4. Пусть $k < u \leq n$:

$$\begin{aligned}
 (e_u) f_i f_k f_j f_k & \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_k f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_k = e_u, \\
 (e_u) f_k f_j f_k f_i & \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_j f_k f_i \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_k f_i \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_i = e_u.
 \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что соотношения (j2) переходят в соотношения $f_i f_k f_j f_k = f_k f_j f_k f_i$.

Перейдем к аналогичному разбору случаев для соотношения (j3):

$$(e_u) f_i f_k f_j f_k = (e_u) f_{i+j-k} f_j f_{i+j-k} f_i,$$

(1) $4 \leq j+2 \leq i \leq n$; (2) $j < k < i$; (3) $2 \leq i+j-k \leq n$; (4) $2k \leq i+j$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) $1 \leq u \leq i-k$, 2) $i-k < u \leq i+j-k$, 3) $i+j-k < u \leq i$, 4) $i < u \leq n$.

Случай 1. Пусть $1 \leq u \leq i-k$:

$$\begin{aligned}
 (e_u) f_i f_k f_j f_k & \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}) f_k f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}) f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} \\
 & \stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}) f_k = t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}, \\
 (e_u) f_{i+j-k} f_j f_{i+j-k} f_i & \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{i+j-k-u}^{-1} e_{i+j-k-u+1}) f_j f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.2)}{=} \\
 & \stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1} t_{i+j-k-u}^{-1} e_{i+j-k-u+1}) f_{i+j-k} f_i = (e_u) f_i = t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}.
 \end{aligned}$$

Случай 2. Пусть $i-k < u \leq i+j-k$:

$$\begin{aligned}
 (e_u) f_i f_k f_j f_k & \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}) f_k f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{k-i+u-1}^{-1} e_{k-i+u}) f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} \\
 & \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{j-k+i-u}^{-1} e_{j-k+i-u+1}) f_k = t_{u-1} t_{2k-j-i+u-1}^{-1} e_{2k-j-i+u}, \\
 (e_u) f_{i+j-k} f_j f_{i+j-k} f_i & \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{i+j-k-u}^{-1} e_{i+j-k-u+1}) f_j f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{k-i+u-1}^{-1} e_{k-i+u}) f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.1)}{=} \\
 & \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{2i-2k+j-u}^{-1} e_{2i-2k+j-u+1}) f_i = t_{u-1} t_{2k-j-i+u-1}^{-1} e_{2k-j-i+u}.
 \end{aligned}$$

Случай 3. Пусть $i+j-k < u \leq i$:

$$\begin{aligned}
 (e_u) f_i f_k f_j f_k & \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}) f_k f_j f_k \stackrel{(1.1)}{=} (t_{u-1} t_{k-i+u-1}^{-1} e_{k-i+u}) f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} \\
 & \stackrel{(1.2)}{=} (t_{u-1} t_{k-i+u-1}^{-1} e_{k-i+u}) f_k = t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}, \\
 (e_u) f_{i+j-k} f_j f_{i+j-k} f_i & \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_j f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_i = t_{u-1} t_{i-u}^{-1} e_{i-u+1}.
 \end{aligned}$$

Случай 4. Пусть $i < u \leq n$:

$$(e_u) f_i f_k f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_k f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_j f_k \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_k \stackrel{(1.2)}{=} e_u,$$

$$(e_u) f_{i+j-k} f_j f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_j f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_{i+j-k} f_i \stackrel{(1.2)}{=} (e_u) f_i \stackrel{(1.2)}{=} e_u.$$

Следовательно, соотношения (j3) переходят в соотношения $f_i f_k f_j f_k = f_{i+j-k} f_j f_{i+j-k} f_i$.

Очевидно, что (j1) выполнено. Тем самым доказано, что отображение f является гомоморфизмом. $\square$

Определим антидиагональную матрицу размера $n \times n$, у которой только элементы побочной диагонали могут быть отличны от нуля:

$$adiag(w_1, \dots, w_n) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & w_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу автоморфизма f_k , $k = 2, \dots, n$, в базисе $e_1, \dots, e_n$:

$$[f_k] = adiaq(t_k^{-1}, t_1 t_{k-1}^{-1}, \dots, t_1^{-1} t_{k-1}, t_k) \oplus I_{n-k}.$$

В верхнем левом углу $[f_k]$ находится блок размера $k \times k$, который совпадает с матрицей $adiaq(t_k^{-1}, t_1 t_{k-1}^{-1}, \dots, t_1^{-1} t_{k-1}, t_k)$. Указанный блок соответствует перестановке нитей от 1 до k включительно. Остальные нити остаются на месте, поэтому вне этого блока на диагонали стоят единицы.

Пример 1. При $n = 3$ матрицы автоморфизмов f_2 и f_3 имеют следующий вид:

$$[f_2] = \begin{pmatrix} 0 & t_1^{-1} & 0 \\ t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [f_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_2^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. При $n = 4$ матрицы автоморфизмов f_2 , f_3 и f_4 имеют вид:

$$[f_2] = \begin{pmatrix} 0 & t_1^{-1} & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [f_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_2^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [f_4] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_3^{-1} \\ 0 & 0 & t_1 t_2^{-1} & 0 \\ 0 & t_1^{-1} t_2 & 0 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.2 Образ группы J_n при отображении f из теоремы 3.1 изоморфен группе подстановок S_n .

Доказательство. Группа $Aut(V)$ содержит подгруппу $H = \langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle$, которая изоморфна S_n . Изоморфизм строится по правилу $\varphi((k, k+1)) \mapsto T_k$, где $(k, k+1)$ – транспозиция, а действие автоморфизма T_k T_k определяется по формуле

$$(e_u) T_v = \begin{cases} t_{v-1} t_v^{-1} e_{v+1}, & u = v, \\ t_{v-1}^{-1} t_v e_v, & u = v+1, \\ e_u & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2)$$

где $v = 1, \dots, n-1$.

Покажем, что $\langle f_2, \dots, f_n \rangle = \langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle$. Докажем индукцией по k вложение $\langle f_2, \dots, f_n \rangle \subseteq \langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle$. Для этого достаточно показать, что верно следующее равенство:

$$T_k = f_{k+1} f_2 f_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

База индукции при $k = 1$ тривиальна. Пусть индукционное предположение верно для всех $l \leq k$. Докажем, что для $k+1$ выполняется равенство $T_{k+1} = f_{k+2} f_2 f_{k+2}$. Для этого воспользуемся формулой (1) из теоремы 3.1:

$$(e_u) f_{k+2} f_2 f_{k+2} = \begin{cases} (t_{u-1} t_{k-u+2}^{-1} e_{k-u+3}) f_2 f_{k+2}, & 1 \leq u \leq k+2, \\ (e_u) f_2 f_{k+2}, & k+2 < u \leq n. \end{cases}$$

Если $1 \leq u \leq k+2$, то при последовательном действии f_2 и f_{k+2} на e_{k-u+3} получаем следующие формулы:

$$(t_{u-1} t_{k-u+2}^{-1} e_{k-u+3}) f_2 f_{k+2} = \begin{cases} t_{u-1} t_{2k-u+2}^{-1} e_{2k-u+3}, & u = k+1, u = k+2, \\ e_u, & 1 \leq u < k+1. \end{cases}$$

Если $k+2 < u \leq n$, то находим $(e_u) f_2 f_{k+2} = e_u$. Объединяя найденные формулы, получаем

$$(e_u) f_{k+2} f_2 f_{k+2} = \begin{cases} e_u, & 1 \leq u < k+1, \\ t_{u-1} t_{2k-u+2}^{-1} e_{2k-u+3}, & u = k+1, u = k+2, \\ e_u, & k+2 < u \leq n. \end{cases} = \begin{cases} t_k t_{k+1}^{-1} e_{k+2}, & u = k+1, \\ t_k^{-1} t_{k+1} e_{k+1}, & u = k+2, \\ e_u, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

Воспользуемся формулой (2) для T_{k+1} :

$$(e_u) T_{k+1} = \begin{cases} t_k t_{k+1}^{-1} e_{k+2}, & u = k+1, \\ t_k^{-1} t_{k+1} e_{k+1}, & u = k+2, \\ e_u, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Несложно заметить, что данная формула совпадает с (3).

Теперь докажем индукцией по s обратное вложение $\langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle \subseteq \langle f_2, \dots, f_n \rangle$. Для этого установим равенство $f_s = T_1 T_2 \dots T_{s-1} f_{s-1}$, $2 \leq s \leq n$. База индукции при $s = 2$ тривиальна. Пусть индукционное предположение верно для всех $l \leq s$, проверим его для $s+1$. По индукционному предположению $f_s = T_1 T_2 \dots T_{s-1} f_{s-1}$, откуда выражаем $T_1 T_2 \dots T_{s-1} = f_s f_{s-1}$. Таким образом, достаточно проверить равенство $f_{s+1} = f_s f_{s-1} T_s f_s$.

Воспользуемся формулой (1):

$$(e_u) f_s f_{s-1} T_s f_s = \begin{cases} (t_{u-1} t_{s-u}^{-1} e_{s-u+1}) f_{s-1} T_s f_s, & 1 \leq u \leq s, \\ (e_u) f_{s-1} T_s f_s, & s < u \leq n. \end{cases}$$

После действия f_{s-1} на e_{s-u+1} при $1 \leq u \leq s$ получаем два возможных случая:

$$(t_{u-1} t_{s-u}^{-1} e_{s-u+1}) f_{s-1} T_s f_s = \begin{cases} (t_{u-1} t_{u-2}^{-1} e_{u-1}) T_s f_s, & 2 \leq u \leq s, \\ (t_{s-1}^{-1} e_s) T_s f_s, & u = 1. \end{cases}$$

Для каждого из случаев находим результат последовательного действия автоморфизмами T_s и f_s :

$$(t_{u-1}t_{s-u}^{-1}e_{s-u+1})f_{s-1}T_sf_s = \begin{cases} t_{u-1}t_{s-u+1}^{-1}e_{s-u+2}, & 2 \leq u \leq s, \\ t_s^{-1}e_{s+1}, & u = 1. \end{cases}$$

Если $s < u \leq n$, то по формулам (1) и (2) элемент e_u переходит в себя при действии $f_{s-1}T_sf_s$, за исключением случая $u = s+1$, в котором получаем

$$(e_{s+1})f_{s-1}T_sf_s = (e_{s+1})T_sf_s = (t_s t_{s-1}^{-1}e_s)f_s = t_s e_1.$$

Значит, приходим к следующему выражению:

$$(e_u)f_{s-1}T_sf_s = \begin{cases} t_s e_1, & u = s+1, \\ e_s, & s+1 < u \leq n. \end{cases}$$

Объединяя полученные формулы, видим, что композиция $f_s f_{s-1}T_sf_s$ совпадает с f_{s+1} :

$$(e_u)f_s f_{s-1}T_sf_s = \begin{cases} t_s^{-1}e_{s+1}, & u = 1, \\ t_{u-1}t_{s-u+1}^{-1}e_{s-u+2}, & 2 \leq u \leq s, \\ t_s e_1, & u = s+1, \\ e_s, & s+1 < u \leq n. \end{cases}$$

Таким образом, были доказаны оба вложения и $\langle f_2, \dots, f_n \rangle = \langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle$. $\square$

Следствие 3.1. *Линейное представление f из теоремы 3.1 при $n \geq 3$ не является точным.*

Доказательство. Учитывая, что $J_3 \leq J_n$ для любого $n \geq 3$, достаточно доказать, что представление группы J_3 не является точным. Группа J_3 – бесконечная группа диэдра $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, порожденная a_2 и a_3 , поэтому $(a_2 a_3)^3$ – неединичный элемент. Воспользуемся примером 1, чтобы показать, что элемент $(a_2 a_3)^3$ под действием отображения f переходит в тождественный автоморфизм:

$$([f_2][f_3])^3 = \left(\begin{pmatrix} 0 & t_1^{-1} & 0 \\ t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_2^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, линейное представление f не является точным. $\square$

Список источников

1. Devadoss S.L. Tessellations of Moduli Spaces and the Mosaic Operad // Contemp. Math. 1999. V. 239. P. 91–114. doi:10.1090/conm/239/03599
2. Davis M., Januszkiewicz T., Scott R. Fundamental groups of blow-ups // Adv. Math. 2003. V. 177 (1). P. 115–179. doi:10.1016/S0001-8708(03)00075-6
3. Henriques A., Kamnitzer J. Crystals and coboundary categories // Duke Math. J. 2006. V. 132 (2). P. 191–216. doi: 10.1215/S0012-7094-06-13221-0
4. Genevois A. Cactus groups from the viewpoint of geometric group theory // arXiv. 2022. 2212.03494. 22 p. doi: 10.48550/arXiv.2212.03494

5. Bellingeri P., Chemin H., Lebed V. Cactus groups, twin groups, and right-angled Artin groups // J. Algebr. Comb. 2024. V. 59. P. 153–178. doi:10.1007/s10801-023-01286-8
6. Zimireva K.V. A presentation of the cactus group // Мальцевские чтения: тез. докл. конф., 13–17 нояб. 2023 г. Новосибирск: Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2023. С. 182.
7. Chemin H., Nanda N. Minimal presentation, finite quotients and lower central series of cactus groups // arXiv. 2024. 2401.07924. doi: 10.48550/arXiv.2401.07924
8. Mostovoy J. The pure cactus group is residually nilpotent // Arch. Math. 2019. V. 113. P. 229–235. doi:10.1007/s00013-019-01332-7
9. Yu R. Linearity of generalized cactus groups // J. Algebra. 2023. V. 635. P. 256–270. doi: 10.1016/j.jalgebra.2023.07.039

References

1. Devadoss S.L. (1999) Tessellations of moduli spaces and the mosaic operad. *Contemporary Mathematics*. 239. pp. 91–114. DOI: 10.1090/conm/239/03599.
2. Davis M., Januszkiewicz T., Scott R. (2003) Fundamental groups of blow-ups. *Advances in Mathematics*. 177(1). pp. 115–179. DOI: 10.1016/S0001-8708(03)00075-6.
3. Henriques A., Kamnitzer J. (2006) Crystals and coboundary categories. *Duke Mathematical Journal*. 132(2). pp. 191–216. DOI: 10.1215/S0012-7094-06-13221-0.
4. Genevois A. (2022) Cactus groups from the viewpoint of geometric group theory. arXiv: 2212.03494. DOI: 10.48550/arXiv.2212.03494.
5. Bellingeri P., Chemin H., Lebed V. (2024) Cactus groups, twin groups, and right-angled Artin groups. *Journal of Algebraic Combinatorics*. 59. pp. 153–178. DOI: 10.1007/s10801-023-01286-8.
6. Zimireva K.V. (2023) A presentation of the cactus group. *Collection of Abstracts, Novosibirsk, November 13–17*. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University.
7. Chemin H., Nanda N. (2024) Minimal presentation, finite quotients and lower central series of cactus groups, arXiv:2401.07924. DOI: 10.48550/arXiv.2401.07924.
8. J. Mostovoy (2019) The pure cactus group is residually nilpotent. *Archiv der Mathematik*. 113. pp. 229–235. DOI: 10.1007/s00013-019-01332-7.
9. Yu R. (2023) Linearity of generalized cactus groups. *Journal of Algebra*. 635. pp. 256–270. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2023.07.039.

Сведения об авторе:

Зимирева Ксения Вячеславовна – аспирант Новосибирского государственного университета (Новосибирск, Россия). E-mail: k.zimireva@g.nsu.ru

Information about the authors:

Zimireva Ksenia V. (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: k.zimireva@g.nsu.ru

The article was submitted 01.11.2024; accepted for publication 01.08.2025

Статья поступила в редакцию 01.11.2024; принята к публикации 01.08.2025